ملحق كتاب الصف الأول الثانوي التوجه العلمي

القطوع المخروطية

إعداد

ميكائيل الحمود	نهلة مشرفي	سامر زيادة
جورج توما	عيسى عثمان	عزمات سعيد
مراجعة وتدقيق		
الدكتور عمران قوبا		الدكتور خالد حلاوة

دفع للطباعة لأول مرة 2021 –2022

5

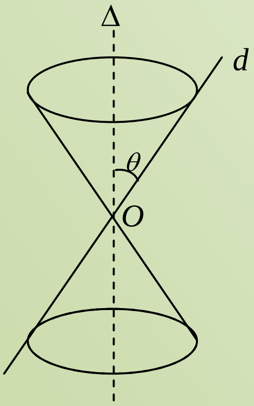
القطوع المخروطيّة

الدّائرة – القطع المكافئ – القطع النّاقص – القطع الزّائد

1. الدّائرة
2. القطع المكافئ
3. القطع النّاقص
4. القطع الزّائد

مقدّمة

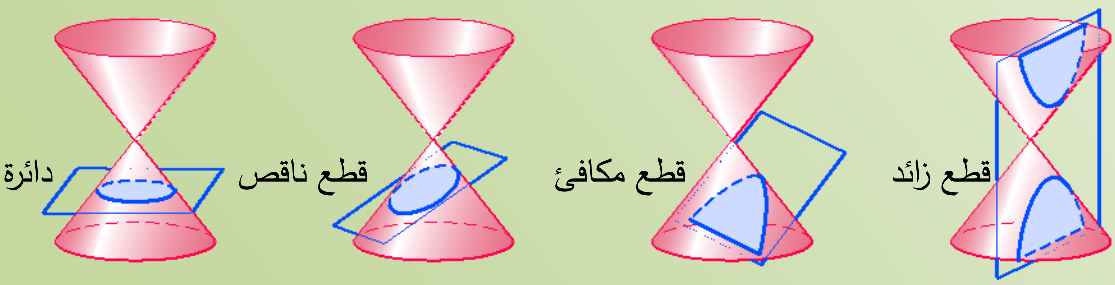
نتأمّل في الفراغ مستقيمين Δ و d متقاطعين في O، يحصران بينهما زاوية θ حيث $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



إنّ دوران d حول Δ دورة كاملة مع بقاء θ ثابتة يولّد سطحاً مخروطيّاً دورانيّاً رأسه O، وهو عبارة عن فرعين يشتركان بالرّأس O نرمّزه (C). نسمّي المستقيم الثّابت Δ محور السّطح المخروطيّ الدّورانيّ، والمستقيم d مولّداً له كما في الشّكل المجاور:

ومن تقاطع السّطح المخروطيّ الدّورانيّ (C) مع مستوٍ P (لا يمر برأسه O) يمكن أن نحصل على دائرة أو قطع مخروطيّ (مكافئ، ناقص، زائد) وذلك وفق الحالات الآتية:

- المستوي P يعامد Δ محور السّطح المخروطيّ ، عندئذٍ يكون المقطع دائرة. الشّكل (1).
- المستوي P يقطع جميع مولّدات السّطح المخروطيّ ولا يوازي المحور Δ، عندئذٍ يكون المقطع قطعاً ناقصاً. الشّكل (2).
- المستوي P يوازي أحد مولّدات السّطح المخروطيّ، عندئذٍ يكون المقطع قطعاً مكافئاً. الشّكل (3).
- المستوي P يوازي المحور Δ، عندئذٍ يكون المقطع قطعاً زائداً. الشّكل (4).



الشّكل (4) الشّكل (3) الشّكل (2) الشّكل (1)

1 الدّائرة

تعريف

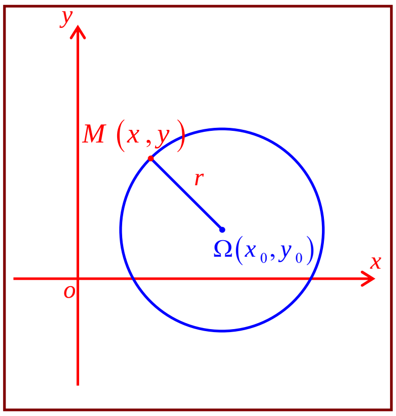
لتكن O نقطة من المستوي، وليكن r عدداً حقيقياً موجباً. إنّ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r هي مجموعة النقاط M من المستوي التي تبعد عن O مسافة تساوي r. نُرمّز هذه الدّائرة بالرّمز $C(O,r)$ ويقرأ الدّائرة الّتي مركزها O ونصف قطرها r.

عندئذٍ أيّاً كانت النقطة M، فإنّ الشرط $M \in C(O,r)$ يكافئ $OM = r$.

إذن: تتعيَّن الدّائرة إذا علم مركزها ونصف قطرها.

معادلة دائرة عُلمَ مركزها ونصف قطرها:

في مستوٍ منسوب إلى مَعْلَمٍ مُتجانِس $(O,\vec{i},\vec{j})$ نتأمّل نقطة $\Omega\left(x_0,y_0\right)$ ونتأمّل عدداً حقيقياً موجباً r.



تنتمي النقطة $M(x,y)$ إلى الدائرة $C(\Omega,r)$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $\Omega M = r$ أو $\Omega M^2 = r^2$. فإذا عبّرنا عن ذلك بتطبيق قانون المسافة بين نقطتين وجدنا:

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2} \qquad ①$$

والعكس صحيح أيضاً، أي إنّ كلّ نقطة $M(x,y)$ تحقق العلاقة ① تقع حتماً على الدّائرة $C(\Omega,r)$.

نُسمِّي المعادلة ① الشّكل النّموذجيّ (الصيغة المختزلة) لمعادلة دائرة مركزها $\Omega\left(x_0,y_0\right)$ ونصف قطرها r.

مثال

جدْ المعادلة للدائرة التي مركزها $\Omega\left(-2,5\right)$ و نصف قطرها $r = 4$.

الحل

المعادلة هي: $\left(x+2\right)^2 + \left(y-5\right)^2 = 16$.

مثال

جدْ إحداثيّات المركز، ونصف قطر الدّائرة التي تقبل $\left(x-1\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 25$ معادلة لها.

الحل

المعادلة لها الشكل $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ وبالتّالي نجد أنّ مركزها $\Omega\left(1,4\right)$ ونصف قطرها $r = 5$.

حالة خاصّة:

معادلة دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$ و نصف قطرها r هي: $\boxed{x^2+y^2=r^2}$.

مثال

اكتب معادلة دائرة مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$.

الحل

المعادلة $x^2+y^2=3$

مثال

المعادلة $x^2+y^2=12$ هي معادلة لدائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

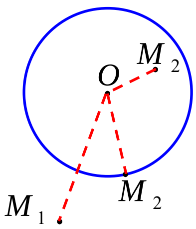
وضع نقطة بالنّسبة إلى دائرة:

لتكن الدّائرة $C(O,r)$ دائرة في المستوي $\mathcal{P}$، ولتكن M نقطة من هذا المستوي. لتعيين وضع M بالنّسبة إلى الدّائرة نميّز الحالات الآتية:

1- M_1 نقطة خارج الدّائرة، إذا وفقط إذا $OM_1>r$

2- M_2 تنتمي إلى الدّائرة، إذا وفقط إذا $OM_2=r$

3- M_3 نقطة داخل الدّائرة، إذا وفقط إذا $OM_3<r$



مثال

لتكن الدّائرة C المُعيّنة بالمعادلة: $x^2+y^2=9$

عيّن وضع كل من النّقطتين $A(1,1)$ و $B(2,-3)$ بالنّسبة إلى الدّائرة C.

الحل

لمعرفة وضع نقطة بالنسبة لدائرة نحسب بُعد هذه النقطة عن مركز الدائرة فنحصل على إحدى الحالات السابقة.

من معادلة الدّائرة C نستنتج أنّ مركز الدّائرة هو $O(0,0)$ ونصف قطرها يساوي $r=3$.

بُعد A عن مركز الدّائرة يساوي: $OA=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}<3$، أي إنّ $OA<r$ إذن A تقع داخل الدّائرة.

كذلك نجد أنّ: $OB=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{13}>3$، إذن $OB>r$ والنقطة B تقع خارج الدّائرة.

الصّيغة العامّة لمعادلة دائرة:

نتأمّل الصّيغة القياسيّة لمعادلة دائرة مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ ونصف قطرها r، وهي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

إذا نشرنا الأقواس وأصلحنا نجد:

$$x^2-2x_0x+x_0{}^2+y^2-2y_0y+y_0{}^2=r^2$$

أي

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0{}^2+y_0{}^2-r^2=0$$

والصّيغة الأخيرة لها الشكل الآتي

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

حيث a,b,c ثوابت حقيقية. وتسمّى هذه الصّيغة بالصّيغة العامّة لمعادلة دائرة.

فكّر

ما الشرط الذي يجب أن تحقّقه الأعداد a,b,c كي تمثّل الصيغة العامة أعلاه معادلة دائرة؟

مثال

اكتب بالصّيغة العامّة معادلة دائرة مركزها $\Omega\left(-1,2\right)$ وتمرّ بالنّقطة $A(2,-2)$ وارسمها.

الحل

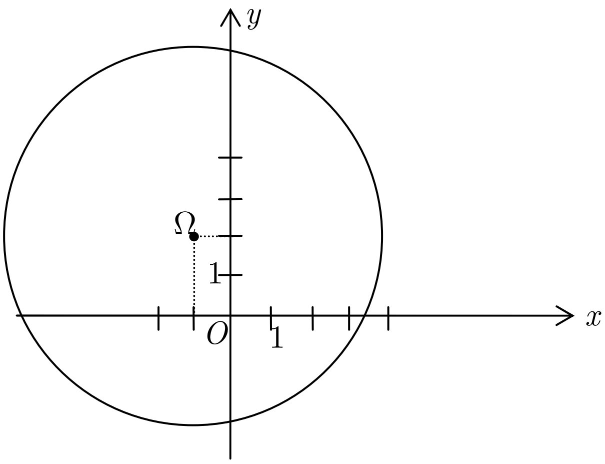
نعلم أنّ معادلة الدائرة المطلوبة هي

$\left(x+1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 25$،

وهي تؤول بعد النّشر والإصلاح إلى الصّيغة:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$$

الرّسم:



إيجاد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها بالصّيغة العامّة:

إذا كانت معادلة الدّائرة مكتوبة بالصّيغة العامّة وأردنا إيجاد إحداثيّات مركزها ونصف قطرها، فإنه بالإتمام إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y، تُردّ المعادلة إلى الشّكل القياسيّ $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ ويمكننا من ثمّ استنتاج المطلوب.

مثال

لتكن $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ هي معادلة لدائرة C.

a) اكتب المعادلة بالصّيغة القياسيّة.

b) استنتج إحداثيّات مركز الدّائرة C ونصف قطرها.

الحل

a) بالإتمام إلى مربّعين كاملين نجد:

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 6 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 - 4 = 0$$

ومنه نجد الصّيغة المختزلة: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

b) بمقارنة المعادلة السّابقة مع الصّيغة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ إذن مركز الدّائرة C هو $\Omega(1,-3)$ ونصف قطرها يساوي $r=2$.

مثال

لتكن $x^2+y^2+6x+6=0$ هي معادلة لدائرة C.

a) اكتب المعادلة بالصّيغة القياسيّة.

b) استنتج إحداثيّات مركز الدّائرة C ونصف قطرها.

الحل

a) بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$x^2+6x+y^2+6=0$$
$$x^2+6x+9-9+y^2+6=0$$

ومنه نجد الصّيغة القياسيّة: $(x+3)^2+y^2=3$

b) بمقارنة المعادلة السّابقة مع الصّيغة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ نجد أنّ مركز الدّائرة C هو $\Omega(-3,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$.

المعادلة ذات الصّيغة $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ، حيث a, b, c ثوابت حقيقيّة لا تمثّل بالضّرورة دائرة، إذ بالإتمام إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y نردّها إلى الشّكل:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k$$

حيث k هو عدد حقيقيّ، وهنا نميّز ثلاث حالات:

- $k>0$ عندئذ تمثّل المعادلة الدّائرة الّتي مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها $\sqrt{k}$.
- $k=0$ عندئذ تؤول المعادلة إلى الشّكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$، وهذا يتحقّق في حالة واحدة فقط وهي عندما $x=x_0$ و $y=y_0$، أي إنها تمثّل النّقطة الوحيدة (x_0,y_0).
- $k<0$ عندئذ تمثّل المعادلة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<0$ المجموعة الخالية $\varnothing$.

مثال

عيّن مجموعة النّقط الّتي تمثّلها كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

1. $x^2+y^2+4x-2y-4=0$
2. $2x^2+2y^2-2x+6y+5=0$
3. $x^2+y^2+4x+y+6=0$

الحل

1. $x^2+y^2+4x-2y-4=0$

نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y بأن نضيف ونطرح مربّع نصف أمثال كلاً من x و y.

$$x^2+4x+4-4+y^2-2y+1-1-4=0$$

لنحصل على متطابقات تربيعيه

$$\left(x+2\right)^2-4+\left(y-1\right)^2-1-4=0$$
$$\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2=9$$

والمعادلة الأخيرة لها الشّكل: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k$ حيث $k=9>0$

فالمعادلة تمثّل الدّائرة الّتي مركزها $I(-2,1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{9}=3$.

❷ $2x^2+2y^2-2x+6y+5=0$

نقسّم طرفي المعادلة على العدد 2 حتّى نردّها إلى الشّكل العام، فتصبح: $x^2+y^2-x+3y+\frac{5}{2}=0$

ثم نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y: $x^2-x+y^2+3y+\frac{5}{2}=0$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=0$$
$$(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=0$$
$$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=0$$

فالمعادلة تمثّل النّقطة $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$.

❸ $x^2+y^2+4x+y+6=0$

نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y:

$$x^2+4x+4-4+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+6=0$$
$$(x+2)^2-4+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+6=0$$
$$(x+2)^2+(y+\frac{1}{2})^2=-\frac{7}{4}$$

وهذا مستحيل فالمعادلة تمثّل المجموعة الخالية $\varnothing$ في هذه الحالة.

تدرّب

① جد معادلة الدّائرة في كلّ حالة ممّا يأتي:

❶ مركزها $(2,-1)$ ونصف قطرها $r=3$.

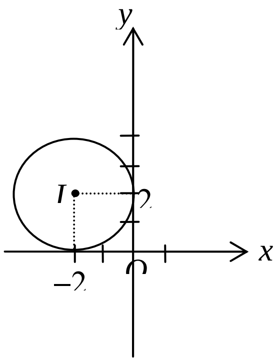
❷ مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$.

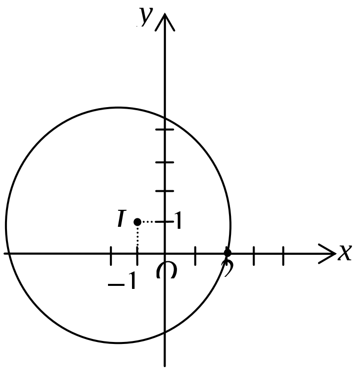
❸ مركزها $(0,0)$ وتمر بالنّقطة $(4,7)$.

❹ $[PQ]$ قطر فيها، حيث: $P(-1,1)$ و $Q(5,9)$.

❺ مركزها $(7,-3)$ وتمسّ محور الفواصل.

❻ مركزها $(3,2)$ وتمسّ محور التراتيب.





②جد معادلة كل من الدّائرتين المرسومتين جانباً:

③عيّن ماذا تمثّل كلّ معادلة ممّا يأتي، ثمّ ارسمها في حال كانت دائرة.

❶ $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

❷ $x^2 + y^2 + 6y + 12 = 0$

❸ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

❹ $9x^2 + 9y^2 + 18x - 6y - 26 = 0$

❺ $3x^2 + 3y^2 + 6x - 2y = 0$

④ادرس تبعاً لقيم الوسيط الحقيقيّ λماذا تمثل المعادلة $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - \lambda = 0$

تماس دائرتين

الشّرط اللازم والكافي لتكون دائرتان $C_1(N, R_1)$ و $C_2(M, R_2)$ متماستين خارجاً (أو داخلاً) هو أن يكون البُعد المركزيّ NM مساوياً مجموع نصفي قطريهما (أو فرقهما)

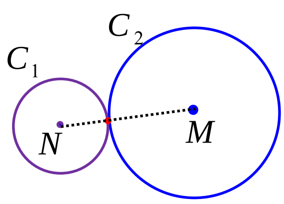
فإذا كانت دائرتان معينتان بالمعادلتين الآتيتين:

$$C_1: \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R_1^2$$

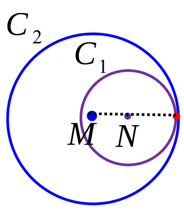
$$C_2: \quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = R_2^2$$

ورمزنا ℓ للبعد المركزي للدائرتين ورمزنا R_1 , R_2 لنصفي قطريهما عندئذٍ نميّز حالتين للتّماس:

التّماس الدّاخلي والتّماس الخارجيّ كما في الشّكل:



تماس خارجي



تماس داخلي

مركزا الدّائرتان المتماسّتان ونقطة التّماس تقع على استقامة واحدة.

في حالة التّماس الخارجي يكون: $\ell = R_1 + R_2$

وأمّا في حالة التّماس الدّاخلي يكون: $\ell = |R_1 - R_2|$

مثال

لتكن معادلتا الدّائرتين C_1 , C_2 :

$$C_1: \quad (x-8)^2+(y-10)^2=49$$
$$C_2: \quad (x+4)^2+(y-5)^2=36$$

أثبت أنّ الدّائرتين C_1 , C_2 متماستان خارجاً.

الحل

مركز الدّائرة الأوّلى: $O_1(8,10)$ ونصف قطرها $R_1=\sqrt{49}=7$

مركز الدّائرة الثّانية: $O_2(-4,5)$ ونصف قطرها $R_2=\sqrt{36}=6$

لنحسب المسافة بين مركزي الدائرتين

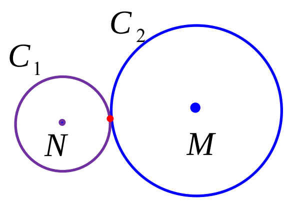
$$O_1O_2=\sqrt{(8+4)^2+(10-5)^2}$$
$$=\sqrt{144+25}$$
$$=13$$

نلاحظ أنّ: $O_1O_2=R_1+R_2$ فالدّائرتان متماستان خارجاً.

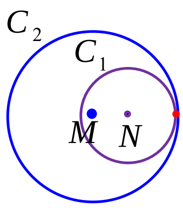
لتكن C_2 , C_1 دائرتين. للحصول على النّقط المشتركة بينهما نبحث عن الحل المشترك لجملة معادلتيهما ونميّز الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

الدّائرتان متماسّتان أي تشتركان بنقطة وحيدة نسمّيها نقطة التّماس.



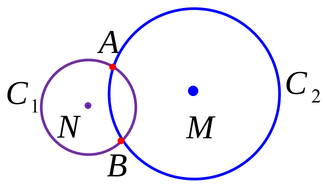
تماس خارجي



تماس داخلي

الحالة الثّانية:

الدّائرتان متقاطعتان أي تشتركان بنقطتين B , A نسمّيهما: نقطتي التّقاطع.



يمكننا معرفة الوضع النّسبي لدائرتين بمقارنة البعد بين مركزي الدّائرتين ℓ مع مجموع وفرق نصفي قطريهما R_1 , R_2 ونميّز الحالات الآتية:

- عندما يتحقق الشرط $R_1+R_2>\ell>|R_1-R_2|$ تكون الدّائرتان C_2 , C_1 متقاطعتين، والعكس صحيح.
- عندما يتحقق الشرط $\ell>R_1+R_2$ أو الشرط $\ell<|R_1-R_2|$ تكون الدّائرتان متباعدتين ، والعكس صحيح.
- عندما يتحقق الشرط $\ell=R_1+R_2$ تكون الدّائرتان متماسّتين خارجاً، والعكس صحيح.
- عندما يتحقق الشرط $\ell=|R_1-R_2|$ تكون الدّائرتان متماسّتين داخلاً، والعكس صحيح.

تماس دائرة ومستقيم:

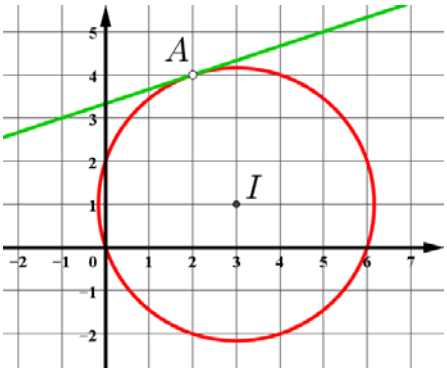
① المعادلة $x^2+y^2-6x-2y=0$ معادلةٌ للدائرة $\mathcal{C}$.

❶ أثبت أنَّ $A(2,4)$ نقطةٌ من $\mathcal{C}$.

❷ ارسم $\mathcal{C}$ ووضِّع عليها A، ثمَّ أنشئ من A المماس d للدائرة $\mathcal{C}$.

❸ اكتب معادلةً للمماس d.

الحل



❶ نعوض النقطة $A(2,4)$ في معادلة الدائرة $\mathcal{C}$

$$2^2+4^2-6(2)-2(4)=4+16-12-8=0$$

وبالتالي فإنّ النقطة A من الدائرة $\mathcal{C}$.

❷ نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y، فنحصل على $(x-3)^2+(y-1)^2=10$ نستنتج أنّ مركزها $I(3,1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{10}$.

❸ ليكن m_1 ميل المستقيم (IA)، عندئذ يكون:

$$m_1=\frac{y_A-y_I}{x_A-x_I}=\frac{4-1}{2-3}=-3$$

وليكن m_2 ميل المستقيم d، وبما أنّ المستقيمين (IA) و d متعامدان، فإنّ $m_1\times m_2=-1$

ومنه $m_2=\frac{1}{3}$، وبالتالي فإنّ معادلة المماس d هي: $y-4=\frac{1}{3}(x-2)$، وبالإصلاح نحصل على المعادلة $x-3y+10=0$.

تَدرَّبْ

① عيّن مركز ونصف قطر كل من الدّوائر:

$C_1: x^2+y^2-25=0$

$C_2: x^2+y^2=2$

$C_3: 4x^2+4y^2-36=0$

ثُمّ عيّن الوضع النّسبي للدّائرتين C_1 , C_2.

② اكتب معادلة الدّائرة $C(O,R)$ في مستوٍ مُحدث بمعْلَمٍ مُتجانِس في الحالات الآتية:

1) $O(0,0)$ ، $R=4$

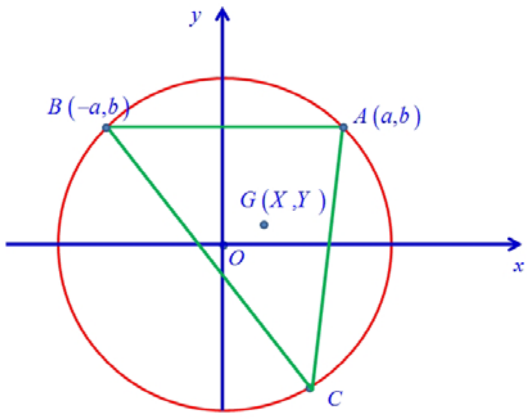
2) مركزها $Q(0,1)$ ، وتمس محور الفواصل

3) $O(0,0)$ ، وتمرّ بالنقطة $A(3,0)$.

③ في مستوٍ مُحدث بمعْلَمٍ مُتجانِس نقطتان $A(3,0)$, $B-(4,0)$

أوجد معادلة الدّائرة الّتي تقبل القطعة المستقيمة $[AB]$ قطراً فيها

④ في الشكل (1) دائرة w نصف قطرها R ، B , A نقطتان ثابتتان و مختلفتان تنتميان إلى هذه الدائرة تتحرك النقطة C على هذه الدائرة ، و بفرض G مركز ثقل المثلث ABC **أثبت أن** G تتحرك على دائرة نصف قطرها $\frac{R}{3}$.



الشكل (1)

⑤ نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم d ذا المعادلة $x+y-8=0$ ، والنقطة $A(3,0)$.

❶ وضّع النقطة A وارسم المستقيم d في شكلٍ واحد.

❷ لتكن H المسقط المقائم للنقطة A على d و K نقطة تقاطع d ومحور الفواصل.

a. أثبت أنَّ المثلث AHK قائمٌ ومتساوي الساقين واحسب AH .

b. استنتج معادلةً للدائرة C التي مركزها A وتمسُّ المستقيمَ d .

القطع المكافئ

2.القطع المكافئ(Parabola)

سوف تتعلم:

1. تعاريف وخواص عامة
2. المعادلة المختزلة للقطع المكافئ
3. المعادلة العامة لقطع مكافئ محور تناظره يوازي أحد محوري الإحداثيّات
4. خواص المماس لقطع مكافئ في نقطة منه

لقد درستَ سابقاً القطوع المكافئة بصفتها الخطوط البيانية للتوابع كثيرات الحدود من الدرجة الثانية، وقد كان محور تناظر كل منها يوازي محور التراتيب Oy. ولكننا لم نذكر التعريف الهندسي للقطوع المكافئة في ذلك الحين. لذلك سوف نعرّف هندسياً القطع المكافئ ونستنتج المعادلات للقطوع المكافئة التي توازي محاور تناظرها أحد المحورين الإحداثيّين.

في مراجعة للدرس (كثير الحدود من الدرجة الثانية) تعلمت أنَّ

ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية يكتب بالصيغة : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية معطاة و $a\neq 0$. لقد وجدنا في دراستنا السابقة أنّ f يُكتب بالصيغة القانونيّة :

$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ولما كان $y=f(x)$ ولنرمز بالرمز $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ و $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

عندئذٍ يمكن كتابة **المعادلة السابقة بالصيغة النموذجية**

بالصيغة $y=a\left(x-x_0\right)^2+y_0$ ومنه $\left(x-x_0\right)^2=\dfrac{1}{a}\left(y-y_0\right)$ وتوصلنا للخلاصة الآتية :

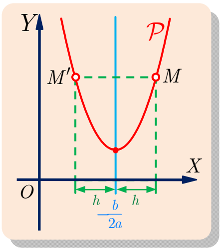
الخلاصة

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

- نُسمّي الخطَّ البيانيَّ للتابع f قطعاً مُكافئاً ونرمز إليه بالرمز $\mathcal{P}$.
- في حالة $a>0$، تكون فتحة القطع من الأعلى، ويبلغ f أصغر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$.
- في حالة $a<0$، تكون فتحة القطع من الأسفل، ويبلغ f أكبر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$.
- في كلا الحالتين تكون $x=-\frac{b}{2a}$ هي فاصلة **ذروة القطع** $\mathcal{P}$.
- ويكون المستقيم المارّ بالذروة موازياً لمحور التراتيب، **محور تناظر للقطع** $\mathcal{P}$.
- يمكن التعبير عن المعادلة النموذجية للقطع المكافئ بدلالة الوسيط $\left(x-x_0\right)^2=4p\left(y-y_0\right)$
- الرمز p في المعادلة $\left(x-x_0\right)^2=4p\left(y-y_0\right)$ يدل على وسيط القطع المكافئ.

فَكِّرْ :

مـن أيـن جـاءت هـذه الخاصّـة التناظريّـة للقطـع المُكـافئ ؟ اسـتعمل الصـيغة القانونيـة لثلاثـي الحـدود f ، ثُـم احسـب $f\left(\frac{-b}{2a}-h\right)$ و $f\left(\frac{-b}{2a}+h\right)$ حيـث h هـو عـددٌ حقيقيٌّ مـا. ماذا تستنتج ؟



مثال

لنكتب المعادلة الآتية : $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$. بالشكل النموذجي.

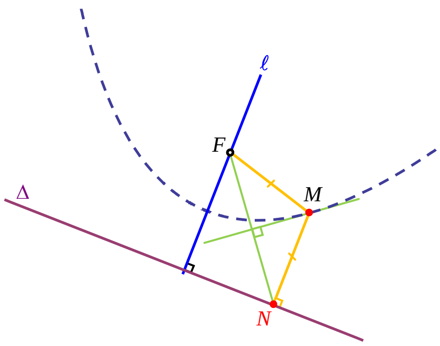
بضرب طرفي المعادلة المعطاة بالعدد -4 نجد: $-4y=x^2-2x+5$ نتمم إلى مربع كامل بالنسبة إلى x فنجد:

$-4y=x^2-2x+1+4$ وهي تكافئ: $-4y=(x-1)^2+4$ أي: $(x-1)^2=-4(y+1)$

وهذه المعادلة من الشكل النموذجي $(x-x_0)^2=4p\,(y-y_0)$ وتمثل قطع مكافئ $\mathcal{P}$، ذروة القطع هي $V\,(x_0,y_0)$ أي $V\,(1,-1)$، و محوره تناظره يوازي محور التراتيب وقيمة الوسيط $p=-1$.

تعريف

ليكن Δ مستقيماً ما في المستوي، ولتكن F نقطة لا تنتمي إلى Δ $(F\notin\Delta)$.إنّ مجموعة النّقط M الواقعة في المستوي المعيّن بـ Δو F والمتساوية المسافة عن Δو F تؤلّف **قطعاً مُكافئاً محرقه F ودليله Δ.**

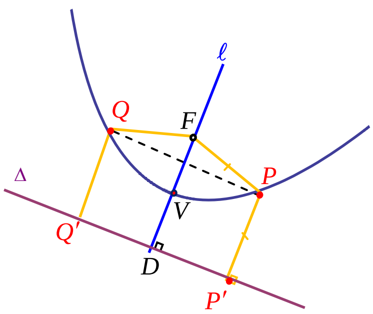


إنشاء قطع مكافئ $\mathcal{P}$ محرقه F ودليله Δ (باستعمال التعريف):

نتأمل المحرق F والدليل Δ ، ثم نختار أي نقطة N على المستقيم Δ

- نرسم محور القطعة $[NF]$.
- نرسم من N مستقيماً يُعامد الدليل Δ فيقطع محور القطعة $[NF]$ في نقطة M. عندئذٍ نجد $MF=MN$ (خاصة محور قطعة مستقيمة).

من أجل كل موضع للنقطة N على Δ نعين بالطريقة ذاتها النقطة M الموافقة فنحصل على القطع المكافئ كما في الشكل السّابق المرسوم.



المعادلة المختزلة لمعادلة قطع مكافئ :

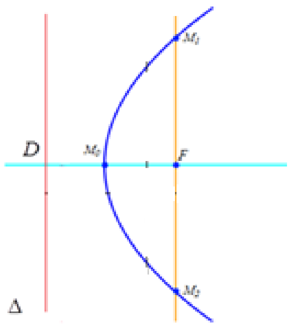
مصطلحات : يُرمز للقطع المكافئ بالرمز $\mathcal{P}$.

و بفرض M نقطة من القطع وَ N مسقطها القائم على Δ عندئذٍ:

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$$

- تسمى النقطة F محرق القطع المكافئ .
- يسمى المستقيم الثابت Δ دليل القطع المكافئ .
- البعد بين F وَ Δ ثابت ويسمى وسيط القطع المكافئ، ونرمزه p
- بفرض D مرتسم F على Δ ،M' نظيرة M بالنسبة إلى المستقيم(FD) ، عندئذٍ نجد حسب خواص التناظر: $DM_0 = M_0F$ ومنه $M_0 \in \mathcal{P}$ عندئذٍ (FD) محور تناظر للقطع.

بفرض O منتصف $[FD]$ فإن $O \in \mathcal{P}$ وهي نقطة مشتركة بين القطع ومحوره التناظري .لذلك تُسمى O ذروة القطع المكافئ .



ملاحظة: نقبل أنه لرسم القطع المكافئ يكفي معرفة ذروته ونقطتين منه:

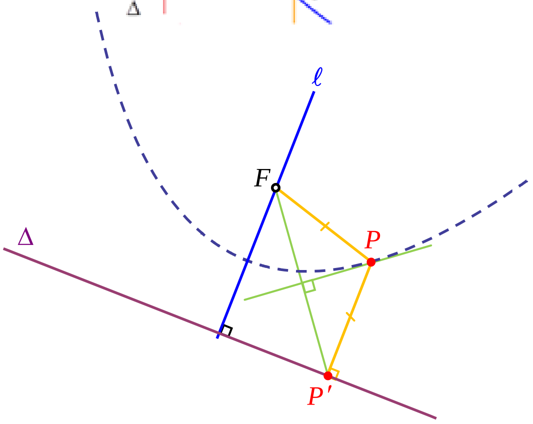
1- نعين المحرق F ونرسم الدليل Δ في المستوي.

2- نرسم من F مستقيماً dعمودياً على محور القطع ثم نعين عليه النقطتين M_1,M_2 بجهتين مختلفتين من المحور يكون:

$$M_1F = M_2F = 2|p|$$

3- نعين ذروة القطع M_0.

4- نرسم قوس القطع الذي يمر من النقط الثلاث M_0,M_1,M_2 كما في الشكل



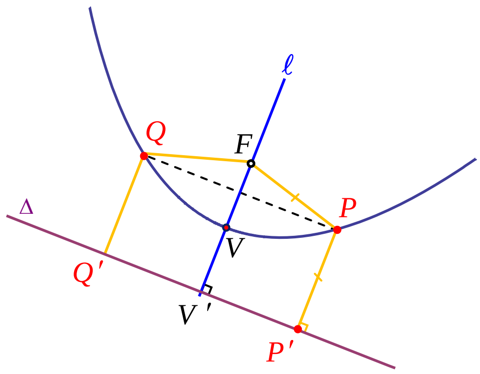
1.2.تعاريف وخواص عامة

تعريف ليكن Δ مستقيماً ما في المستوي، ولتكن F نقطة لا تنتمي إلى Δ $(F \notin \Delta)$. نسمي **قطعاً مُكافئاً محرقه F ودليله Δ**، مجموعة نقاط المستوي التي تبعد عن Fمسافة تُساوي بُعدها عن المستقيم Δ.

باستعمال التعريف يمكننا رسم قطع مكافئ انطلاقاً من مستقيم معطى Δ (الدليل) ونقطة ثابتة معطاة F (المحرق) لا تقع على Δ. تنتمي النقطة P إلى القطع المكافئ إذا وفقط إذا تحققت المساواة $PF = PP'$ حيث P' هي المسقط القائم للنقطة P على Δ. الخط المتقطّع في الرسم يشير إلى مواقع النقاط P.

تدرّب

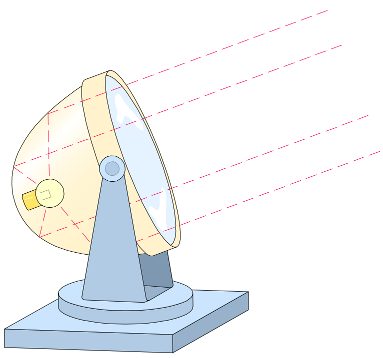
نلاحظ أنّ النقطة P تنتمي في آن معاً إلى كلٍّ من العمود على Δ في P' ومحور القطعة المستقيمة $[FP']$. استنتج من هذه الملاحظة طريقةً بسيطةً تفيد في إنشاء عدة نقاط من القطع.



مبرهنة و تعريف

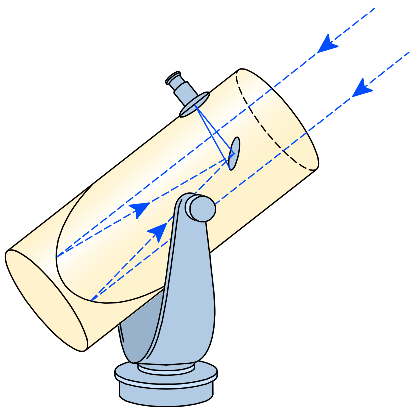
ليكن $\mathcal{P}$ القطع المكافئ الذي دليله Δ ومحرقه F. إنّ المستقيم ℓ المار بالنقطة F عمودياً على Δ هو **محور تناظر للقطع المكافئ** $\mathcal{P}$. وإذا كانت V' هي المرتسم القائم للمحرق F على الدليل Δ كانت النقطةُ V، منتصفُ القطعة المستقيمة $[FV']$، نقطةً من القطع المكافئ $\mathcal{P}$، نسميها **ذروة القطع المكافئ** $\mathcal{P}$.

المكافئ $\mathcal{P}$.



فائدة :

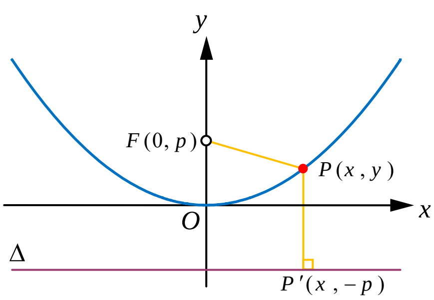
للقطوع المكافئة خواص عديدة تجعل منها مفيدةً جداً. فمثلاً يتمتّع السطح الدوراني الذي نحصل عليه من تدوير قطع مكافئ حول محور تناظره بخاصّة مهمة: الأشعة الضوئية الصادرة من منبع موضوع في المحرق تنعكس عن السطح بشكل حزمة موازية لمحور القطع، كما في الشكل المجاور.



وبالمثل، الأشعة الواردة إلى السطح القطعي المكافئ موازية لمحور تناظره تنعكس لتتجمع في المحرق. تُستعمل هذه الخاصة للقطوع المكافئة في تصميم مرايا التلسكوبات، وفي صنع هوائيات الرادارات، وهوائيات استقبال البث الفضائي. انظر الشكل المجاور.

2.1. المعادلة المختزلة للقطع المكافئ

ليكن Δ مستقيماً في المستوي ولتكن F نقطة لا تقع على Δ، ليكن $\mathcal{P}$ القطع المُكافئ الذي دليله Δ ومحرقه F.



لنختر جملة محاور إحداثية متعامدة مبدؤها O منطبق على ذروة القطع المكافئ $\mathcal{P}$، ومحور تراتيبها Oy منطبق على محور تناظر $\mathcal{P}$. وبحيث تكون إحداثيّات F هي $(0,p)$.(الرسم المجاور يوافق حالة $p>0$).

في هذه الحالة تكون معادلة الدليل Δ هي $y=-p$.

تنتمي النقطة $P(x,y)$ إلى القطع المكافئ $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $PF=PP'$ ، أي

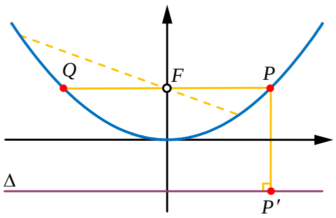
$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

وبتربيع الطرفي والاختصار نجد

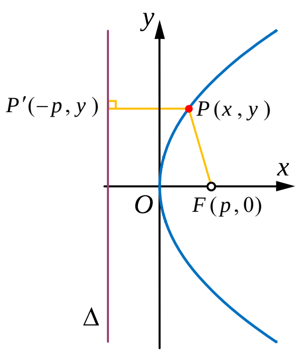
$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$
$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$
$$x^2=4py$$

وعليه نستنتج أنّ المعادلة القياسيّة لقطع مكافئ ذروته في مبدأ الإحداثيّات ومحور تناظره هو محور التراتيب هي $x^2=4py$

ويكون القطع مفتوحاً من الأعلى (أو من جهة التراتيب الموجبة) عندما $p>0$ ، ومفتوحاً من الأسفل (أو من جهة التراتيب السالبة) عندما $p<0$.



نسمّي كل قطعة مستقيمة تمر بمحرق القطع المكافئ ويقع طرفاها على القطع **وتراً محرقياً**، ونسمّي ذلك الوتر المحرقي الذي يوازي الدليل **وتراً محرقياً أساسياً**. في الشكل المجاور الوتر المحرقي الأساسي هو $[PQ]$ وطوله يحقّق المساواة $PQ=4|p|$. يفيد الوتر المحرقي الأساسي في رسم القطع المكافئ.



وبأسلوب مماثل، يمكننا إيجاد الشكل القياسي لمعادلة قطع مكافئ تنطبق ذروته على مبدأ الإحداثيّات ويقبل محور الفواصل Ox محور تناظر. باختيار المحرق عند $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$ ، ثمّ باتباع الخطوات السابقة نحصل على الشكل القياسي التالي لمعادلة القطع $\mathcal{P}$: $\quad y^2=4px$

ويكون القطع مفتوحاً من اليمين (أو من جهة الفواصل الموجبة) عندما $p>0$ ، ومفتوحاً من اليسار (أو من جهة الفواصل السالبة) عندما $p<0$.

لنلخّص فيما يلي الخواص التي أثبتناها فيما سبق :

المعادلة القياسيّة لقطع مكافئ ذروته في المبدأ

إنّ الخط البيانيّ لكلّ من المعادلات الآتية هو قطع مكافئ ذروته في مبدأ الإحداثيّات، ويحقّق الخواص المشار إليها حول محرقه ودليله ومحور تناظره:

① $x^2=4py$ ، المحرق $F(0,p)$ ومعادلة الدليل $y=-p$ ، ومحور التناظر Oy.

② $y^2=4px$ ، المحرق $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$ ، ومحور التناظر Ox.

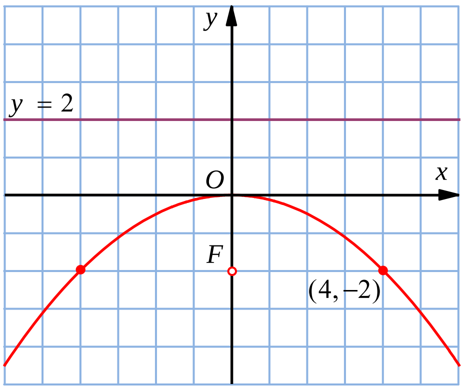
مثال

عين محرق ودليل القطع المكافئ $x^2 = -8y$ وارسمه.

الحل:

بمقارنة المعادلة $x^2 = -8y$ مع الصيغة القياسية $x^2 = 4py$ نستنتج أنّ $4p = -8$، إذن $p = -2$.

ومنه



- محور القطع هو محور التراتيب Oy.
- محرقه $F(0,-2)$.
- معادلة دليله Δ هي $y = 2$.
- مفتوح من جهة التراتيب السالبة.
- طول وتره المحرقي الأساسي $4|p| = 8$، فالقطع يمر بالنقطتين $(4,-2)$ و $(-4,-2)$.

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ المتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب، والذي ذروته في مبدأ الإحداثيّات ويمرّ بالنقطة $P(8,4)$.

الحل

الصيغة القياسية لهذا القطع هي $x^2 = 4py$ ولأنّ P تنتمي إلى هذا القطع وجب أن تحقّق إحداثيّات هذه النقطة $(8,4)$ معادلته أي $8^2 = 4p(4)$ ومنه $p = 4$. وبهذا تصبح معادلة القطع المطلوب $x^2 = 16y$.

تدرّب

❶ عيّن محرق ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 6x$ وارسمه. أعد السؤال في حالة $y^2 = -12x$.

❷ اكتب معادلة القطع المكافئ المتناظر بالنسبة إلى محور الفواصل، والذي ذروته في مبدأ الإحداثيّات ويمر بالنقطة $P(-3,6)$.

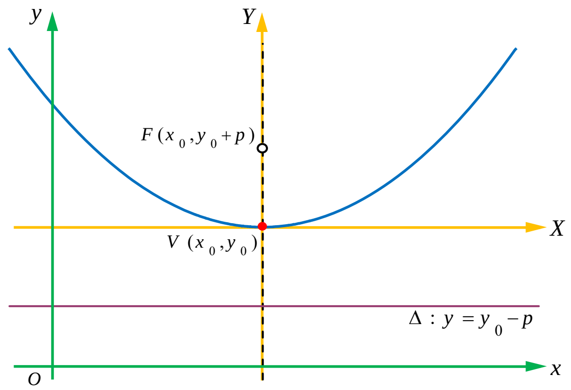
❸ فيما يلي معادلات مختزلة لقطوع مكافئة، عيّن في كل حالة ذروة القطع، ومحور تناظره، ومحرقه ومعادلة دليله وجهة فتحته:

① $y^2 - 6x = 0$ ② $y^2 + 6x = 0$

③ $x^2 - 6y = 0$ ④ $x^2 + 6y = 0$

3.1. المعادلة العامة لقطع المكافئ محور تناظره يوازي أحد محوري الإحداثيّات

1.3.1. الحالة الأولى: المحور يوازي محور التراتيب.



لنبحث عن الصيغة العامة لمعادلة قطع مكافئ ذروته النقطة $V(x_0,y_0)$ ومحور تناظره يوازي محور التراتيب. لمّا كان محرق القطع F واقعاً على محور التناظر استنتجنا أنّ إحداثيّي المحرق هما (x_0,y_0+p) حيث $p\neq 0$، وعندئذ تكون معادلة الدليل $y=y_0-p$. كما في الشكل التالي : (في حالة $p>0$).

معادلة القطع المكافئ في الجملة $(V,\vec{i},\vec{j})$ هي $X^2=4pY$ استناداً إلى ما رأيناه سابقاً. ولكن دساتير الانتقال من الجملة $(V,\vec{i},\vec{j})$ إلى الجملة $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي

$$x=x_0+X \quad \text{و} \quad y=y_0+Y$$

وعليه تكون معادلة القطع في الجملة $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي

$$(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$$

إذن الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع المكافئ الذي ذروته عند (x_0,y_0) ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $x=x_0$ هي $(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$. فإذا كان $p>0$ كان القطع مفتوحاً من الأعلى (أو من جهة التراتيب الموجبة) وإذا كان $p<0$ كان القطع مفتوحاً من الأسفل (أو من جهة التراتيب السالبة).

2.3.1. الحالة الثانية: المحور يوازي محور الفواصل.

بأسلوب مماثل للحالة السابقة نبرهن أنّ الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع المكافئ الذي ذروته عند (x_0,y_0) ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $y=y_0$ هي

$$(y-y_0)^2=4p(x-x_0)$$

فإذا كان $p>0$ كان القطع مفتوحاً من اليمين (أو من جهة الفواصل الموجبة) وإذا كان $p<0$ كان القطع مفتوحاً من اليسار (أو من جهة الفواصل السالبة).

المعادلة القياسيّة لقطع مكافئ ذروته ليست في المبدأ

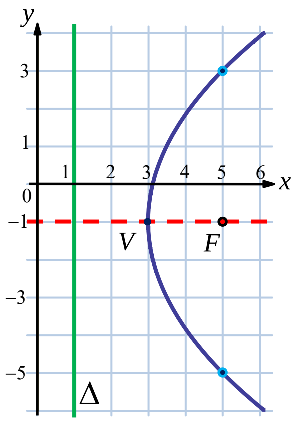
إنّ الخط البياني لكل من المعادلات الآتية هو قطع مكافئ إحداثيّات ذروته (x_0,y_0)، ويحقّق الخواص المشار إليها حول محرقه ودليله ومحور تناظره :

① $(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$، المحرق $F(x_0,y_0+p)$ ومعادلة الدليل $y=y_0-p$، ومحور التناظر هو المستقيم الذي معادلته $x=x_0$.

② $(y-y_0)^2=4p(x-x_0)$، المحرق $F(x_0+p,y_0)$ ومعادلة الدليل $x=x_0-p$، ومحور التناظر هو المستقيم الذي معادلته $y=y_0$.

مثال

عين ذروة ومحرق ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 2y - 8x + 25 = 0$ وارسمه.



الحل

نبدأ بكتابة المعادلة بالشكل $y^2 + 2y = 8x - 25$، ثُمّ نتمّم الطرف الأيسر إلى مربّع كامل بإضافة 1 إلى الطرفين لنجد

$$y^2 + 2y + 1 = 8x - 24 = 8(x - 3)$$

وأخيراً

$$(y + 1)^2 = 4(2)(x - 3)$$

فإذا قارنّا هذه المعادلة بالصيغة القياسيّة

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

استنتجنا أن $x_0 = 3$ و $y_0 = -1$ و $p = 2$

فذروة القطع المكافئ هي $V(3,-1)$، ومحرقه $F(5,-1)$ ومعادلة دليله $x = 1$. وهو مفتوح من جهة الفواصل الموجبة لأنّ $p > 0$. أمّا طول وتره المحرقي الرئيسي فيساوي $4|p| = 8$، وطرفاه هما النقطتان $(5,3)$، و $(5,-5)$.

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محرقه $F(-4,1)$ ومعادلة دليله $y = 5$.

الحل

الدليل يوازي محور الفواصل إذن للقطع معادلة من الصيغة $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. الذروة تقع في منتصف المسافة بين المحرق والدليل إذن إحداثيّات الذروة $(-4,3)$ أي $x_0 = -4$ و $y_0 = 3$ أما p فتحسب من الصيغة $y_0 + p = y_F$ (حيث y_F هو ترتيب المحرق) لنجد $p = -2$. ومعادلة القطع المكافئ المطلوب هي

$$(x - (-4))^2 = -8(y - 3)$$

التي يمكن إصلاحها لتأخذ الصيغة :

$$y = -\frac{x^2}{8} - x + 1 \quad \text{أو} \quad x^2 + 8x + 8y - 8 = 0$$

تدرّب

❶ فيما يلي معادلات قياسية لقطوع مكافئة، عيّن في كل حالة ذروة القطع، ومحور تناظره، ومحرقه ومعادلة دليله وجهة فتحته، وارسمه.

① $(y-3)^2 = 4(x+1)$ ② $(x-3)^2 = 4(y-2)$

③ $(y-1)^2 = 2x$ ④ $(y-1)^2 = -3(x+1)$

⑤ $(x+2)^2 = -3(y+1)$

❷ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محرقه $F(2,5)$ ومعادلة دليله $y=-1$.

❸ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي ذروته $V(2,1)$، ومحور تناظره يوازي محور التراتيب Oy ويمر بالنقطة $(5,-1)$، وارسمه.

❹ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي ذروته $V(-2,-2)$ ومعادلة دليله $y=-3$.

❺ فيما يلي معادلات لقطوع مكافئة، عيّن في كل حالة ذروة القطع، ومحور تناظره، ومحرقه ومعادلة دليله وجهة فتحته، وارسمه.

① $y^2+4y-4x+16=0$ ② $x^2-2y+8x+10=0$

③ $y^2+6y+3x+5=0$ ④ $3x^2-8y-12x=4$

❻ عيّن معادلة قطع مكافئ محور تناظره يوازي محور التراتيب Oy ويمر بالنقاط: $M_1(3,0)$ و $M_2(-5,0)$ و $M_3(0,-5)$. ثُمّ عين محرقه ومعادلة دليله.

❼ عيّن معادلة قطع مكافئ محور تناظره يوازي محور الفواصل Ox ويمر بالنقاط: $M_1(2,-1)$ و $M_2(1,-1)$ و $M_3(-1,2)$. ثُمّ عين محرقه ومعادلة دليله.

4.2. خواص المماس لقطع مكافئ في نقطة منه

تعريف

ليكن $\mathcal{P}$ قطعاً مكافئاً، ولتكن M نقطة من هذا القطع. نقول إنّ المستقيم d يمسّ القطع $\mathcal{P}$ في M أو إنّه **مماس للقطع $\mathcal{P}$ في M**. إذا تحقّق الشرطان :

① المستقيم d لا يوازي محور تناظر القطع.

② النقطة M هي النقطة الوحيدة المشتركة بين القطع $\mathcal{P}$ والمستقيم d.

تعريف

نسمّي المستقيم العمودي على المماس لقطع مُكافئ في نقطة التماس المستقيم **الناظم على القطع المكافئ** عند هذه النقطة.

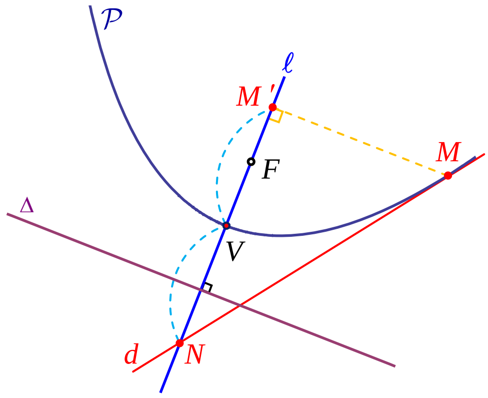
نبرهن في هذه الفقرة خاصة هندسيّة مهمة تتّصف بها المماسات لقطع مُكافئ.

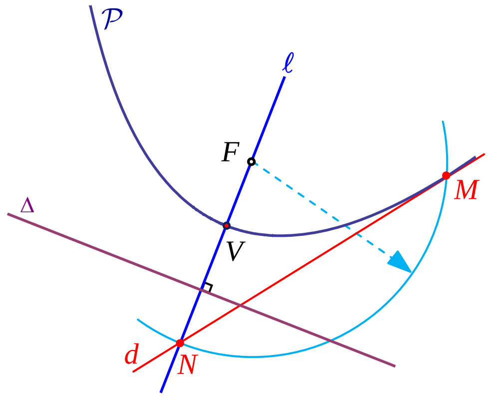
مبرهنة (تقبل دون ذكر البرهان)

نتأمّل قطعاً مُكافئاً $\mathcal{P}$ دليله المستقيم Δ ومحرقه F ومحور تناظره ℓ وذروته V. لتكن M نقطة من القطع المكافئ $\mathcal{P}$ مختلفة عن ذروته.

① إنّ المماس d للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ في M يقطع ℓ في نقطة N هي نظيرة M' المسقط القائم على ℓ للنقطة M بالنسبة إلى الذروة V. أما المماس للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ في ذروة القطع فهو العمود على محور التناظر ℓ في V.

② إن المماس d للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ في M يقطع ℓ في نقطة N تقع خارج القطع وتبعد عن محرقه F مسافة تساوي بُعد المحرق عن M، أي $FM = FN$.



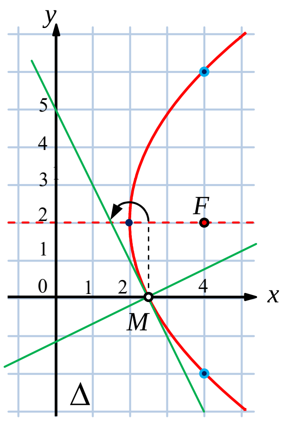


مثال

ليكن القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته : $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$.

① اكتب معادلة $\mathcal{P}$ بالصيغة القياسية.

② أوجد معادلتي المماس والناظم لهذا القطع في النقطة التي ترتيبها $y = 0$ منه وارسمهما مع القطع على الشكل نفسه.



الحل

① بالإتمام إلى مربّع كامل نجد أنّ معادلة القطع تُكافئ $(y-2)^2 = 8(x-2)$. وبالمقارنة مع الشكل القياسي $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$ نستنتج أنّ ذروة القطع هي النقطة $V(2,2)$، ومحرقه هو النقطة $F(4,2)$ ومحور تناظره يوازي محور الفواصل ومعادلته $y = 2$، ودليله منطبق على محور التراتيب الذي معادلته $x = 0$.

② إنّ فاصلة النقطة التي ترتيبها $y = 0$ من القطع هي $x = \frac{5}{2}$. إذن نرغب بتعيين المماس للقطع $\mathcal{P}$ المار بالنقطة $M\left(\frac{5}{2},0\right)$. سنتبع طريقتين :

الطريقة الأولى : لتكن M' المسقط القائم للنقطة M على محور التناظر. من الواضح أنّ إحداثيّي M' هما $\left(\frac{5}{2},2\right)$. وإذا كانت $N(x_1,y_1)$ نظيرة M' بالنسبة إلى الذروة $V(2,2)$ كان $x_1=\frac{3}{2}$ و $y_1=2$. واستناداً إلى الخاصة الهندسيّة للمماس، نعلم أنّه يمرّ بالنقطتين

$$M\left(\tfrac{5}{2},0\right) \text{ و } N\left(\tfrac{3}{2},2\right)$$

فمعادلة المماس في M هي $\dfrac{y-0}{x-\frac{5}{2}}=\dfrac{2-0}{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}=-2$

أي $y=-2x+5$.

أمّا معادلة الناظم، فتتعيّن ببساطة، إذ نتذكّر أنّ جداء ميلَيْ مستقيمين متعامدين يساوي -1، إذن ميل الناظم على القطع في M يساوي $\dfrac{1}{2}$ وهو يمر بالنقطة $M\left(\frac{5}{2},0\right)$، فمعادلته

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{5}{4}$$

الطريقة الثانية : لمّا كان المماس المطلوب يمر بالنقطة M كانت معادلته من الشكل $y=m\left(x-\frac{5}{2}\right)$ حيث $m\neq 0$، ولتعيين m ندرس تقاطع هذا المستقيم مع القطع بالحل المشترك لجملة معادلتيهما. ولأنّ معادلة القطع تحوي حداً واحداً فيه x، نحسب x من معادلة المستقيم ثم نعوض في معادلة القطع لنجد

$$y^2-4y=8\left(x-\frac{5}{2}\right)=\frac{8}{m}y$$

ومنه

$$y\left(y-4-\frac{8}{m}\right)=0$$

نعلم مسبقاً أن $y_1=0$ سيكون حلاً لهذه المعادلة (لأنّ M تقع على كل من المستقيم والقطع) أمّا الحلّ الثاني فيساوي $y_2=4+\dfrac{8}{m}$، ولكن في حالة التماس يوجد حلّ واحدٌ، ومن ثَمّ يجب أن يكون $y_2=y_1$ أي $4+\dfrac{8}{m}=0$ ومنه $m=-2$. ونحصل مجدداً على معادلة المماس المطلوبة.

مثال

ليكن القطع المكافئ الذي معادلته: $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x-4$. أوجد معادلة المماس لهذا القطع الذي ميله $m=-1$.

الحل

إنّ معادلة أي مستقيم ميله -1 هي من الشكل $y=-x+h$ ، المطلوب هنا فعلياً هو تعيين قيم h التي تجعل هذا المستقيم مماساً للقطع. وهذا يُكافئ أن يتقاطع مع القطع المكافئ بنقطة واحدة (لأن هذا المستقيم لا يوازي محور تناظر القطع).

لإيجاد نقاط التقاطع نبحث عن الحلول المشتركة لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+x-4 \\ y=-x+h \end{cases}$$

بتعويض قيمة y من المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نجد

$$-\frac{1}{2}x^2+x-4=-x+h$$

وهذه تُكافئ

$$(x-2)^2=-4-2h$$

نناقش الحالات الآتية:

في حالة $h>-2$: لا يتقاطع المستقيم d_h الذي معادلته $y=-x+h$ مع القطع.

عندما $h=-2$ ، يشترك معه بنقطة واحدة وتكون فاصلة هذه النقطة $x=2$ وترتيبها $y=-4$.

أمّا في حالة $h<-2$ فيشترك d_h مع القطع بنقطتين وعندئذ يكون قاطعاً.

ومعادلة المماس المطلوب هي $y=-x-2$ ، وهو يمس القطع عند النقطة $(2,-4)$.

تدرّب

1 أوجد محرق ودليل القطع الذي معادلته:

① $y^2=x$ ② $y=\frac{1}{4}x^2$

③ $x^2=2y$ ④ $(x-2)^2=8(y+1)$

2 أوجد معادلة القطع المُكافِئ الذي ذروته $M_o(3,-5)$ ومحرقه $F(3,-3)$ ثُمّ ارسمه:

3 ليكن القطع المُكافِئ s الذي معادلته: $y=x^2+4x$

① عيّن محور القطع، وسيطه، ذروته، محرقه ومعادلة دليله ثُمّ ارسمه.

② أوجد معادلة المماس والناظم في النّقطة التي فاصلتها $x=-2$.

4 ليكن القطع المُكافِئ s الذي معادلته: $y^2-12x+2y+25=0$

① أوجد محور القطع، وسيطه، ذروته، محرقه ومعادلة دليله ثُمّ ارسمه.

② أوجد معادلة المماس في نّقطة منه ترتيبها $y=-2$.

3 القطع النّاقص (Ellipse)

سوف تتعلّم:

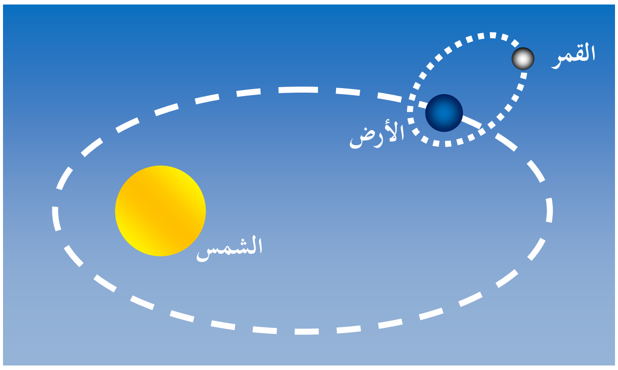
1) تعريف القطع النّاقص.

2) رسم القطع النّاقص بخط مستمر.

3) خواص القطع النّاقص.

4) المعادلة المختزلة لقطع ناقص.

القطع النّاقص هو منحني بيضوي (إهليلجي) على شكل دائرة مضغوطة، وإنّ المسار الذي ترسمه الأرض في دورانها حول الشمس قطعٌ ناقص. وهو حال جميع الأجرام السماويّة التي تتحرّك بتأثير الجاذبيّة حول نجم ضخم. هذا هو أحد قوانين كبلر.



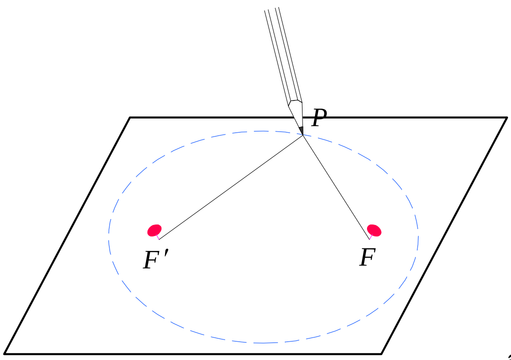
تعريف

القطع النّاقص هو مجموعة نقاط المستوي الّتي مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F و F' في المستوي يساوي مقداراً ثابتاً.

نسمّي F و F' **محرقي القطع النّاقص**. ونرمز للقطع الناقص $\mathcal{E}$.

رسم القطع النّاقص بخط مستمر:

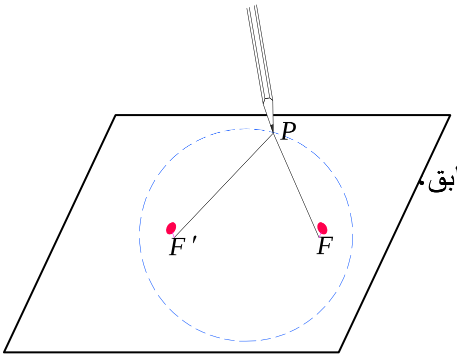
نستطيع رسم قطع ناقص يحقق التّعريف السّابق وذلك باستعمال مسماري كبس صغيرين، وخيط غير قابل للامتطاط، وقلم رصاص، حيث بادئ ذي بدء نحدد النّقطتين F و F' على قطعة من الورق المقوّى، ثمّ نثبّت المسمارين عند F و F'، ونربط طرفي الخيط بالمسمارين المثبّتين، بعدها نشدّ الخيط برأس قلم الرّصاص الّذي يلامس قطعة الورق المقوّى (كما في الشّكل (1) المجاور) ، ثمّ نحرّك القلم بهدوء وعناية (مع إبقاء الخيط مشدوداً) دورة كاملة فترسم بذلك القطع النّاقص المنشود.



الشّكل (1)

يمكن أن نرسم بنفس قطعة الخيط عدّة قطوع ناقصة وبأشكال مختلفة عن طريق تغيير المسافة بين المحرقين F و F'. فإذا زادت المسافة FF'، وكان طول الخيط أكثر قليلاً منها ظهر القطع النّاقص أضيق، كما في الشكل (1) السّابق. في حين أنّ تقصير المسافة وجعلها أقلّ بكثير من طول الخيط يجعل القطع النّاقص المرسوم يقترب أكثر فأكثر من شكل الدّائرة كما في الشّكل (2) المجاور.

وعندما يكون $F = F'$ نحصل على دائرة.

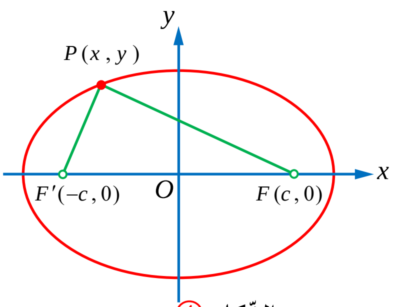


الشّكل (2)

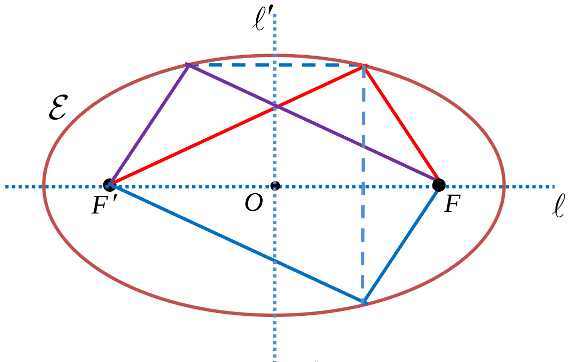
محورا تناظر القطع النّاقص:

ليكن $\mathcal{E}$ القطع الناقص الذي محرقاه F و F'. إنّ المستقيم ℓ المار بالمحرقين F و F' محور تناظر للقطع النّاقص $\mathcal{E}$، ويسمّى **المحور المحرقي** أو **المحور الرئيسي**. وكذلك يكون المستقيم ℓ'، محور القطعة المستقيمة $[FF']$، هو أيضاً محور تناظر للقطع النّاقص $\mathcal{E}$، ويسمّى **المحور اللامحرقي** أو **المحور الثّانوي**.

ينتج من ذلك أنّ منتصف القطعة المستقيمة $[FF']$ ولتكن O مركز تناظر للقطع النّاقص $\mathcal{E}$، لأنّها نقطة تقاطع محوري التّناظر ℓ و ℓ' كما في الشكل (3)، وتسمّى O مركز القطع.



الشّكل ④

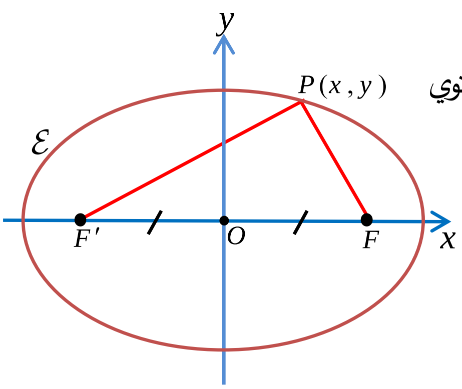


الشّكل ③

المعادلة المختزلة لقطع ناقص:

ليكن القطع النّاقص $\mathcal{E}$ الذّي محرقاه F و F'، نتأمّل جملة إحداثيّة في المستوي مبدؤها O منطبق على مركز القطع، ومحور الفواصل منطبق على المحور المحرقي للقطع، نفترض أنّ $F(c,0)$ حيث $c > 0$، فتكون $F'(-c,0)$ وتكون المسافة بين المحرقين هي: $FF' = 2c$ كما في الشّكل (4)

وتسمّى **البعد المحرقي**.



الشّكل ⑤

ونفترض أنّ مجموع بعدي أي نقطة من القطع عن المحرقين F و F' يساوي $2a$. عندئذٍ أيّاً كانت النّقطة $P(x,y) \in \mathcal{E}$ كان $PF + PF' = 2a$ (تعريف) ، واعتماداً على دستور المسافة بين نقطتين تكتب العلاقة السّابقة كالآتي:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

أو
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

بتربيع الطّرفين نجد:
$$(x-c)^2+y^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

بالنّشر نجد:
$$x^2-2x.c+c^2+y^2=4a^2-2(2a)\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

ومنه:
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

وبالإصلاح نجد:
$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

نقسّم الطّرفين على العدد 4 فنجد:
$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

نربّع الطّرفين:
$$a^2\left((x+c)^2+y^2\right)=\left(a^2+cx\right)^2$$

بالنّشر نجد:
$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2cxa^2+c^2x^2$$

ومنه:
$$a^2x^2+2cxa^2+c^2a^2+a^2y^2=a^4+2cxa^2+c^2x^2$$

أي:
$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-c^2a^2$$

ومنه:
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

نقسّم الطّرفين على $a^2(a^2-c^2)$ فنجد:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1 \qquad *$$

ولكن بحسب متراجحات المثلّث لدينا: $PF+PF'>FF'$ أي $2a>2c$ ومنه $a>c>0$ وبالتّالي $a^2>c^2$

أي $a^2-c^2>0$ ، لنعرّف $b^2=a^2-c^2$ ونعوّضها في * فنجد: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ وتسمّى الصّيغة الأخيرة **المعادلة المختزلة لقطع ناقص** ، محرقاه على محور الفواصل ومركزه في المبدأ و $a>c>0$ ، $a>b>0$ و $\boxed{a^2=b^2+c^2}$.

ذُرا القطع النّاقص:

الذّروة في القطع النّاقص هي كلّ نقطة مشتركة بين القطع ومحور تناظر له.

- الذُّرا الواقعة على محور الفواصل Ox توافق $y=0$ نعوّض في المعادلة المختزلة للقطع فنجد: $\frac{x^2}{a^2}=1$ أي: $x^2=a^2$ وحلول هذه المعادلة هي $x=a$ أو $x=-a$ وهذا يوافق الذّروتين:

$$A(a,0)\ ,\ A'(-a,0)$$

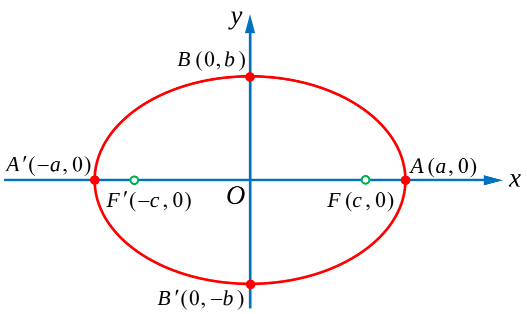
نلاحظ أنّ طول القطعة المستقيمة $[AA']$ يساوي: $2a$.

- الذُّرا الواقعة على محور التّراتيب Oy توافق $x=0$ نعوّض في المعادلة المختزلة للقطع فنجد: $\frac{y^2}{b^2}=1$ أي: $y^2=b^2$ وحلول هذه المعادلة هي $y=b$ أو $y=-b$ وهذا يوافق الذّروتين: $B(0,b)\ ,\ B'(0,-b)$

نلاحظ أنّ طول القطعة المستقيمة $[BB']$ يساوي: $2b$.

وبما أنّ $a>b$ نجد أن $2a>2b$ أي $AA'>BB'$

- تسمّى القطعة المستقيمة $[AA']$ **القطر الرّئيسي (أو القطر الكبير) للقطع.**
- تسمّى القطعة المستقيمة $[BB']$ **القطر الثّانوي للقطع (أو القطر الصّغير للقطع).**



مثال

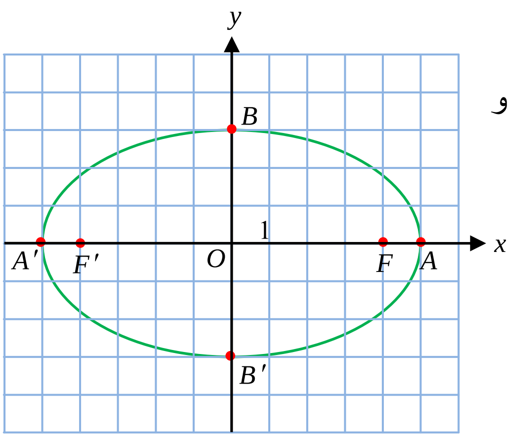
قطع ناقص معادلته $9x^2+25y^2=225$، عين محرقيه وذراه وارسمه.

الحل

نردّ المعادلة إلى الصّيغة المختزلة بأن نقسّم طرفيها على العدد 225 فنجد: $\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1$

نختزل الكسور في المعادلة السّابقة فنجد: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ وهي من الشّكل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث:

$a^2=25\ ,\ b^2=9$ ومنه: $a=5\ ,\ b=3$



وبالتّالي طرفا القطر الكبير هما الذّروتان: $A(5,0)\ ,\ A'(-5,0)$ و طرفا القطر الصغير هما الذّروتان: $B(0,3)\ ,\ B'(0,-3)$.

وبما أنّ: $c^2=a^2-b^2$ نجد أنّ $c^2=25-9=16$،

إذن: $c=4$، ومحرقا القطع هما:

$F(4,0)\ ,\ F'(-4,0)$ كما في الشّكل الآتي:

مثال

قطع ناقص محرقاه عند النّقطتين $F(2,0)\ ,\ F'(-2,0)$، وله ذروتان عند النقطتين: $(\pm4,0)$. أوجد معادلته وارسمه.

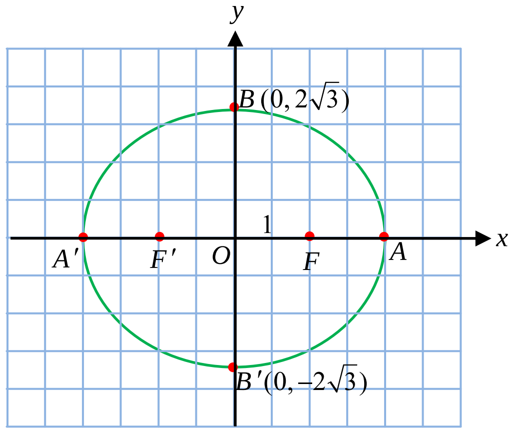
الحل

بما أنّ المحرقين هما : $F'(-2,0)$, $F(2,0)$ فإنّ: $c=2$، وبما أنّ الذّروتين عند: $(\pm4,0)$ فإن $a=4$.

ولدينا $b^2=a^2-c^2$ ومنه: $b^2=16-4=12$ ومعادلة القطع من الشّكل: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أي:

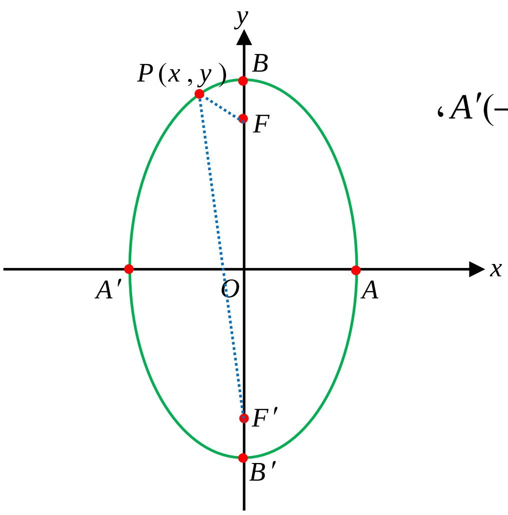
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ هي معادلة القطع المنشودة.

الرسم:



القطع النّاقص الذّي محوره المحرقي ينطبق على محور التّراتيب:

نتأمّل قطعاً ناقصاً $\mathcal{E}$ الذّي محرقاه F و F'، نتأمّل جملة إحداثيّة في المستوي مبدؤها O منطبق على مركز القطع، ومحور التّراتيب منطبق على المحور المحرقي للقطع، في هذه الحالة يكون طرفا القطر الكبير هما الذّروتان $B(0,b)$ و $B'(0,-b)$، أمّا طرفا القطر الصّغير هما $A(a,0)$ و $A'(-a,0)$، ومحرقاه $F(0,c)$ ، $F'(0,-c)$ حيث $c>0$.



ويكون في هذه الحالة أنّ $b>a$ و $b^2=a^2+c^2$

ولإيجاد المعادلة المختزلة للقطع النّاقص $\mathcal{E}$ نكتب:

أيّاً كانت $P(x,y)\in\mathcal{E}$ فإنّ هذا يكافئ تحقّق الشّرط $PF+PF'=2b$

وبحسب دستور المسافة بين نقطتين نكتب:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=2b$$

حيث نحصل كما في الحالة السّابقة على الصّيغة:

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ حيث $b>a$ ، وهي الصّيغة المختزلة لقطع ناقص مركزه $O(0,0)$ ، ومحوره المحرقي منطبق على محور التّراتيب كما في الشّكل المجاور.

مبرهنة (تقبل دون ذكر البرهان)

مساحة القطع النّاقص الذي نصف قطره الكبير a ونصف قطره الصّغير b تعطى بالعلاقة: $S = \pi \cdot a \cdot b$

مثال

قطع ناقص معادلته: $9x^2+4y^2=36$. عيّن ذراه ومحرقيه وارسمه واحسب مساحته.

الحل

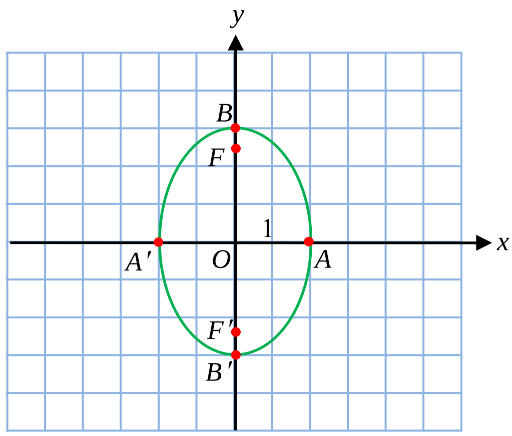
نردّ المعادلة إلى الصّيغة المختزلة بأن نقسّم طرفيها على العدد 36 فنجد: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

ويكون: $a^2=4$ ومنه $a=2$

$b^2=9$ ومنه $b=3$ ومساحته $S = 6\pi$.

ذروتا القطع الموافقتان للقطر الرّئيسي هما النّقطتان: $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$، أمّا ذروتاه الموافقتان للقطر الثّانوي هما $A(2,0)$ و $A'(-2,0)$، ويكون في هذه الحالة $c^2=b^2-a^2$ أي $c^2=9-4=5$ ومنه $c=\sqrt{5}$ ومحرقاه $F(0,\sqrt{5})$ ، $F'(0,-\sqrt{5})$.

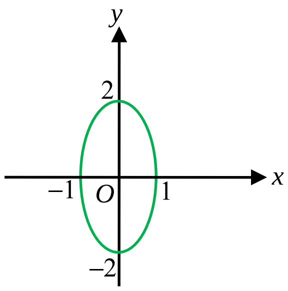
الرسم:



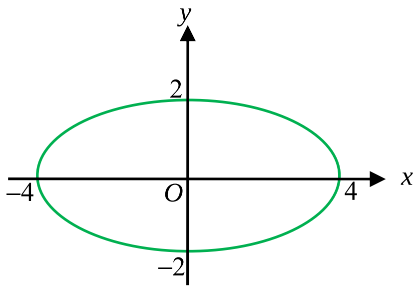
تدرّب

❶ فيما يلي معادلات لأربعة قطوع ناقصة مرسومة، أقرن كل قطع ناقص مرسوم بمعادلته مع التّعليل اعتماداً على المحور المحرقي والذّرا:

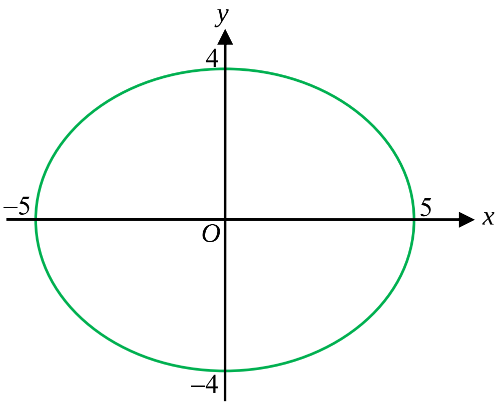
① $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ② $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ ③ $4x^2+y^2=4$ ④ $16x^2+25y^2=400$



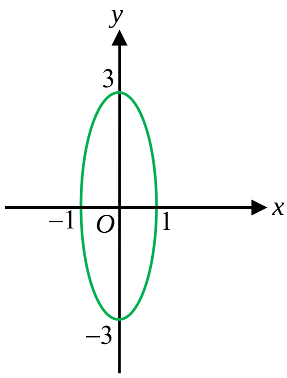
(1)



(2)



(3)

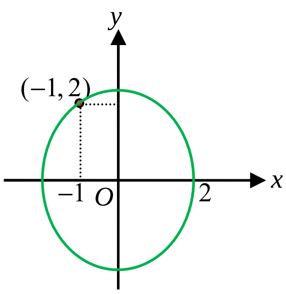


(4)

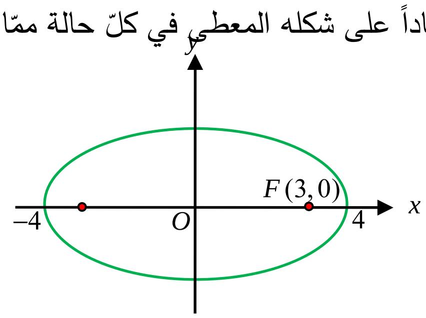
② أوجد كلّاً من: المحرقين، الذّرا، طول القطر الكبير، طول القطر الصّغير، ثمّ ارسم القطع النّاقص الموافق لكلّ حالة ممّا يأتي:

① $4x^2 + 25y^2 = 100$ ② $9x^2 + 4y^2 = 36$ ③ $9x^2 + 4y^2 = 1$ ④ $x^2 + 4y^2 = 1$

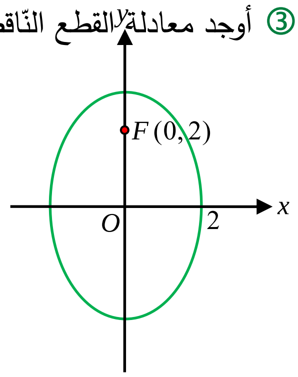
③ أوجد معادلة القطع النّاقص اعتماداً على شكله المعطى في كلّ حالة ممّا يأتي:



(1)



(2)



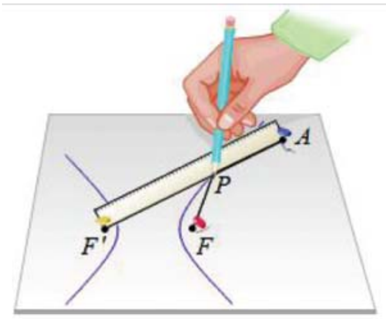
(3)

4 القطع الزّائد (Hyperbola)

رغم أنّ القطع النّاقص والقطع الزّائد يختلفان اختلافاً كليّاً في الشّكل لكنّهما يتشابهان في التّعريف وفي المعادلة والوسطاء، حيث أنّه بدلاً من مجموع البعدين لنقطة عن المحرقين في تعريف القطع النّاقص، نستعمل فرق البعدين عن المحرقين في تعريف القطع الزّائد، وأيضاً في المعادلة نستبدل إشارة – بـ + كما سنرى.

تعريف

القطع الزّائد هو مجموعة نقاط المستوي الّتي القيمة المطلقة لفرق بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F و F' في المستوي يساوي مقداراً ثابتاً.



نسمّي F و F' **محرقي القطع الزّائد**. ونرمز للقطع الناقص $\mathcal{H}$.

رسم القطع الزّائد بخط مستمر:

يمكن رسم قطع زائد يحقق التّعريف السّابق وذلك باستعمال:

مسمارين صغيرين، خيط، مسطرة، وقلم رصاص كالآتي:

نثبت المسمارين على قطعة من الورق المقوّى عند النّقطتين F و F'.

ثم نعلّق أحد طرفي المسطرة جزئيّاً عند F'، بحيث تكون المسطرة قابلة للدوران حول F' كما في الشّكل المجاور.

ثمّ نقصّ قطعة من الخيط بحيث تكون أقصر من طول المسطرة، ونثبّت أحد طرفي الخيط إلى الطّرف الحر A للمسطرة والطرف الآخر إلى المسمار عند F، ثمّ ندفع الخيط بقلم الرّصاص إلى المسطرة ليصبح مشدوداً عند النّقطة P، نحافظ على الخيط مشدوداً وندوّر المسطرة حول F' فيرسم رأسُ القلم خطّاً على الورق المقوّى، وهذا الخط الّذي رُسم هو جزء من قطع زائد محرقاه F و F'.

يمكن رسم أجزاء أخرى من القطع الزّائد بجعل المسطرة تدور حول F.

ونعلّل انتماء النّقطة P إلى القطع الزّائد كما يأتي:

إنّ النّقطتين F و F' هما المحرقان المذكوران في تعريف القطع، فإذا رمزنا r إلى طول المسطرة أي $r = F'A$ ورمزنا s إلى طول الخيط، أي $s = FP + PA$ وجدنا أنّ الفرق بين المسافتين $F'P$ و FP يحقّق:

$$F'P - FP = F'P + PA - FP - PA$$

وبحسب الشّكل السّابق

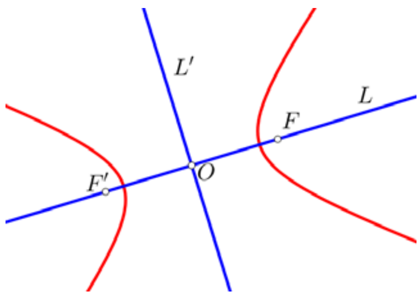
$$= r - s$$

وهذا الفرق يبقى ثابتاً عندما تتحرّك المسطرة حول F'.

التّناظر في القطع الزّائد:

ليكن القطع الزّائد $\mathcal{H}$ الّذي محرقاه F و F'.

إنّ المستقيم L المار بالمحرقين F و F' هو محور تناظر للقطع الزّائد (لأنّ جميع نقاط القطع متناظرة مثنى مثنى بالنّسبة إلى L).



ويسمّى L المحور المحرقي أو المحور الأساسيّ.

أيضاً المستقيم L' محور القطعة المستقيمة $[FF']$ هو محور تناظر آخر للقطع الزّائد ويسمّى المحور اللامحرقي أو المحور الثّانوي.

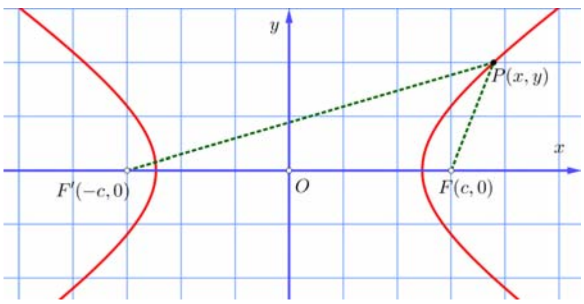
ينتج من ذلك أنّ نقطة تقاطع محوري التّناظر L و L' ولتكن O منتصف $[FF']$ هي مركز تناظر للقطع الزّائد، كما في الشّكل المجاور.

يسمّى طول القطعة المستقيمة $[FF']$ البعد المحرقي ونرمّزه:

$$FF' = 2c \ : \ c > 0$$

المعادلة المختزلة (القياسيّة) لقطع زائد:

ليكن القطع الزّائد $\mathcal{H}$ الّذي محرقاه F و F'. ولنعيّن في مستوي القطع جملة إحداثيّة مبدؤها O منطبق على مركز تناظر القطع، ومحور الفواصل منطبق على المحور المحرقي لهذا القطع. نفترض أنّ $F(c,0)$ فتكون $F'(-c,0)$ ، كما في الشّكل المجاور.



أيّاً كانت النّقطة $P(x,y)$ من القطع عندئذ نكتب بحسب

تعريف القطع الزّائد:

$$|PF - PF'| = 2a$$

وبحسب متراجحات المثلّث PFF' لدينا:

$FF' > |PF - PF'|$ أي: $2c > 2a$ ومنها:

$c > a$.

واعتماداً على دستور المسافة بين نقطتين نكتب:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

أو $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$$

وبتربيع طرفي المساواة نجد:

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2$$

وبعد فك الأقواس والإصلاح نصل إلى:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وتسمّى المعادلة المختزلة (القياسيّة) لقطع زائد، حيث $a^2 + b^2 = c^2$ و $c > a$, $b > 0$ ومحرقاه على محور الفواصل ومركز تناظره في المبدأ O.

تقاطع القطع الزّائد $\mathcal{H}\ :\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ مع المحاور الإحداثيّة:

- التّقاطع مع محور الفواصل يوافق: $y=0$ ، نعوّض في معادلة القطع فنجد: $\frac{x^2}{a^2}=1$ ومنه $x^2=a^2$

وحلها: $x=a$ أو $x=-a$، وبذلك نحصل على نقطتي التّقاطع $A(a,0)\ ,\ A'(a,0)$ اللتين تُسميان ذروتا القطع الزّائد. كما ونسمّي القطعة المستقيمة $[AA']$ القطر الرّئيسي للقطع وطولها $AA'=2a$.

- التّقاطع مع محور التّراتيب يوافق: $x=0$ ، نعوّض في معادلة القطع فنجد: $-\frac{y^2}{b^2}=1$ ومنه $y^2=-b^2$

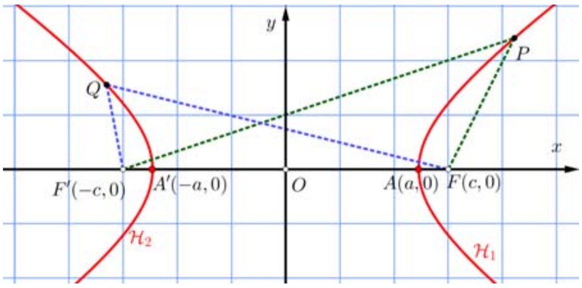
وليس لهذه المعادلة جذور حقيقيّة، فالقطع الزّائد في هذه الحالة لا يتقاطع مع محور التّراتيب.

وهو عبارة عن فرعين منفصلين $\mathcal{H}_1\ ,\ \mathcal{H}_2$ أي: $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_1$

وعندما $P\in\mathcal{H}_1$ يكون $PF'-PF=2a$

وعندما $Q\in\mathcal{H}_2$ يكون $QF-QF'=2a$

كما في الشّكل المجاور.



المستقيمان المقاربان لقطع زائد:

نتأمل معادلة القطع الزّائد $\mathcal{H}\ :\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

نحسب y بدلالة x فنجد: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ حيث: $x\in\,]-\infty,a]\cup[a,+\infty[$

أو $$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

وعندما تصبح $|x|$ كبيرة كفاية فإنّ المقدار $\frac{a^2}{x^2}$ يقترب من الصّفر، ونجد أنّ y تقترب من $y=\frac{b}{a}x$

أو $y=-\frac{b}{a}x$

نسمّي كلّاً من المستقيمين $\Delta_1:y=\frac{b}{a}x$ و $\Delta_2:y=-\frac{b}{a}x$ **مستقيماً مقارباً** للقطع الزّائد $\mathcal{H}$، وهما يساعدان في رسم القطع.

رسم القطع الزّائد اعتماداً على مقاربيه:

لرسم القطع نتّبع ما يلي:

- نمثّل الذّروتين $A(a,0)\ ,\ A'(-a,0)$، وأيضاً نمثّل النّقطتين $B(0,b)\ ,\ B'(0,-b)$ واللتين نطلق عليهما تجاوزاً اسم الذّروتين المرافقتين.

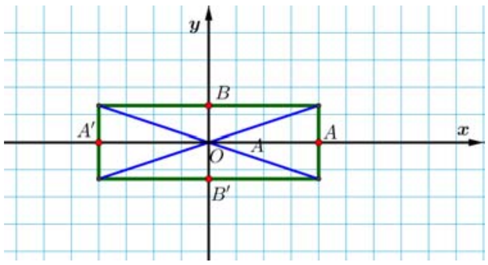
عندئذٍ يحدّد المستقيمان الأفقيّان المرسومان من $B\ ,\ B'$ مع المستقيمين الشّاقوليين المرسومين من $A\ ,\ A'$ مستطيلاً يُطلق عليه اسم **المستطيل المركزي** للقطع الزّائد $\mathcal{H}$، كما في الشّكل (1) .

نلاحظ أنّ ميلي قطري المستطيل هما $\mp\frac{b}{a}$.

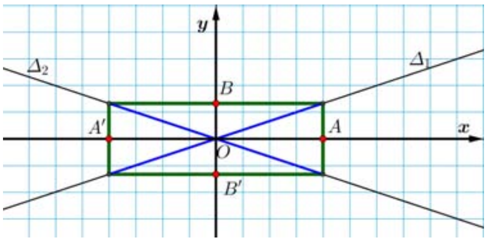
- نمدّد قطري المستطيل فنحصل على المستقيمين المقاربين Δ_1,Δ_2 للقطع الزّائد كما في الشّكل (2).

• نرسم القطع $\mathcal{H}$ ماراً من ذروتيه ومقارباً للمستقيمين Δ_1,Δ_2 كما في الشّكل (3) التّالي.

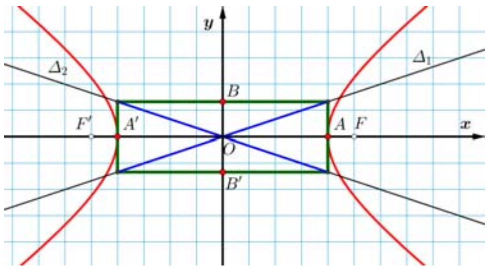
نلاحظ أنّ رؤوس المستطيل تبعد عن مركز القطع مسافة تساوي نصف البعد المحرقي c، لأنّ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ومنه رؤوس المستطيل تقع على الدّائرة التي مركزها مركز القطع والمارّة من محرقيه F,F' كما في الشّكل (3) الآتي:



الشكل (1)



الشكل (2)



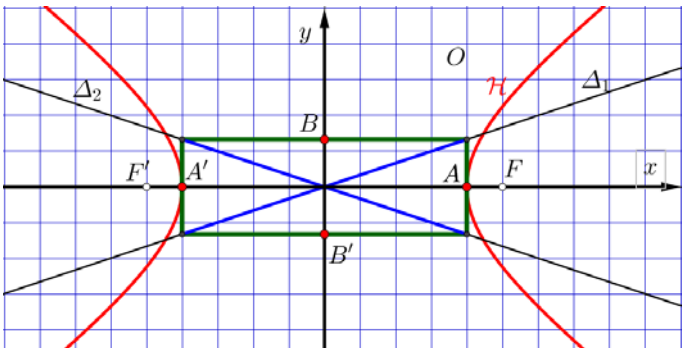
الشكل (3)

مثال

قطع زائد $\mathcal{H}$ معادلته $9x^2-16y^2=144$. عيّن ذراه، محرقيه، ومعادلتي مقاربيه وارسم هذا القطع.

الحل

نقسّم طرفي المعادلة على العدد 144 فنحصل على $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$، وبالمقارنة مع الصّيغة القياسيّة



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نجد أنّ $a^2=16\ ,\ b^2=9$ ، ومنه $a=4\ ,\ b=3$ ومحور القطع منطبق على محور الفواصل.

ذروتا القطع هما $A(4,0)\ ,\ A'(-4,0)$ ،

والذّروتان المرافقتان هما $B'(0,-3)\ ,\ B(0,3)$.

وبما أنّ $c^2=a^2+b^2$ نجد: $c^2=16+9=25$ ومنه فإنّ $c=5$.

محرقا القطع هما: $F(5,0)\ ,\ F'(-5,0)$.

معادلتا المقاربين $\Delta_1:y=\frac{3}{4}x\ ,\ \Delta_2:y=-\frac{3}{4}x$.

وحتّى نرسم القطع نرسم المستطيل المركزي للقطع ونمدّد قطريه فنحصل على المقاربين ونرسم القطع:

مثال

جِدْ معادلة القطع الزّائد الذي تقع ذروتاه عند النّقطتين $(\mp 3,0)$ ويقع محرقاه عند $(\mp 4,0)$.

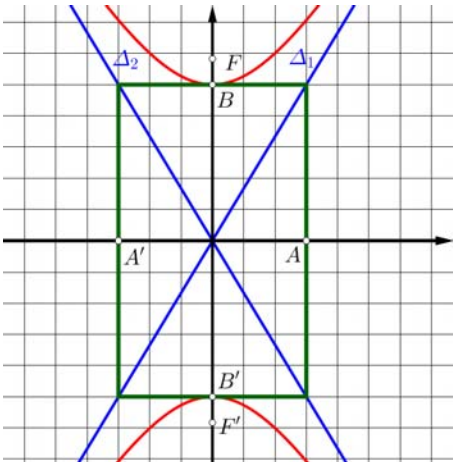
الحل

المحور المحرقي للقطع هو محور الفواصل، فمعادلة القطع لها الصّيغة:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث $a=3\ ,\ c=4$.

وإنّ $b^2=c^2-a^2=16-9=7$ وبالتّالي فإنّ معادلة القطع

هي $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.



القطع الزّائد الذي محوره المحرقي منطبق على محور التّراتيب:

إذا كان محرقا القطع الزّائد الذي مركزه مبدأ الإحداثيّات على محور التّراتيب

كان محرقاه: $F(0,c)\ ,\ F'(0,-c)$ وذروتاه

النّقطتين $B(0,b)\ ,\ B'(0,-b)$

وبطريقة مشابهة للحالة السّابقة نجد أنّ معادلة القطع الزّائد تأخذ الصّيغة:

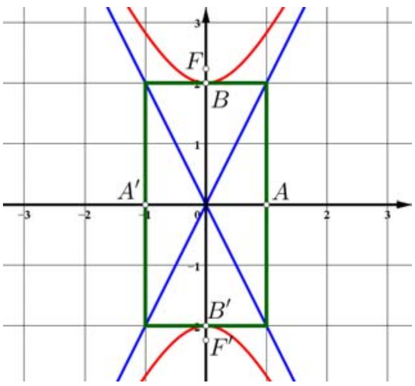
$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ حيث $a=\sqrt{c^2-b^2}$

وذروتاه المرافقتان في هذه الحالة هما $A(a,0)\ ,\ A'(-a,0)$.

لرسم هذا القطع نرسم المستطيل المركزي النّاتج من تقاطع المستقيمين الأفقيّين المارّين بالذّروتين والمستقيمين الشّاقوليين المارّين بالذّروتين المرافقتين، ثمّ نمدّد قطري المستطيل فنحصل على المستقيمين المقاربين للقطع واللذين معادلتيهما $\Delta_1 : y=\frac{b}{a}x\ ,\ \Delta_2 : y=\frac{-b}{a}x$ ، ثمّ نرسم القطع الزّائد مارّاً بالذّروتين $B\ ,\ B'$ محاذياً لمقاربيه كما في الشّكل الآتي:

مثال

قطع زائد $\mathcal{H}$ معادلته $y^2-4x^2=4$. عيّن ذراه، محرقيه، ومعادلتي مقاربيه وارسم هذا القطع.



الحل

نقسّم طرفي المعادلة على العدد 4 فنحصل على $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{1}=1$ ، وبالمقارنة مع الصّيغة القياسيّة $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ نجد أنّ $a^2=1\ ,\ b^2=4$ ، ومنه $a=1\ ,\ b=2$

ومحور القطع منطبق على محور التّراتيب.

ذروتا القطع هما $B(0,2)\ ,\ B'(0,-2)$ ، والذّروتان المرافقتان هما $A(1,0)\ ,\ A'(-1,0)$.

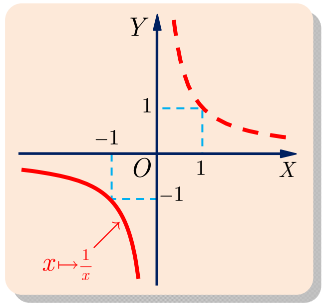
وبما أنّ $c^2=a^2+b^2$ نجد: $c^2=1+4=5$ ومنه فإنّ $c=5$.

محرقا القطع هما: $F(0,\sqrt{5})\ ,\ F'(0,-\sqrt{5})$.

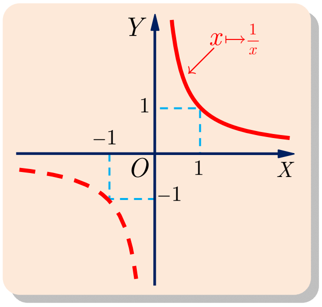
معادلتا المقاربين $\Delta_1 : y=2x\ ,\ \Delta_2 : y=-2x$.

تذكر تابع المقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$

المعرَّف على اجتماع المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ الذي نرمز إليه بالرمز $\mathbb{R}^*$.



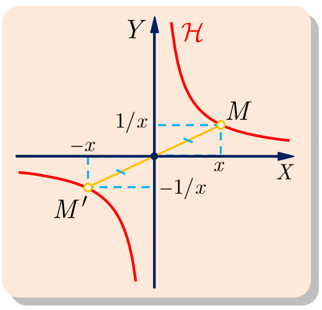
تابع المقلوب متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0[$



تابع المقلوب متناقصٌ تماماً على المجال $]0, +\infty[$

يشير الخطان الشاقوليان في الجدول السابق إلى كون تابع المقلوب غير معرّف عند الصفر. نسمّي الخطَّ البيانيَّ $\mathcal{H}$ الممثِّل للتابع f **قطعاً زائداً**.

في مَعْلَم متجانس يكون المبدأ O مركز تناظر للقطع الزائد $\mathcal{H}$ ذلك لأنّه مهما كان العدد الحقيقي غير المعدوم x، كانت النقطتان $M(x, \frac{1}{x})$ و $M'(-x, -\frac{1}{x})$ من $\mathcal{H}$، اللتين فاصلتاهما بالترتيب x و $-x$، متناظرتين بالنِّسبة إلى المبدأ O.



❶ إذا كانت معادلة القطع: $x^2 - y^2 = a^2$ فهو يقع في الرّبعين الأول والثالث بالنّسبة إلى جملة المقاربين فإنّ: X, Y موجبان معاً أو سالبان معاً ومنه $|XY| = XY$ ومعادلة القطع الزائد المتساوي الساقين منسوب إلى مقاربيه: $\boxed{XY = \frac{a^2}{2} \quad \ldots \text{I}}$

وبما أنّ: $c = a\sqrt{2}$ فإنّ $a^2 = \frac{c^2}{2}$ وبالتعويض نجد أنّ: $\boxed{XY = \frac{c^2}{4}}$

وهي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه، محوره المحرقي منصف الرّبع الأول لجملة المقاربين ومعادلته: $Y = X$ وهو منطبق على المحور $x'x$.

❷ إذا كانت معادلة القطع: $y^2 - x^2 = a^2$ فهو يقع في الرّبعين الثّاني والرّابع بالنّسبة لجملة المقاربين فإنّ إشارتي X, Y مختلفتان ويكون $|XY| = -XY$ فتكون معادلة القطع بالنّسبة إلى مقاربيه: $\boxed{XY = -\frac{a^2}{2} \quad \ldots \text{II}}$

أو: $\boxed{XY = -\frac{c^2}{4}}$

ومعادلة محوره المحرقي $Y=-X$ وهو منطبق على المحور $y'y$.

نقبل أنّ كل معادلة من الشّكل $0 \neq$ ثابت $= X\,Y$ هي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه.

ملاحظة:

$\boxed{1}$... لتعيين ذروتي القطع نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي مع معادلة القطع.

$\boxed{2}$... لتعيين محرقي القطع نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي مع معادلة الدائرة التي مركزها مركز القطع ونصف قطرها c.

مثال: في مستوٍ محدّث بمعلم متجانس مجموعة من النّقاط $M(x,y)$: $xy=4$

1. بيّن أنّ مجموعة النّقاط المفروضة هي قطع زائد متساوي السّاقين.
2. عيّن وسطاءه a,b,c وأوجد معادلة مِحوره المِحرقي.
3. أوجد إحداثيّي كل من ذِروتيه ومِحرقيه .

الحل:

1) إنّ المعادلة من الشّكل: $x.y=\dfrac{a^2}{2}$ فهي تُمثِّل قطعاً زائداً منسوباً إلى مقاربيه المتعامدين $x'x$, $y'y$

فالقطع متساوي السّاقين: فيه $\dfrac{a^2}{2}=4$ ومنه $a=2\sqrt{2}$ عندئذٍ $b=a=2\sqrt{2}$ و $c=a\sqrt{2}=4$

إنّ معادلة المِحور المِحرقي هي $y=x$ لأنّ القطع يقع في الرّبعين الأوّل والثالث

3) لإيجاد الذروتين نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي ومعادلة القطع.

❶... $x=y$

❷... $x.y=4$

نعوض ❶ في ❷ فنجد: $x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$

نعوض في ❶ فتكون الذِّروتان: $A(2,2),\ A'(-2,-2)$

لإيجاد المحرقين نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي ❶... $x=y$

ومعادلة الدائرة (3) $x^2+y^2=16$

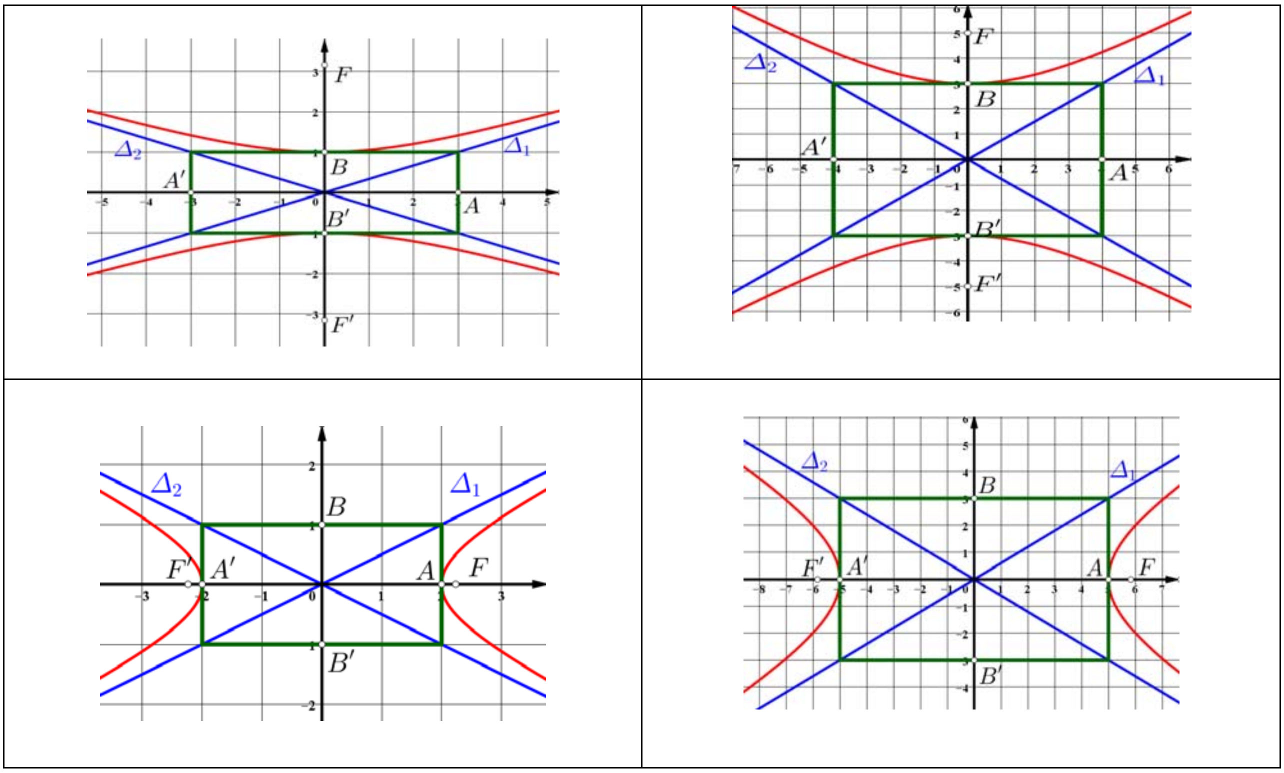
نعوض ❶ في ③ فنجد: $x^2+y^2=16$ ومنه $x^2=8$ إمّا: $x=2\sqrt{2}$ أو: $x=-2\sqrt{2}$

فالمحرقان: $\left.\begin{matrix} F\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right) \\ F'\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right) \end{matrix}\right\}$

تدرّب

① فيما يلي معادلات لأربعة قطوع زائدة مرسومة، أقرن كل قطع زائد مرسوم بمعادلته اعتماداً على المحور المحرقي والذّرا:

① $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ ② $y^2-\frac{x^2}{9}=1$ ③ $16y^2-9x^2=144$ ④ $9x^2-25y^2=225$



② أوجد كلّاً من: ذرا ومحرقي ومقاربي القطع الزائد، ثمّ ارسمه في كل حالة ممّا يأتي:

① $9x^2-4y^2=36$ ② $x^2-y^2+4=0$ ③ $4x^2-y^2=1$ ④ $x^2-y^2=1$

③ أوجد معادلة القطع الزائد في كلّ حالة ممّا يأتي:

❶ محرقاه $(0,\mp 2)$ وذروتاه $(0,\mp 1)$.

❷ ذروتاه $(\mp 1,0)$. ومعادلتا مقاربيه $y=\mp 5x$.

❸ محرقاه $(\mp 3,0)$ ويمر من النقطة $M(4,1)$.

❹ محرقاه $(0,\mp 1)$ وطول قطره الرئيسي يساوي 1.

❺ عيّن لكل من القطوع الآتية: [المركز، المحور المِحرقي، الذُرا، المِحرقين] وارسم القطع.

$$y^2-4x^2=1 \quad , \quad 9y^2=4\left(x^2-9\right) \quad , \quad x^2-5y^2=5$$

تمرينات ومسائل

1 **إختر كل إجابة صحيحة فيما يأتي**

① معادلة القطع الزائد والذي محوره التناظري هو محور التراتيب هي

① $4y^2-9x^2=36$ ② $x^2+4=-y^2$ ③ $4x^2=1+y^2$ ④ $x^2+y^2=1$

② معادلة الدائرة هي.

① $9y^2-9x^2=36$ ② $x^2+4=-y^2$ ③ $4x^2=1+y^2$ ④ $x^2+y^2=1$

③ معادلة القطع الناقص والذي محوره التناظري هو محور التراتيب هي

① $4y^2+x^2=36$ ② $x^2+4=-y^2$ ③ $4x^2=1-y^2$ ④ $x^2+9y^2=1$

2 جد معادلة كلاً من القطوع الآتية:

① **جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 6 و 10 ومركزه $(0,0)$ وقطره الرئيسي منطبق على محور الفواصل.**

② **جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 6 و 10 ومركزه $(0,0)$ وقطره الرئيسي منطبق على محور التراتيب.**

③ **جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وذروته $(6,0)$ والبعد بين محرقيه 20 .**

④ **جد معادلة القطع المكافئ الذي ذروته المبدأ نقطة الأصل ومحرقه $(6,0)$.**

3 موافق أو غير موافق

① $y^2-x^2=36$ ② $y=\sqrt{-6x+12}$

③ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{1}=1$ ④ $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{1}=1$

⑤ $y^2-2x=8$ ⑥ $2y-x^2=8$

⑦ $y^2+x^2=36$ ⑧ $2y^2+2x^2=36$

① المعادلات ① و ③ و ⑥ **قطوع زائدة .**

② المعادلتان ⑦ و ⑧ **تمثل قطوع ناقصيه.**

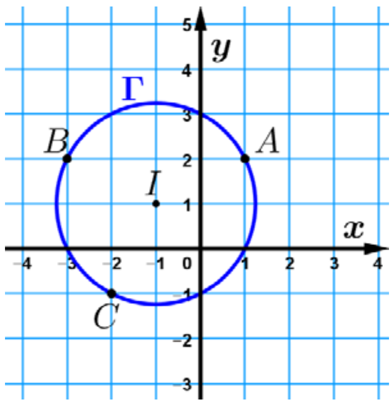
③ المعادلتان ⑦ و ⑧ **تمثل دوائر**

④ المعادلة ② **تمثل معادلة لقطع مكافئ محوره يوازي محور التراتيب.**

4 في مستوٍ منسوب لمعلم متجانس اكتب معادلة القطع النّاقص إذا علمت إنّ

مركز القطع $M_0(4,2)$ ، $b=24$ ، $c=7$ المحور المِحرقي يوازي محور الفواصل

لنتعلّم البحث معاً



5 نتأمل في مستوٍ محدّث بمعلم متجانس النقاط $A(1,2)$ و $B(-3,2)$ و $C(-2,-1)$، والمطلوب:

❶ أثبت أنّ النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة.

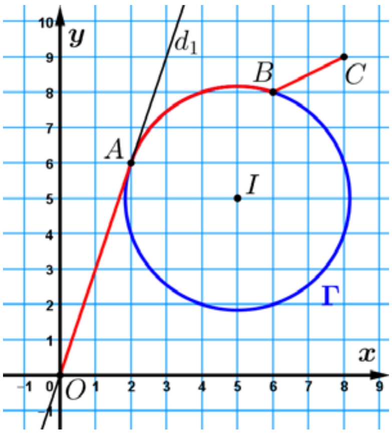
❷ جِدْ معادلة المستقيم d_1 محور القطعة المستقيمة $[AB]$، ثمّ معادلة المستقيم d_2 محور القطعة المستقيمة $[AC]$.

❸ بحل جملة معادلتين بمجهولين جِدْ إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع d_1 و d_2.

❹ احسب البُعد IA، ثمّ استنتج معادلة الدائرة Γ المارة برؤوس المثلث ABC.

❺ مثّل النقاط A و B و C و I ثمّ ارسم الدائرة Γ.

6



نتأمل في الشكل المرافق الدائرة Γ التي مركزها I والتي تمرّ من النقطتين A و B، والمستقيم d_1 مماس الدائرة Γ في النقطة A.

نهدف في هذه المسألة لحساب طول الخط الموضح باللون الأحمر.

نحو الحل

انظر للرسم جانباً الخط هو جزء من المماس في النقطة وقوس من الدائرة والقطعة المستقيمة .

بحثاً عن نتائج مباشرة.

1- اكتب إحداثيات النقاط A و B و C و I.

2- أثبت أنّ المستقيمين (IA) و (IB) متعامدان، واستنتج أنّ القوس $\overset{\frown}{AB}$ ربع الدائرة Γ.

3- احسب نصف قطر الدائرة Γ، ثمّ اكتب معادلتها.

4- احسب الأطوال OA و $\overset{\frown}{AB}$ و BC، ثمّ استنتج الطول المنشود.

الحل

نحو الحل

فهم السؤال. لاحظ أنَّ الخط هو عبارة عن قطع مستقيمة وقوس من دائرة.

البحث عن طريق.

❶ يكفي من أجل ذلك إثبات أنّ الشعاعان AB و AC غير مرتبطين خطيّاً.

❷ لتكن $M\left(x,y\right)$ نقطة من المستقيم d_1، عندئذٍ يكون $MA^2 = MB^2$

وبالنشر والإصلاح نحصل على المعادلة $x = -1$.

نجد بالمثل أنّ معادلة d_2 هي $y = -x$ (أي أنّ المستقيم d_2 هو منصّف الربع الثاني).

❸ بتعويض ما حصلنا عليه من معادلة d_1 في معادلة d_2 نجد، وبسهولة، أنّ نقطة تقاطع d_1 و d_2 هي $I\left(-1,1\right)$.

❹ بتطبيق قانون البُعد نحسب IA نحصل على $IA = \sqrt{5}$. بما أنّ النقطة I نقطة تقاطع محوريّ ضلعين في المثلث ABC، فإنّ النقطة I هي مركز الدائرة Γ المارة برؤوس المثلث ABC، والبُعد IA يمثّلُ نصف قطر الدائرة Γ. نستنتج مما سبق وبالاعتماد على الشكل القياسي لمعادلة الدائرة أنّ معادلة Γ

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 إيجاد معادلة المماس لقطع مُكافِئ علم ميله

ليكن القطع المُكافِئ الذي معادلته: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$، عيّن ذروته ومحرقه ومعادلة دليله ثُمّ أوجد معادلة المماس لهذا القطع الذي ميله $m = -1$.

الحل:

نحو الحل

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد أنّ معادلة القطع المكافئ تكتب على الشّكل:

$(x-1)^2 = -2\left(y + \frac{7}{2}\right)$ عين محوره التناظري وجهة الفتحة و ذروته M_0 واكتب معادلة دليليه

بحثاً عن نتائج مباشرة. ارسم الشّكل وفق المعطيات $p = 1$ $M_0\left(1,-\frac{7}{2}\right)$، $F(1,-4)$، دليله:

$\Delta:\ y = -3$

بحثاً عن طريق. معادلة حزمة المستقيمات التي ميلها $m = -1$ من الشّكل: $y = mx + d$

أي أنّ: $y = -x + d$

نعوّض في معادلة القطع نجد: $x^2 - 4x + 8 + 2d = 0$ ونحسب المميز $\Delta = -16 - 8d$

شرط التّماس: $\Delta = 0$ ومنه: $d = -2$

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

ملاحظة: نقبل بأنّ مماس القطع المكافئ في ذروته عمود على محوره.

8

1. جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 6 و 10 ومركزه $(0,0)$ وقطره الرئيسي منطبق على محور الفواصل.

2. جد معادلة القطع الناقص قطره الرئيسي منطبق على محور الفواصل وطوله 14 والبعد المحرقي 10 ومركزه $(0,0)$.

3. جد معادلة القطع الناقص قطره الرئيسي منطبق على محور التراتيب وذروته $(9,0)$ وطول قطره الكبير 20 ومركزه $(0,0)$.

9

1. جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته $100\pi\ cm^2$ وذروتيه $(\pm 5,0)$.

2. جد معادلة القطع الناقص الذي محوره الرئيسي منطبق على محور التراتيب وذروتيه $(0,\pm 5)$ والنسبة بين طولي قطريه $\frac{10}{3}$.

3. جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 10 و 16 ومحوره الرئيسي منطبق على محور الفواصل.

4. جد قيم الوسيط α التي تجعل المعادلة $x^2-(2\alpha-9)y^2-3=0$ هي معادلة قطع ناقص.

10

1. جد معادلة القطع الزائد محوره المحرقي منطبق على محور التراتيب ذروته $(0,\sqrt{7})$ ويمر بالنقطة $(-2,3)$.

2. جدْ في كل حالة المحور الرئيسي والذرا والمحرقين والبعد المحرقي وطول القطرين الكبير والصغير.

$16x^2+25y^2=400$ ① $\quad 9x^2+16y^2=144$ ② $\quad x^2=1-3y^2$ ③

11 جدْ في كل حالة المحور الرئيسي والذرا والمحرقين والبعد المحرقي وطول القطرين الرئيسي والثانوي.

$$x^2-\frac{25y^2}{9}-25=0$$

$$(x+3)^2-\frac{y^2}{16}-6x-10=0$$

$$25y^2-16x^2=400$$

$$9y^2-x^2-9=0$$

12 جد قيم الوسيط α التي تجعل المعادلة $y^2+\left(-\alpha+\frac{3}{5}\right)x^2+5=0$ هي معادلة قطع زائد.