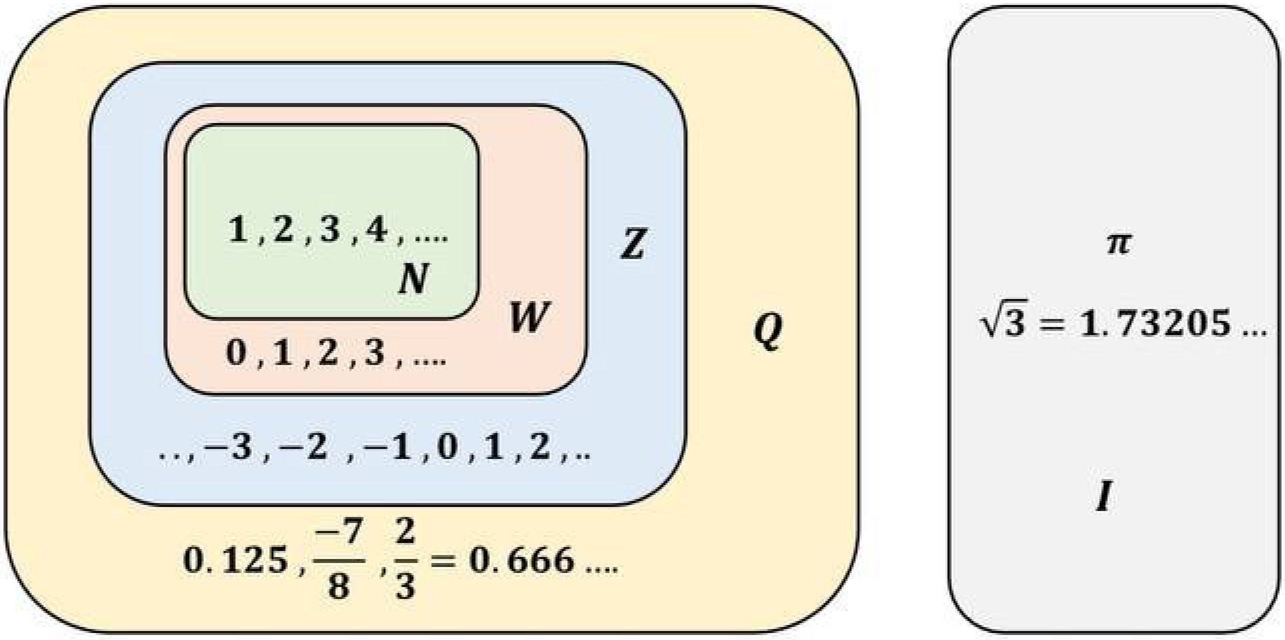
مجموعة الأعداد الحقيقية R

$R = Q \cup I$



$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

$I \subset R$

الصفة المميزة للمجموعة

$$\{x \mid -2 < x < 5 , x \in R\}$$

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد	x لها هذه الخصائص ..	الأعداد x حيث ...

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة :

$$x \leq -3$$

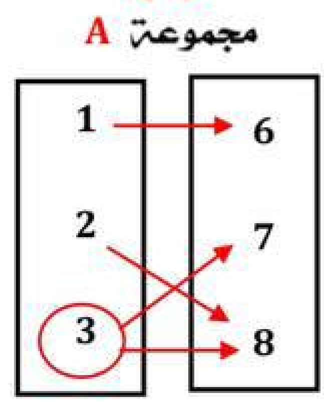
الحل :

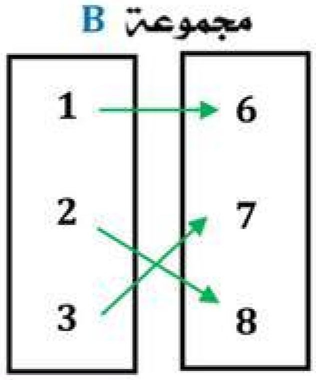
$$\{x \mid x \leq -3 , x \in R\}$$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي **تقل أو تساوي -3**

المخطط السهمي — عدديًا

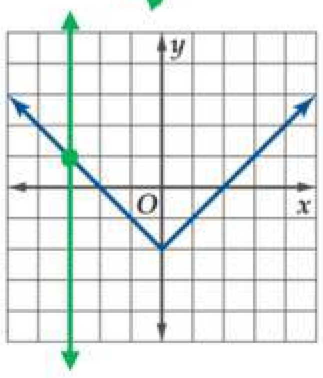
علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B .

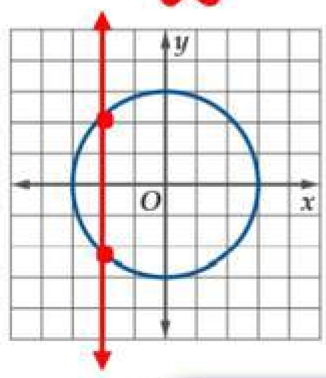




اختبار الخط الرأسي — بيانيًا

تمثل مجموعة من النقاط في المستوى الاحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة .





تمييز الدالة

متى تكون العلاقة دالة ؟؟

الجداول — عدديًا

تكون دالة عندما ترتبط كل قيمة من x بقيمة واحدة لـ y

x	y
-2	3
-2	5
1	2

x	y
-2	3
0	5
1	2

المعادلات — جبريًا

$y^2 - 2x = 5$

$3y + 6x = 18$

تكون y دالة في x

نحل المعادلة بالنسبة لـ y

وعندما لا ترتبط أي قيمة لـ x بقيمتين من y تكون دالة .

رمز الدالة

يستعمل $f(x)$ رمزًا للدالة ويعني قيمة الدالة f عند x وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x فإننا نكتب $y = f(x)$

المعادلة : $y = -6x$ الدالة المرتبطة بالمعادلة : $f(x) = -6x$

المتغير المستقل x ويمثل قيم المجال

المتغير التابع y ويمثل قيم المدى

إيجاد قيم الدالة

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x .

مثال : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$f(2) = 15$$

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

الدالة متعددة التعريف : هي التي تعرف بقاعدتين أو أكثر على فترات مختلفة .

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x

وذلك بتحديد الفترة المناسبة لقيمة x .

مثال : أوجد $f(10)$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 \ , & x < 3 \\ -x^3 \ , & 3 \le x \le 8 \\ 3x^2 + 1 \ , & x > 8 \end{cases}$$

أولًا : نحدد الفترة المناسبة لـ $x = 10$

هي الفترة الثالثة

ثم نعوض فيها عن قيمة x

$$f(10) = 3(10)^2 + 1$$

$$f(10) = 301$$

إيجاد مجال الدالة جبرياً

أمثلة	المجال	الدالة
$f(x) = x + 3$ المجال = R	المجال : R	كثيرة حدود
$f(x) = \frac{2+x}{x^2 - 7x}$ $x^2 - 7x \neq 0$ $x(x-7) \neq 0$ $x \neq 0$ $x - 7 \neq 0 \quad \rightarrow x \neq 7$ المجال : $\{x \| x \neq 0 , x \neq 7 , x \in R\}$	$\frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}$ المقام $\neq 0$ نوجد قيم x ونستبعدهم من المقام المجال = R − أصفار المقام المجال : $\{x \| x \neq$ أصفار المقام $, x \in R\}$	كسرية
$f(x) = \sqrt{x-5}$ $x - 5 \geq 0$ $x \geq 5$ المجال : $\{x \| x \geq 5 , x \in R\}$	$\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}$ ما تحت الجذر ≥ 0 ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \|$ الصفة المميزة $, x \in R\}$	جذرية تربيعية
$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$ $2x + 6 > 0$ $2x > -6$ $x > -3$ المجال : $\{x \| x > -3 , x \in R\}$	$\frac{\text{كثيرة حدود}}{\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}}$ ما تحت الجذر > 0 ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \|$ الصفة المميزة $, x \in R\}$	كسرية البسط كثيرة حدود والمقام جذر تربيعي
$f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$ نوجد البسط: $2x - 3 \geq 0$ المجال : $x \geq \frac{3}{2}$ نوجد أصفار المقام $x - 5 \neq 0$ $x \neq 5$ المجال : $x \neq 5$ المجال : $\{x \| x \geq \frac{3}{2} , x \neq 5 , x \in R\}$	$\frac{\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}}{\text{كثيرة حدود}}$ لإيجاد المجال : نستخدم طريقة الجذر للبسط وطريقة الكسرية للمقام	كسرية البسط جذر تربيعي والمقام كثيرة حدود

رموز الفترات

تستعمل لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

فيستعمل الرمزان " [" أو "] " للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها

بينما يستعمل الرمزان " (" أو ") " للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها .

أما الرمزان " $-\infty$ " أو " ∞ " فيستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة .

فترات محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$a \leq x \leq b$	$[a , b]$
$a < x < b$	(a , b)
$a \leq x < b$	$[a, b)$
$a < x \leq b$	$(a, b]$

فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$x \geq a$	$[a, \infty)$
$x \leq a$	$(-\infty, a]$
$x > a$	(a , ∞)
$x < a$	$(-\infty , a)$
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty , \infty)$

الرمزان

$\cup$ **رمز الاتحاد:** ويعني جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين .

$\cap$ **رمز التقاطع:** ويعني جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين .

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال رمز الفترة :

$x < -2$ أو $x > 9$

الحل :

$(-\infty , -2) \cup (9 , \infty)$

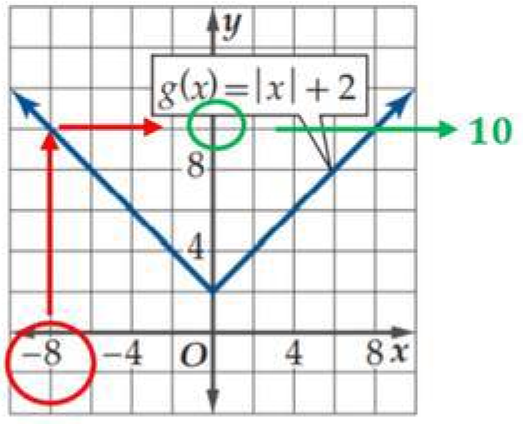
تقدير قيم الدوال

يستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة .

في المثال : استعمل التمثيل البياني لتقدير $g(-8)$

ثم تحقق جبرياً وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة

بيانياً :



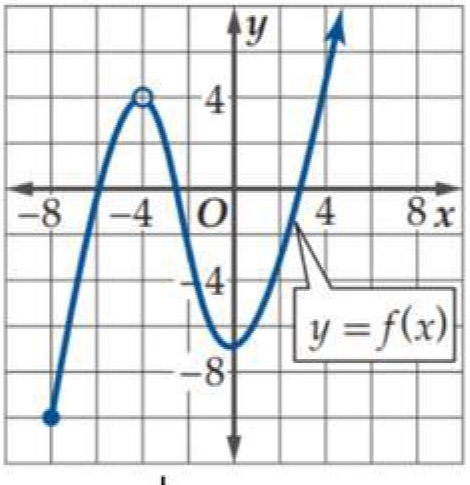
جبرياً :

$g(-8) = |-8| + 2$

$g(-8) = 8 + 2$

$g(-8) = 10$

إيجاد المجال والمدى من خلال التمثيل البياني



المجال

يحدد بيانياً من محور x

يبدأ المجال من $x = -8$

$x = -4$ ليست في المجال

السهم يدل على استمرارية المجال في الجهة الأخرى .

المجال $= [-8 , -4) \cup (-4 , \infty)$

المدى

يحدد بيانياً من محور y

يبدأ المدى من $y = -10$

وتزداد قيمة الدالة بلا حدود كما يدل السهم الممتد لأعلى .

المدى $= [-10 , \infty)$

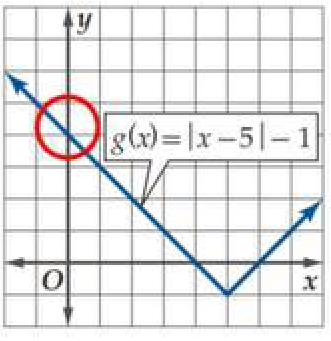
إيجاد المقطع y

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور.

ويمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة.

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجده جبرياً :



بيانياً : المنحنى يقطع محور y عند النقطة $(0, 4)$

إذن المقطع y هو 4 .

جبرياً : نعوض عن الـ x بـ صفر

$$g(0) = |0 - 5| - 1$$

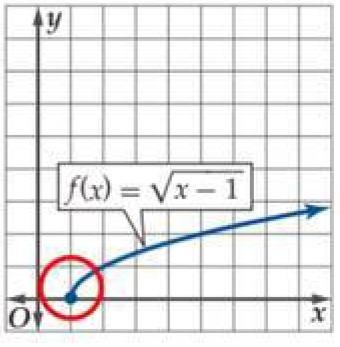
$$g(0) = 4$$

إيجاد الأصفار

تسمى المقاطع x لمنحنى الدالة أصفار الدالة وتسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة جذور المعادلة ولإيجاد أصفار دالة f فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل .

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية لأصفارها ثم أوجدها جبرياً :



بيانياً: المنحنى يقطع محور x عند النقطة $(1, 0)$

إذن المقطع x هو 1.

جبرياً : نعوض عن الـ y بـ صفر

$$0 = \sqrt{x - 1}$$

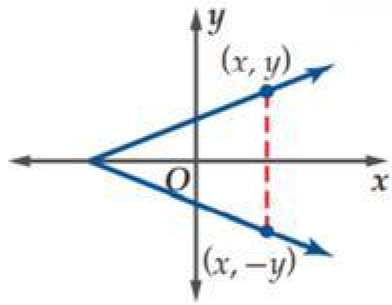
بالتربيع للطرفين

$$x = 1 \leftarrow \quad 0 = x - 1$$

اختبارات التماثل

التماثل حول محور x

بيانيًا:



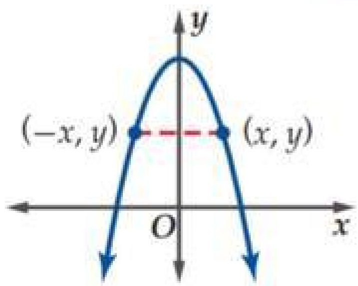
جبريًا:

نعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة .

التماثل حول محور y

بيانيًا:



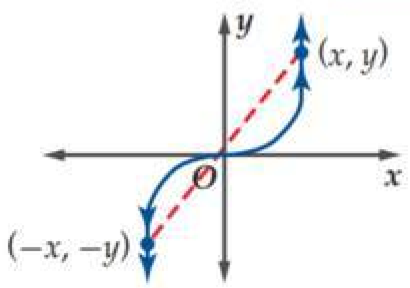
جبريًا:

نعوض عن x بـ $-x$

فيعطي معادلة مكافئة .

التماثل حول محور نقطة الأصل

بيانيًا:



جبريًا:

نعوض عن x بـ $-x$

ونعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة .

الدوال الزوجية والفردية

زوجية متماثلة حول محور y

جبريًا :

لكل x في مجال f

$$f(-x) = f(x)$$

فردية متماثلة حول نقطة الأصل

جبريًا :

لكل x في مجال f

$$f(-x) = -f(x)$$

مثال

زوجية:

$$f(x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = (-x)^4 + 2$$
$$f(-x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = f(x)$$

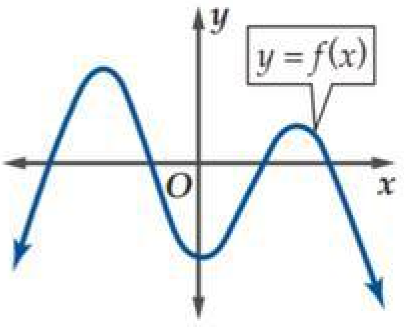
فردية:

$$f(x) = x^3 - 2x$$
$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$$
$$f(-x) = -x^3 + 2x$$
$$f(-x) = -(x^3 - 2x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

ليست زوجية وليست فردية:

$$f(x) = 4\sqrt{x}$$
$$f(-x) = 4\sqrt{-x}$$
$$f(-x) \neq f(x)$$
$$f(-x) \neq -f(x)$$

الدالة المتصلة



تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.

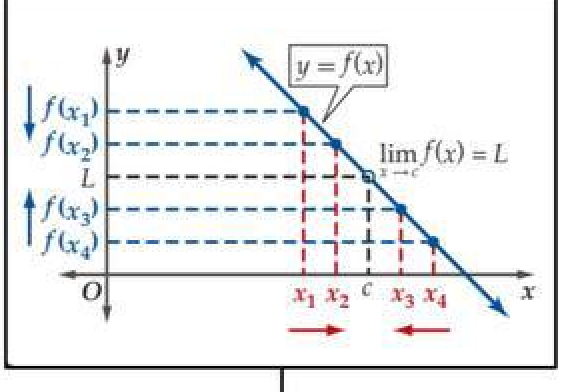
وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه .

نهاية الدالة

اقتراب قيم الدالة من قيمة واحدة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة .

وهي أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ بأن تقترب من قيمة واحدة عندما تقترب x من c من جهتي اليمين واليسار .

النهايات



إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L

عندما تقترب x من c من الجهتين ،

فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

ويرمز لها بالرمز :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

أي : نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L

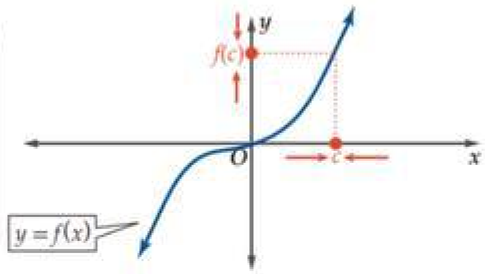
اختبار الاتصال

يقال أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية :

1

$f(x)$ معرفة عند c

أي أن $f(c)$ موجودة .



3

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

2

$f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين

أي أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة.

مثال

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$

الحل :

نتحقق من الشروط الثلاثة .

1 هل $f(0)$ موجودة ؟

$f(0) = 0$ ، الدالة معرفة عند $x = 0$

2 هل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة ؟

نكون جدول يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين .

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}		1×10^{-9}	1×10^{-6}	0.001

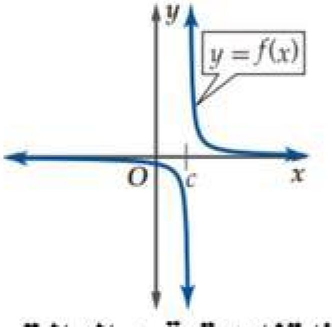
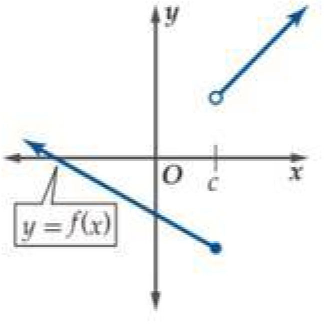
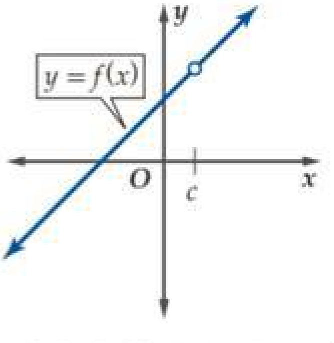
الجدول يبين أنه عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين واليسار ، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 0

أي أن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3 هل $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ؟

بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ، $f(0) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 0$

أنواع عدم الاتصال

شروطها	نوع عدم الاتصال	التمثيل البياني
تكون كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\frac{\text{عدد}}{0}$ أي غير معرف .	عدم اتصال لانهائي عدم اتصال غير قابل للإزالة	 إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.
تكون الدالة متعددة التعريف $f(x)=\begin{cases} f_1(x)\,, & x>c \\ f_2(x)\,, & x\le c \end{cases}$ عند إيجاد النهايات للطرفين من اليمين واليسار تكون غير متساوية $\lim\limits_{x\to c^+} f_1(x) \neq \lim\limits_{x\to c^-} f_2(x)$	عدم اتصال قفزي عدم اتصال غير قابل للإزالة	 إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.
تكون الدالة كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\frac{0}{0}$ أي غير معرف . فنعمل على تحليلها لنعيد تعريفها من جديد لتصبح متصلة .	عدم اتصال قابل للإزالة	 إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة ولا تساوي قيمة الدالة عند $x=c$ ويشار إليها بدائرة صغيرة غير مظللة لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

أمثلة على أنواع عدم الاتصال

1

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

عند $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{0}$$

غير معرف

غير متصل نوعه لانهائي

2

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 4 \,, x > 2 \\ 2 - x \,, x \leq 2 \end{cases}$$

عند $x = 2$

$$f(2) = 2 - x$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} 2 - x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} 5x + 4 = 14 \end{array}\right] \neq$$

النهايات غير متساوية

غير متصل نوعه قفزي

3

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

عند $x = 4$

$$f(4) = \frac{(4)^2 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

غير معرف

نعيد تعريفها :

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$= \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4}$$

$$f(x) = x + 4$$

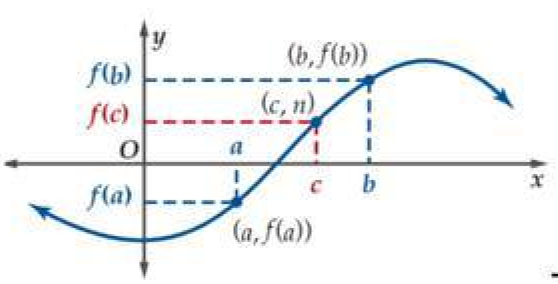
$$f(4) = 4 + 4 = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} \,, x \neq 4 \\ 8 \,, \quad x = 4 \end{cases}$$

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b ، بحيث $f(c) = n$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة ، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b بحيث $f(c) = 0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b .



تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:

$f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4\,,4]$

الحل :

أولاً: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

ثانياً: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهي بين قيم الدالة التي فيها تغير بالإشارات بين العددين -3 و -2

و بين العددين 0 و 1 وبين العددين 1 و 2 .

تقريب الأصفار دون تغيّر الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:

$f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$

الحل :

أولاً: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

ثانياً: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهنا قيم الدالة لا تتغير إشاراتها عند قيم x المعطاة ولكن $f(x)$ تتناقص عندما

تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار ، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين 0 $x = 0$

من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0.

سلوك طرفي التمثيل البياني

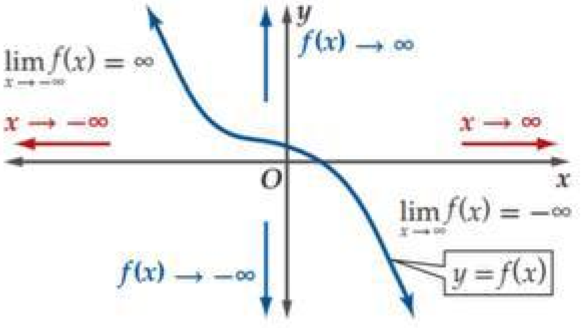
يصف شكل الدالة عند طرفي منحناها ، أي يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود ، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$

ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني نستعمل مفهوم النهاية .

دراسة سلوك طرفي التمثيل البياني

من اليمين
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

من اليسار
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



كثيرة حدود

من الرسم نحدد السلوك

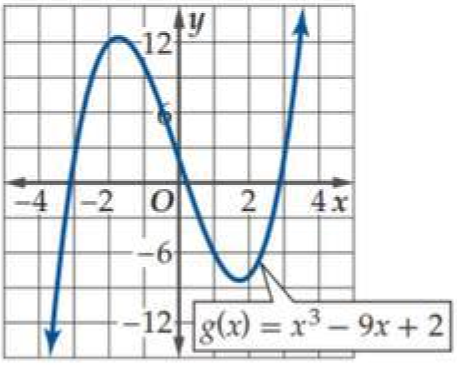
إذا كان :

اتجاه السهم إلى أعلى ∞

اتجاه السهم إلى أسفل $-\infty$

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني :



الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

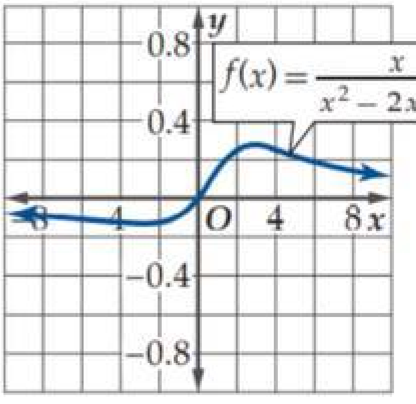
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

كسرية

درجة البسط < درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

مثال :



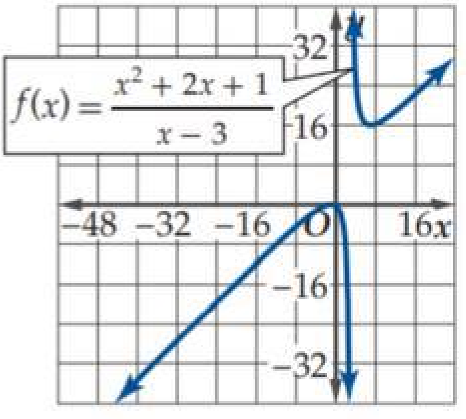
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

درجة البسط > درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

مثال :



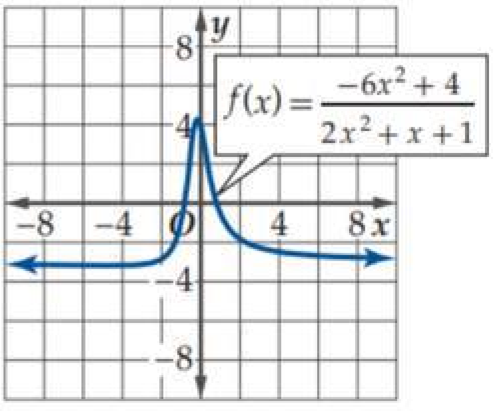
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

درجة البسط = درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\text{معامل الحد الرئيس}}{\text{معامل الحد الرئيس}}$$

مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) =$$

$$= \frac{-6}{2} = -3$$

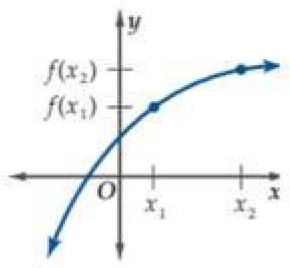
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

خصائص الدالة (متزايدة – متناقصة – ثابتة) :

متزايدة

تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط
إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

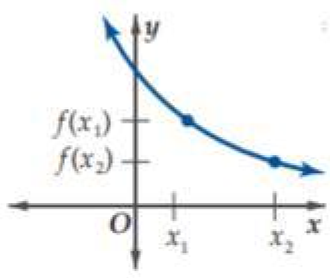
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) < f(x_2)$
عندما $x_1 < x_2$



متناقصة

تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط
إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

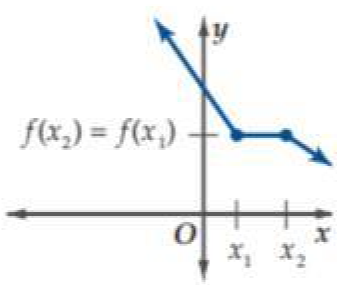
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) > f(x_2)$
عندما $x_1 < x_2$



ثابتة

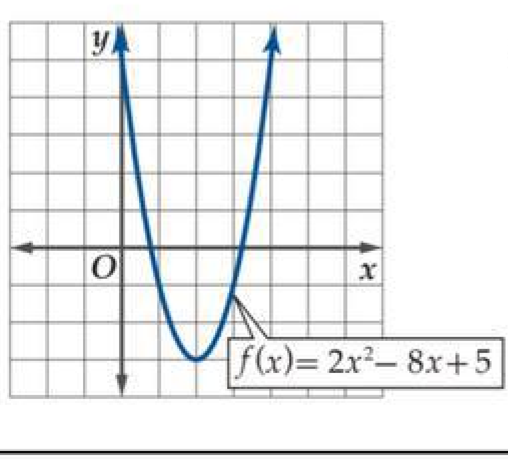
تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط
إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة .

لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) = f(x_2)$
عندما $x_1 < x_2$



مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة
متزايدة أو متناقصة أو ثابتة :

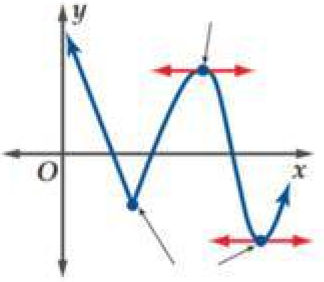


الحل :

الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty , 2)$

الدالة متزايدة في الفترة $(2 , \infty)$

النقاط الحرجة

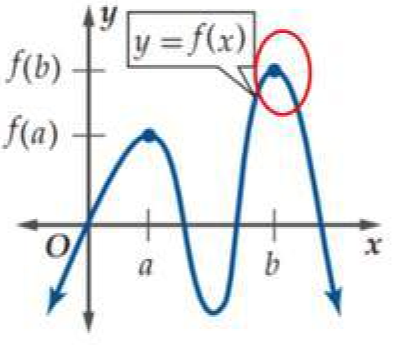
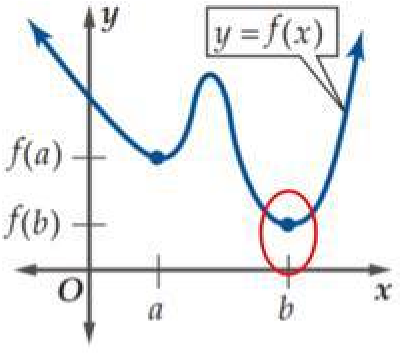


هي النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها

فتكون قمة أو قاعًا في منحنى الدالة .

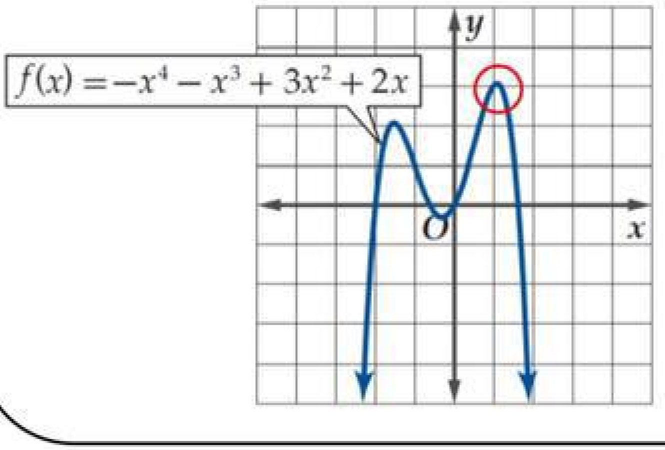
يكون المماس المرسوم للمنحنى عندها إما أفقيًا (ميله صفر) أو عموديًا (ميله غير معرف)
أو أنه لا يوجد عندها مماس ويدل ذلك على وجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة .

القيم القصوى المطلقة

العظمى	الصغرى
 لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأسفل والأكثر علوًا هي القيمة العظمى المطلقة . وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في مجالها . يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = b$	 لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأعلى والأكثر نزولاً هي القيمة الصغرى المطلقة . وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في مجالها . يوجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = b$

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى مطلقة
ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

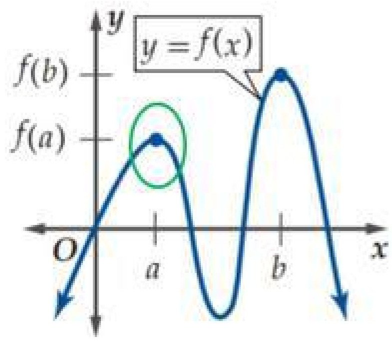
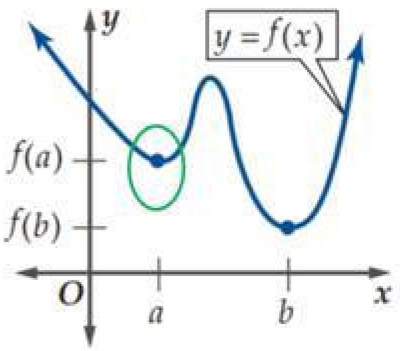


الحل :

توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$

مقدارها $= 3$

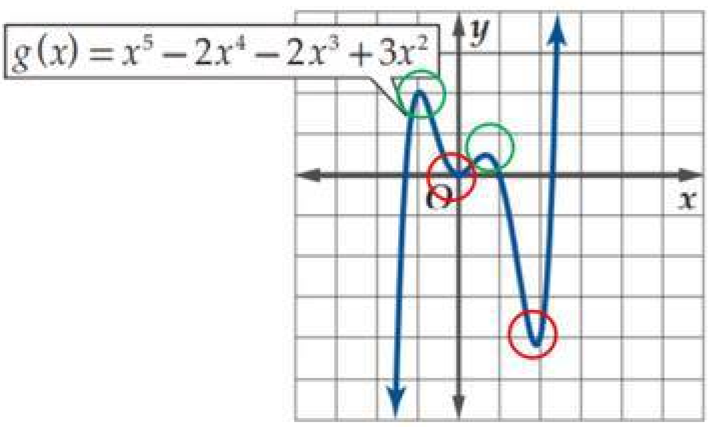
القيم القصوى المحلية

العظمى	الصغرى
	
لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . **الأقل ارتفاعاً** هي **قيمة عظمى محلية**. وهي **القيمة الأكبر** من جميع القيم في فترة من المجال . توجد **قيمة عظمى محلية** عند a = x	**لا يشترط** أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . **الأقل نزولًا** هي **قيمة صغرى محلية** . وهي **القيمة الأصغر** من جميع القيم في فترة من المجال . توجد **قيمة صغرى محلية** عند a = x

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى محلية مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة ، ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

الحل :



توجد **قيمة عظمى محلية** عند $x = -1$

مقدارها $= 2$

توجد **قيمة عظمى محلية** عند $x = 0.5$

مقدارها $= 0.5$

توجد **قيمة صغرى محلية** عند $x = 0$

مقدارها $= 0$

توجد **قيمة صغرى محلية** عند $x = 2$

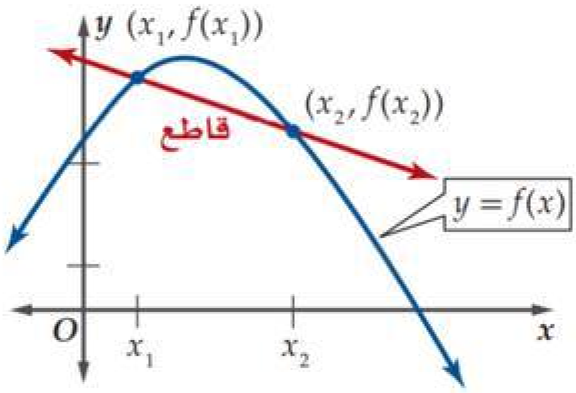
مقدارها $= -4$

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين .

متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو :

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



القاطع : هو المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة .

مثال

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

في الفترة $[2\,,3]$

الحل :

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3) + 2$$
$$f(3) = 2$$

$$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 3(2) + 2$$
$$f(2) = -4$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 = 2\,, x_2 = 3$$

$$m_{sec} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

$$= \frac{2 - (-4)}{3 - 2}$$

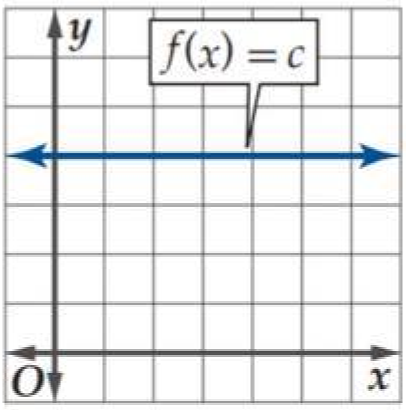
$$= 6$$

متوسط معدل التغير = السرعة المتوسطة

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

1 الدالة الثابتة $f(x) = c$

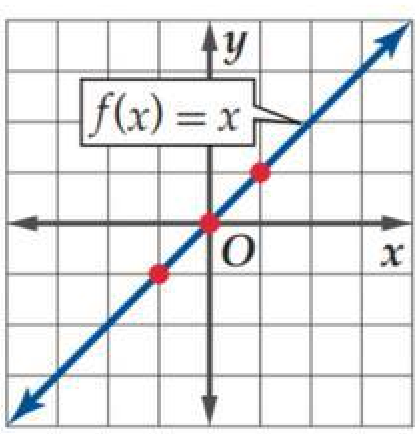
المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$\{C\}$
المقطع	تقطع y عند النقطة $(0 , c)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty , \infty)$



c عدد حقيقي

2 الدالة المحايدة $f(x) = x$

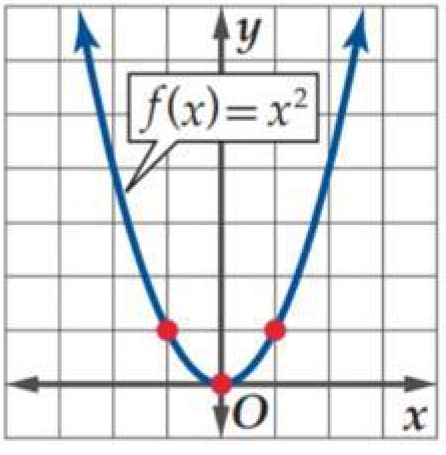
المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R \quad (-\infty , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty , \infty)$



جميع النقاط الذي تمر بها الدالة
إحداثياتها (a , a)

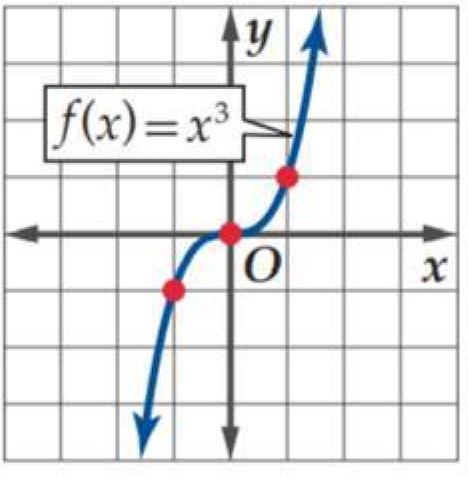
خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

3 الدالة التربيعية $f(x) = x^2$



المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0 , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty , 0)$ متزايدة في الفترة $(0 , \infty)$

4 الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$

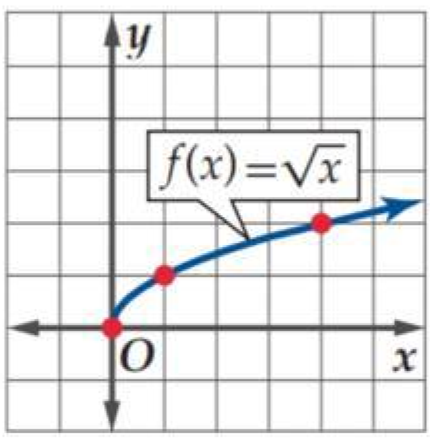


المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R \quad (-\infty , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty , \infty)$

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

5 دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$

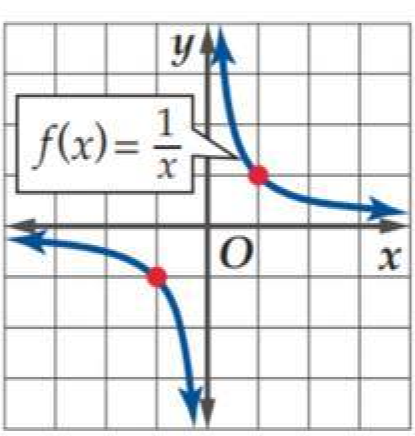
المجال	$R^+ \quad [0, \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0, \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	غير متماثلة
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty, \infty)$



$x \geq 0$

6 دالة المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$

المجال	$R - \{0\}$
المدى	$R - \{0\}$
المقطع	لا يوجد
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	غير متصلة (لا نهائي)
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty, 0), (0, \infty)$

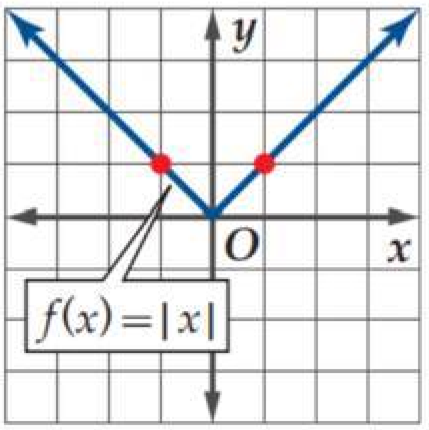


$x \neq 0$

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

7 دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$

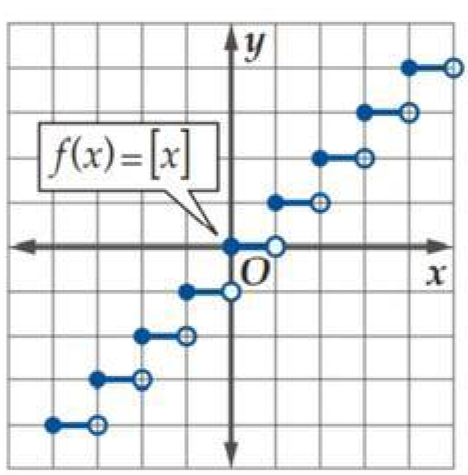
المجال	$R \quad (-\infty, \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0, \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ متزايدة في الفترة $(0, \infty)$



$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

8 دالة أكبر عدد صحيح $f(x) = [x]$

المجال	$R \quad (-\infty, \infty)$
المدى	Z
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	غير متماثلة
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية
الاتصال	غير متصلة (قفزي)
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة عندما $x \notin Z$ متزايدة عندما $x \in Z$



أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x

دالة أكبر عدد صحيح هي أحد الأمثلة المشهورة على الدالة الدرجية .

التحويلات الهندسية

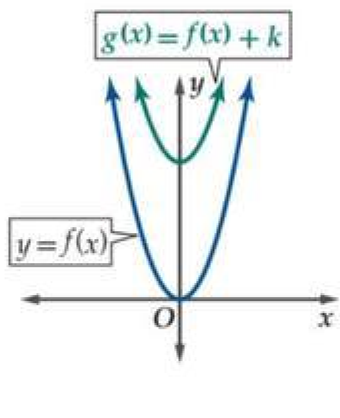
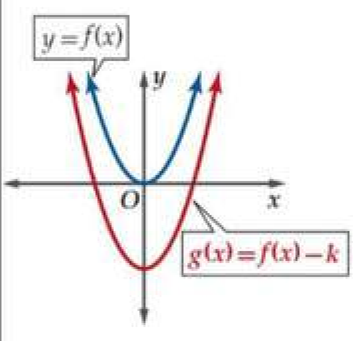
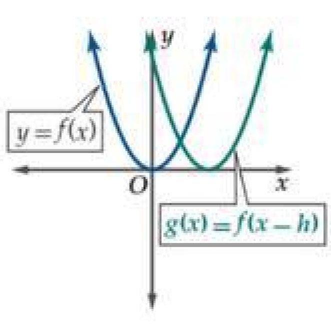
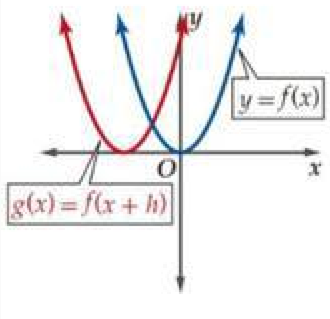
قياسية	غير قياسية
تغير موقع المنحنى	تغير موقع المنحنى
ولا تغير أبعاده أو شكله .	تغير شكل المنحنى .

مثال

قياسية	غير قياسية
الانسحاب - الانعكاس	التمدد - تحويلات القيمة المطلقة

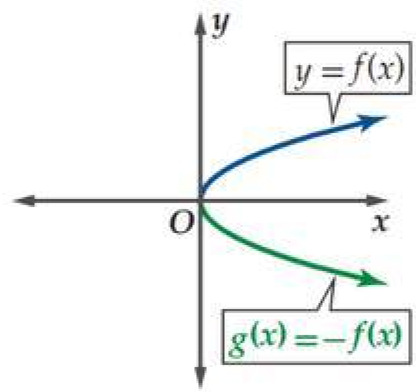
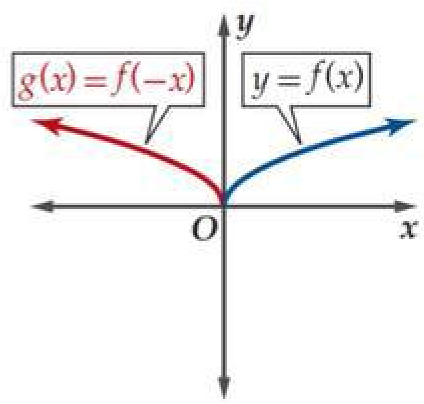
الانسحاب

تحويل ينقل منحنى الدالة فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة إلى أعلى أو أسفل ، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

الانسحاب			
رأسي		أفقي	
$g(x) = f(x) + k$		$g(x) = f(x-h)$	
k خارج		h داخل	
$(+)$ أعلى	$(-)$ أسفل	$(-)$ يمين	$(+)$ يسار
$g(x) = f(x) + k$	$g(x) = f(x) - k$	$g(x) = f(x-h)$	$g(x) = f(x+h)$
			

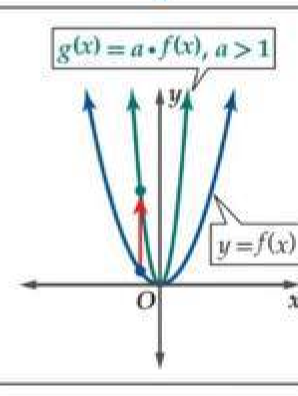
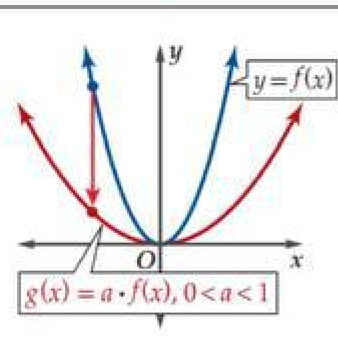
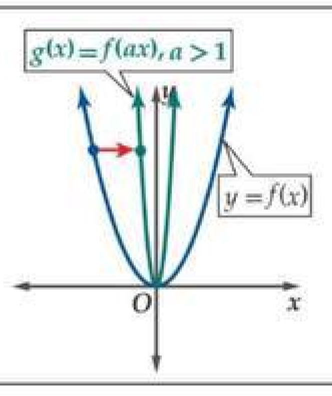
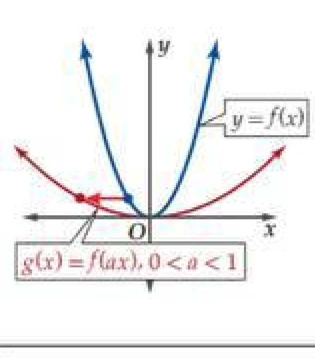
الانعكاس

تحويل يكون لمنحنى الدالة صورة **مرآة** بالنسبة **لمستقيم** محدد .

الانعكاس	
الانعكاس حول محور x	الانعكاس حول محور y
(−) خارج	(−) داخل
$g(x) = -f(x)$	$g(x) = f(-x)$
	

التمدد

تحويل يؤدي إلى **تضيق** (ضغط) أو **توسع** (مط) منحنى الدالة .

التمدد			
رأسي		أفقي	
(a خارج الدالة)		(a داخل الدالة)	
$g(x) = a.f(x)$		$g(x) = f(a.x)$	
توسع	تضيق	توسع	تضيق
$a > 1$	$0 < a < 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
اتجاه الحركة			
↑ ↓	↓ ↑	← →	→ ←
			

التوسع الرأسي ≈ **التضيق** الأفقي ، **التضيق** الرأسي ≈ **التوسع** الأفقي

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانياً

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانياً باستعمال التحويلات الهندسية.

مثال

مثل الدالة بيانياً :

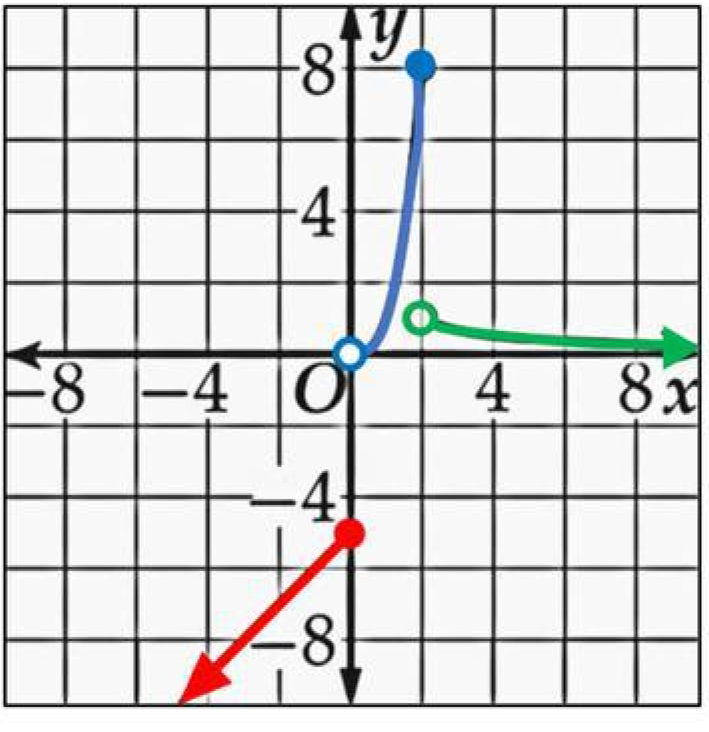
$$g(x)=\begin{cases} x-5 & , \quad x\le 0 \\ x^3 & , \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x>2 \end{cases}$$

الحل :

في الفترة $(-\infty,0]$ ، أمثل الدالة $y=x-5$

في الفترة $(0,2]$ ، أمثل الدالة $y=x^3$

في الفترة $(2,\infty)$ ، أمثل الدالة $y=\frac{2}{x}$



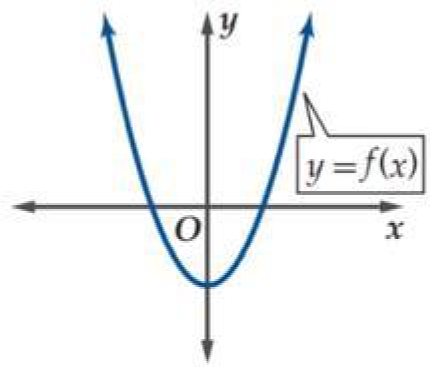
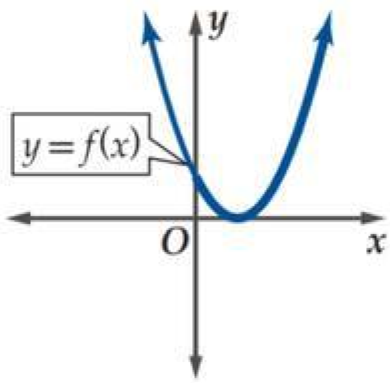
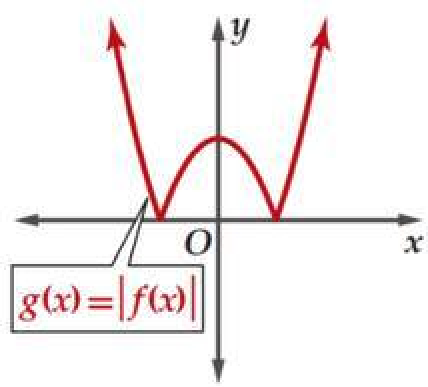
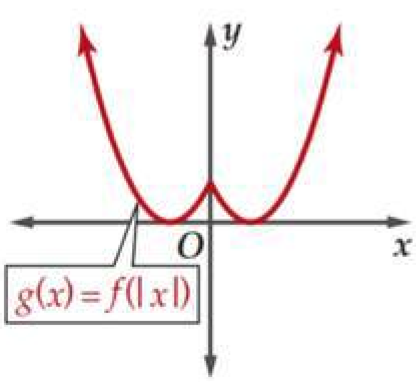
ضع دائرة مفتوحة عند

النقطة $(0\,,0)$ والنقطة $(2,1)$

ضع دائرة مغلقة عند

النقطة $(0\,,-5)$ والنقطة $(2,8)$

التحويلات الهندسية لدوال القيمة المطلقة

<table>
<tr><th colspan="2">القيمة المطلقة</th></tr>
<tr><th>خارج</th><th>داخل</th></tr>
<tr><td>$g(x) = |f(x)|$</td><td>$g(x) = f(|x|)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">الرسم قبل التحويل</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">الرسم بعد التحويل</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">طريقة الرسم</td></tr>
<tr><td>نعكس كل جزء موجود تحت محور x
ونجعله فوق محور x
ثم نزيل السابق .</td><td>نزيل الجزء الموجود يسار محور y
ثم نعكس المتبقي فقط حول محور y .</td></tr>
</table>

العمليات على الدوال

إذا كانت g , f دالتين يتقاطع مجالاهما ، فإننا نعرف عمليات الجمع ، والطرح ، والضرب والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

الضرب : $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

الطرح : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

إيجاد المجال

مجال $(f+g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f-g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f.g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$ − أصفار المقام

مثال

$$f(x) = x^2 - 6x - 8 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$$

أوجد كلا من الدوال الآتية ، ثم حدد مجالها :

الحل :

مجال $f(x)$ هو $(-\infty, \infty)$ R و مجال $g(x)$ هو $[0, \infty)$

$$(f.g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$$

المجال : $[0, \infty)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 6x - 8}{\sqrt{x}}$$

المجال : $(0, \infty)$

$$(f+g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$$

المجال : $[0, \infty)$

$$(f-g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$$

المجال : $[0, \infty)$

تركيب الدوال

تركيب الدوال يعني دمج دالتين ، وهذا الدمج لا ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة

وهو يعني إيجاد قيمة دالة عند دالة أخرى .

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g

حيث تطبق الدالة g أولاً ثم الدالة f

مثال

إذا كانت $g(x) = x - 4$, $f(x) = x^2 + 1$ فأوجد :

الحل :

1

$[f \circ g](x)$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f(x - 4)$$
$$= (x - 4)^2 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 17$$

2

$[g \circ f](x)$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1) - 4$$
$$= x^2 - 3$$

3

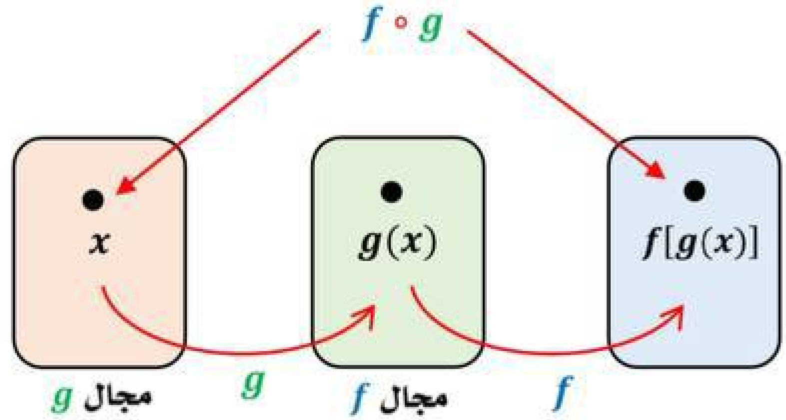
$[f \circ g](2) =$

$$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$$
$$= (2)^2 - 8(2) + 17$$
$$= 5$$

مجال دالة التركيب

يتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f

نوجد مجالي الدالتين f و g قبل تركيبهما وعند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيداً بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودة في مجال f



$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ايجاد مجال دالة التركيب

نوجد مجال كلًا من الدالتين f , g

- $R =$ ← مجال $f \circ g$ يساوي R
- مجال $f \neq R$ أو مجال $g \neq R$ ← نوجد مجال $f \circ g$ قبل التبسيط

مثال

حدد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية ثم أوجد $f \circ g$ فيما يلي :

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad , \qquad g(x) = x^2 + x$$

الحل :

مجال $f(x)$ هو $R - \{0\}$

مجال $g(x)$ هو R

نوجد التركيب

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f[x^2 + x]$$

$$= \frac{5}{x^2 + x}$$

نوجد مجال $f \circ g$

الدالة كسرية إذن : المقام $\neq 0$

$$x^2 + x \neq 0$$

$$x(x+1) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

المجال $\{x | x \neq 0, x \neq -1 , x \in R\}$

كتابة الدالة كتركيب دالتين

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها .

أي أنه لتفكيك دالة مثل h ، فإنك تجد دالتين g , f مثلًا بحيث يكون تركيبهما هو h .

$$h(x) = [f \circ g](x)$$

مثال

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ فيما يلي :

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

الحل :

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل :

$$h(x) = (x-1)(x-1)$$

$$h(x) = (x-1)^2$$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين :

$$g(x) = x - 1 \quad , \quad f(x) = x^2$$

وعندئذٍ :

$$h(x) = (x-1)^2$$

$$\boxed{g(x) = x - 1} \qquad \boxed{f(x) = x^2}$$

$$h(x) = [g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

العلاقات والعلاقات العكسية

يقال أن العلاقة A علاقة **عكسية** للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب $(a\ ,b)$ موجوداً في أحد العلاقتين ، فإن الزوج المرتب $(b\ ,a)$ موجودٌ في العلاقة الأخرى .

مثال :

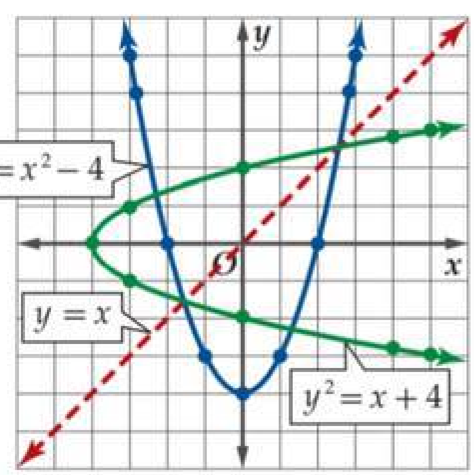
العلاقة $A=\{(1\ ,5)\ ,(2\ ,10)\}$ هي علاقة **عكسية** لـ العلاقة $B=\{(5\ ,1)\ ,(10\ ,2)\}$

وإذا مثلت العلاقة **بمعادلة** فيمكن إيجاد علاقتها **العكسية** بتبديل **المتغير المستقل** **بالمتغير التابع** .

العلاقة

$y=\ x^2-4$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x=y^2-4$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3

ملاحظة

كل علاقة من هاتين العلاقتين **المتعاكستين**

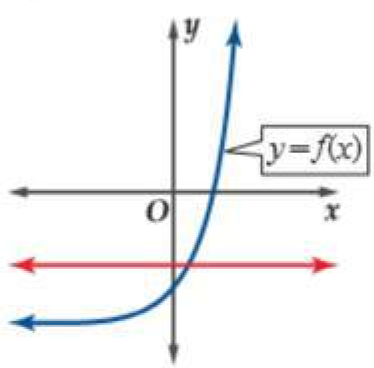
هي **انعكاس** للأخرى حول **المستقيم** $y=x$

الدالة العكسية

هي العلاقة **العكسية** لدالة f والتي تمثل دالة ، يرمز لها بالرمز f^{-1} .

اختبار الخط الأفقي

يوجد لأي دالة f دالة **عكسية** f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل **خط أفقي** يتقاطع مع منحنى الدالة عند **نقطة واحدة** على **الأكثر** .



مثال :

بما أنه **لا يوجد خط أفقي** يقطع منحنى الدالة f **بأكثر** من نقطة

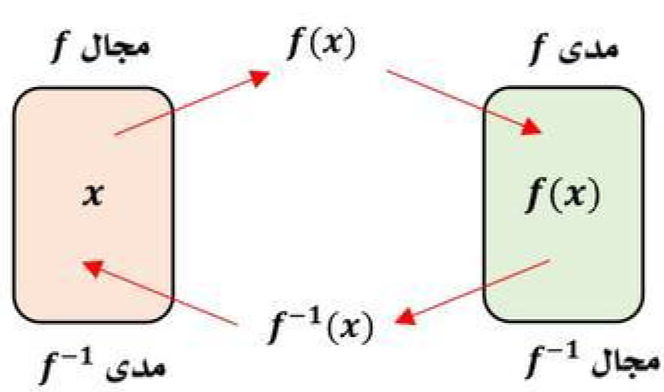
فإن الدالة **العكسية** f^{-1} موجودة .

الدالة المتباينة

هي الدالة التي تحقق اختبار **الخط الأفقي** .

لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة **واحدة** فقط لـ y ، **ولا توجد** قيمة لـ y ترتبط **بأكثر** من قيمة لـ x .

إذا كانت الدالة **متباينة** فإن لها دالة **عكسية** .



إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1	التحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي .
الخطوة 2	ضع y مكان $f(x)$
الخطوة 3	بدل موقعي x , y
الخطوة 4	حل المعادلة بالنسبة للمتغير y
الخطوة 5	ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

مثال

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن .

$$f(x) = -16 + x^3$$

الحل :

الدالة متباينة باختبار الخط الأفقي

إذن يوجد دالة عكسية

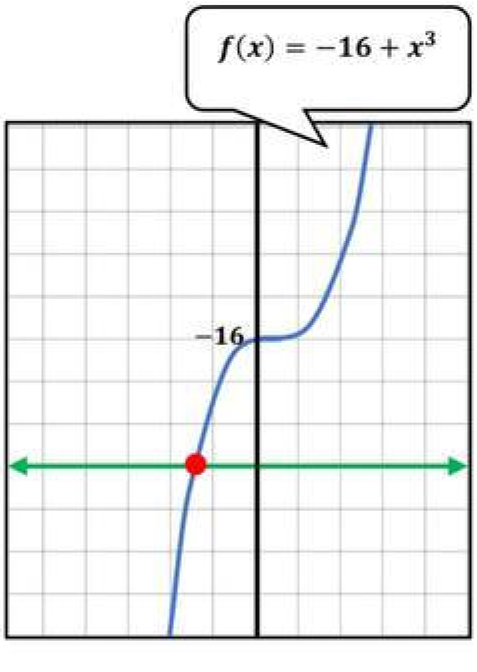
$$y = -16 + x^3$$

$$x = -16 + y^3$$

$$y^3 = x + 16$$

$$y = \sqrt[3]{x + 16}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 16}$$



تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} دالة عكسية للأخرى ، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان :

1. $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$
2. $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$

مثال

أثبت جبرياً أن كلا من الدالتين g , f تمثل دالة عكسية للأخرى :

$$f(x) = 18 - 3x \quad , g(x) = 6 - \frac{x}{3}$$

الحل :

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f\left[6 - \frac{x}{3}\right]$$
$$= 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right)$$
$$= 18 - 18 + \frac{3x}{3}$$
$$= x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g[18 - 3x]$$
$$= 6 - \frac{18 - 3x}{3}$$
$$= \frac{18 - 18 + 3x}{3}$$
$$= x$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ فإن كلا الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى.

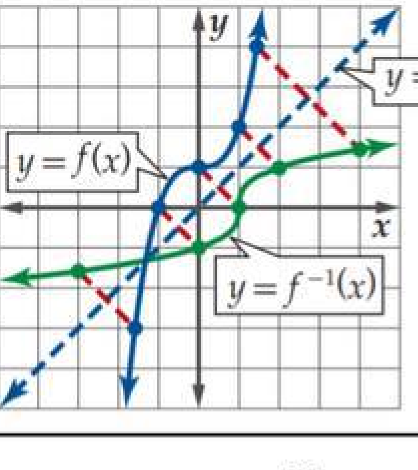
إيجاد الدالة العكسية بيانياً

يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية

بانعكاس الدالة الأصلية

حول المستقيم $y = x$

كما في المثال :



إذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل في اختبار الخط الأفقي ومن ثم لا تكون دالة متباينة .