

التوابع الأصلية

تعريف التابع الأصلي :

بفرض f تابع معرف على المجال $I \subseteq R$ نقول إن F تابع أصلي على المجال I للتابع f إذا وفقط إذا تحقق:

♥ التابع F اشتقاقي على المجال I .

♥ أيًا كان $x \in I$ فإن $\dot{F}(x) = f(x)$.

مثال: ليكن لدينا التابعان المعرفان على R وفق :

$$f(x) = 3x^2 - x + 4 \quad F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x + 2$$

نلاحظ أن $F(x)$ اشتقاقي على R ويحقق $\dot{F}(x) = 3x^2 - x + 4 = f(x)$ ومنه $F(x)$ تابع أصلي لـ f

قواعد في التوابع الأصلية:

- ① $f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = c$
- ② $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax + c \quad : a \neq 0$
- ③ $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1$
- ④ $f(x) = (ax + b)^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1, a \neq 0$
- ⑤ $f(x) = \dot{H}(x) \cdot H^r(x) \Rightarrow F(x) = \frac{H^{r+1}(x)}{r+1} + c \quad : r \neq -1$
- ⑥ $f(x) = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|g(x)| + c \quad : g(x) \neq 0$
- ⑦ $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$
- ⑧ $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + c \quad : a \neq 0$
- ⑨ $f(x) = \dot{g}(x) e^{g(x)} \Rightarrow F(x) = e^{g(x)} + c$
- ⑩ $f(x) = \sin(ax + b) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax + b) + c \quad : a \neq 0$
- ⑪ $f(x) = \cos(ax + b) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax + b) + c \quad : a \neq 0$

تذكرة : $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

⑫ $f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax + b)} = 1 + \tan^2(ax + b) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax + b) + c \quad : a \neq 0$

⑬ $f(x) = \frac{1}{\sin^2(ax + b)} = 1 + \cot^2(ax + b) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax + b) + c \quad : a \neq 0$

ميز بين القاعدتين

$\dot{H}(x) \cdot H^r(x)$
يجب ان يكون أس $H(x)$
يساوي $r \in R / \{-1\}$

$\frac{\dot{g}(x)}{g(x)}$
يجب ان يكون أس $g(x)$
يساوي (1).

رؤية شاملة في التكامل و التوابع الأصلية

112

تمرين شامل: اوجد التابع الأصلي لكل تابع مما يلي :

القاعدة : $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$: $n \neq -1$

1) $f(x) = 3x^2 - 5x^4 + 1$
 $F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{5x^5}{5} + x + c = x^3 - x^5 + x + c$

2) $f(x) = \frac{x^5 + 3x^3}{x^2}$
 $= \frac{x^5}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} = x^3 + 3x$
 $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + c$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x^3}$
 $= \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^{-2} - x^{-3}$
 $F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$

4) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$
 $= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}$
 $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c$
 $= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

5) $f(x) = x\sqrt{x} - e$
 $= x \cdot x^{\frac{1}{2}} - e = x^{\frac{3}{2}} - e$
 $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - ex + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - ex + c$

6) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \ln 2$
 $= \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \ln 2 = x^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \ln 2 = x^{\frac{5}{3}} - \ln 2$
 $F(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - (\ln 2)x + c$
 $= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - (\ln 2)x + c$

7) $f(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}}$
 $= \frac{x}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}$
 $= x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$
 $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$

8) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$
 $= \frac{2}{\sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} = 2x^{-\frac{3}{4}}$
 $F(x) = \frac{2x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 8\sqrt[4]{x} + c$

9) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}$
 $= \frac{x^2 + 4x + 4}{x^{\frac{1}{2}}} = (x^2 + 4x + 4) \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
 $= x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 4x \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$
 $= x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$
 $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{4x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{4x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$
 $= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 8\sqrt{x} + c$

10) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
 $= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$
 $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$
 $= \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + c$

$$f(x) = (ax + b)^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1 \quad : a \neq 0$$

$$11) f(x) = (2x - 3)^4$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x - 3)^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{10} \cdot (2x - 3)^5 + c$$

$$12) f(x) = \frac{3}{(1-x)^3}$$

$$= 3(1-x)^{-3}$$

$$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{-1} \cdot \frac{(1-x)^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{3}{2(1-x)^2} + c$$

$$13) f(x) = \sqrt{3x-2}$$

$$= (3x-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9} \sqrt{(3x-2)^3} + c$$

$$f(x) = \sqrt{x+a} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x+a}$$

ملاحظة: كل تمرين من الشكل:
 حل: نضيف x (خارج الجذر) المقدار a ونطرح a ونضيف a ونطرح a حسب إشارة a داخل الجذر.

$$16) f(x) = x\sqrt{x+1}$$

$$= [(x+1) - 1](x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}} - 1(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{1} \cdot \frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{1} \cdot \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + c$$

$$17) f(x) = x\sqrt{x-2}$$

$$= [(x-2) + 2](x-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x-2)(x-2)^{\frac{1}{2}} + 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x-2)^{\frac{3}{2}} + 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$14) f(x) = \sqrt[3]{2-x}$$

$$= (2-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$F(x) = \frac{1}{-1} \cdot \frac{(2-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= -\frac{3}{4} \sqrt[3]{(2-x)^4} + c$$

$$15) f(x) = \sqrt[5]{4x^2 - 4x + 1}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

$$f(x) = \sqrt[5]{(2x-1)^2} = (2x-1)^{\frac{2}{5}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c$$

$$= \frac{5}{14} \sqrt[5]{(2x-1)^7} + c$$

$$F(x) = \frac{1}{1} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{(x-2)^5} + \frac{4}{3} \sqrt{(x-2)^3} + c$$

$$18) f(x) = (x+4)\sqrt{x-1}$$

$$= (x-1+1+4)(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= [(x-1) + 5](x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}} + 5(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x-1)^{\frac{3}{2}} + 5(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{1} \cdot \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 5 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{(x-1)^5} + \frac{10}{3} \sqrt{(x-1)^3} + c$$

0955561648 طارق سعد الدين

0932791896 خلدون سيروان

0933756454 حسان البيطار

$$\begin{aligned}
 19) f(x) &= x \cdot (x^2 - 3)^3 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{H} \cdot \frac{(x^2 - 3)^3}{H^r} \\
 F(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 3)^4}{4} + c \\
 &= \frac{1}{8} \cdot (x^2 - 3)^4 + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20) f(x) &= \frac{x^2}{(x^3 + 8)^4} \\
 &= x^2 \cdot (x^3 + 8)^{-4} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{H} \cdot \frac{(x^3 + 8)^{-4}}{H^r} \\
 F(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 + 8)^{-3}}{-3} + c \\
 &= \frac{-1}{9(x^3 + 8)^3} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21) f(x) &= \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \\
 &= \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{(2x - 1)(x^2 - x + 1)^{-\frac{1}{2}}}{H} \\
 F(x) &= \frac{(x^2 - x + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
 &= 2\sqrt{x^2 - x + 1} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22) f(x) &= \frac{4x + 8}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \\
 &= (4x + 8)(x^2 + 4x + 5)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2 \frac{(2x + 4)(x^2 + 4x + 5)^{-\frac{1}{2}}}{H} \\
 F(x) &= 2 \frac{(x^2 + 4x + 5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
 &= 4\sqrt{x^2 + 4x + 5} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23) f(x) &= \frac{\ln x}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{H^r} \\
 F(x) &= \frac{(\ln x)^2}{2} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24) f(x) &= \frac{\ln^3 x}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln^3 x}{H^r} \\
 F(x) &= \frac{(\ln x)^4}{4} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25) f(x) &= \frac{1 + \ln x}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \frac{(1 + \ln x)}{H^r} \\
 F(x) &= \frac{(1 + \ln x)^2}{2} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26) f(x) &= \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}} \\
 &= \frac{1}{x(1 + \ln x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{(1 + \ln x)^{-\frac{1}{2}}}{H^r} \\
 F(x) &= \frac{(1 + \ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1 + \ln x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27) f(x) &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{H^r} \\
 F(x) &= 2 \cdot \frac{(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\
 &= \frac{4}{3} \sqrt{(1 + \sqrt{x})^3} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 2 \cdot \frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
 &= 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29) f(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} \\
 &= \sqrt{\frac{x-1}{x^4 \cdot x}} = \frac{1}{|x^2|} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x}} \\
 &= \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30) f(x) &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \\
 &= \frac{\sin^{-1} x}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 31) f(x) &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
 &= \sin x \cdot \cos^{-2} x \\
 &= - \frac{(-\sin x)}{\dot{H}} \cdot \frac{\cos^{-2} x}{H^r} \\
 F(x) &= - \frac{\cos^{-1} x}{-1} + c = \frac{1}{\cos x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 32) f(x) &= \frac{\sin^4 x \cdot \cos x}{H^r \dot{H}} \\
 F(x) &= \frac{\sin^5 x}{5} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 33) f(x) &= \sin 2x \cdot \sin x \\
 &= 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \\
 &= 2 \cos x \cdot \frac{\sin^2 x}{H^r} \\
 F(x) &= 2 \frac{\sin^3 x}{3} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 34) f(x) &= \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} \\
 &= \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x, (\tan x)' = 1 + \tan^2 x \quad \text{نكن :} \\
 &= \frac{\tan^3 x}{H^r} \cdot \frac{(1 + \tan^2 x)}{\dot{H}} \\
 F(x) &= \frac{\tan^4 x}{4} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 35) f(x) &= \cos^3 x \\
 &= \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \\
 &= \left(\cos x - \frac{\cos x \sin^2 x}{H^r} \right) \Rightarrow F(x) \\
 &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 36) f(x) &= \sin^3 x \\
 &= \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \\
 &= \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x \\
 &= \sin x + \frac{(-\sin x)}{\dot{H}} \cdot \frac{\cos^2 x}{H^r} \\
 F(x) &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|g(x)| + c$$

$$\ln|g(x)| = \begin{cases} \ln(g(x)) + c & D \text{ موجب تماماً على } \\ \ln(-g(x)) + c & D \text{ سالب تماماً على } \end{cases}$$

$$37) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} : x \in R$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{\cancel{1}}}{(x^2 + 1)_{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

$$38) f(x) = \frac{5}{2x - 1} : x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{2^{\cancel{1}}}{(2x - 1)_{\cancel{2}}}$$

$$F(x) = \frac{5}{2} \cdot \ln|2x - 1| + c$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \ln(-2x + 1) + c$$

ملاحظة:

كل تابع كسري حدودي درجة بسطه اكبر او تساوي درجة مقامه لإيجاد تابعه الأصلي أو لأنقسم البسط على المقام ثم نكامل.

$$39) f(x) = \frac{2x-3}{x-1} : x \in]1, +\infty[$$

$$f(x) = 2 - \frac{1^{\cancel{1}}}{(x-1)_{\cancel{1}}}$$

$$F(x) = 2x - \ln|x - 1| + c = 2x - \ln(x - 1) + c$$

$$\frac{x-1}{x-1} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{2x-3}{x-1}$$

$$40) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} : x \in]-\infty, 1[$$

$$f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1} = x + 3 + 4 \cdot \frac{1^{\cancel{1}}}{(x-1)_{\cancel{1}}}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln|x - 1| + c = \frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln(-x + 1) + c$$

$$\frac{x+3}{x-1} \frac{x^2+2x+1}{x-1} = \frac{x^2+2x+1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} + \frac{2x+1}{x-1} = x + \frac{3x+1}{x-1} = x + \frac{3x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x + 3 + \frac{4}{x-1}$$

$$41) f(x) = \frac{e^{x^{\cancel{1}}}}{(e^x + 1)_{\cancel{1}}} : x \in R$$

$$F(x) = \ln|e^x + 1| + c = \ln(e^x + 1) + c$$

$$43) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} : x \in R$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$= \frac{(e^x)^{\cancel{1}}}{(e^x + 1)_{\cancel{1}}} + \frac{(-e^{-x})^{\cancel{1}}}{(1 + e^{-x})_{\cancel{1}}}$$

$$F(x) = \ln|e^x + 1| + \ln|1 + e^{-x}| + c$$

$$= \ln(e^x + 1) + \ln(1 + e^{-x}) + c$$

$$42) f(x) = \frac{2}{e^x + 1} : x \in R$$

نضرب البسط والمقام بـ e^{-x} :

$$= \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -2 \cdot \frac{(-e^{-x})^{\cancel{1}}}{(1 + e^{-x})_{\cancel{1}}}$$

$$F(x) = -2 \ln|1 + e^{-x}| + c$$

$$= -2 \ln(1 + e^{-x}) + c$$

$$44) f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x} \quad : x \in]0, 1[$$

نقسم البسط والمقام على x :

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{x^g}}{(\ln x)^{x^g}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln|\ln x| + c = \ln(-\ln x) + c$$

$$45) f(x) = \tan x \quad : x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = - \frac{(-\sin x)^{x^g}}{(\cos x)^{x^g}}$$

$$F(x) = -\ln|\cos x| + c$$

$$= -\ln(-\cos x) + c$$

$$46) f(x) = \cot x \quad : x \in]0, \pi[$$

$$= \frac{(\cos x)^{x^g}}{(\sin x)^{x^g}}$$

$$F(x) = \ln|\sin x| + c = \ln(\sin x) + c$$

$$49) f(x) = e^{2x-3} + e^{-x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} - e^{-x} + c$$

$$50) f(x) = e^{1-x} + e$$

$$F(x) = -e^{1-x} + ex + c$$

$$51) f(x) = x \cdot e^{x^2+4} + \frac{1}{e^{4x}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{x^2+4} + e^{-4x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+4} + \frac{1}{-4}e^{-4x} + c$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2+4} - \frac{1}{4}e^{-4x} + c$$

$$47) f(x) = \frac{1}{\sin 2x} \quad : x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

نعلم ان:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{(-\sin x)}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(-\ln|\cos x| + \ln|\sin x|) + c$$

$$= \frac{1}{2}(-\ln(\cos x) + \ln(\sin x)) + c$$

$$48) f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x} \quad :]1, +\infty[$$

$$= \frac{1}{x \ln x} + \frac{\ln x}{x \ln x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \ln|\ln x| + \ln|x| + c$$

$$= \ln(\ln x) + \ln(x) + c$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c \quad \text{القاعدة}$$

$$f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c \quad : a \neq 0$$

$$f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)} \Rightarrow F(x) = e^{g(x)} + c$$

$$52) f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{x^g} \cdot e^{(\sqrt{x})^{x^g}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + c$$

$$53) f(x) = e^{x+e^x}$$

$$= e^x \cdot e^{e^x}$$

$$F(x) = e^{e^x} + c$$

$$54) f(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}} - 6}{x^2}$$

$$= \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2} - \frac{6}{x^2} = \left(\frac{1}{x^2}\right)_{\downarrow g} e^{(1-\frac{1}{x})^{1/g}} - 6x^{-2}$$

$$F(x) = e^{1-\frac{1}{x}} - \frac{6x^{-1}}{-1} + c = e^{\frac{x-1}{x}} + \frac{6}{x} + c$$

القاعدة:

$$f(x) = \sin(ax) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c \quad : a \neq 0$$

$$f(x) = \cos(ax) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax) + c \quad : a \neq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax)} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \tan(ax) + c \quad : a \neq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(ax)} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a} \cot(ax) + c \quad : a \neq 0$$

$$55) f(x) = 4 \cos 2x - 9 \sin 3x$$

$$F(x) = \frac{4}{2} \sin 2x + \frac{9}{3} \cos 3x + c$$

$$= 2 \sin 2x + 3 \cos 3x + c$$

$$57) f(x) = \cos^2 x$$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$56) f(x) = \sin^2 x$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

ملاحظة: بعض التمارين أحياناً نضطر لاستخدام دساتير التحويل من جداء إلى مجموع إذا كانت الزاويتان مختلفتان.

مثلاً: $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 4x$

دساتير التحويل من جداء إلى مجموع:

$$\heartsuit \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\heartsuit \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\heartsuit \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\heartsuit \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

$$58) f(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x$$

لاحظ: أحدهما ليس مشتق الآخر والزاويتان مختلفتان إذاً نستطيع تطبيق دساتير التحويل من جداء إلى مجموع.

$$\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2} [\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)] = \frac{1}{2} [\sin 5x + \sin x]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (\sin 5x + \sin x) \quad \text{بالتعويض:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \cos 5x - \cos x \right) + c$$

علاء رحال 0952480990

ياسر الساسة 0949198068

وائل زعتري 0933699123

$$59) f(x) = \cos 4x \cdot \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(4x + 2x) + \cos(4x - 2x)] = \frac{1}{2} [\cos 6x + \cos 2x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + c$$

تدرب صفحة 222

(1) في كل من الحالات الآتية، تحقق أن F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{1} \quad I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad F(x) = \tan x - x , \quad f(x) = \tan^2 x$$

$$\hat{F}(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x) \quad \text{اشتقاقي على المجال } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{2} \quad I = \mathbb{R} , \quad F(x) = x \cos x , \quad f(x) = \cos x - x \sin x$$

$$\hat{F}(x) = \cos x - x \sin x = f(x) \quad \text{اشتقاقي على المجال }]-\infty, +\infty[$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{3} \quad I =]0, +\infty[, \quad F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 , \quad f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

اشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$\hat{F}(x) = 2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2 \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = 2 \left(\frac{x^4 - 1}{x^3}\right) = f(x)$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{4} \quad I =]0, 1[, \quad F(x) = \frac{-1}{x(x-1)} , \quad f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

اشتقاقي على المجال $]0, 1[$

$$\hat{F}(x) = \frac{0 - (x-1+x)(-1)}{x^2(x-1)^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = f(x)$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{5} \quad I =]0, +\infty[, \quad F(x) = x \ln x - x , \quad f(x) = \ln x$$

$$\hat{F}(x) = (1) \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x = f(x) \quad \text{اشتقاقي على المجال }]0, +\infty[$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{6} \quad I =]1, +\infty[, \quad F(x) = \ln(\ln x) , \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x} = f(x)$$

اشتقاقي على المجال $]1, +\infty[$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{7} I = R, \quad F(x) = x - \ln(1 + e^x), \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x} = f(x)$$

ومنه \hat{F} تابع أصلي للتابع f على المجال I

$$\boxed{8} I = R, \quad F(x) = 2\sqrt{e^x}, \quad f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$\hat{F}(x) = 2 \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \sqrt{e^x} = f(x)$$

ومنه \hat{F} تابع أصلي للتابع f على المجال I

$$]-\infty, +\infty[\text{ المجال }]-\infty, +\infty[$$

(2) في كل من المجالات الآتية تحقق أن G, F تابعان أصليان للتابع f على المجال I

$$\boxed{1} I =]1, +\infty[, \quad G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}, \quad F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$$

G, F اشتقاقيان على المجال $]1, +\infty[$

$$\hat{F}(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1) - (1)(x^2 + 3x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}$$

$$\hat{G}(x) = \frac{(2x + 7)(x - 1) - (1)(x^2 + 7x - 5)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}$$

$]1, +\infty[$ ومنه $\hat{F}(x) = \hat{G}(x)$ تابعان أصليان للتابع $f: x \rightarrow \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}$

$$\boxed{2} I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad F(x) = \tan^2 x$$

G, F اشتقاقيان على المجال $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ، لاحظ أن :

$$: 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$F(x) = \tan^2 x = 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\hat{F}(x) = \frac{0 - 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} - 0 = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$\hat{G}(x) = \frac{0 - 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ على المجال $f: x \rightarrow \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ تابعان أصليان للتابع $\hat{F}(x) = \hat{G}(x)$

$$\boxed{3} I = \left] \frac{5}{4}, +\infty \right[, \quad G(x) = \frac{-4x^2 + 2x - 9}{10 - 8x}, \quad F(x) = \frac{2x^2 - 3x + 7}{4x - 5}$$

G, F اشتقاقيان على المجال $\left] \frac{5}{4}, +\infty \right[$

$$\hat{F}(x) = \frac{(4x - 3)(4x - 5) - (4)(2x^2 - 3x + 7)}{(4x - 5)^2} = \frac{8x^2 - 20x - 13}{(4x - 5)^2}$$

$$\hat{G}(x) = \frac{(-8x + 2)(10 - 8x) - (-8)(-4x^2 + 2x - 9)}{(10 - 8x)^2} = \frac{32x^2 - 80x - 52}{[-2(4x - 5)]^2}$$

$$= \frac{4(8x^2 - 20x - 13)}{4(4x - 5)^2} = \frac{8x^2 - 20x - 13}{(4x - 5)^2}$$

$\left] \frac{5}{4}, +\infty \right[$ على المجال $f: x \rightarrow \frac{8x^2 - 20x - 13}{(4x - 5)^2}$ تابعان أصليان للتابع $\hat{F}(x) = \hat{G}(x)$

$$\boxed{4} I = \mathbb{R} \quad , \quad G(x) = \frac{5 + 3x^2}{2(1 + x^2)} \quad , \quad F(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\hat{F}(x) = \frac{0 - (2x)(1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

]-∞, +∞[اشتقاقيان على المجال G, F

$$\hat{G}(x) = \frac{(6x)(2(1 + x^2)) - (4x)(5 + 3x^2)}{4(1 + x^2)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

I على المجال f: x → $\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ تابعه G, F تابعان اصليان للتابع $\hat{F}(x) = \hat{G}(x)$

$$\boxed{5} I = \mathbb{R} \quad , \quad G(x) = 2 - \cos^2 x \quad , \quad F(x) = \sin^2 x$$

$$\hat{F}(x) = 2 \sin x \cos x$$

]-∞, +∞[اشتقاقيان على المجال G, F

$$\hat{G}(x) = -2 \cos x (-\sin x) = 2 \sin x \cos x$$

I على المجال f: x → 2 sin x cos x تابعه G, F تابعان اصليان للتابع $\hat{F}(x) = \hat{G}(x)$

(3) ايكون التابعان G, F الاثنيان تابعين اصليين للتابع f ذاته على R

$$G(x) = \sin x - 3 \sin^3 x \quad , \quad F(x) = \sin(3x) - 2 \sin x$$

]-∞, +∞[اشتقاقيان على المجال G, F

$$\begin{aligned} \hat{G}(x) &= \cos x - 9 \sin^2 x \cos x = \cos x - 9(1 - \cos^2 x) \cos x \\ &= \cos x - 9 \cos x + 9 \cos^3 x = 9 \cos^3 x - 8 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= 3 \cos 3x - 2 \cos x = 3(4 \cos^3 x - 3 \cos x) - 2 \cos x \quad (\text{نعلم ان } \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x) \\ &= 12 \cos^3 x - 11 \cos x \end{aligned}$$

R على $\hat{F}(x) \neq \hat{G}(x)$ ومنه G, F ليسا تابعان اصليان لنفس التابع على

تدريب صفحة 227

(1) في كل من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً للتابع f(x) على المجال I

$$\boxed{1} I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$$

$$F(x) = 8 \frac{x^4}{4} + 6 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + 3x + c$$

$$F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + c$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x} + c \end{aligned}$$

$$\boxed{2} I =]0, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$f(x) = x^{-4}$$

$$F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$\boxed{4} I =]1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{-1} \cdot \frac{(1-x)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{1-x} + c$$

$$\boxed{3} I =]-\infty, 0[\quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - 3x^{-2} = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-2}$$

$$\boxed{5} I =]-\infty, -1[\quad , \quad f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

$$f(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{(x^2+x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{(x^2+x)} + c$$

$$\boxed{6} I =]1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$f(x) = \frac{4x-2}{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}} = (4x-2)(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \frac{(2x-1)}{H} \frac{(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}}{H^r}$$

$$F(x) = 2 \frac{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{x^2-x} + c$$

$$\boxed{7} I =]-\infty, \frac{3}{4}[\quad , \quad f(x) = \frac{5}{4x-3}$$

$$f(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4x-3}$$

$$F(x) = \frac{5}{4} \ln|4x-3| + c = \frac{5}{4} \ln(-4x+3) + c$$

$$\boxed{8} I =]0, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{3x+1}{2x}$$

$$f(x) = \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \ln|x| + c$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \ln x + c = \frac{3}{2}x + \ln \sqrt{x} + c$$

(2) في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f: x \rightarrow f(x)$ على المجال I

$$\boxed{1} I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \cos^2 3x$$

نعلم ان: $(\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2})$

$$f(x) = \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \sin 6x + c$$

$$\boxed{2} I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \cos^4 x$$

$$f(x) = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\boxed{9} I =]-\infty, 2[\quad , \quad f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$F(x) = x + 3 \ln|x-2| + c$$

$$= x + 3 \ln(-x+2) + c$$

$$\boxed{10} I = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[\quad , \quad f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{2x-1}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \ln|2x-1| + c$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \ln(2x-1) + c$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$$\boxed{3} I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \cos 3x \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$$

$$= \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\boxed{4} I =]0, \pi[\quad , \quad f(x) = \cot^2 x$$

$$f(x) = \frac{1 + \cot^2 x}{1} - 1$$

$$F(x) = -\cot x - x + c$$

$$\boxed{5} \quad I = \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\quad , \quad f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$F(x) = -\ln|\cos x| + c = -\ln(-\cos x) + c$$

$$\boxed{6} \quad I =]0, \pi[\quad , \quad f(x) = \cot x$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$F(x) = \ln|\sin x| + c = \ln(\sin x) + c$$

$$\boxed{7} \quad I = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[\quad , \quad f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$$

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{5} \sqrt{(2x-1)^5} + c$$

$$\boxed{8} \quad I = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}} = (3-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{-2} \cdot \frac{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{3-2x} + c$$

$$\boxed{9} \quad I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$$

$$f(x) = x(x^2+1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{10} \sqrt[3]{(x^2+1)^5} + c$$

$$\boxed{10} \quad I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\quad , \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$f(x) = \frac{x}{(3-x^2)^{\frac{1}{2}}} = x(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2}(-2x)(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{(3-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{3-x^2} + c$$

التكامل المحدد و خواصه

تعريف التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال :

ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I ، و ليكن F واحد توابعه الأصلية على هذا المجال و ليكن a و b عددين من I . عندئذ لا يتعلق العدد $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ بالتابع الأصلي المختار للتابع f نسمي هذا العدد

التكامل المحدد للتابع f من a إلى b ، و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x) dx$

إذن $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ حيث F تابع أصلي ما للتابع f على I

خواص التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال :

ليكن f و g تابعين مستمرين على مجال I ، وليكن a و b عددين من I ، و λ عدد حقيقي.

عندئذ تتحقق الخواص الآتية :

$$1) \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$2) \int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

تدرب صفحة 235 رقم (1):

احسب التكاملات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{[1]} I &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos 2x} \, dx \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos 2x)} \, dx \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(2 \sin^2 x)} \, dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 x} \, dx \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2|\sin x| \, dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2 \sin x \, dx \\ &= 2[\cos x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 2\left(\cos 2\pi - \cos \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 2(1 - 0) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[2]} J &= \int_{-1}^2 x|x-1| \, dx \\ &\quad]-1,1[\text{ سالب تماماً على } \\ &\quad]1,2[\text{ موجب تماماً على } \\ &= \int_{-1}^1 x(-x+1) \, dx + \int_{1}^2 x(x-1) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-x^2+x) \, dx + \int_{1}^2 (x^2-x) \, dx \\ &= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^2 \\ &= \left[\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[3]} k &= \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x}) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{-2} - 1 = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{[4]} L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} \, dx$$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد أن:

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^{-1} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) \, dx \\ &= [2x + \ln|x-1|]_{-2}^{-1} \\ &= [2x + \ln(-x+1)]_{-2}^{-1} \\ &= (-2 + \ln 2) - (-4 + \ln 3) \\ &= -2 + \ln 2 + 4 - \ln 3 = 2 + \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[5]} M &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= [-\ln(\cos x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\ln \frac{1}{2}\right) - \left(-\ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \ln 2 + \ln \sqrt{3} - \ln 2 = \ln \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[6]} N &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx \\ &= [\ln|\cos x + \sin x|]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= [\ln(\cos x + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln(0+1) - \ln(1+0) = 0 \end{aligned}$$

طريقة التكامل بالتجزئة

مبرهنة : نتامل تابعين u و v قابلين للاشتقاق على مجال I . نفترض ان المشتقان لـ u و v مستمران على I عندئذ اياً يكن العدان a و b من I كان

$$\int_a^b u(x) \cdot \dot{v}(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot \dot{u}(x) dx$$

♥ نستخدم التكامل بالتجزئة للتكاملات من الشكل:

1) $\int_a^b x^m \cdot \sin(ax) dx$ 2) $\int_a^b x^m \cdot \cos(ax) dx$ 3) $\int_a^b x^m \cdot e^{ax} dx$ 4) $\int_a^b x^m \cdot \ln x dx$

ملاحظة : في الحالات 1 و 2 و 3 نضع دائماً $u(x) = x^m$ ، في الحالة 4 نضع $u(x) = \ln x$

تمرين : اوجد باستخدام التكامل بالتجزئة:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot \sin x dx$$

$$u(x) = 2x \Rightarrow \dot{u}(x) = 2$$

$$\dot{v}(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$$

$$I = [-2x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \cos x dx = [-2x \cos x + 2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0 + 2) - (0 + 0) = 2$$

تدرب صفحة 236 رقم (2): احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل التجزئة:

$$\boxed{1} I = \int_1^e x \ln x dx$$

$$u(x) = \ln x \rightarrow \dot{u}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\dot{v}(x) = x \rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - 0 \right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\boxed{2} J = \int_0^{\pi} (x-1) \cos x dx$$

$$u(x) = x-1 \rightarrow \dot{u}(x) = 1$$

$$\dot{v}(x) = \cos x \rightarrow v(x) = \sin x$$

$$J = [(x-1) \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= [(x-1) \sin x]_0^{\pi} + [\cos x]_0^{\pi}$$

$$= (0-0) + (-1-1) = -2$$

$$\boxed{3} k = \int_0^1 (x+2)e^x dx$$

$$u(x) = x+2 \rightarrow \dot{u}(x) = 1$$

$$\dot{v}(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x$$

$$k = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= [(x+2)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$= (3e-2) - (e-1) = 2e-1$$

$$\boxed{4} L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x dx$$

$$u(x) = x \rightarrow \dot{u}(x) = 1$$

$$\dot{v}(x) = \sin 3x \rightarrow v(x) = \frac{-1}{3} \cos 3x$$

$$L = \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cos 3x \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{9} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{9} - 0 \right) + (0-0) = \frac{\pi}{9}$$

$$\boxed{5} M = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$$

$$u(x) = e^x \rightarrow \dot{u}(x) = e^x$$

$$v(x) = \cos x \rightarrow \dot{v}(x) = -\sin x$$

$$M = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$T = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx \quad \text{نرمز بـ}$$

$$M = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - T \quad \boxed{*}$$

$$T = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx \quad \text{نحسب تكامل } T \text{ بالتجزئة :}$$

$$u(x) = e^x \rightarrow \dot{u}(x) = e^x$$

$$v(x) = \sin x \rightarrow \dot{v}(x) = \cos x$$

$$T = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$$

$$= \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} + M$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$$M = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} - M$$

$$2M = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} + \left[e^x \cos x \right]_0^{\pi}$$

$$2M = (0 - 0) + (-e^{\pi} - 1)$$

$$2M = -e^{\pi} - 1$$

$$M = \frac{-1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

$$\boxed{6} N = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$u(x) = e^x \rightarrow \dot{u}(x) = e^x$$

$$v(x) = \sin x \rightarrow \dot{v}(x) = \cos x$$

$$N = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$$

$$T = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx \quad \text{نرمز بـ}$$

$$N = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} + T \quad \boxed{*}$$

$$T = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx \quad \text{نحسب تكامل } T \text{ بالتجزئة :}$$

$$u(x) = e^x \rightarrow \dot{u}(x) = e^x$$

$$v(x) = \cos x \rightarrow \dot{v}(x) = -\sin x$$

$$T = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$= \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - N$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$$N = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} + \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi} - N$$

$$2N = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi} + \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi}$$

$$2N = (e^{\pi} + 1) + 0$$

$$N = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

تدرب صفحة 236 رقم (3): جد تابعاً أصلياً للتابع $f: x \rightarrow f(x)$ على المجال I :

$$\boxed{1} I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cos x$$

$$f(t) = t \cos t \quad \text{بفرض } x = t \text{ إذاً :}$$

$$u(t) = t \rightarrow \dot{u}(t) = 1$$

$$v(t) = \cos t \rightarrow \dot{v}(t) = -\sin t$$

$$\int_0^x t \cos t \, dt = \left[t \cdot \sin t \right]_0^x - \int_0^x \sin t \, dt$$

$$= \left[t \cdot \sin t + \cos t \right]_0^x$$

$$= (x \sin x + \cos x) - (0 + 1)$$

$$F(x) = x \sin x + \cos x - 1$$

$$\boxed{2} I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin 2x$$

$$f(t) = t \sin 2t \quad \text{بفرض } x = t \text{ إذاً :}$$

$$u(t) = t \rightarrow \dot{u}(t) = 1$$

$$v(t) = \sin 2t \rightarrow \dot{v}(t) = \frac{1}{2} \cos 2t$$

$$\int_0^x t \sin 2t \, dt = \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{2} \cos 2t \, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^x$$

$$= \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) - (0 + 0)$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

3 $I = R$, $f(x) = x^2 e^x$
 $f(t) = t^2 e^t$: إذا $x = t$ بفرض

$u(t) = t^2 \rightarrow \dot{u}(t) = 2t$

$\dot{v}(t) = e^t \rightarrow v(t) = e^t$

$\int_0^x t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^x - \int_0^x 2t e^t dt$

$u(t) = 2t \rightarrow \dot{u}(t) = 2$: تكامل بالتجزئة مرة ثانية:

$\dot{v}(t) = e^t \rightarrow v(t) = e^t$

$\int_0^x t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^x - \left[[2t e^t]_0^x - \int_0^x 2 e^t dt \right]$
 $= [t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t]_0^x$

$= (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) - (2)$

$F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$

4 $I =]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 \ln x$
 $f(t) = t^2 \ln t$: إذا $x = t$ بفرض

$u(t) = \ln t \rightarrow \dot{u}(t) = \frac{1}{t}$

$\dot{v}(t) = t^2 \rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3}$

$\int_1^x t^2 \ln t dt = \left[\frac{t^3}{3} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{3} dt$

$= \left[\frac{t^3}{3} \ln t - \frac{t^3}{9} \right]_1^x$

$= \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right) - \left(\frac{-1}{9} \right)$

$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$

5 $I = R$, $f(x) = x^2 \sin 2x$
 $f(t) = t^2 \sin 2t$: إذا $x = t$ بفرض

$u(t) = t^2 \rightarrow \dot{u}(t) = 2t$

$\dot{v}(t) = \sin 2t \rightarrow v(t) = \frac{-1}{2} \cos 2t$

$\int_0^x t^2 \sin 2t dt = \left[\frac{-1}{2} t^2 \cos 2t \right]_0^x + \int_0^x t \cos 2t dt$

تكامل بالتجزئة مرة ثانية :

$u(t) = t \rightarrow \dot{u}(t) = 1$

$\dot{v}(t) = \cos 2t \rightarrow v(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$

$\int_0^x t^2 \sin 2t dt$

$= \left[\frac{-1}{2} t^2 \cos 2t \right]_0^x + \left[\left[\frac{1}{2} t \sin 2t \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2} \sin 2t dt \right]$

$= \left[\frac{-1}{2} t^2 \cos 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^x$

$= \left(\frac{-1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) - \left(\frac{1}{4} \right)$

$F(x) = \frac{-1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4}$

6 $I = R$, $f(x) = x^2 \cos 3x$
 $f(t) = t^2 \cos 3t$: إذا $x = t$ بفرض

$u(t) = t^2 \rightarrow \dot{u}(t) = 2t$

$\dot{v}(t) = \cos 3t \rightarrow v(t) = \frac{1}{3} \sin 3t$

$\int_0^x t^2 \cos 3t dt = \left[\frac{1}{3} t^2 \sin 3t \right]_0^x - \int_0^x \frac{2}{3} t \sin 3t dt$

تكامل بالتجزئة مرة ثانية:

$u(t) = \frac{2}{3} t \rightarrow \dot{u}(t) = \frac{2}{3}$

$\dot{v}(t) = \sin 3t \rightarrow v(t) = \frac{-1}{3} \cos 3t$

$\int_0^x t^2 \cos 3t dt$

$= \left[\frac{1}{3} t^2 \sin 3t \right]_0^x - \left[\left[\frac{-2}{9} t \cos 3t \right]_0^x + \int_0^x \frac{2}{9} \cos 3t dt \right]$

$= \left[\frac{1}{3} t^2 \sin 3t + \frac{2}{9} t \cos 3t - \frac{2}{27} \sin 3t \right]_0^x$

$= \left(\frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x \right) - (0)$

$F(x) = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x$

حساب تكامل بعض التوابع الكسرية

سنكتفي بدراسة التوابع الكسرية $f: x \rightarrow \frac{A(x)}{B(x)}$ حيث $A(x), B(x)$ كثيري حدود من الدرجة الثانية (حده المسيطر x^2) وله جذران مختلفان r_1, r_2 أي يمكن تحليل $B(x)$ إلى جداء عوامل من الشكل $B(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ مع ملاحظة أن البسط ليس مشتق المقام.

نهدف إلى حساب $I = \int_a^b f$ حيث a و b عددان من أحد مجالات المجموعة $R \setminus \{r_1, r_2\}$ و نميز حالتين:

الحالة الأولى: درجة البسط $A(x)$ أصغر أو تساوي الواحد

نقوم بتحليل المقام $B(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى مختلفة: $B(x) = (x - r_1)(x - r_2)$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2}$$

لنعين A و B وذلك بتوحيد المقامات بين الطرفين ثم حذفها كما في المثال الآتي.

$$I =]-\infty, -3[\quad , \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

نلاحظ أن درجة البسط أصغر من درجة المقام والبسط ليس مشتق للمقام.

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{x+1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\boxed{x+1 = A(x+3) + B(x-3)} \quad (*)$$

$$x = 3 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 4 = 6A \Rightarrow A = \frac{2}{3} \quad , \quad x = -3 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} -2 = -6B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} \ln|x-3| + \frac{1}{3} \ln|x+3| + c = \frac{2}{3} \ln(-x+3) + \frac{1}{3} \ln(-x-3) + c$$

الحالة الثانية: درجة البسط $A(x)$ أكبر أو تساوي 2

نجري القسمة الإقليدية لكثير الحدود A على B و نعود للحالة الأولى كما في المثال الآتي.

$$I =]-\infty, -2[\quad , \quad f(x) = \frac{x^4+4}{x^2-4}$$

درجة البسط أكبر من درجة المقام ومنه نقسم البسط على المقام:

$$\left. \begin{array}{r} x^2 - 4 \overline{) x^2 + 4} \\ \underline{-x^2 + 4x^2} \\ 4x^2 + 4 \\ \underline{-4x^2 + 16} \\ 20 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = x^2 + 4 + \frac{20}{x^2 - 4}$$

يلزمها تفريق كسور

$$\frac{20}{x^2 - 4} = \frac{20}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{20}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{20 = A(x+2) + B(x-2)} \quad (*)$$

$$x = 2 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 20 = 4A \Rightarrow \boxed{A = 5}, \quad x = -2 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 20 = -4B \Rightarrow \boxed{B = -5}$$

$$f(x) = x^2 + 4 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$f(x) = x^2 + 4 + \frac{5}{x-2} - \frac{5}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x + 5 \ln|x-2| - 5 \ln|x+2| + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x + 5 \ln(-x+2) - 5 \ln(-x-2) + c$$

تدرب صفحة 236 رقم (4):

جد تابعاً أصلياً للتابع $f: x \rightarrow f(x)$ على المجال I

$$\boxed{1} \quad I =]1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\boxed{x+3 = A(x+1) + B(x-1)} \quad (*)$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 4 = 2A \Rightarrow \boxed{A = 2}, \quad x = -1 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 2 = -2B \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$f(x) = 2 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= 2 \ln|x-1| - \ln|x+1| + c$$

$$F(x) = 2 \ln(x-1) - \ln(x+1) + c = \ln(x-1)^2 - \ln(x+1) + c = \ln \frac{(x-1)^2}{(x+1)} + c$$

$$\boxed{2} \quad I =]-\infty, -2[\quad , \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$x+1 = A(x+2) + B(x-2) \quad (*)$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 3 = 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}, \quad x=-2 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} -1 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c = \frac{3}{4} \ln(-x+2) + \frac{1}{4} \ln(-x-2) + c$$

$$\textcircled{3} I =]2, 3[\quad , \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 6}$$

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$x = A(x+2) + B(x-3) \quad (*)$$

$$x=3 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 3 = 5A \Rightarrow A = \frac{3}{5}, \quad x=-2 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} -2 = -5B \Rightarrow B = \frac{2}{5}$$

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{3}{5} \ln|x-3| + \frac{2}{5} \ln|x+2| + c = \frac{3}{5} \ln(-x+3) + \frac{2}{5} \ln(x+2) + c$$

$$\textcircled{4} I =]-1, 0[\quad , \quad f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{x(x+1)}$$

$$2x-1 = A(x+1) + Bx \quad (*)$$

$$x=0 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} A = -1, \quad x=-1 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} -3 = -B \Rightarrow B = 3$$

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{-1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = -\ln|x| + 3 \ln|x+1| + c = -\ln(-x) + 3 \ln(x+1) + c$$

$$\boxed{5} \quad I =]2, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$

درجة البسط أكبر من درجة المقام، بإجراء القسمة الإقليدية:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2}$$

$$\frac{3x + 2}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

$$\frac{3x + 2}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} + \frac{B(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)}$$

$$\boxed{3x + 2 = A(x + 1) + B(x - 2)} \quad (*)$$

$$x = 2 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} 8 = 3A \Rightarrow \boxed{A = \frac{8}{3}} \quad , \quad x = -1 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} -1 = -3B \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} \ln|x - 2| + \frac{1}{3} \ln|x + 1| + c = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} \ln(x - 2) + \frac{1}{3} \ln(x + 1) + c$$

$$\boxed{6} \quad I =]-\infty, -2[\quad , \quad f(x) = \frac{2x - 1}{(x + 2)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x - 1 + 4 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4} - \frac{5}{(x + 2)^2} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4} - 5(x + 2)^{-2}$$

طريقة أولى :

$$F(x) = \ln|x^2 + 4x + 4| - \frac{5(x + 2)^{-1}}{-1} + c = \ln(x^2 + 4x + 4) + \frac{5}{x + 2} + c$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x + 2)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

طريقة ثانية :

$$\frac{2x - 1}{(x + 2)^2} = \frac{A(x + 2)}{(x + 2)^2} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$\boxed{2x - 1 = A(x + 2) + B} \quad (*)$$

$$x = -2 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} \boxed{B = -5} \quad , \quad x = 0 \xrightarrow{\text{نعوض في (*)}} -1 = 2A + B \Rightarrow -1 = 2A - 5 \Rightarrow \boxed{A = 2}$$

$$f(x) = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x + 2} - \frac{5}{(x + 2)^2} = 2 \cdot \frac{1}{x + 2} - 5(x + 2)^{-2}$$

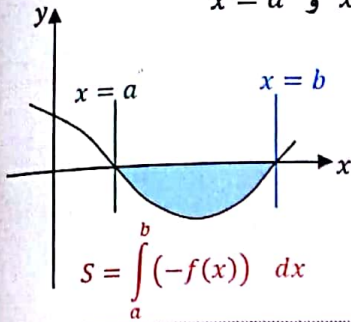
$$F(x) = 2 \ln|x + 2| + \frac{5}{x + 2} + c = 2 \ln(-x - 2) + \frac{5}{x + 2} + c$$

التكامل المحدود وحساب المساحة والسجل

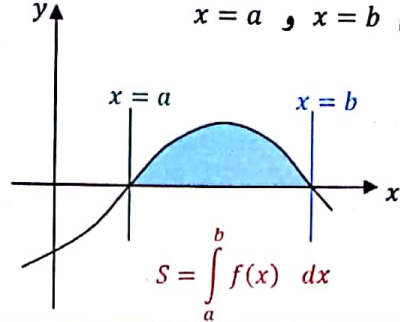
نقبل بصحة القضايا الآتية دون ذكر لبرهان:

- مساحة أي سطح محدود في المستوى هو عدد حقيقي موجب.
- مساحة اجتماع سطحين منفصلين تساوي مجموع مساحتهما.
- ولحساب مساحة سطح محدود بطريقة التكامل المحدود نميز الحالات الآتية :

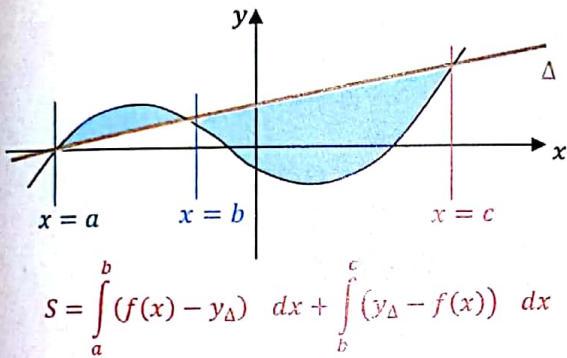
② مساحة سطح محصور تحت المحور $x\hat{x}$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$



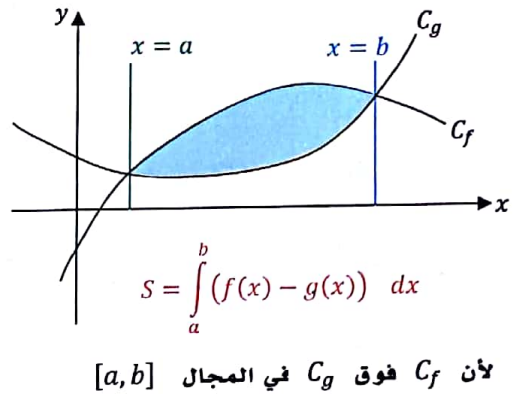
① مساحة سطح محصور فوق المحور $x\hat{x}$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$



⑤ مساحة سطح محصور بين خط بياني C_f ومستقيم $\Delta: y = ax + b$

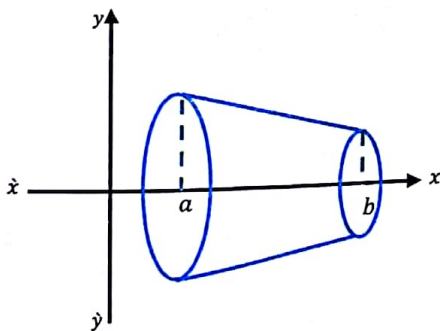


④ مساحة سطح محصور بين خطين بيانيين C_f و C_g والمستقيمين $x = a$ و $x = b$



حساب حجم مجسم دوراني:

حجم مجسم ناتج عن دوران سطح محصور بين المحور $x\hat{x}$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ دورة كاملة



ملاحظة: يعطى قانون حجم الكرة بالعلاقة $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ حيث r نصف قطر الكرة

تمارينات ومسائل صفحة 244

(1) في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$$\boxed{1} \quad f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} \quad :]0, +\infty[$$

$$f(x) = 1 - x^{-2} + \frac{3}{x}$$

$$F(x) = x - \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \ln|x| + c$$

$$= x + \frac{1}{x} + 3 \ln x + c$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}} \quad :]-\infty, \frac{1}{2}[$$

$$f(x) = 2(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -2\sqrt{1-2x} + c$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \quad :]1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$$

$$F(x) = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x^2-1} + c$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = (2x-1)^3 \quad : I = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)^4 + c$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2} \quad :]-\infty, \frac{1}{3}[$$

$$f(x) = (1-3x)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{-3} \cdot \frac{(1-3x)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{3(1-3x)} + c$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2} \quad :]-1, 3[$$

$$f(x) = (x-1)(x^2-2x-3)^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}} \right) \left(\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}} \right)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-2x-3)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(x^2-2x-3)} + c$$

(2) في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$$\boxed{1} \quad f(x) = \cos x (\sin^2 x - 3 \sin x) \quad : I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \underbrace{\cos x}_{H} \underbrace{\sin^2 x}_{H^r} - 3 \underbrace{\cos x}_{H} \underbrace{\sin x}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{3 \sin^2 x}{2} + c$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \quad :]4, +\infty[$$

$$F(x) = \ln|x-1| + c$$

$$= \ln(x-1) + c$$

$$\boxed{3} f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1 \quad :]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) - 1$$

$$F(x) = 2 \tan(x) - x + c$$

$$\boxed{4} f(x) = \frac{1}{x-4} \quad :]-\infty, 4[$$

$$F(x) = \ln|x-4| + c$$

$$F(x) = \ln(-x+4) + c$$

$$\boxed{5} f(x) = 2e^{3x-1} \quad : I = R$$

$$F(x) = \frac{2}{3} e^{3x-1} + c$$

$$\boxed{6} f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad :]-1, +\infty[$$

$$f(x) = 2 - 3 \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 2x - 3 \ln|x+1| + c$$

$$= 2x - 3 \ln(x+1) + c$$

(3) في كل من الحالات الآتية، مات تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I ، يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى.

$$\boxed{1} f(x) = \frac{2}{x^2} + x \quad : F(1) = 0$$

$$f(x) = 2x^{-2} + x \quad : I = R^*$$

$$F(x) = \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= -\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$* F(1) = 0$$

$$-2 + \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} \quad : F(0) = 0$$

$$f(x) = (2x+1)^{-2} \quad : I = R \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(2x+1)} + c$$

$$* F(0) = 0$$

$$-\frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{3} f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad : F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + c \quad : I = R$$

$$* F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + c = 0$$

$$\frac{-1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + c = 0$$

$$\frac{-1}{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) + c = 0 \Rightarrow c = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{4} f(x) = \sin x \cos^2 x \quad : F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f(x) = -\frac{(-\sin x)}{H} \frac{\cos^2 x}{H^2} \quad : I = R$$

$$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$* F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$F(x) = \frac{-\cos^3 x}{3}$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = \frac{-1}{3-x} \quad : F(1) = +1$$

$$F(x) = \ln|3-x| + c$$

$$F(x) = \ln(3-x) + c$$

$$* F(1) = 1$$

$$\ln 2 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1 - \ln 2}$$

$$F(x) = \ln(3-x) + 1 - \ln 2$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} \quad : F(0) = 0$$

$$f(x) = x(x^2-1)^{-2} \quad : I = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{H} \left(\frac{x^2-1}{H^r} \right)^{-2}$$

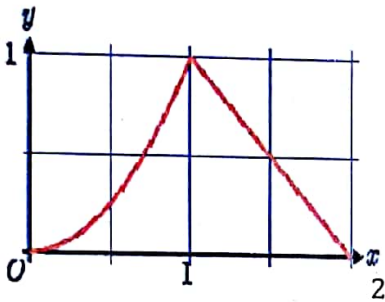
$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(x^2-1)} + c$$

$$* F(0) = 0$$

$$\frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2}$$



4) نرمز عادة بالرمز $\min(a, b)$ إلى اصغر العددين a, b تحقق

ان الخط البياني C_f للتابع f المعرف على المجال $[0, 2]$

بالصيغة $f(x) = \min(x^2, 2-x)$ هو الخط المرسوم في

الشكل المجاور،

1) احسب التكامل $\int_0^2 f(x) dx$ وقل ماذا يمثل هذا العدد.

$$\text{عندما } x \in [0, 1] \text{ فإن } x^2 \leq 2-x \text{ إذاً } f_1(x) = x^2$$

$$\text{عندما } x \in [1, 2] \text{ فإن } x^2 \geq 2-x \text{ إذاً } f_2(x) = 2-x$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f_1(x) dx + \int_1^2 f_2(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right) - (0) + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}$$

$\int_0^2 f(x) dx = \frac{5}{6}$ ويمثل: العدد مساحة السطح المحدد بالخط البياني للتابع f ومحور x .

2) احسب بالمثل $\int_0^2 g(x) dx$ ، $\int_0^1 h(x) dx$ في حالة:

$$h(x) = \min(x^2, (x-1)^2) \quad , \quad g(x) = 1 - |1-x|$$

$$\boxed{1} \quad g(x) = 1 - |1-x|$$

$$\text{عندما } x \in [0, 1] \text{ فإن } |1-x| = 1-x \text{ إذاً } g_1(x) = 1 - (1-x) = x$$

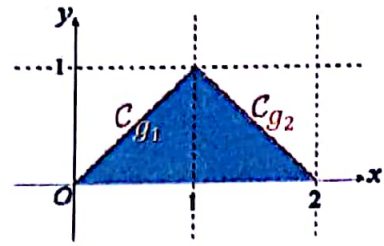
رؤية شاملة في التكامل والتوابع الأصلية

◆ عندما $x \in [1, 2]$ فإن $|1 - x| = -1 + x$ ؛ إذاً $g_2(x) = 1 - (-1 + x) = 2 - x$

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^1 g_1(x) dx + \int_1^2 g_2(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) - (0) + (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 1$$



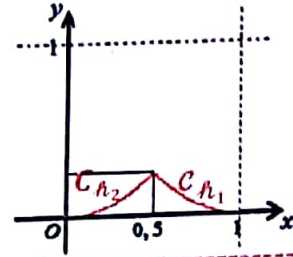
1 $h(x) = \min(x^2, (x - 1)^2)$

◆ عندما $x \in [0, \frac{1}{2}]$ فإن $x^2 \leq (x - 1)^2$ ؛ إذاً $h_1(x) = x^2$

◆ عندما $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ فإن $x^2 \geq (x - 1)^2$ ؛ إذاً $h_2(x) = (x - 1)^2$

$$\int_0^1 h(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - 1)^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{24} \right) - (0) + (0) - \left(\frac{-1}{24} \right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$



(5) احسب التكاملات الآتية:

1 $I = \int_2^{-1} (x^2 - 4x + 3) dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_2^{-1} = \left(\frac{-1}{3} - 2 - 3 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6 \right) = -6$$

2 $I = \int_2^{-1} (x - 2)(x^2 - 4x + 3) dx$

$$= \int_2^{-1} \frac{1}{2} \left(\frac{2x - 4}{H} \right) \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{H^r} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 - 4x + 3)^2}{2} \right]_2^{-1} = \frac{1}{4} \left[(x^2 - 4x + 3)^2 \right]_2^{-1} = \frac{1}{4} [64 - 1] = \frac{63}{4}$$

3 $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t} \right) dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \ln|t| \right]_1^2 = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \ln t \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 - \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} - \ln 2 = \frac{23}{6} - \ln 2$$

4 $I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$$= \int_0^3 (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^3 = 2 \left[\sqrt{1+t} \right]_0^3 = 2[2 - 1] = 2$$

$$\boxed{5} I = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4 + 2} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x^3)^{dg}}{(x^4 + 2)_{dg}} dx = \frac{1}{4} \left[\ln|x^4 + 2| \right]_1^2 = \frac{1}{4} \left[\ln(x^4 + 2) \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} (\ln 18 - \ln 3) = \frac{1}{4} \ln \frac{18}{3} = \frac{1}{4} \ln 6$$

$$\boxed{6} I = \int_0^\pi \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^\pi = -\cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = +\sqrt{2}$$

$$\boxed{7} I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x}{x} - \frac{3}{x} \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(1 - \frac{3}{x} \right) dx = \left[x - 3 \ln|x| \right]_{-2}^{-1} = \left[x - 3 \ln(-x) \right]_{-2}^{-1}$$

$$= (-1 - 3 \ln 1) - (-2 - 3 \ln 2) = 1 + 3 \ln 2$$

$$\boxed{8} I = \int_0^1 t \cdot e^{t^2-1} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \underbrace{2t}_{dg} \cdot \underbrace{e^{t^2-1}}_{eg} dt = \frac{1}{2} \left[e^{t^2-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$\boxed{9} I = \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx$$

$$= \int_0^2 (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left[\sqrt{(2x+1)^3} \right]_0^2 = \frac{1}{3} (\sqrt{125} - 1) = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

$$\boxed{10} I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= \left[\ln|e^x + e^{-x}| \right]_0^1 = \left[\ln(e^x + e^{-x}) \right]_0^1 = \ln(e + e^{-1}) - \ln 2 = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e}\right) - \ln 2 = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)$$

(6) ليكن f التابع المعرف على $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ وفق $f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x+3}$

1. جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$ أيًا يكن x من D

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 4x - 17 + \frac{52}{x+3} \\ f(x) &= ax + b + \frac{c}{x+3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 4 \\ b &= -17 \\ c &= 52 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 17 \\ x + 3 \overline{) 4x^2 - 5x + 1} \\ \underline{4x^2 + 12x} \\ -17x + 1 \\ \underline{+17x + 51} \\ 52 \end{array} \quad \begin{aligned} \frac{4x^2}{x} &= 4x \\ \frac{-17x}{x} &= -17 \end{aligned}$$

2. احسب $J = \int_2^0 f(x) dx$

$$\begin{aligned} J &= \int_2^0 \left(4x - 17 + \frac{52}{x+3} \right) dx = \left[2x^2 - 17x + 52 \ln|x+3| \right]_2^0 = \left[2x^2 - 17x + 52 \ln(x+3) \right]_2^0 \\ &= (0 - 0 + 52 \ln 3) - (8 - 34 + 52 \ln 5) = 52 \ln 3 - 52 \ln 5 + 26 = 52(\ln 3 - \ln 5) + 26 = 52 \ln \left(\frac{3}{5} \right) + 26 \end{aligned}$$

(7) ليكن f التابع المعرف على $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

1. جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ أيًا يكن x من D

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x - 1 \overline{) x} \\ \underline{+x + 1} \\ 1 \end{array} \quad \therefore \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \\ f(x) &= a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

2. احسب $J = \int_{-3}^0 f(x) dx$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-3}^0 \left(1 + \frac{2}{x-1} + (x-1)^{-2} \right) dx = \left[x + 2 \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_{-3}^0 \\ &= \left[x + 2 \ln(-x+1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_{-3}^0 \\ &= \left[x + 2 \ln(-x+1) - \frac{1}{x-1} \right]_{-3}^0 = \left(0 + 2 \ln 1 - \frac{1}{-1} \right) - \left(-3 + 2 \ln 4 - \frac{1}{-4} \right) \\ &= 1 + 3 - 2 \ln 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} - 2 \ln 4 \end{aligned}$$

(8) اثبت ان $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ واستنتج قيمة $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

$$L_1 = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = L_2$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \left[x - \ln|1+e^x| \right]_0^1 = \left[x - \ln(1+e^x) \right]_0^1$$

$$= (1 - \ln(1+e)) - (0 - \ln 2) = 1 - \ln(1+e) + \ln 2 = 1 + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

(9) باستعمال صيغتي $\cos^2 a$, $\sin^2 a$ بدلالة $\cos 2a$ او باية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x dx \text{ ثم احسب } \cos 4x, \cos 2x$$

$$\diamond \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\diamond \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\diamond \sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \quad : \cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$= \left(\frac{3\pi}{64} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{32} \sin \frac{\pi}{2} \right) - (0 - 0 + 0) = \frac{3\pi}{64} - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{32} (1)$$

$$= \frac{3\pi}{64} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32} = \frac{3\pi - 8\sqrt{2} + 2}{64}$$

(10) احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

$$\boxed{1} I = \int_1^e (x-1) \ln x dx$$

$$u(x) = \ln x \rightarrow \dot{u}(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = x-1 \rightarrow \dot{v}(x) = \frac{x^2}{2} - x$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} + x \right]_1^e = \left[\left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \frac{e^2}{4} + e \right] - \left[0 - \frac{1}{4} + 1 \right]$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$$

$$\boxed{2} I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2 - 1)e^x dx$$

$$u(x) = x^2 - 1 \rightarrow \dot{u}(x) = 2x$$

$$v(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x$$

$$I = \left[(x^2 - 1)e^x \right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} \underbrace{2xe^x}_{\text{يلزمها تجزئة}} dx$$

$$u(x) = 2x \rightarrow \dot{u}(x) = 2$$

$$v(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x$$

$$I = \left[(x^2 - 1)e^x \right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \left[\left[2xe^x \right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^x dx \right]$$

$$= \left[(x^2 - 1)e^x - 2xe^x + 2e^x \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$= \left((\ln^2 3 - 1)e^{\ln 3} - 2(\ln 3)e^{\ln 3} + 2e^{\ln 3} \right) - \left((\ln^2 2 - 1)e^{\ln 2} - 2(\ln 2)e^{\ln 2} + 2e^{\ln 2} \right)$$

$$= (\ln^2 3 - 1)(3) - (2 \ln 3)(3) + 6 - (\ln^2 2 - 1)(2) + (2 \ln 2)(2) - 4$$

$$= 3 \ln^2 3 - 3 - 6 \ln 3 + 6 - 2 \ln^2 2 + 2 + 4 \ln 2 - 4$$

$$= 3 \ln^2 3 - 6 \ln 3 - 2 \ln^2 2 + 4 \ln 2 + 1$$

$$\boxed{3} I = \int_0^1 (2x + 1)e^{-x} dx$$

$$u(x) = 2x + 1 \rightarrow \dot{u}(x) = 2$$

$$v(x) = e^{-x} \rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$I = \left[-(2x + 1)e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x} dx$$

$$= \left[(-2x - 1)e^{-x} - 2e^{-x} \right]_0^1$$

$$= (-3e^{-1} - 2e^{-1}) - (-1 - 2) = -5e^{-1} + 3$$

$$= \frac{-5}{e} + 3$$

$$\boxed{4} I = \int_1^2 (t - 2)e^{2t} dt$$

$$u(t) = t - 2 \rightarrow \dot{u}(t) = 1$$

$$v(t) = e^{2t} \rightarrow v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$I = \left[\frac{1}{2}(t - 2)e^{2t} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{2t} dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}(t - 2)e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} \right]_1^2$$

$$= \left(0 - \frac{1}{4}e^4 \right) - \left(\frac{-1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^4 + \frac{3}{4}e^2$$

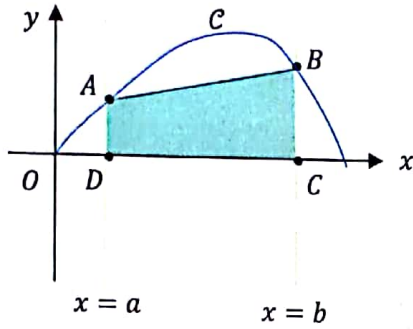
(11) إثبات متراجحة:

نفترض ان a, b عدنان حقيقيان وان $0 \leq a < b \leq \pi$ اثبت صحة المتراجحة

$$\cos a - \cos b \geq \frac{1}{2}(b - a) \sin b$$

نلاحظ انه من تطبيقات التكامل (حساب المساحات) يجب علينا الاستفادة من فكرة التكامل لإثبات صحة المتراجحة.

نلاحظ ان التابع الذي يعطينا الطرف الأيسر من المتراجحة هو $\sin x$ ومجال الدراسة من $[0, \pi]$ وخطه البياني الموضح بالشكل:



◆ مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx والمستقيمين

: يعطى $x = b, x = a$

$$S_C = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sin x dx = \left[-\cos x \right]_a^b = -\cos b + \cos a$$

وهو الطرف الأول من المتراجحة

$$\boxed{S_C = \cos a - \cos b}$$

◆ مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تعطى:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \times DC$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{لحسابها}$$

$$A \in C \Rightarrow x_A = a : f(a) = \sin a : A(a, \sin a)$$

$$B \in C \Rightarrow x_B = b : f(b) = \sin b : B(b, \sin b)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b)(b - a)$$

$$= \frac{1}{2}(b - a) \sin a + \frac{1}{2}(b - a) \sin b$$

$$\left. \begin{array}{l} b > a \Rightarrow b - a > 0 \\ \sin x \geq 0 ; x \in [0, \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(b - a) \sin a \geq 0$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} \geq \frac{1}{2}(b - a) \sin b$$

$$\text{من الرسم : } S_C \geq S_{ABCD}$$

$$\text{ووجدنا : } S_{ABCD} \geq \frac{1}{2}(b - a) \sin b$$

$$\left. \begin{array}{l} S_C \geq \frac{1}{2}(b - a) \sin b \\ S_{ABCD} \geq \frac{1}{2}(b - a) \sin b \end{array} \right\} \Rightarrow \cos a - \cos b \geq \frac{1}{2}(b - a) \sin b$$

(12) البحث عن تابع أصلي:

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = e^{2x} \sin x$ عين تابعا أصليا F للتابع f

بما ان f مستمر على R فله تابع أصلي ومنه:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x e^{2x} \sin x dx$$

$$u(x) = \sin x \rightarrow \dot{u}(x) = \cos x$$

$$v(x) = e^{2x} \rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2x} \sin x \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}e^{2x} \cos x dx$$

يلزمها تجزئة

$$u(x) = \frac{1}{2} \cos x \rightarrow \dot{u}(x) = -\frac{1}{2} \sin x$$

$$v(x) = e^{2x} \rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2x} \sin x \right]_0^x - \left[\left[\frac{1}{4}e^{2x} \cos x \right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{4}e^{2x} \sin x dx \right]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^x e^{2x} \sin x dx$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \widehat{F(x)}$$

$$F(x) + \frac{1}{4}F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{2x} \cos x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4}F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} \quad (\div \frac{5}{4})$$

$$F(x) = \frac{2}{5}e^{2x} \sin x - \frac{1}{5}e^{2x} \cos x + \frac{1}{5}$$

(13) البحث عن تابع أصلي:

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$

أوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F: x \rightarrow P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على R

بما أن $F(x)$ تابع أصلي للتابع f عندئذ:

$$\dot{F}(x) = f(x)$$

$$\dot{P}(x) \cdot e^{-x} - e^{-x}P(x) = (1 + x + x^2 + x^3) \cdot e^{-x}$$

$$(\dot{P}(x) - P(x)) \cdot e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3) \cdot e^{-x}$$

$$\dot{P}(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \quad *$$

نقسم على $e^{-x} \neq 0$

ومنه نجد أن $P(x)$ كثير حدود من المرتبة الثالثة ولنفرض:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\dot{P}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d = 1 + x + x^2 + x^3$$

نعوض في *

$$c - d + (2b - c)x + (3a - b)x^2 - ax^3 \stackrel{\text{بالمطابقة}}{=} 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\begin{cases} -a = 1 \rightarrow a = -1 \\ 3a - b = 1 \rightarrow 3(-1) - b = 1 \rightarrow b = -4 \\ 2b - c = 1 \rightarrow 2(-4) - c = 1 \rightarrow c = -9 \\ c - d = 1 \rightarrow -9 - d = 1 \rightarrow d = -10 \end{cases}$$

$$P(x) = -x^3 - 4x^2 - 9x - 10$$

ومنه نجد :

$$F(x) = P(x) \cdot e^{-x} = (-x^3 - 4x^2 - 9x - 10) \cdot e^{-x}$$

ويمكن التحقق بسهولة أن $F(x)$ تابع أصلي للتابع f كما يلي :

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= (-3x^2 - 8x - 9)e^{-x} - e^{-x}(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10) \\ &= e^{-x}[-3x^2 - 8x - 9 + x^3 + 4x^2 + 9x + 10] \\ &= e^{-x}(x^3 + x^2 + x + 1) = f(x) \end{aligned}$$

(14) في كل حالة من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3} \quad I = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-2x)(2x^2-2x+1)^{-3} \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{4x-2}{H} \right) \left(\frac{2x^2-2x+1}{H^r} \right)^{-3} \\ F(x) &= \frac{-1}{2} \cdot \frac{(2x^2-2x+1)^{-2}}{-2} + c \\ &= \frac{1}{4(2x^2-2x+1)^2} + c \end{aligned}$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \frac{1}{\sin 2x} \quad I = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

تذكر :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{-1}{2} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ F(x) &= \frac{-1}{2} \ln|\cos x| + \frac{1}{2} \ln|\sin x| + c \\ &= \frac{-1}{2} \ln(\cos x) + \frac{1}{2} \ln(\sin x) + c \end{aligned}$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = (1-2x)^4 \quad I = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{-2} \cdot \frac{(1-2x)^5}{5} + c \\ &= \frac{-1}{10} (1-2x)^5 + c \end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{2}{x}} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x^2} \cdot e^{-\frac{2}{x}} \quad \left(\frac{-2}{x} \right)' = \frac{2}{x^2} \quad \text{لاحظ :} \\ F(x) &= \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2}{x}} + c \end{aligned}$$

$$\boxed{7} \quad f(x) = 2e^{2-3x} \quad I = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{2}{-3} \cdot e^{2-3x} + c$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \cot x \quad I =]-\pi, 0[$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\cos x)^{\uparrow g}}{(\sin x)^{\downarrow g}} \\ F(x) &= \ln|\sin x| + c = \ln(-\sin x) + c \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}} \quad I = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)(x^2-2x-2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{2x-2}{H} \right) \left(\frac{x^2-2x-2}{H^r} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ F(x) &= \frac{-1}{2} \cdot \frac{(x^2-2x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\ &= -\sqrt{x^2-2x-2} + c \end{aligned}$$

$$\boxed{8} f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$u(x) = \ln x \rightarrow \dot{u}(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow v(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$G(x) = \left[\frac{-1}{x} \ln x \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{x^2} dx$$

$$= \left(\frac{-1}{x} \ln x \right) - (0) + \int_1^x x^{-2} dx$$

$$= \frac{-1}{x} \ln x + \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^x = \frac{-1}{x} \ln x + \left(\frac{-1}{x} + 1 \right)$$

$$G(x) = \frac{-1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + 1$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$H(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$F(x) = G(x) - H(x) = \frac{-1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1$$

$$F(x) = \frac{-1}{x} \ln x + 1$$

$$\boxed{9} f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin x - \frac{1}{x} \cos x = \frac{x^{-2} \sin x}{g(x)} - \frac{1}{x} \frac{\cos x}{h(x)}$$

$$g(x) = x^{-2} \sin x$$

$$u(x) = \sin x \rightarrow \dot{u}(x) = \cos x$$

$$v(x) = x^{-2} \rightarrow v(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$G(x) = \left[\frac{-1}{x} \sin x \right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{x} \cos x dx$$

$$F(x) = G(x) - H(x)$$

$$= \frac{-1}{x} \sin x + \int_0^x \frac{1}{x} \cos x dx - \int_0^x \frac{1}{x} \cos x dx$$

$$F(x) = \frac{-1}{x} \sin x + c$$

$$\boxed{10} f(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \quad I =]-1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (3x+2)(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} [(3x+3) - 1](x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} [3(x+1) - 1](x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[3(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{3(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] + c$$

$$= \frac{1}{2} [2\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}] + c$$

$$= \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1} + c$$

(15) في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المعطى.

$$\boxed{1} I = \int_{-2}^0 \frac{x}{x-1} dx$$

$$= \int_{-2}^0 \frac{x-1+1}{x-1} dx = \int_{-2}^0 \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \left[x + \ln|x-1| \right]_{-2}^0 = \left[x + \ln(-x+1) \right]_{-2}^0$$

$$= (0 + \ln 1) - (-2 + \ln 3) = 2 - \ln 3$$

$$\begin{aligned} \text{[2]} \quad I &= \int_0^2 \frac{4x-5}{2x+1} dx \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{7}{2x+1} \right) dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} \right) dx \\ &= \left[2x - \frac{7}{2} \ln|2x+1| \right]_0^2 = \left[2x - \frac{7}{2} \ln(2x+1) \right]_0^2 \\ &= \left(4 - \frac{7}{2} \ln 5 \right) - \left(0 - \frac{7}{2} \ln 1 \right) = 4 - \frac{7}{2} \ln 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2x+1 \sqrt{4x-5} \\ \hline \quad \mp 4x \mp 2 \\ \hline \qquad \qquad \quad -7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{[3]} \quad I &= \int_{-1}^2 \frac{2x}{x^2-9} dx \\ &= [\ln|x^2-9|]_{-1}^2 = [\ln(-x^2+9)]_{-1}^2 = \ln 5 - \ln 8 = \ln \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[4]} \quad I &= \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^4} dx \\ &= \int_0^3 (x+2)(x+1)^{-4} dx = \int_0^3 [(x+1)+1](x+1)^{-4} dx \\ &= \int_0^3 ((x+1)^{-3} + (x+1)^{-4}) dx = \left[\frac{(x+1)^{-2}}{-2} + \frac{(x+1)^{-3}}{-3} \right]_0^3 \\ &= \left[\frac{-1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3} \right]_0^3 = \left(\frac{-1}{32} - \frac{1}{3(64)} \right) - \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{-7}{3(64)} + \frac{5}{6} = \frac{-7+160}{192} = \frac{153}{192} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[5]} \quad I &= \int_0^1 \frac{2x^3-3x-4}{x-2} dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^2 + 4x + 5 + 6 \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6 \ln|x-2| \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6 \ln(-x+2) \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} + 2 + 5 + 0 \right) - (0 + 0 + 0 + 6 \ln 2) \\ &= \frac{23}{3} - 6 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 4x + 5 \\ \hline x-2 \sqrt{2x^3-3x-4} \\ \hline \quad \mp 2x^3 \pm 4x^2 \\ \hline \qquad \quad 4x^2 - 3x - 4 \\ \hline \qquad \quad \mp 4x^2 \pm 8x \\ \hline \qquad \qquad \quad 5x - 4 \\ \hline \qquad \qquad \quad \mp 5x \pm 10 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} : \frac{2x^3}{x} = 2x^2 \\ : \frac{4x^2}{x} = 4x \\ : \frac{5x}{x} = 5 \end{array}$$

$$\boxed{6} \int_1^2 \frac{8x^2 - 4}{4x^2 - 1} dx$$

$$= \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{4x^2 - 1} \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \right) dx$$

يلزمها تفريق كسور

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1}$$

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A(2x+1) + B(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$\boxed{2 = A(2x+1) + B(2x-1)} \quad (*)$$

$$2 = A(1+1) + 0 \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$2 = 0 + B(-1-1) \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$I = \int_1^2 \left(2 - \frac{A}{2x-1} - \frac{B}{2x+1} \right) dx = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} \right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{2} \ln|2x-1| + \frac{1}{2} \ln|2x+1| \right]_1^2 = \left[2x - \frac{1}{2} \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right]_1^2$$

$$= \left(4 - \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 \right) - \left(2 - 0 + \frac{1}{2} \ln 3 \right) = 2 - \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5$$

$$\frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 4} = \frac{2}{78x^2 \pm 2} \quad : \frac{8x^2}{4x^2} = 2$$

: (*) تعيين A نعوض $x = \frac{1}{2}$

: (*) تعيين B نعوض $x = \frac{-1}{2}$

16) في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\boxed{1} f(x) = \cos^3 x$$

$$f(x) = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x)$$

$$= \cos x - \underbrace{\cos x}_{H} \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{H^r}$$

$$F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$= 2 \sin x + \left(\frac{-\sin x}{H} \right) \cdot \frac{\cos^2 x}{H^r}$$

$$F(x) = -2 \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$\boxed{3} f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^2 x$$

$$f(x) = \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$= \sin x (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos^4 x$$

$$= - \left(\frac{-\sin x}{H} \right) \cdot \frac{\cos^2 x}{H^r} + \left(\frac{-\sin x}{H} \right) \cdot \frac{\cos^4 x}{H^r}$$

$$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

$$\boxed{2} f(x) = \sin x + \sin^3 x$$

$$f(x) = \sin x (1 + \sin^2 x)$$

$$= \sin x (1 + 1 - \cos^2 x)$$

$$= \sin x (2 - \cos^2 x)$$

$$= 2 \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x$$

(17) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sin^4 x$

1. احسب $f'(x)$, $f''(x)$ واكتب $f(x)$ بدلالة $f'(x)$, $\cos 4x$

$$f'(x) = 4 \sin^3 x \cdot \cos x$$

اشتقافي على R

$$f''(x) = 4[3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \cos x + (-\sin x) \sin^3 x]$$

اشتقافي على R

$$= 4[3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x] = 3 \times 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 4 \sin^4 x$$

$$= 3(2 \sin x \cdot \cos x)^2 - 4 \sin^4 x = 3 \sin^2 2x - 4 \sin^4 x$$

$$= 3 \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) - 4 \sin^4 x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 4x - 4 \sin^4 x$$

$$f''(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 4x - 4f(x)$$

$$4f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 4x - f''(x) \quad (\div 4)$$

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} f''(x)$$

2. استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على R

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} f''(x)$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} f'(x) + c = \frac{3}{8}x - \frac{3}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} (4 \sin^3 x \cdot \cos x) + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{3}{32} \sin 4x - \sin^3 x \cdot \cos x + c$$

(18) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ جد تابعاً أصلياً F للتابع f على R بالصيغة

$$F(x) = P(x)e^{2x} \quad \text{حيث } P \text{ تابع كثير حدود.}$$

بما أن $F(x)$ تابع أصلي للتابع f عندئذ:

$$F'(x) = f(x)$$

$$\dot{P}(x) \cdot e^{2x} + 2e^{2x}P(x) = x^3 \cdot e^{2x}$$

$$(\dot{P}(x) + 2P(x))e^{2x} = x^3 \cdot e^{2x}$$

نقسم على $e^{2x} \neq 0$

$$\dot{P}(x) + 2P(x) = x^3 \quad *$$

ومنه نجد أن $P(x)$ كثير حدود من المرتبة الثالثة ولنفرض:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\dot{P}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$3ax^2 + 2bx + c + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3$$

نعوض في *

$$3ax^2 + 2bx + c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3$$

$$2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + (c + 2d) \stackrel{\text{بالمطابقة}}{=} x^3$$

$$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$3a + 2b = 0 \rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2b = 0 \rightarrow b = \frac{-3}{4}$$

$$2b + 2c = 0 \rightarrow 2\left(\frac{-3}{4}\right) + 2c = 0 \rightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$c + 2d = 0 \rightarrow \frac{3}{4} + 2d = 0 \rightarrow d = \frac{-3}{8}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow F(x) = P(x) \cdot e^{2x} = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) \cdot e^{2x}$$

(19) نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ ثم $I+J$ واستنتج I

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

$$I+J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I+J = \frac{1}{2} \Rightarrow I + \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2}$$

(20) نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2 \sin x} dx$ احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx$ ثم $I+J$ واستنتج I

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos x}{1+2 \sin x} dx = \frac{1}{2} [\ln|1+2 \sin x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [\ln(1+2 \sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2 \sin x} dx \quad : \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos x + \cos x}{1+2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x (2 \sin x + 1)}{1+2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

$$I+J = 1 \Rightarrow I + \ln \sqrt{3} = 1 \Rightarrow I = 1 - \ln \sqrt{3}$$

(21) ليكن التابع f المعروف على R وفق $f(x) = e^{2x} \cdot \cos x$

1. احسب $\dot{f}(x)$, $\ddot{f}(x)$

f اشتقاقي على R

f اشتقاقي على R

$$\dot{f}(x) = 2e^{2x} \cos x - \sin x e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}(x) &= 4e^{2x} \cos x - \sin x \cdot 2e^{2x} - (\cos x e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \sin x) \\ &= 4e^{2x} \cos x - \sin x \cdot 2e^{2x} - \cos x e^{2x} - 2e^{2x} \cdot \sin x \end{aligned}$$

$$\ddot{f}(x) = 3e^{2x} \cos x - 4e^{2x} \sin x$$

2. عين عددين a, b يحققان المساواة $f(x) = a\dot{f}(x) + b\ddot{f}(x)$ ايأ كان x

$$L_2 = a\dot{f}(x) + b\ddot{f}(x)$$

$$= a(2e^{2x} \cos x - \sin x e^{2x}) + b(3e^{2x} \cos x - 4 \sin x e^{2x})$$

$$= 2ae^{2x} \cos x - a \sin x e^{2x} + 3be^{2x} \cos x - 4b \sin x e^{2x}$$

$$L_2 = (2a + 3b)e^{2x} \cos x + (-a - 4b)e^{2x} \sin x$$

$$L_1 = f(x) = e^{2x} \cos x = 1e^{2x} \cos x + 0$$

$$\text{بالمطابقة} \quad \begin{cases} 2a + 3b = 1 & \textcircled{1} \\ -a - 4b = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

نضرب $\textcircled{2}$ بـ (2) ونجمعها مع $\textcircled{1}$:

$$\begin{array}{r} + \quad 2a + 3b = 1 \\ \quad -2a - 8b = 0 \\ \hline \quad \quad -5b = 1 \end{array}$$

$$\boxed{b = \frac{-1}{5}}$$

لإيجاد a نعوض قيمة b في $\textcircled{2}$:

$$-a - 4b = 0$$

$$-a - 4\left(\frac{-1}{5}\right) = 0$$

$$\boxed{a = \frac{4}{5}}$$

$$f(x) = \frac{4}{5} \dot{f}(x) - \frac{1}{5} \ddot{f}(x) \quad \text{إذاً:}$$

3. استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على R

من الطلب 2 نجد:

$$f(x) = \frac{4}{5} \dot{f}(x) - \frac{1}{5} \ddot{f}(x)$$

$$F(x) = \frac{4}{5} f(x) - \frac{1}{5} \dot{f}(x) + C = \frac{4}{5} \cdot e^{2x} \cos x - \frac{1}{5} (2e^{2x} \cos x - \sin x e^{2x}) + c$$

$$= \frac{4}{5} \cdot e^{2x} \cos x - \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} \sin x e^{2x} + c$$

$$= \frac{2}{5} \cdot e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \sin x + c$$

(22) G, F تابعان أصليان للتابعين: $f: x \rightarrow \cos(\ln x)$, $g: x \rightarrow \sin(\ln x)$ على $[0, +\infty[$ ينعدمان عند $x = 1$

انطلاقاً من الصيغتين:

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln x) dx \quad , \quad F(x) = \int_1^x \cos(\ln x) dx$$

1. اثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أن:

$$G(x) = x \sin(\ln x) - F(x) \quad , \quad F(x) = x \cos(\ln x) - 1 + G(x)$$

$$* F(x) = \int_1^x \cos(\ln x) dx$$

$$u(x) = \cos(\ln x) \rightarrow \dot{u}(x) = \frac{-1}{x} \sin(\ln x)$$

$$\dot{v}(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$$

$$F(x) = \left[x \cdot \cos(\ln x) \right]_1^x - \int_1^x -\sin(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) - 1 \cdot \cos(0) + \int_1^x \sin(\ln x) dx$$

$$F(x) = x \cdot \cos(\ln x) - 1 + G(x) \quad [1]$$

$$** G(x) = \int_1^x \sin(\ln x) dx$$

$$u(x) = \sin(\ln x) \rightarrow \dot{u}(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$$

$$\dot{v}(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$$

$$G(x) = \left[x \cdot \sin(\ln x) \right]_1^x - \int_1^x \cos(\ln x) dx = x \cdot \sin(\ln x) - 1 \sin(0) - F(x)$$

$$G(x) = x \cdot \sin(\ln x) - F(x) \quad [2]$$

2. استنتج عبارتي $F(x)$, $G(x)$

$$F(x) = x \cdot \cos(\ln x) - 1 + \underbrace{G(x)}_{\text{نعوض 2}} \quad : [1] \text{ لدينا من}$$

$$F(x) = x \cdot \cos(\ln x) - 1 + x \cdot \sin(\ln x) - F(x)$$

$$2F(x) = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x) - 1 \quad (\div 2)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} x \cdot \cos(\ln x) + \frac{1}{2} x \cdot \sin(\ln x) - \frac{1}{2}$$

$$G(x) = x \cdot \sin(\ln x) - F(x) \quad : [2] \text{ لدينا}$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - \left[\frac{1}{2} x \cdot \cos(\ln x) + \frac{1}{2} x \cdot \sin(\ln x) - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \underline{x \cdot \sin(\ln x)} - \frac{1}{2} x \cdot \cos(\ln x) - \frac{1}{2} x \cdot \sin(\ln x) + \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} x \cdot \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cdot \cos(\ln x) + \frac{1}{2}$$

(23) إثبات متراجحة:

1. تبين انه في حالة $0 < x < a$ يكون $1 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+a}$

$0 < x < a$: نضيف 1

$1 \leq 1+x \leq 1+a$: نأخذ مقلوب المتراجحة :

$$1 \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{1+a}$$

2. استنتج ان $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$ في حالة $a > 0$

لدينا من الطلب 1 المتراجعة $1 \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{1+a}$

لناخذ: $g(x) = 1$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$

لدينا: $(g(x) = 1) \geq (f(x) = \frac{1}{1+x})$ ومنه:

$$g(x) \geq f(x)$$

$$\int_0^a g(x) dx \geq \int_0^a f(x) dx \quad \text{حيث } (a > 0)$$

$$\int_0^a 1 dx \geq \int_0^a \frac{1}{1+x} dx$$

$$\left[x \right]_0^a \geq \left[\ln(1+x) \right]_0^a$$

$$\boxed{a \geq \ln(1+a)} \quad \boxed{1}$$

لناخذ: $g(x) = \frac{1}{1+x}$, $f(x) = \frac{1}{1+a}$

لدينا برهاناً من الطلب الأول:

$$\left(g(x) = \frac{1}{1+x} \right) \geq \left(f(x) = \frac{1}{1+a} \right)$$

ومنه: $g(x) \geq f(x)$

$$\int_0^a g(x) dx \geq \int_0^a f(x) dx \quad \text{حيث } (a > 0)$$

$$\int_0^a \frac{1}{1+x} dx \geq \int_0^a \frac{1}{1+a} dx$$

$$\left[\ln(1+x) \right]_0^a \geq \left[\frac{1}{1+a} x \right]_0^a$$

$$\boxed{\ln(1+a) \geq \frac{a}{1+a}} \quad \boxed{2}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد ان: $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$

24) فيما يلي ارسم الخط البياني C الذي يمثل التابع f ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = b$, $x = a$

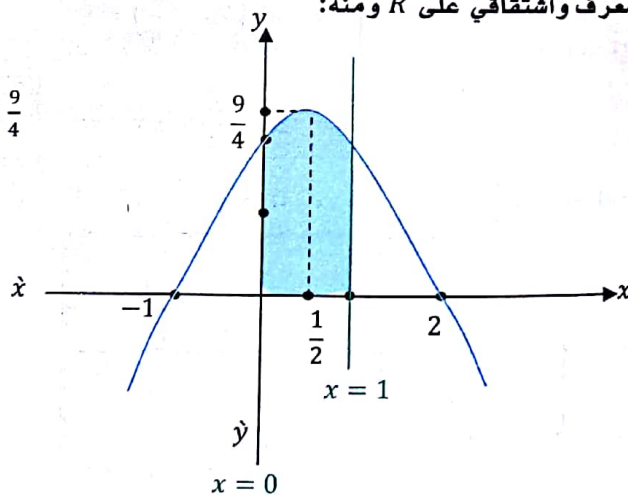
$\boxed{1}$ $f(x) = 2 + x - x^2$: $a = 0$, $b = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$\left. \begin{matrix} \dot{f}(x) = 1 - 2x \\ \dot{f}(x) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} : f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\dot{f}(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$-\infty$

f معرف واشتقاقي على R ومنه:



$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2 + x - x^2) dx$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{13}{6}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2} \quad : a=1, b=4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

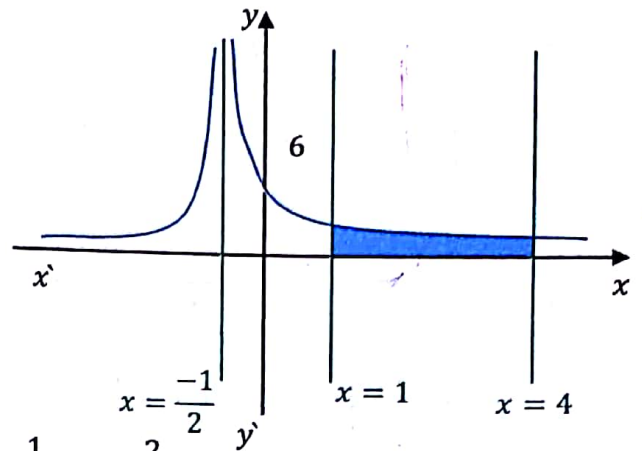
$$f'(x) = \frac{-6(2)(2x+1)(2)}{(2x+1)^4} = \frac{-24}{(2x+1)^3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0	$+\infty$	0

$$S = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{6}{(2x+1)^2} dx = \int_1^4 6(2x+1)^{-2} dx$$

$$= \left[6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} \right]_1^4 = \left[\frac{-3}{2x+1} \right]_1^4 = \left(\frac{-3}{9} \right) - \left(\frac{-3}{3} \right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

f معرف واشتقاقي على المجال $R \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$ ومنه:



$$\boxed{3} f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad : a=0, b=\frac{\pi}{4}$$

نلاحظ ان التابع f دوره π فتكفي دراسة تغيرات التابع f على المجال $[0, \pi]$
f معرف واشتقاقي على $[0, \pi]$

$$f(0) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(\pi) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

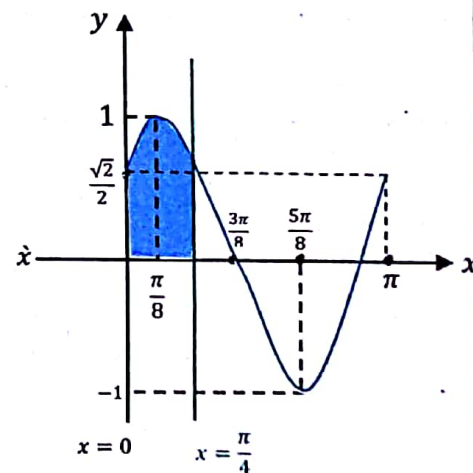
$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi k \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}}$$

$$k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} : f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos 0 = 1, \quad k=1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{8} : f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos \pi = -1$$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



0952480990 علاء رحال

0949198068 ياسر الساسنة

0933699123 وائل زعتريّة

$$\boxed{4} \quad f(x) = (x+1) \cdot e^{-x} \quad : a = -1 \quad , \quad b = \ln 2$$

f معرف واشتقاقي على R

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \text{عدم تعيين } +\infty \cdot 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

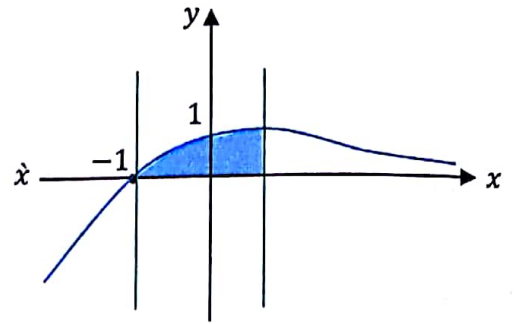
$$f(x) = x \cdot e^{-x} + e^{-x} = \frac{x}{e^x} + e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \boxed{x=0} : f(0) = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	0



$$x = -1 \quad y \quad x = \ln 2$$

$$\begin{aligned} S &= \left[(-x-1)e^{-x} \right]_{-1}^{\ln 2} - \left[e^{-x} \right]_{-1}^{\ln 2} \\ &= \left((-\ln 2 - 1)e^{-\ln 2} - 0 \right) - \left(e^{-\ln 2} - e \right) \\ &= \frac{-\ln 2 - 1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + e = \frac{-\ln 2 - 1}{2} - \frac{1}{2} + e \\ &= \frac{-1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + e = -\ln(\sqrt{2}) - 1 + e \end{aligned}$$

$$S = \int_{-1}^{\ln 2} f(x) dx = \int_{-1}^{\ln 2} (x+1)e^{-x} dx$$

$$u(x) = x+1 \rightarrow u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^{-x} \rightarrow v'(x) = -e^{-x}$$

$$S = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^{\ln 2} - \int_{-1}^{\ln 2} -e^{-x} dx$$

25) ارسم في جملة متجانسة شكلاً بسيطاً يبين الخطين البيانيين للتابعين:

$x \rightarrow \sin x$, $x \rightarrow x \cdot \sin x$ على المجال $[0, \pi]$ موضحاً وضعهما النسبي

ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على $[0, \pi]$

$$g(x) = \sin x \quad , \quad f(x) = x \sin x$$

لدراسة الوضع النسبي في المجال $[0, \pi]$ ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

$$f(x) - g(x) = x \sin x - \sin x = (x-1) \sin x$$

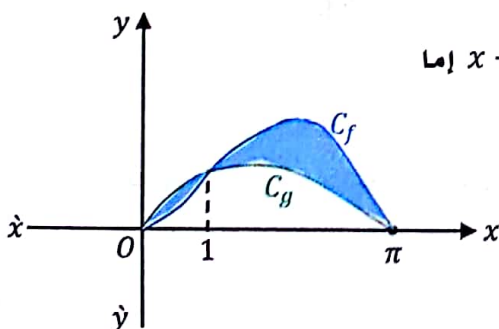
نلاحظ أن $\sin x > 0$ في المجال $[0, \pi]$ وندرس إشارة $x-1$:

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0	1	π
$x-1$		$-$	$+$
لوضع النسبي		C_g تحت C_f	C_g فوق C_f

لنوجد النقاط المشتركة:

برسم تقريبي نجد:



$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow (x-1) \sin x = 0$$

$$\text{إما } x-1 = 0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\text{أو } \sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

عندما $k=0$

عندما $k=1$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=\pi}$$

$$S = \underbrace{\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx}_{S_1} + \underbrace{\int_1^\pi (f(x) - g(x)) dx}_{S_2}$$

$$S_1 = \int_0^1 (\sin x - x \cdot \sin x) dx$$

$$= \int_0^1 (1-x) \sin x dx$$

$$u(x) = 1-x \rightarrow \dot{u}(x) = -1$$

$$v(x) = \sin x \rightarrow v(x) = -\cos x$$

$$S_1 = \left[-(1-x) \cos x \right]_0^1 - \int_0^1 \cos x dx$$

$$= [(-1+x) \cos x - \sin x]_0^1$$

$$= (-\sin 1) - (-1-0) = 1 - \sin 1$$

$$S_2 = \int_1^\pi (x \cdot \sin x - \sin x) dx$$

$$= \int_1^\pi (x-1) \sin x dx$$

$$u(x) = x-1 \rightarrow \dot{u}(x) = 1$$

$$v(x) = \sin x \rightarrow v(x) = -\cos x$$

$$S_2 = \left[-(x-1) \cos x \right]_1^\pi - \int_1^\pi -\cos x dx$$

$$= [(-x+1) \cos x + \sin x]_1^\pi$$

$$= ((-\pi+1)(-1) + 0) - (0 + \sin 1)$$

$$= \pi - 1 - \sin 1$$

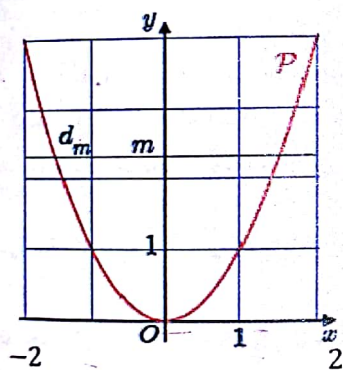
$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S = 1 - \sin 1 + \pi - 1 - \sin 1$$

$$= \pi - 2 \sin 1$$

(26) ليكن P الخط البياني للتابع $x \mapsto x^2$ مرسوماً على المجال $[-2, 2]$. المستقيم d_m الذي معادلته

$y = m$ ($0 \leq m \leq 4$) يقسم داخل جزء القطع المكافئ P إلى منطقتين.

عند أية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟



• حسب أولاً مساحة السطح المحصور بين القطع المكافئ والمستقيم $y = 4$

$$S = \int_{-2}^2 (y - f(x)) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx$$

$$= 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - (0 - 0) \right] = \frac{32}{3}$$

• حسب مساحة السطح المحصور بين القطع المكافئ والمستقيم $y = m$

نوجد أولاً نقاط التقاطع: (النقاط المشتركة)

$$f(x) = y \quad x^2 = m \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}$$

$$S_1 = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} (y - f(x)) dx = 2 \int_0^{\sqrt{m}} (m - x^2) dx = 2 \left[mx - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{m}}$$

$$= 2 \left[\left(m\sqrt{m} - \frac{m\sqrt{m}}{3} \right) - (0 - 0) \right] = \frac{4}{3} m\sqrt{m}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} S$$

$$\frac{4}{3} m\sqrt{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow m\sqrt{m} = 4$$

$$m^3 = 16 \Rightarrow m = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

• لكي تتساوى ساحتي المنطقتين المقسومتين بـ d_m يجب ان يكون:

(27) ليكن f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = (2-x)e^x$

وليكن C خطه البياني في جملة متجانسة:

1. ادرس تغيرات f وارسم C
 f معرف واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ? \quad \text{عدم تعيين} \quad +\infty.0$$

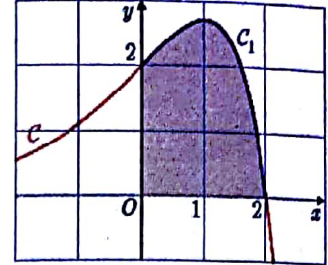
$$f(x) = 2e^x - xe^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -e^x + e^x(2-x) = e^x(-1+2-x) = e^x(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow \boxed{x=1} : f(1) = e$$



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	e	$-\infty$

2. ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2, x=0$

وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل. احسب مساحة S

$$S = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2-x).e^x dx$$

$$u(x) = 2-x \rightarrow \dot{u}(x) = -1$$

$$v(x) = e^x \rightarrow \dot{v}(x) = e^x$$

$$S = \left[(2-x)e^x \right]_0^2 - \int_0^2 -e^x dx$$

$$= \left[(2-x)e^x + e^x \right]_0^2 = (0 + e^2) - (2 + 1) = e^2 - 3$$

3. عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V

(a) عين الأعداد a, b, c حتى يكون التابع $G: x \rightarrow (ax^2 + bx + c).e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)^2$

$$\dot{G}(x) = (f(x))^2$$

G تابع أصلي للتابع $(f(x))^2$ عندئذ:

$$(2ax + b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2 + bx + c) = (2-x)^2.e^{2x}$$

$$(2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c)e^{2x} = (4 - 4x + x^2).e^{2x}$$

$$[2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c)]e^{2x} = (x^2 - 4x + 4)e^{2x}$$

بالمطابقة

$$\begin{cases} 2a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \\ 2a + 2b = -4 \rightarrow 1 + 2b = -4 \rightarrow \boxed{b = -\frac{5}{2}} \\ b + 2c = 4 \rightarrow -\frac{5}{2} + 2c = 4 \rightarrow \boxed{c = \frac{13}{4}} \end{cases}$$

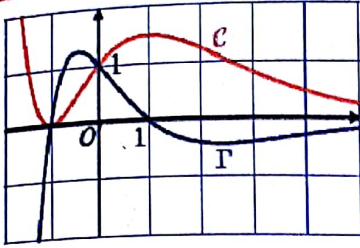
$$G(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} \right) e^{2x}$$

(b) استنتج قيمة V

$$V = \pi \int_0^2 \frac{(f(x))^2}{(f(x))^2 \text{ تابع اصلي لـ } G} dx$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} \right) e^{2x} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(2 - 5 + \frac{13}{4} \right) e^4 - \frac{13}{4} \right] = \frac{\pi}{4} (e^4 - 13)$$



(28) مسألة مركبة:

① في معلم متجانس رسمنا الخطين البيانيين Γ, C

لتابعين اشتقائيين على R نعلم ان احدهما

مشتق للآخر، لذلك يمكن ان نرمز إليهما g و \dot{g} .

1. بين معللاً أي هذين الخطين هو الخط البياني للتابع g وأيها لمشتقه.

- الخط C متناقص تماماً في المجال $]-\infty, -1[$ فمشتقه سالب.

وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $]-\infty, -1[$ وهو واقع تحت $x\dot{x}$.

- الخط C متزايد تماماً في المجال $]-1, 1[$ فمشتقه موجب.

- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $]-1, 1[$ وهو فوق $x\dot{x}$.

- الخط C متناقص تماماً في المجال $]1, +\infty[$ فمشتقه سالب.

- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $]1, +\infty[$ وهو واقع تحت $x\dot{x}$.

- إذاً C الخط لبياني للتابع g ، Γ هو الخط البياني للتابع \dot{g} .

2. ما ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 ؟

ميل لمماس في نقطة فاصلتها (0) هو $\dot{g}(0)$ ومن الشكل نجد ان $\dot{g}(0) = 1$

② نتامل المعادلة التفاضلية: $\dot{y} + y = 2(x+1)e^{-x}$ (E):

1. اثبت ان $f_0: x \mapsto (x^2 + 2x)e^{-x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية (E)

$$f_0 = y = (x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$\dot{f}_0 = \dot{y} = (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x)$$

$$= e^{-x}(2x + 2 - x^2 - 2x)$$

$$= (2 - x^2)e^{-x}$$

$$L_1 = \dot{y} + y = (2 - x^2)e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2 - x^2 + x^2 + 2x)$$

$$= (2x + 2)e^{-x} = 2(x + 1)e^{-x} = L_2$$

إذاً f_0 حل للمعادلة التفاضلية (E).

2. لتكن (\dot{E}) المعادلة التفاضلية $\dot{y} + y = 0$

اثبت ان « f حل للمعادلة (E) » يكافئ « $u = f - f_0$ حل للمعادلة (\dot{E}) »

ثم حل (\dot{E}) واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E).

« f حل للمعادلة (E): $\dot{y} + y = 2(x+1)e^{-x}$ » \Leftrightarrow « $u = f - f_0$ حل للمعادلة $(\dot{E}): \dot{y} + y = 0$ »

$$(f - f_0)' + (f - f_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{f} + f = 2(x+1)e^{-x}$$

◆ بفرض f حل للمعادلة (E) لنثبت ان :

$$(f - f_0)' + (f - f_0) = 0$$

$$L_1 = (f - f_0)' + (f - f_0)$$

$$= \dot{f} - \dot{f}_0 + f - f_0$$

$$= \underbrace{(\dot{f} + f)}_{\text{من الفرض}} - \underbrace{(\dot{f}_0 + f_0)}_{\text{من الفرض}}$$

$$= 2(x+1)e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} = 0 = L_2$$

إذاً $u = f - f_0$ حل للمعادلة (E).

$$(E): \dot{y} + y = 0$$

- حل المعادلة:

$$u(x) = k \cdot e^{-x} \quad \text{يكون حلها من الشكل:}$$

◆ بفرض $u = f - f_0$ حل للمعادلة (E) ولنثبت ان:

$$\dot{f} + f = 2(x+1)e^{-x}$$

$$\dot{y} + y = 0 \quad \text{لدينا من الفرض}$$

$$(f - f_0)' + (f - f_0) = 0$$

$$\dot{f} - \dot{f}_0 + f - f_0 = 0$$

$$(\dot{f} + f) - (\dot{f}_0 + f_0) = 0$$

كون f_0 هو حل للمعادلة (E)

$$\dot{f} + f = \dot{f}_0 + f_0$$

$$\dot{f} + f = 2(x+1)e^{-x}$$

إذاً f حل للمعادلة (E).

- استنتاج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E) يكافئ عندما يكون $(u = f - f_0)$ حل للمعادلة (E) وبما أن

$$u(x) = f(x) - f_0(x)$$

$$f(x) = u(x) + f_0(x)$$

$$f(x) = k \cdot e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$$

3. إذا علمت أن التابع g من الجزء ① هو حل للمعادلة (E) فاعط صيغة $g(x)$ بدلالة x .

حل للمعادلة (E) فهو من الشكل:

$$g(x) = k \cdot e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$$

الخط البياني للتابع g يمر بالنقطة $(0,1)$:

$$g(0) = 1$$

$$k + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

$$\Rightarrow g(x) = e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$= \underbrace{(1 + x^2 + 2x)}_{\text{من الفرض}} e^{-x}$$

$$\boxed{g(x) = (x+1)^2 e^{-x}}$$

4. عين h حل للمعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$.

حل للمعادلة (E) فهو من الشكل:

$$h(x) = k \cdot e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$h(x) = (k + x^2 + 2x)e^{-x}$$

المماس افقي عند $x = 0$ اي $h'(x) = 0$ ومنه:

$$\dot{h}(x) = (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(k + x^2 + 2x)$$

$$\dot{h}(x) = e^{-x}(2x + 2 - k - x^2 - 2x)$$

$$\dot{h}(x) = e^{-x}(-k - x^2 + 2)$$

$$\dot{h}(0) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -k + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 2} \\ h(x) = (2 + x^2 + 2x)e^{-x} \end{array} \right\}$$

③ ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

1. ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيناً نهاياته عند $-\infty$ و $+\infty$.

f معرف واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$$

(عدم تعيين $\infty, 0$)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{مقارب عند } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + 2) \\ &= e^{-x}(2x + 2 - x^2 - 2x - 2) = -x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} : f(0) = 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	2	0

2. ليكن الخط البياني الذي يمثل f في معلم متجانس، اكتب معادلة للمماس T للخط \hat{C} في النقطة Ω التي فاصلتها -1 وارسم T و \hat{C}

$$x = -1 : f(-1) = e : \Omega(-1, e)$$

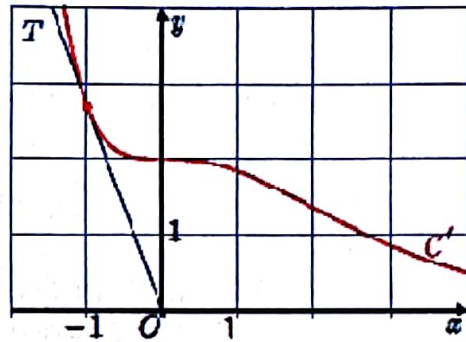
$$m = f'(-1) = -e$$

$$T: y - e = -e(x + 1)$$

$$T: \boxed{y = -ex}$$

x	0	-1
y	0	e

(0,0) , (-1,e)



3. عين الأعداد c, b, a حتى يكون التابع $F: x \rightarrow (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على R ثم احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و \hat{C} والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \alpha, x = 0$ تابع أصلي للتابع f إذاً:

$$\hat{F}(x) = f(x)$$

$$(2ax + b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2 + bx + c) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$(2ax + b - ax^2 - bx - c)e^{-x} = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$(-ax^2 + (2a - b)x + (b - c))e^{-x} \stackrel{\text{بالمطابقة}}{=} (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$\begin{cases} -a = 1 \rightarrow \boxed{a = -1} \\ 2a - b = 2 \rightarrow \boxed{b = -4} \\ b - c = 2 \rightarrow \boxed{c = -6} \end{cases}$$

$$F(x) = (-x^2 - 4x - 6)e^{-x} \quad \text{إذاً:}$$

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = [F(x)]_0^\alpha = [(-x^2 - 4x - 6)e^{-x}]_0^\alpha$$

$$= (-\alpha^2 - 4\alpha - 6)e^{-\alpha} - (-6)$$

$$\boxed{A(\alpha) = (-\alpha^2 - 4\alpha - 6)e^{-\alpha} + 6}$$