مع مختارات من أحاديث رسول الله ﷺ من كتاب الأربعون النووية

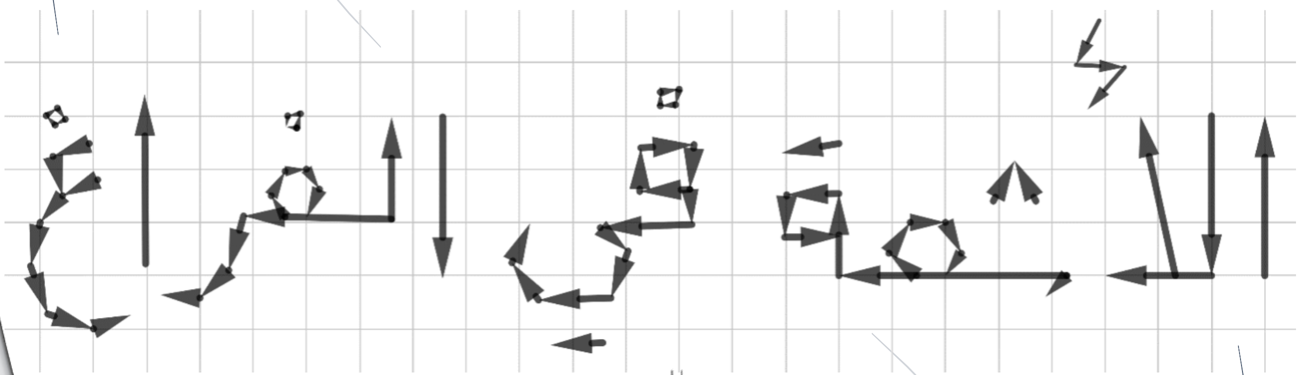
الأشعة في الفراغ

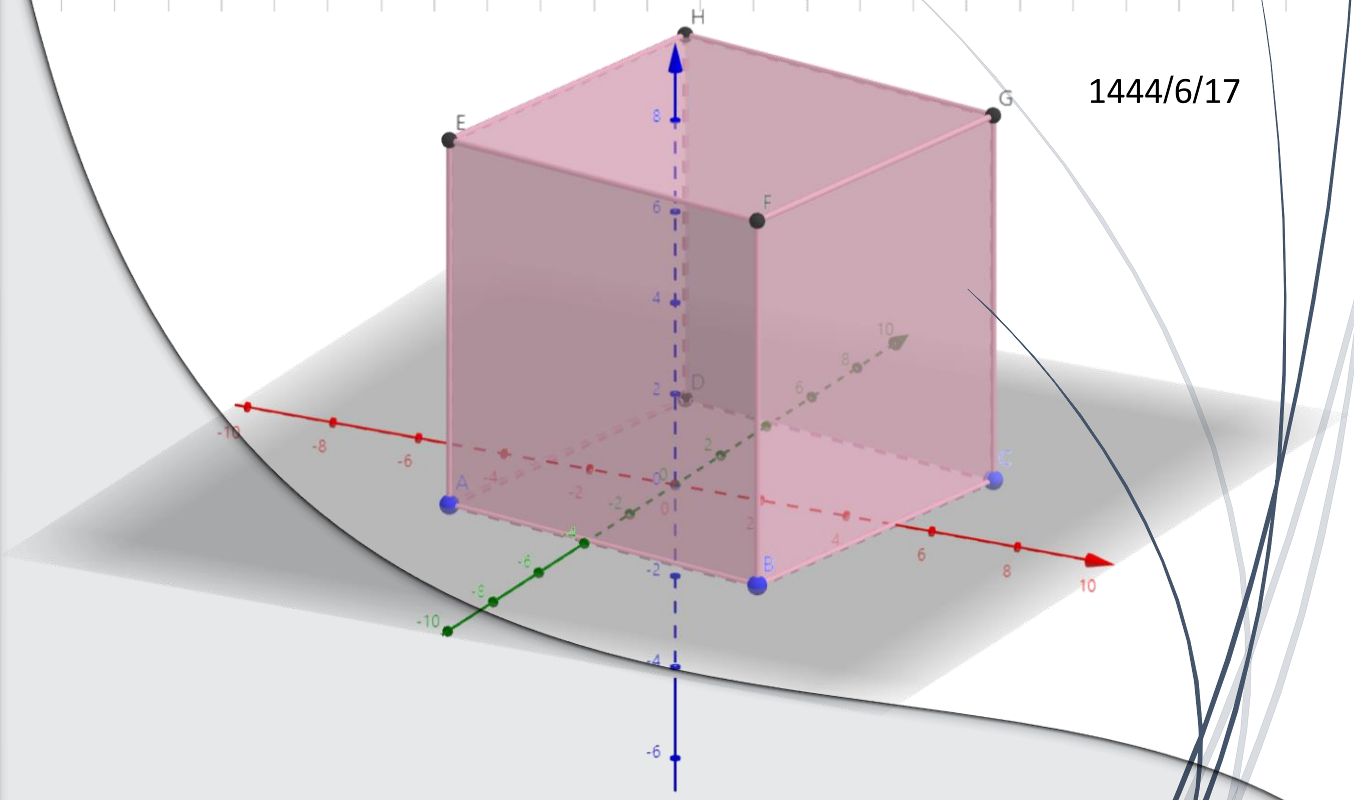
نوطه خاصة بأفكار الأشعة

القسم الثاني

أ.د. برلنت صبري مطيط و نور محمد بسيم أشقر

لطلاب الثالث الثانوي العلمي





1444/6/17

الجداء السلمي في الفراغ

تدرب (1): صفحة 50

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

احسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{v}.\vec{w}$ و $\vec{w}.\vec{u}$ في الحالتين:

$\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ و $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{w}=\frac{1}{3}\vec{i}-2\vec{j}$

$$\vec{u}.\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v=2\left(\frac{1}{2}\right)+(-3)(5)$$
$$=-14$$
$$\vec{v}.\vec{w}=x_vx_w+y_vy_w=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+(5)(-2)$$
$$=-\frac{59}{6}$$
$$\vec{w}.\vec{u}=x_ux_w+y_uy_w=2\left(\frac{1}{3}\right)+(-3)(-2)$$
$$=\frac{20}{3}$$

$\vec{u}(2,-1)$ و $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},3\right)$ و $\vec{w}(5,2)$.

$$\vec{u}.\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v=2\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)(3)$$
$$=-4$$
$$\vec{v}.\vec{w}=x_vx_w+y_vy_w=\left(-\frac{1}{2}\right)(5)+(3)(2)$$
$$=\frac{7}{2}$$
$$\vec{w}.\vec{u}=x_ux_w+y_uy_w=2(5)+(-1)(2)=8$$

تدرب (2): صفحة 50

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أعط في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d :

$A(5,3)$ و $d: 2x+5y-5=0$

معادلة المستقيم: $ax+by+c=0$ ، الشعاع الموجه $\vec{u}(-b,a)$ ، وشعاع الناظم العمودي عليه $\vec{n}(a,b)$

$$d: \underbrace{2}_{a}x+\underbrace{5}_{b}y\underbrace{-5}_{c}=0$$

الشعاع الموجه للمستقيم d هو $\vec{u}(-5,2)$ ويكون هذا الشعاع هو الشعاع الناظم للمستقيم d' المطلوب

فمعادلة المستقيم المطلوب تكون من الشكل:

$$-5x+2y+c=0$$

والمستقيم يمر بالنقطة A، أي $A(5,3)$ تحقق معادلة المستقيم

$$-5(5)+2(3)+c=0 \Longrightarrow c=19$$

وبالتالي

$$d':-5x+2y+19=0$$

$A(-1,2)$ و $d: x-3y+2=0$

$$d: \underbrace{1}_{a}x\underbrace{-3}_{b}y\underbrace{+2}_{c}=0$$

الشعاع الموجه للمستقيم d هو $\vec{u}(3,1)$ ويكون هذا الشعاع هو الشعاع الناظم للمستقيم d' المطلوب

فمعادلة المستقيم المطلوب تكون من الشكل:

$$3x+y+c=0$$

والمستقيم يمر بالنقطة A، أي $A(-1,2)$ تحقق معادلة المستقيم

$$3(-1)+(2)+c=0 \Longrightarrow c=1$$

وبالتالي

$$d': 3x+y+1=0$$

تدرب (3): صفحة 50

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوي أنَّ:

$$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$$

نستفيد من الخاصة

$$\vec{u}^2-\vec{v}^2=(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$$

$$\underbrace{2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}}_{L1}=\underbrace{AB^2-BC^2+CD^2-DA^2}_{L2}$$

$$L2=\underbrace{AB^2-BC^2}+\underbrace{CD^2-DA^2}$$
$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$
$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}_{\overrightarrow{AC}}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\underbrace{(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})}_{\overrightarrow{CA}}$$
$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\overrightarrow{CA}$$
$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD})\overrightarrow{AC}$$
$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD})\overrightarrow{AC}$$
$$=\left(\underbrace{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{DB}}+-\left(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{BD}}\right)\right)\overrightarrow{AC}$$
$$=(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD})\overrightarrow{AC}==(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB})\overrightarrow{AC}$$
$$=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=L1$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

تدريب (4): صفحة 50

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

أعط في الحالتين الآتيتين بعد النقطة A عن المستقيم d :

$d: 2x+y-5=0$ و $A(-2,4)$

بعد النقطة A عن المستقيم $ax+by+c=0$

$$\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$Distance = \frac{|2(-2)+4-5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$d: \sqrt{2}x-3y-1=0$ و $A(-\sqrt{2},2)$

$$Distance = \frac{\left|\sqrt{2}(-\sqrt{2})-3(2)-1\right|}{\sqrt{2+9}} = \frac{9}{\sqrt{11}}$$

تدريب (1): صفحة 53

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

احسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{v}.\vec{w}$ و $\vec{w}.\vec{u}$ في الحالتين:

$\vec{u}(1+\sqrt{2},\sqrt{3},0)$ و $\vec{v}(1-\sqrt{2},0,-1)$ و $\vec{w}(0,-\sqrt{3},1)$.

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\vec{u}.\vec{v} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}(0)+0(-1)$$
$$= 1-2 = -1$$

$$\vec{v}.\vec{w} = (1-\sqrt{2})(0)+0(-\sqrt{3})+(-1)(1)$$
$$= -1$$

$$\vec{w}.\vec{u} = (0)(1+\sqrt{2})+(\sqrt{3})(-\sqrt{3})+(0)(1)$$
$$= -3$$

$\vec{u}\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{1}{2},-2,\frac{2}{3}\right)$ و $\vec{w}(1,0,1)$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)(-2)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$\vec{v}.\vec{w} = \left(\frac{1}{2}\right)(1)+(-2)(0)+\left(\frac{2}{3}\right)(1) = \frac{7}{6}$$

$$\vec{w}.\vec{u} = (1)\left(\frac{2}{3}\right)+(0)\left(-\frac{1}{6}\right)+(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

تدريب (2): صفحة 53

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

إذا علمت أنَّ نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأنَّ $\vec{u}.\vec{v}=-4$

فاحسب المقادير الآتية:

$\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v})$

$\vec{u}.\vec{v}=-4$ و $\|\vec{u}\|=5$ و $\|\vec{v}\|=3$

$$\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\vec{u}.\vec{v}$$
$$= 25-4 = 21$$

$\vec{v}.(\vec{u}-\vec{v})$

$$\vec{v}.(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}-\|\vec{v}\|^2$$
$$= -4-9 = -13$$

$(2\vec{u}).(\vec{v}-3\vec{u})$

$$(2\vec{u}).(\vec{v}-3\vec{u}) = 2\vec{u}.\vec{v}-6\vec{u}.\vec{u}$$
$$= 2(\vec{u}.\vec{v})-6\|\vec{u}\|^2$$
$$= -8-6(25) = -8-150$$
$$= 158$$

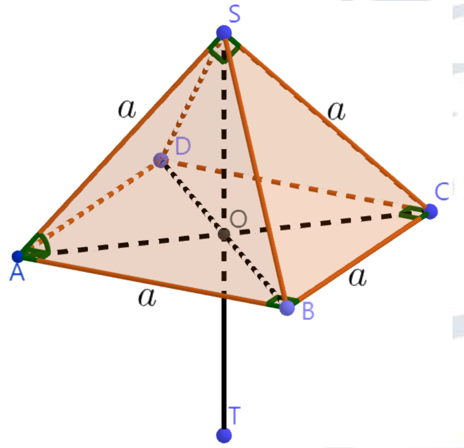
$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v})$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v})$$
$$= \vec{u}.\vec{u}-3\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}-3\vec{v}.\vec{v} =$$
$$= \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}^2$$
$$= 25+8-27 = 6$$

تدريب (3): صفحة 53

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نتأمل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مربع ورأسه S وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a. احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$.

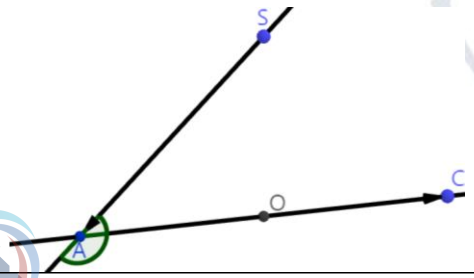


هرم منتظم، طول كل حرف من أحرفه يساوي a، فالأوجه الجانبية مثلثات متساوية الأضلاع

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SB}\|\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}) =$$
$$a.a.\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SC}\|.\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC})$$
$$= a.a.\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

حيث نلاحظ من تشابه المثلثين ABC و ASC أنّ الزاوية $\widehat{ASC} = 90^\circ$



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المثلث ASC قائم في S ومتساوي الساقين، فتكون

$$\widehat{SAC} = 45^\circ$$

ومنه $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC})$$

$$= a.a\sqrt{2}.\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$= a^2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2$$

حيث حسب فيثاغورث يكون $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$

$$|AC| = \sqrt{2}a$$

طريقة أخرى: يمكن استخدام خاصة المسقط القائم فيكون

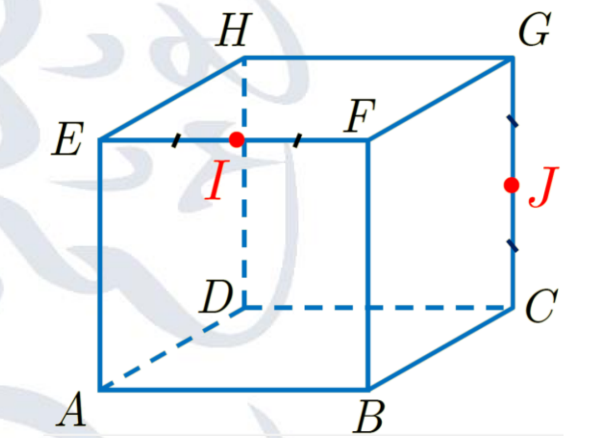
$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AO}\|.\|\overrightarrow{AC}\|$$

$$= -\frac{a\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = -a^2$$

تدرب (4): صفحة 53

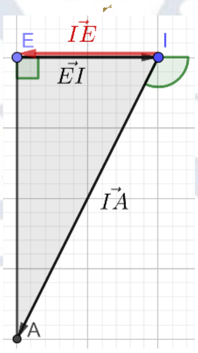
في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a، فيه I منتصف $[EF]$، و J منتصف $[CG]$. احسب $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$.



أوجه المكعب عبارة عن مربعات وكل وجه يعامد

الوجه المجاور وحيث $\cos\frac{\pi}{2} = 0$



$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} = 0$$

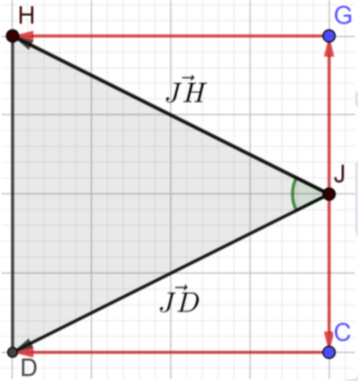
$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC} = 0$$

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ} = 0$$

خاصة المسقط القائم

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IE} = -(\overrightarrow{EI})^2$$

$$= -\left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}$$



$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH})(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD})$$

$$= \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC} + \underbrace{\overrightarrow{JG}.\overrightarrow{CD}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{JC}}_{0} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD}$$

$$= -\overrightarrow{JC}.\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD} = -\frac{a}{2}.\frac{a}{2} + a.a = \frac{3}{4}a^2$$

تدرب (1): صفحة 56

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

بيّن فيما يأتي إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين أو عيّن الوسيط α ليكونا كذلك.

$\boxed{1}\ \vec{u}\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 2, 3\right)$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(3)$$

$$= -\frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -2 \neq 0$$

الشعاعان غير متعامدان

$\boxed{2}\ \vec{u}(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}), \quad \vec{v}(-\sqrt{2}, 1, 1)$

$$\vec{u}.\vec{v} = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})(1) + (1-\sqrt{2})(1)$$

$$= -2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$$

الشعاعان متعامدان

$\boxed{3}\ \vec{u}\left(2, -\frac{1}{2}, 5\right), \quad \vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 3, \alpha\right)$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$(2)\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)(3) + (5)(\alpha) = 0$$

$$-\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}.\frac{8+15}{10} = \frac{23}{50}$$

$\boxed{4}\ \vec{u}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\right), \quad \vec{v}\left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2}\right)$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$\sqrt{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{3\sqrt{3}+2}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

تدرب (2): صفحة 56

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
نتأمّل النقطتين $A(2,-5,1)$ و $B(0,2,6)$. والمستقيم d المار بالنقطة $C(-2,3,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}=-4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$.
أثبت أنَّ d عمودي على المستقيم (AB).

المستقيمان d و (AB) متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$

$$\vec{u}(-4,1,-3)\,,\qquad \overrightarrow{AB}(-2,7,5)$$
$$\vec{u}.\overrightarrow{AB}=(-4)(-2)+7+(-3)(5)$$
$$=8+7-15=0$$

فالمستقيمان متعامدان $d\perp(AB)$

تدرب (3): صفحة 56

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
أطوال الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10. أيكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين؟

$$\|\vec{u}\|=6\,,\qquad \|\vec{v}\|=8,\qquad \|\vec{u}+\vec{v}\|=10$$
$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]$$
$$=\frac{100-36-64}{2}=0$$

ومنه يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

تدرب (4): صفحة 56

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
نتأمل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ونفترض أنَّ $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان.
أثبت أنَّ للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول نفسه.

بما أنَّ الشعاعان $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان، فإنَّ

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=0\Rightarrow(\vec{u})^2-(\vec{v})^2=0$$
$$\Longrightarrow(\vec{u})^2=(\vec{v})^2$$
$$\Longrightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2\Longrightarrow\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$$

تدرب (1): صفحة 59

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
في كلٍّ من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً:

$\boxed{1}\ \vec{n}(1,-1,0),\qquad A(1,0,5)$

معادلة مستوي مار بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ ويقبل $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً له:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-1)+(-1)(y-0)+(0)(z-5)=0$$
$$x-y-1=0$$

$\boxed{2}\ \vec{n}(2,-3,-1),\qquad A(\sqrt{2},-2,5)$

$$2(x-\sqrt{2})+(-3)(y+2)+(-1)(z-5)=0$$
$$2x-2\sqrt{2}-3y-6-z+5=0$$
$$2x-3y-z=2\sqrt{2}+1$$

$\boxed{3}\ \vec{n}\left(\frac{2}{3},4,-1\right),\qquad A\left(\frac{1}{2},3,-1\right)$

$$\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+4(y-3)+(-1)(z+1)=0$$
$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}+4y-12-z-1=0$$
$$\frac{2}{3}x+4y-z=\frac{40}{3}$$

$\boxed{4}\ \vec{n}(\sqrt{3},2,0),\qquad A(0,-3,0)$

$$\sqrt{3}(x-0)+2(y+3)+(0)(z-0)=0$$
$$\sqrt{3}x+2y=-6$$

تدرب (2): صفحة 59

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
في كلٍّ من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي Q المار بالنقطة A موازياً المستوي $\mathcal{P}$

$\boxed{1}\ \mathcal{P}:2x-y+3z=4,\qquad A(1,0,1)$

ناظم Q يكون نفس ناظم $\mathcal{P}$ في حالة التوازي

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(2,-1,3)$، ويمر بالنقطة A، فتكون المعادلة:

$$2(x-1)-(y-0)+3(z-1)=0$$
$$2x-y+3z=5$$

$\boxed{2}\ \mathcal{P}:z=2,\qquad A(0,0,0)$

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(0,0,1)$

$$0+0+(z-0)=0$$
$$z=0$$

$\boxed{3}\ \mathcal{P}:x+y=5,\qquad A(0,3,0)$

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(1,1,0)$

$$(x-0)+(y-3)+(0)(z-0)=0$$
$$x+y-3=0$$

$\boxed{4}\ \mathcal{P}:5x-3y+4z=8,\qquad A(-1,2,-3)$

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(5,-3,4)$

$$5(x+1)-3(y-2)+4(z+3)=0$$
$$5x+5-3y+6+4z+12=0$$
$$5x-3y+4z+23=0$$

تدرب (3): صفحة 59

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$$\mathcal{P}:7x+3y-z-1=0$$
$$\mathcal{Q}:6x-11y-9z-5=0$$
$$\mathcal{R}:2x-3y+5z+4=0$$

نحدد ناظم كل مستوٍ ثم نحسب الجداء السلمي

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}(7,3,-1),\vec{n}_{\mathcal{Q}}(6,-11,-9),\vec{n}_{\mathcal{R}}(2,-3,5)$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}.\vec{n}_{\mathcal{Q}} = (7)(6) + (3)(-11) + (-1)(-9)$$
$$= 42 - 33 + 9 = 18 \neq 0$$

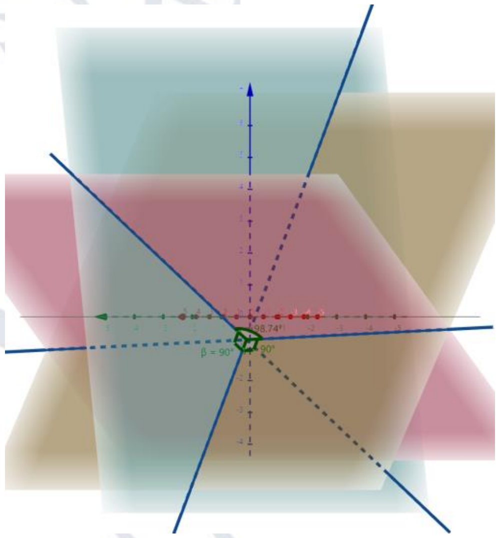
المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ غير متعامدان

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}.\vec{n}_{\mathcal{R}} = (7)(2) + (3)(-3) + (-1)(5)$$
$$= 14 - 9 - 5 = 0$$

المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ متعامدان

$$\vec{n}_{\mathcal{Q}}.\vec{n}_{\mathcal{R}} = (6)(2) + (-11)(-3) + (-9)(5)$$
$$= 12 + 33 - 45 = 0$$

المستويان $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ متعامدان



تدرب (4): صفحة 59

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

في كلٍّ من الحالات الآتية بيّن إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين

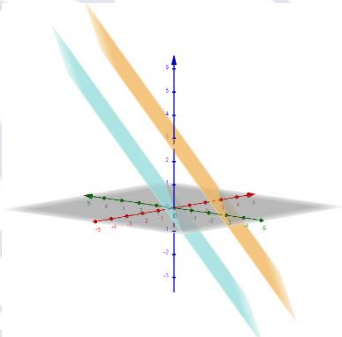
$\boxed{1}$ $\mathcal{P}: x - y + z = 0,\qquad \mathcal{Q}: x - y + z - 3 = 0$

نثبت أنَّ مستويين متقاطعين من خلال إثبات الارتباط

الخطي لناظم الأول والثاني

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-1,1),\qquad \vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,-1,1)$$

نلاحظ أنَّ الشعاعان مرتبطان خطياً،
فالمستويان متوازيان
وغير منطبقان (لأن
$O(0,0,0) \in \mathcal{P}$,
$(O(0,0,0) \notin \mathcal{Q}$



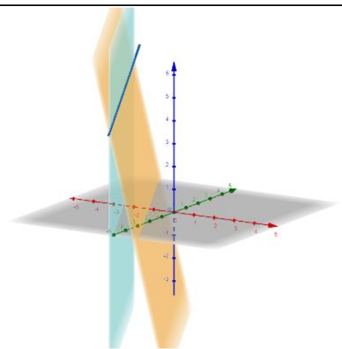
$\boxed{2}$ $\mathcal{P}: 2x + y + 5 = 0,$
$\mathcal{Q}: 4x + 2y + z + 5 = 0$

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}(2,1,0),\qquad \vec{n}_{\mathcal{Q}}(4,2,1)$$

نلاحظ أنَّ الشعاعان غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما،

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$$

فالمستويان متقاطعان.



تدرب (5): صفحة 59

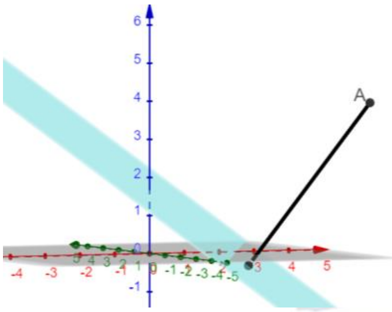
في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

احسب بعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي

$$\mathcal{P}: 2x - y + 3z - 5 = 0$$

$$dist(A,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

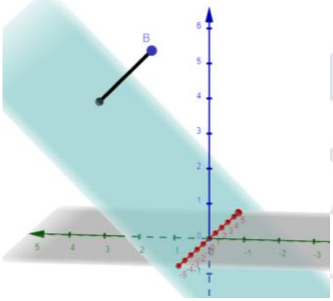
$$dist(A,\mathcal{P}) = \frac{|2(5) - (-3) + 3(4) - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9}}$$
$$= \frac{20}{\sqrt{14}}$$



وكذلك احسب بعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي

$$\mathcal{Q}: y - z = 0$$

$$dist(B,\mathcal{Q}) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

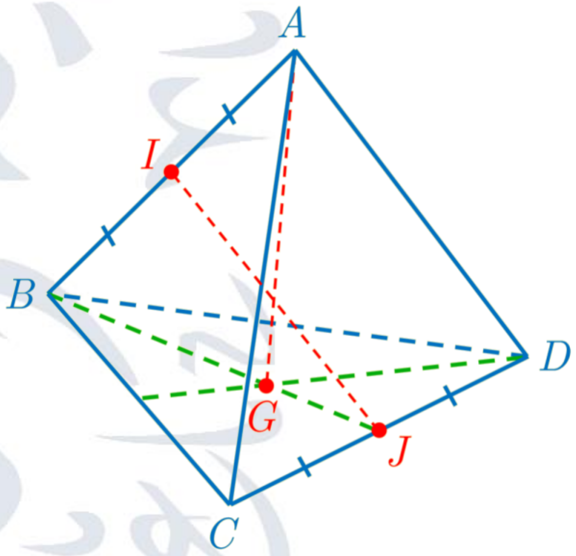


+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

رباعي الوجوه

رباعي الوجوه المنتظم

هو مجسم له أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع. الحرفان المتقابلان هما حرفان يشتركان برأس.



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $AB = a$.

أولاً: نهدف إلى إثبات أنَّ كل حرفين متقابلين متعامدان، وأنَّ المستقيم الواصل بين منتصفي حرفين متقابلين عمودي على كل منهما.

a) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

أوجه رباعي الوجوه المنتظم مثلثات متساوية الأضلاع، فقياس كل زاوية في المثلث 60°

و $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ و $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}, \qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2},$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$$

b) أثبت تعامد المستقيمين (AB) و (CD).

يجب إثبات أنَّ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$
$$AB \perp CD$$

c) ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (AC) و (BD) والمستقيمين (AD) و (BC).

نجد بالمثل

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

d) ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. تيقن أنَّ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$، واستنتج أنَّ المستقيم (IJ) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (CD).

$$\underbrace{\overrightarrow{IJ}}_{L_1} = \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}}_{L_2}$$
$$L_2 = \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{IB}} + \overrightarrow{BC} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{CJ}} = \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}}_{\text{شال}} = \overrightarrow{IJ}$$
$$= L_1$$
$$\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \ ??$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}}_{a^2} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}_{-\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}_{0}$$
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{CD} \ ??$$
$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CD}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC}}_{-\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CD}}_{a^2}$$
$$= 0 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{CD}$$

ثانياً: في رباعي الوجوه $ABCD$، الارتفاع النازل من A هو المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على المستوي (BCD).

a) ليكن G مركز ثقل المثلث BCD. احسب $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$، واستنتج أنَّ (AG) هو الارتفاع النازل من A.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}\right).\overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}_{b \text{ أولاً}} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{CD}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}\right).\overrightarrow{BD} = \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}_{c \text{ أولاً}} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$

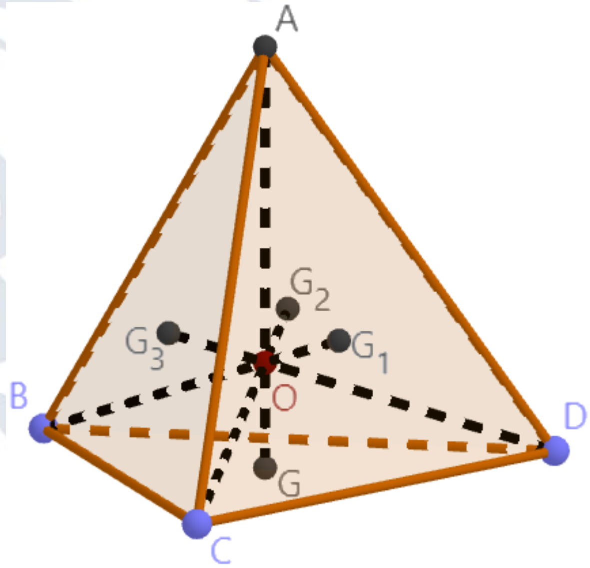
أي (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي فهو عمودي على المستوي (BCD)، وبالتالي (AG) هو الارتفاع النازل من A.

b) عين بقية الارتفاعات في رباعي الوجوه $ABCD$.

ارتفاع الهرم النازل من B هو (BG_1) (حيث G_1 مركز ثقل المثلث ACD).

ارتفاع الهرم النازل من C هو (CG_2) (حيث G_2 مركز ثقل المثلث ABD).

ارتفاع الهرم النازل من D هو (BG_3) (حيث G_3 مركز ثقل المثلث ACB).



ثالثاً: نسمي مركز رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسندنا إليها الأمثال ذاتها: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

a) أثبت أنَّ النقاط A و O و G تقع على استقامة واحدة واحسب AG و AO.

نثبت أنّ O مركز أبعاد متناسبة لـ A و G

بما أنَّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1),(C,1),(D,1)$، فإنَّ النقطة O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(G,3)$ (حسب الخاصة التجميعية)، ويكون

$$\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$$

ومنه النقاط A و O و G تقع على استقامة واحدة.

لحساب AG و AO:

نحسب AG من المثلث القائم AGB (القائم في G)

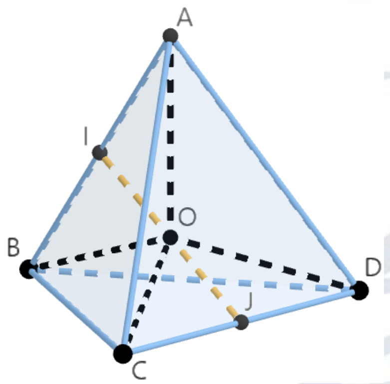
$$BG = \frac{2}{3}BJ = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$AB^2 = BG^2 + AG^2 \Rightarrow AG^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2$$

$$\Rightarrow AG = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

$$AO = \frac{3}{4}AG \Rightarrow AO = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

b) أثبت أنَّ O منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

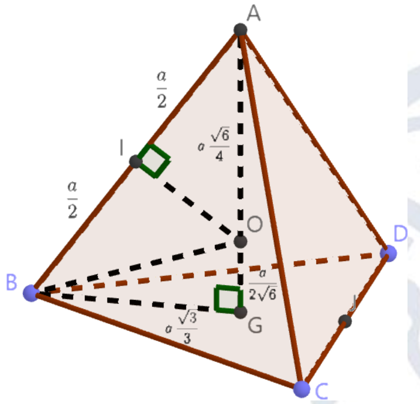


بما أنَّ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(B,1)$، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1),(D,1)$، فإنَّ O مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2),(J,2)$، فيكون O منتصف $[IJ]$ لتساوي الثقلين.

c) احسب الأطوال OB و OI.

حسب فيثاغورث في المثلثين OGB و OIA

$$OG = \frac{1}{4}AG = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{a}{2\sqrt{6}}$$



$$OB^2 = OG^2 + BG^2 = \frac{a^2}{4(6)} + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{24} + \frac{a^2}{3}$$

$$= \frac{9a^2}{24} = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow \boxed{OB = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a}$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

$$OI^2 = AO^2 - AI^2 = \frac{6}{16}a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8} \Rightarrow$$

$$\boxed{OI = \frac{a}{2\sqrt{2}}}$$

d) أثبت أنَّ النقطة O متساوية البعد عن جميع رؤوس رباعي الوجوه.

لأنَّ رباعي الوجوه المدروس منتظم، فإنّ رؤوسه تؤدي أدواراً متماثلة، وعليه فإنَّ

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

رابعاً: نهدف إلى حساب الزاوية الهندسية $\widehat{AOB}$.

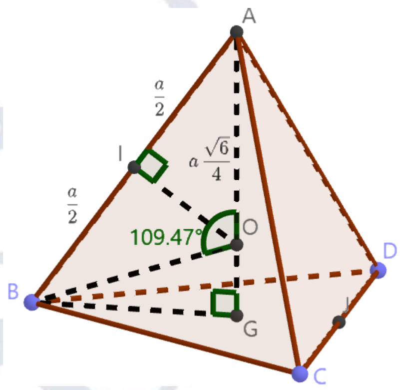
a) احسب $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ بأسلوبين أحدهما بكتابة $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{OI}^2}_{\frac{a^2}{8}} + \underbrace{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IB}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{OI}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}_{-\frac{a^2}{4}} = -\frac{a^2}{8}$$

ونعلم أنَّ

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos\widehat{AOB}$$



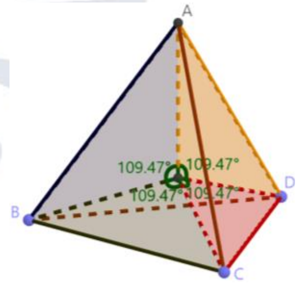
ومنه $OA.OB.\cos\widehat{AOB} = -\frac{a^2}{8}$

$$\frac{6a^2}{16}\cos\widehat{AOB} = -\frac{a^2}{8}$$

$$\cos\widehat{AOB} = -\frac{1}{3}$$

b) استنتج قيمة تقريبية للزاوية $\widehat{AOB}$ بالدرجات. وبيّن أنَّ $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$

القيمة التقريبية للزاوية $\widehat{AOB} \approx 109.47^\circ$



من تطابق المثلثات AOB, BOC, COD, AOD، حيث $AB = BC = CD = AD$ و $OA = OB = OC = OD$ تكون:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$$

تطبيق في الكيمياء

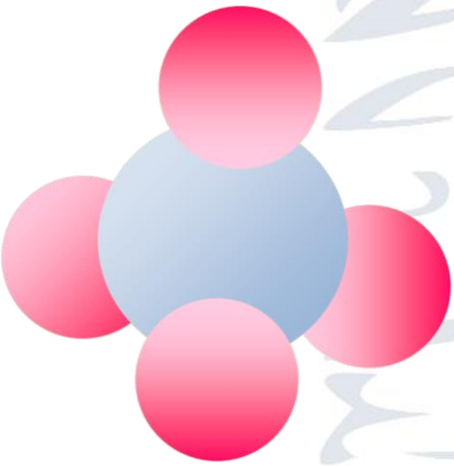
يقرأ من الكتاب صفحة 62.

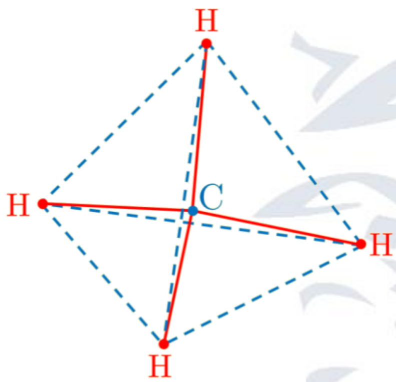
حل الطلب الأول:
بالاعتماد على ما سبق تكون الزاوية بين رابطتين من النوع $C-H$ هي $\theta \approx 109.47^\circ$.

حل الطلب الثاني:
طول الرابطة $C-H$ يساوي الطول $OA = \frac{\sqrt{6}}{4}a$، الذي حسبناه سابقاً، وتكون

$$a = \frac{4}{\sqrt{6}}1.09 \times 10^{-10} \approx 1.78 \times 10^{-10}\mathrm{m}$$

وهذا يمثل المسافة بين ذرتي هيدروجين.





نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

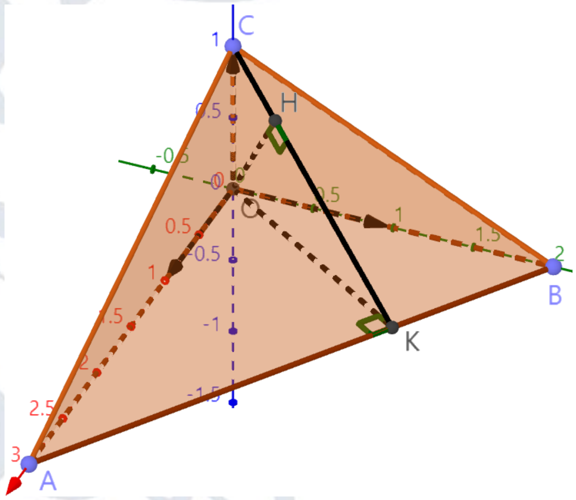
رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة

نتأمّل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O، أي إنَّ المستقيمات (OA) و(OB) و(OC) متعامدة مثنى مثنى. لنفترض إضافة إلى ذلك أنَّ $OC = 1$ و$OB = 2$ و$OA = 3$. نرمز بالرمز H إلى المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC).

أولاً: نريد إثبات أنَّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

لنختر إذاً معلماً متجانساً $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بوضع $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.

a) احسب احداثيات H.



لدينا في المعلم المفروض:

$$O(0,0,0),\quad A(3,0,0),\quad B(0,2,0),\quad C(0,0,1)$$

لدينا H المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC)، لذا لنوجد معادلة المستوي (ABC) حيث النقاط الثلاثة معلومة.

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC)، فيكون

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0,\qquad \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$\vec{n}(a,b,c)$	$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$	$\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$
$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$	$-3a + 2b = 0$	
$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$	$-3a + c = 0$	

باختيار قيمة لأحد المجاهيل a,b,c وتعويضها في المعادلتين السابقتين نحصل على ناظم المستوي، وليكن من أجل $c = 6$ فإنّ $a = 2$ و$b = 3$، ومنه $\vec{n}(2,3,6)$ ومعادلة المستوي:

$$2(x-3) + 3y + 6z = 0$$

$$2x + 3y + 6z = 6$$

ولما كانت H المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC)، كان الشعاعان $\overrightarrow{OH}$ و$\vec{n}$ مرتبطين خطياً، ومنه

$$\overrightarrow{OH} = k\vec{n},\qquad k \in \mathbb{R}$$

$\overrightarrow{OH}(x_H,y_H,z_H)$	$k\vec{n}(2k,3k,6k)$
$x_H = 2k,\quad y_H = 3k,\quad z_H = 6k$	

و$H(2k,3k,6k)$ نقطة من المستوي أيضاً، فهي تحقق معادلته:

$$2(2k) + 3(3k) + 6(6k) = 6$$

$$\Rightarrow (4+9+36)k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{49}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$$

b) احسب $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}$ واستنتج أنَّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (OCH).

$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$	$\overrightarrow{OC}(0,0,1)$	$\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$
$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = 0+0+0$	$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = -\frac{36}{49}+\frac{36}{49}+0$	
$\boxed{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = 0}$	$\boxed{\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = 0}$	

وبالتالي:

$$(AB)\perp(OC)\,,\qquad (AB)\perp(OH)$$

ومنه يكون

$$(AB)\perp(OCH)\quad (*)$$

c) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}$ و$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}$ واستنتج أنَّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$	$\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{-13}{49}\right)$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = -\frac{36}{49}+\frac{36}{49}+0 = 0$	
$\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$	$\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49},\frac{-80}{49},\frac{36}{49}\right)$
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = -\frac{36}{49}+0+\frac{36}{49} = 0$	

وبالتالي:

$$(AC)\perp(BH)\,,\qquad (AB)\perp(CH)$$

أي أنَّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

ثانياً: a) أثبت أنَّ المسقط القائم لكل من النقطتين C وO على المستقيم (AB) هو النقطة K ذاتها، واحسب احداثيات K.

لدينا من $(*)$

$$(AB)\perp(OCH)$$

ولتكن K نقطة تقاطعها (تقاطع المستوي (OCH) مع المستقيم (AB) المعامد له)، عندئذٍ تكون K هي المسقط القائم لأي نقطة من نقاط المستوي (OCH) على المستقيم (AB)، وعلى وجه الخصوص K هي المسقط القائم لكل من النقطتين O وC على المستقيم (AB).

تتعين إحداثيات K بالاستفادة من الخاصتين:

النقاط A,K,B تقع على استقامة واحدة أي $\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB}$.

$(AB)\perp(OK)$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OK} = 0$.

نورأشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

$\overrightarrow{OK}(x,y,0)$	$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}\quad(**)$$

$$\overrightarrow{AB}.\underbrace{\overrightarrow{OK}}_{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}}=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}\right)=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}}_{\text{خاصة المسقط القائم}}+\alpha\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}^2+\alpha\overrightarrow{AB}^2$$

$$-9+\alpha(9+4)=0\Longrightarrow\alpha=\frac{9}{13}$$

بالتعويض في $(**)$ نجد:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{27}{13}\\\frac{18}{13}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{13}\\\frac{18}{13}\\0\end{pmatrix}$$

$$K\left(\frac{12}{13},\frac{18}{13},0\right)$$

b) أعط تقريباً لحساب الزاوية $\widehat{OKC}$.

من المثلث KOC نجد

$$\tan\widehat{OKC}=\frac{OC}{OK}$$

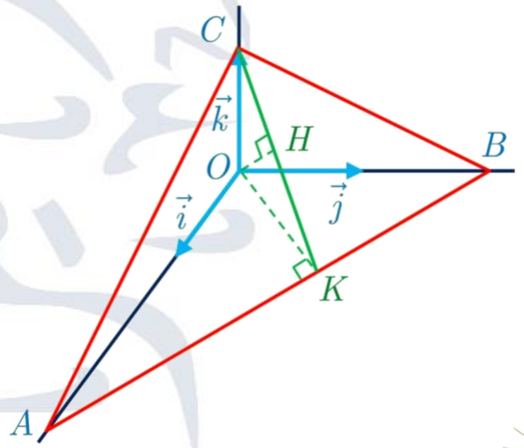
$$OK=\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{18}{13}\right)^2}=\frac{6}{13}\sqrt{4+9}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$OC=1$$

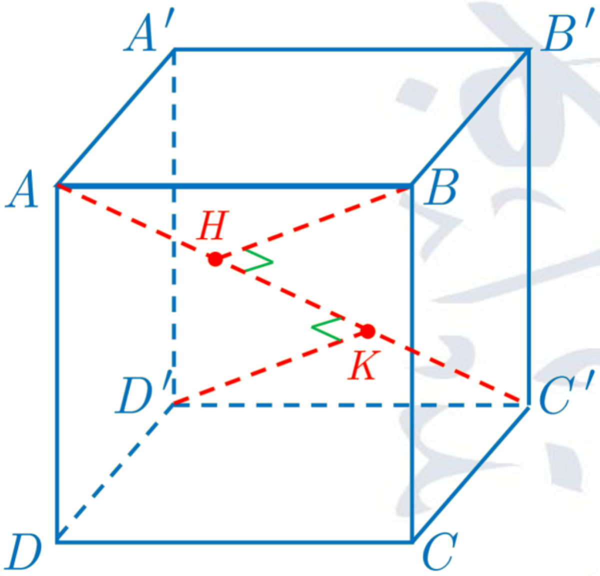
$$\tan\widehat{OKC}=\frac{\sqrt{13}}{6}$$

باستخدام الآلة الحاسبة نجد:

$$\widehat{OKC}\approx 31^{\circ}$$



بعض خواص المكعب



ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعباً طول حرفه a. النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC'). نريد إثبات أنَّ النقطة H هي أيضاً المسقط القائم لكلٍّ من A' و D على المستقيم (AC').

سنستعمل المعلم المتجانس $\left(D';\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ حيث

$\overrightarrow{D'A'}=a\vec{k}$ و $\overrightarrow{D'C'}=a\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{D'D}=a\vec{\imath}$

1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب.

$C'(0,a,0)$	$D'(0,0,0)$
$C(a,a,0)$	$D(a,0,0)$
$B'(0,a,a)$	$A'(0,0,a)$
$B(a,a,a)$	$A(a,0,a)$

2) لحساب إحداثيات النقطة $H(x,y,z)$:

a) اكتب بدءاً من المساواة $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC'}=0$، علاقة بين x و y و z و a.

$\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$	$\overrightarrow{BH}(x-a,y-a,z-a)$

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC'}=0$$

$$-a(x-a)+a(y-a)-a(z-a)=0$$

$$x-a-y+a+z-a=0$$

$$\boxed{x-y+z-a=0}\quad(*)$$

b) اكتب علاقة بين x و y و z و a و λ حيث λ معرَّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AC'}$. واستنتج قيمة λ ثم احداثيات H.

$$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AC'}$$

$$(x-a,y,z-a)=\lambda(-a,a,-a)$$

$$x-a=-a\lambda\Longrightarrow x=a-a\lambda$$

$$y=\lambda a$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$$z - a = -a\lambda \Longrightarrow z = a - a\lambda$$

نعوض في $(*)$ نجد:

$$a - a\lambda - a\lambda + a - a\lambda - a = 0$$

$$a - 3a\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$x = \frac{2}{3}a, \qquad y = \frac{1}{3}a, \qquad z = \frac{2}{3}a$$

$$H\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$$

3) لإثبات أنَّ المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها، يكفي أن نثبت أنَّ $(A'H)$ عمودي على (AC'). أثبت تعامد الشعاعين $\overrightarrow{A'H}$ و $\overrightarrow{AC'}$.

$\overrightarrow{AC'}(-a, a, -a)$	$\overrightarrow{A'H}\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{-1}{3}a\right)$

$$\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{AC'} = -\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 = 0$$

ومنه

$$\overrightarrow{A'H} \perp \overrightarrow{AC'}$$

فالمستقيمان $(A'H)$ و (AC') متعامدان، إذن H هي المسقط القائم للنقطة A' على (AC').

4) أثبت أنَّ المسقط القائم للنقطة D على (AC') هي النقطة H ذاتها.

$\overrightarrow{AC'}(-a, a, -a)$	$\overrightarrow{DH}\left(\frac{-1}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$

$$\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 = 0$$

ومنه

$$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC'}$$

فالمستقيمان (DH) و (AC') متعامدان، إذن H هي المسقط القائم للنقطة D على (AC').

5) لتكن K المسقط القائم للنقطة D' على (AC').

a) ماذا تقول عن الطول $C'K$؟

من تطابق المثلثين $AHB, D'C'K$ (لتساوي ضلع وزاويتين مجاورتين له)، فإنَّ

$$AH = KC'$$

b) حدد موقع K على المستقيم (AC').

من الطلب 2 (b) لدينا $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$

ومنه

$$\overrightarrow{KC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$$

c) ما هي النقاط الأخرى من المكعب التي مسقطها القائم على المستقيم (AC') هي النقطة K ذاتها.

بسبب التناظر في المكعب، النقاط الأخرى هي B' و C.

تمرينات ومسائل الوحدة الثانية

المسألة الأولى: صفحة 64

نعطي معلماً متجانساً في المستوي.

1) بيّن أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$\vec{u}(2,5)$ و $\vec{v}(-2,-5)$ و $\vec{w}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ و $\vec{t}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$ و $\vec{s}\left(2, -\frac{4}{5}\right)$.

$\vec{u}.\vec{s} = 0$	$\vec{u}.\vec{t} = 0$	$\vec{u}.\vec{w} = 0$
$\vec{v}.\vec{s} = 0$	$\vec{v}.\vec{t} = 0$	$\vec{v}.\vec{w} = 0$

ومنه تكون أزواج الأشعة المتعامدة:

$(\vec{u}, \vec{s})$	$(\vec{u}, \vec{t})$	$(\vec{u}, \vec{w})$
$(\vec{v}, \vec{s})$	$(\vec{v}, \vec{t})$	$(\vec{v}, \vec{w})$

2) في الحالتين الآتيتين اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$:

○ $A(4,1), \; B(-1,2)$

محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمود المار من منتصفها (النقاط متساوية البعد عن طرفي القطعة)

ناظم المستقيم المطلوب هو $\overrightarrow{AB}$، ويمر من N منتصف $[AB]$.

$$\overrightarrow{AB}(-5,1)$$

ومنه معادلة المحور من الشكل:

$$-5x + y + c = 0$$

$$N\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

ومنه:

$$-5\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + c = 0 \Longrightarrow c = 6$$

ومنه معادلة المحور:

$$-5x + y + 6 = 0$$

○ $A(-5,3), \; B\left(-2, \frac{1}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AB}\left(3, -\frac{8}{3}\right)$$

$$N\left(\frac{-7}{2}, \frac{5}{3}\right)$$

$$3\left(\frac{-7}{2}\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{5}{3}\right) + c = 0 \Longrightarrow c = \frac{189 + 80}{18}$$

$$c = \frac{269}{18}$$

ومنه معادلة المحور:

$$3x - \frac{8}{3}y + \frac{269}{18} = 0$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

طريقة أخرى لإيجاد محور قطعة مستقيمة:

$M(x,y)$ نقطة من المحور، إذاً بعدها عن A يساوي بعدها عن B.

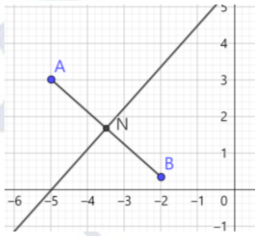
$$AM = BM$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}$$

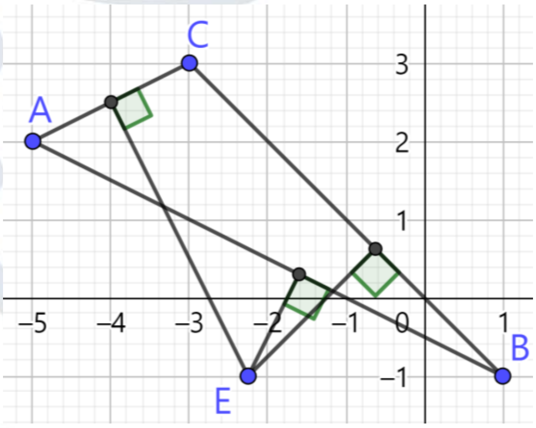
$$(x+5)^2+(y-3)^2 = (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$$

بإصلاح هذه العلاقة نجد:

$$3x - \frac{8}{3}y + \frac{269}{18} = 0$$



3) نتأمّل النقاط $A(-5,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(-3,3)$ و $E\left(-\frac{9}{4},-1\right)$. أتكون النقطة E متساوية البعد عن المستقيمات التي تؤلّفها أضلاع المثلث ABC؟



نوجد معادلة المستقيم ثم نحسب بعد النقطة عنه

معادلة المستقيم (AB)، ميله:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

ومار بالنقطة B

$$y+1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$x+2y+1=0$$

بعد E عن (AB)

$$\ell_1 = \frac{\left|-\frac{9}{4}+2(-1)+1\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{13}{4\sqrt{5}}$$

معادلة المستقيم (AC)، ميله:

$$m_{AB} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1}{2}$$

ومار بالنقطة C

$$y-3 = \frac{1}{2}(x+3)$$

$$x-2y+9=0$$

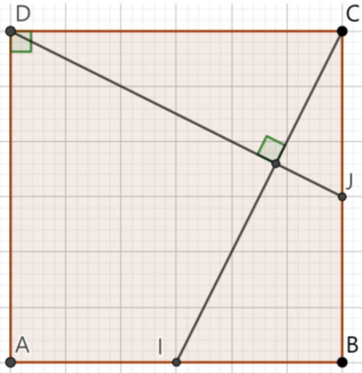
بعد E عن (AB)

$$\ell_2 = \frac{\left|-\frac{9}{4}-2(-1)+9\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{35}{4\sqrt{5}}$$

نلاحظ أنَّ $\ell_1 \neq \ell_2$ فالنقطة E غير متساوية البعد عن المستقيمات التي تؤلّفها أزواج النقاط A,B,C.

المسألة الثانية: صفحة 64

$ABCD$ مربّع. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$. أثبت أنَّ المستقيمين (DJ) و (CI) متعامدان.



طريقة أولى: نأخذ معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$، فتكون إحداثيات النقاط في هذا المعلم:

$$I\left(\frac{1}{2},0\right), C(1,1) \Rightarrow \overrightarrow{IC}\left(\frac{1}{2},1\right)$$

$$J\left(1,\frac{1}{2}\right), D(0,1) \Rightarrow \overrightarrow{DJ}\left(1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$$

فالشعاعان متعامدان.

طريقة ثانية:

$$\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ})$$

$$= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{CJ}}_{\text{متعامدان }=0} + \underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}}_{\text{متعامدان }=0} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CJ}$$

$$= \|\overrightarrow{IB}\|.\|\overrightarrow{DC}\|.\cos 0 + \|\overrightarrow{BC}\|.\|\overrightarrow{CJ}\|.\cos\pi$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

حيث لدينا

$\|\overrightarrow{DC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = a$ طول ضلع المربع

$\|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{CJ}\| = \frac{a}{2}$ نصف طول ضلع المربع

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة الثالثة: صفحة 64

نعطي معلماً متجانساً في الفراغ.

أولاً: بيّن في كلٍّ من الحالتين الآتيتين إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين:

$$\boxed{1}\ \vec{v}\left(2,-\frac{3}{2},1\right),\qquad \vec{u}(1,-2,5)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=2+(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)+5=10\neq 0$$

غير متعامدان.

$$\boxed{2}\ \vec{v}(\sqrt{2},\sqrt{3},1),\qquad \vec{u}(\sqrt{2},\sqrt{3},0)$$

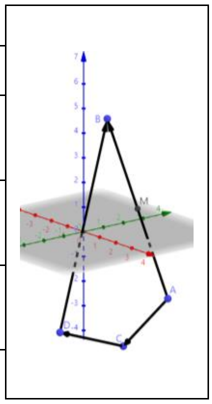
$$\vec{u}.\vec{v}=2+3+0=5\neq 0$$

غير متعامدان.

ثانياً: نتأمّل النقاط $A(4,1,-2)$ و $B(-1,2,4)$ و $C(0,2,-5)$ و $D\left(1,-2,-\frac{7}{2}\right)$. ونعرّف M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. احسب

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD} \text{ و } \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} \text{ و } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$A(4,1,-2)$	$B(-1,2,4)$
$M\left(\frac{4-1}{2},\frac{1+2}{2},\frac{-2+4}{2}\right)$	
$M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$	
$C(0,2,-5)$	$D\left(1,-2,-\frac{7}{2}\right)$



$$\overrightarrow{MB}\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},3\right),\qquad \overrightarrow{CD}\left(1,-4,\frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}=-\frac{5}{2}-\frac{4}{2}+\frac{9}{2}=0$$

$$\overrightarrow{DB}\left(-2,4,\frac{15}{2}\right),\qquad \overrightarrow{AC}(-4,1,-3)$$

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=8+4-\frac{45}{2}=-\frac{21}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}(-5,1,6),\qquad \overrightarrow{CD}\left(1,-4,\frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-5-4+9=0$$

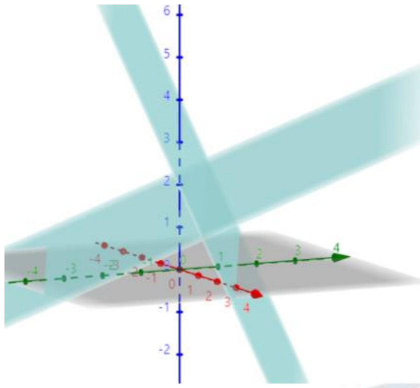
$$\overrightarrow{AB}(-5,1,6),\qquad \overrightarrow{AC}(-4,1,-3)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=20+1-18=3$$

ثالثاً: بيّن في كلّ من الحالات الآتية إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و Q متعامدين:

$$\boxed{1}\ Q: x+2y+z-3=0,$$
$$\mathcal{P}: x+2y-5z+7=0$$

يكون المستويان متعامدان إذا كان الجداء السلّمي لناظميهما معدوماً

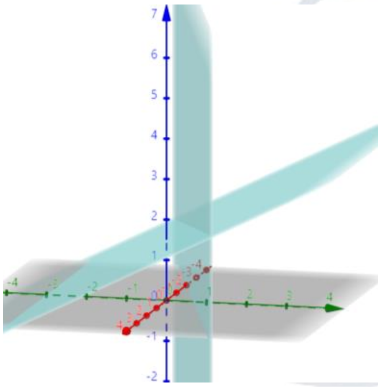


$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,2,-5)$	$\overrightarrow{n_Q}(1,2,1)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}.\overrightarrow{n_Q}=1+4-5=0$$

ومنه المستويان متعامدان.

$$\boxed{2}\ Q: y-2z+3=0,\qquad \mathcal{P}: x-3y+2=0$$



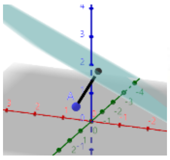
$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-3,0)$	$\overrightarrow{n_Q}(0,1,-2)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}.\overrightarrow{n_Q}=0-3+0=-3\neq 0$$

فالمستويان غير متعامدين.

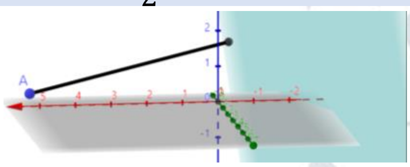
رابعاً: احسب في كلٍّ من الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستوي $\mathcal{P}$:

$$\boxed{1}\ \mathcal{P}: x+y-2z+4=0,\qquad A(0,\sqrt{2},1)$$



$$dist(A,\mathcal{P})=\frac{|(0)+\sqrt{2}-2(1)+4|}{\sqrt{1+1+(-2)^2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{2}\ \mathcal{P}: 3x+y-\frac{z}{2}+7=0,\qquad A(5,-2,0)$$



$$dist(A,\mathcal{P})=\frac{|3(5)-2-0+7|}{\sqrt{(3)^2+1+(-1/2)^2}}=\frac{40}{\sqrt{41}}$$

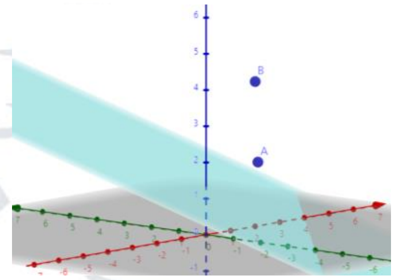
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة الرابعة: صفحة 65 (مستويات متعامدة)

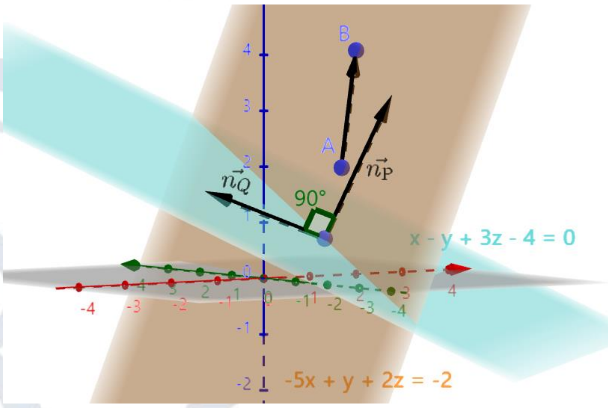
نتأمَّل في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطتين الآتيتين: $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوى $\mathcal{P}$ الذي معادلته

$$x-y+3z-4=0$$

جد معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.



مستو مار بنقطتين ويعامد مستوي أي $(\vec{n_{\mathcal{P}}}.\vec{n_{\mathcal{Q}}}=0)$



المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدين، فإنَّ

$$\vec{n_{\mathcal{P}}}(1,-1,3),\qquad \vec{n_{\mathcal{Q}}}(a,b,c)$$

$$\vec{n_{\mathcal{P}}}.\vec{n_{\mathcal{Q}}}=0 \Longrightarrow \boxed{a-b+3c=0}$$

$$\overrightarrow{AB}(1,1,2)$$

بما أنَّ $\overrightarrow{AB}$ محتوى في المستوي $\mathcal{Q}$، كانَ

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n_{\mathcal{Q}}}=0 \Longrightarrow \boxed{a+b+2c=0}$$

معادلتين بثلاث مجاهيل، نختار قيمة لأحد المجاهيل ونعوض:

مثلاً من أجل $c=2$ نجد:

$$\left.\begin{array}{l} a-b=-6 \\ a+b=-4 \end{array}\right\} \Longrightarrow a=-5,\qquad b=1$$

ومنه

$$\vec{n_{\mathcal{Q}}}(-5,1,2)$$

معادلة مستوي مار من A وناظمه $\vec{n_{\mathcal{Q}}}(-5,1,2)$:

$$-5(x-1)+1(y+1)+2(z-2)=0$$

$$\mathcal{Q}:\ -5x+y+2z+2=0$$

المسألة الخامسة: صفحة 66

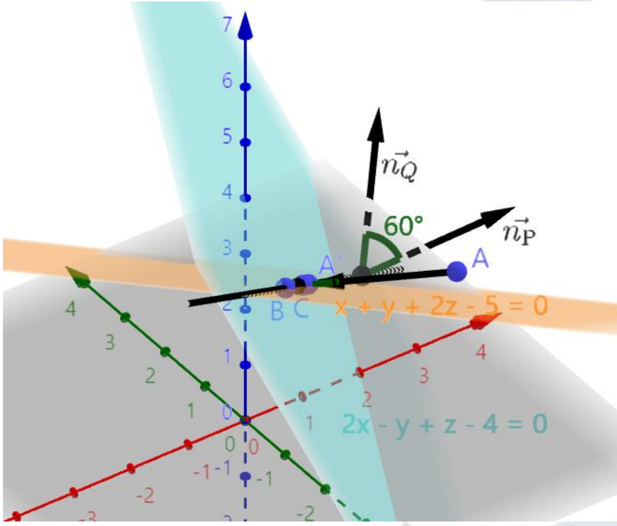
(بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}:2x-y+z-4=0$$

$$\mathcal{Q}:x+y+2z-5=0$$

أثبت تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ، واحسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك.



لإثبات تقاطع مستويين نثبت أنَّ ناظميهما غير مرتبطين

$$\vec{n_{\mathcal{P}}}(2,-1,1),\qquad \vec{n_{\mathcal{Q}}}(1,1,2)$$

نلاحظ أنَّ مركباتهما غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$\frac{2}{1}\neq-\frac{1}{1}\neq\frac{1}{2}$$

فالمستويان متقاطعان.

نتأكد أولاً أنَّ النقطة A لا تقع على المستقيم d (أي أنها لا تنتمي لـ $\mathcal{P}$ أو $\mathcal{Q}$)، حيث إذا وقعت A على d تكون المسافة بينهما صفر.

$$\mathcal{P}:2x-y+z-4=0$$

$$2(3)-(-1)+2-4\overset{?}{=}0$$

$$5\neq0\Longrightarrow A\notin\mathcal{P}$$

$$\mathcal{Q}:x+y+2z-5=0$$

$$3-1+2(2)-5\overset{?}{=}0$$

$$1\neq0\Longrightarrow A\notin\mathcal{Q}$$

لتكن A' مسقط النقطة A على المستقيم d.

المطلوب حساب المسافة بين A و A'.

$$A(3,-1,2),\qquad A'(a,b,c)$$

تعيين إحداثيات A'

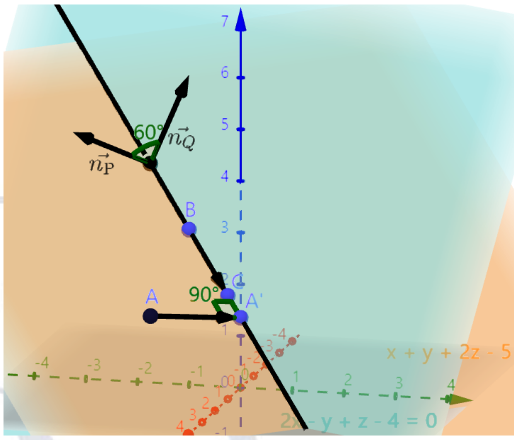
$$\boxed{1}\ A'\in d\Longrightarrow\begin{cases}A'\in\mathcal{P}\\ A'\in\mathcal{Q}\end{cases}$$

$\boxed{2}\ AA'\perp d\Longrightarrow\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0,$ $\vec{u}$ شعاع توجيه d

$$\boxed{1}\ \begin{cases}A'\in\mathcal{P}\Rightarrow 2a-b+c=4\\ A'\in\mathcal{Q}\Rightarrow a+b+2c=5\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AA'}(a-3,b+1,c-2)$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com



لتعيين $\vec{u}$ شعاع توجيه d نختار نقطتين B و C من d، فيكون $\overrightarrow{BC}$ شعاعاً موجهاً لـ d.

$$B(x,y,z)\in d \Rightarrow \begin{cases} B\in \mathcal{P} : 2x-y+z-4=0 \\ B\in \mathcal{Q} : x+y+2z-5=0 \end{cases}$$

معادلتين بثلاثة مجاهيل نختار قيمة لأحد المجاهيل ونعوض.

من أجل $x=0$

$$\begin{matrix} -y+z-4=0 \\ y+2z-5=0 \end{matrix} \Longrightarrow z=3, \quad y=-1$$

$$\Longrightarrow B(0,-1,3)$$

$$C(x,y,z)\in d \Rightarrow \begin{cases} C\in \mathcal{P} : 2x-y+z-4=0 \\ C\in \mathcal{Q} : x+y+2z-5=0 \end{cases}$$

من أجل $x=1$

$$\begin{matrix} -y+z-2=0 \\ y+2z-4=0 \end{matrix} \Longrightarrow z=2, \quad y=0$$

$$\Longrightarrow C(1,0,2)$$

ومنه

$$\vec{u}=\overrightarrow{BC}(1,1,-1)$$

$$\boxed{2}\ \overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0 \Longrightarrow a-3+b+1-c+2=0$$
$$\Longrightarrow a+b-c=0$$

بحل المعادلات الناتجة من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ حلاً مشتركاً

$$\begin{matrix} 2a-b+c=4 & (1) \\ a+b+2c=5 & (2) \\ a+b-c=0 & (3) \end{matrix}$$

بجمع (1) و (3) نجد:

$$3a=4 \Longrightarrow a=\frac{4}{3}$$

بطرح (3) من (2) نجد:

$$3c=5 \Longrightarrow c=\frac{5}{3}$$

بالتعويض بإحدى المعادلات نجد:

$$b=\frac{1}{3}$$

$$A(3,-1,2), \qquad A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

$$AA'=\sqrt{\left(3-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

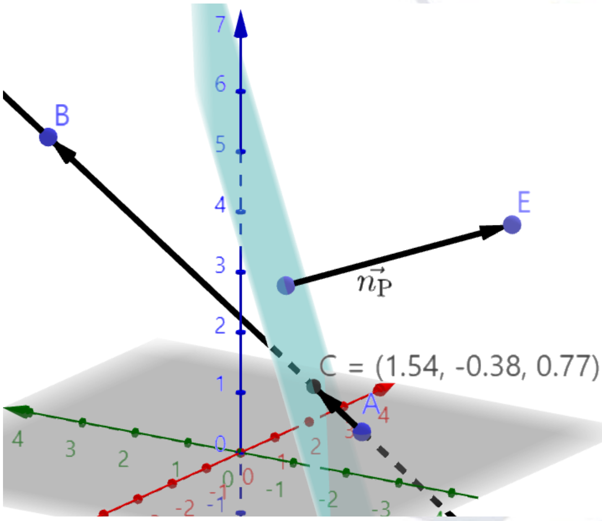
المسألة السّادسة: صفحة 67

(تقاطع مستقيم ومستوٍ)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة

$$2x-3y+z-5=0$$

أثبت أنَّ المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ وعيّن إحداثيات C نقطة التقاطع.



نثبت التقاطع من خلال إثبات عدم التوازي (ناظم المستوي والمستقيم (AB) غير متعامدين)

$$\overrightarrow{AB}(-3,4,5), \qquad \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,-3,1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=-6-12+5=-13\neq 0$$

ومنه $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ لا يعامد $\overrightarrow{AB}$. أي أنَّ المستوي $\mathcal{P}$ والمستقيم (AB) غير متوازيان فهما متقاطعان.

تعيين $C(a,b,c)$ نقطة التقاطع:

$A(2,-1,0)$	$B(-1,3,5)$	$C(a,b,c)$

$\boxed{1}\ C\in(AB) \Rightarrow$ على استقامة واحدة $A,C,B \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$$

$$(a-2,b+1,c)=(-3k,4k,5k)$$

$$\begin{cases} a=2-3k \\ b=4k-1 \\ c=5k \end{cases}$$

$\boxed{2}\ C\in\mathcal{P} \Rightarrow 2a-3b+c=5 \Rightarrow$

$$2(2-3k)-3(4k-1)+5k=5$$
$$4-6k-12k+3+5k=5$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

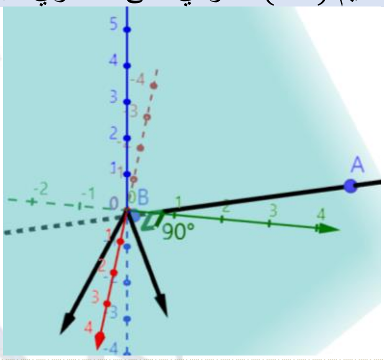
$$-13k=-2\Rightarrow k=\frac{2}{13}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$$

المسألة السّابعة: صفحة 67

(مستقيم عمودي على مستوٍ)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل نقطتين $A(2,5,3)$ و$B(-1,0,-1)$. ومستوياً $\mathcal{P}$ يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و$\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين.
أثبت أنَّ المستقيم (AB) عمودي على المستوى $\mathcal{P}$.



نثبت التعامد من خلال إثبات تعامد المستقيم (AB) مع

شعاعين غير مرتبطين خطياً (متقاطعين) في المستوي

لدينا الشعاعان $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعان غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب مركباتهما

$$\frac{3}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{-1}{-2}$$

فهما متقاطعان في المستوي.

نثبت أنّ (AB) عمودي على كليهما، ليكن $\vec{w}$ شعاع توجيه للمستقيم،

$$\vec{w}=\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$$

$$\vec{w}.\vec{u}=-3-5+8=0\Rightarrow\vec{w}\perp\vec{u}$$

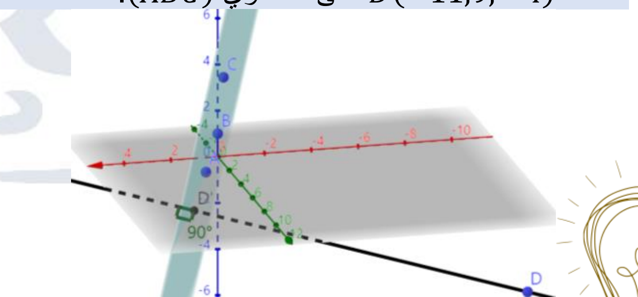
$$\vec{w}.\vec{v}=-9+5+4=0\Rightarrow\vec{w}\perp\vec{v}$$

ومنه نجد تعامد المستقيم (AB) على المستوي $\mathcal{P}$.

المسألة الثّامنة: صفحة 67

(المسقط القائم على مستوٍ)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل النقاط $A(1,2,0)$ و$B(0,0,1)$ و$C(1,5,5)$. يُطلب تعيين D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC).



$$\boxed{1}\ (DD')\perp(ABC)\Rightarrow$$

(DD') عمودي على كل مستقيم في (ABC)

$$\overrightarrow{DD'}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$\overrightarrow{DD'}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$\boxed{2}\ D'\in(DD'),\qquad D'\in(ABC)$$

$$\boxed{1}\quad M(x,y,z)\in(DD')$$

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$	$\overrightarrow{AC}(0,3,5)$
$\overrightarrow{DM}(x+11,y-9,z+4)$	

$$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$-x-11-2y+18+z+4=0$$

$$\boxed{x+2y-z=11}\quad(1)$$

$$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$0+3y-27+5z+20=0$$

$$\boxed{3y+5z=7}\quad(2)$$

من (1) نجد: $z=x+2y-11$ نعوض في (2)

$$3y+5x+10y-55=7$$

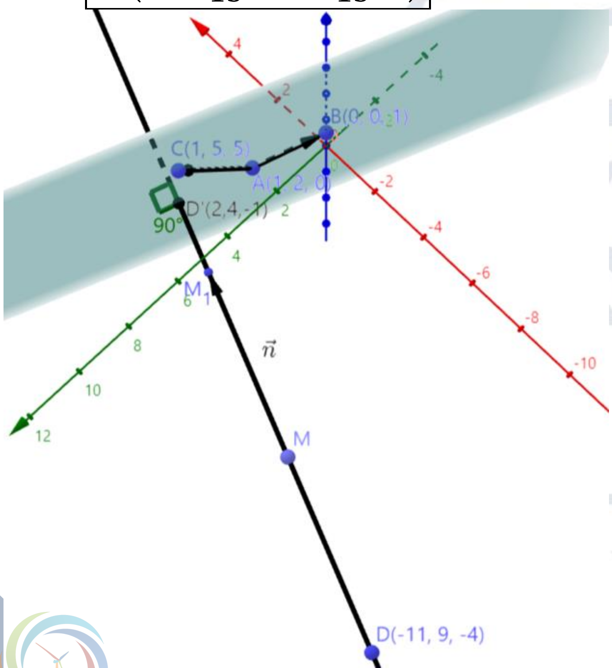
$$\boxed{y=\frac{62-5x}{13}}$$

$$\Rightarrow z=x+\frac{124}{13}-\frac{10x}{13}-11$$

$$\boxed{z=\frac{3x-19}{13}}$$

ومنه المستقيم (DD') هو مجموعة النقاط

$$\boxed{M\left(x,\frac{62-5x}{13},\frac{3x-19}{13}\right)}\quad(*)$$



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

بما أنَّ $(ABC) \perp (DD')$ فإنَّ أي شعاع موجه لـ (DD') سيكون ناظماً للمستوي (ABC).

نختار نقطة $M_1 \in (DD')$، فيكون $\overrightarrow{DM_1}$ شعاعاً موجهاً لـ (DD') وناظماً لـ (ABC).

من أجل $x = 0$ نعوض في $(*)$ نجد

$$M_1\left(0,\frac{62}{13},\frac{-19}{13}\right)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{DM_1}\left(11,\frac{-55}{13},\frac{33}{13}\right)$$

ومنه معادلة المستوي (ABC) المار من B ويقبل $\vec{n}$ ناظماً له

$$11x - \frac{55}{13}y + \frac{33}{13}z = \frac{33}{13}$$

$$143x - 55y + 33z = 33$$

$\boxed{2}$ $D' \in (DD'), \qquad D' \in (ABC)$

أي

$$D' \in \left\{M\left(x,\frac{62-5x}{13},\frac{3x-19}{13}\right)\right\}$$

$$D' \in \mathcal{P}: 143x - 55y + 33z = 33$$

$$143x - 55\frac{62-5x}{13} + 33\frac{3x-19}{13} = 33$$

$$143x - 55\frac{62}{13} + 55\frac{5x}{13} + 33\frac{3x}{13} - 33\frac{19}{13} = 33$$

$$143x + 275\frac{x}{13} + 99\frac{x}{13} = 33 + \frac{3410}{13} + \frac{627}{13}$$

$$2233x = 4466 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow y = 4, \qquad z = -1$$

أي

$$D'(2,4,-1)$$

المسألة التّاسعة: صفحة 68

(قُدُماً إلى الأمام)

$ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و$[CA']$ في O. نضع $\alpha = \widehat{COD'}$ ونفترض أنَّ $BC = a$ و$CD = b$ و$DD' = c$. نهدف في هذه المسألة إلى حساب $\cos\alpha$.

نختار معلماً متجانساً $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$ و$\vec{i}$ مرتبطين خطياً، و$\overrightarrow{AD}$ و$\vec{j}$ مرتبطين خطياً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و$\vec{k}$ مرتبطين خطياً.

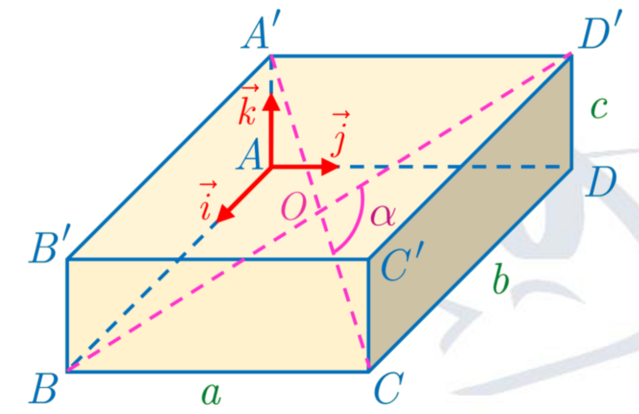
1) أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه O.

في المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، إحداثيات الرؤوس

$A(0,0,0)$	$B(b,0,0)$	$C(b,a,0)$	$D(0,a,0)$
$A'(0,0,c)$	$B'(b,0,c)$	$C'(b,a,c)$	$D'(0,a,c)$

النقطة O منتصف القطر $[A'C]$ فتكون إحداثياتها:

$$O\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$$



2) أثبت أنَّ $\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$. ادرس على وجه الخصوص حالة المكعب.

$$\cos\alpha = \cos\widehat{COD'} = \cos\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD'}\right)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD'}\right) = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\|.\|\overrightarrow{OD'}\|}$$

$\overrightarrow{OC}\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},-\frac{c}{2}\right)$ و $\overrightarrow{OD'}\left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$

$$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD'} = -\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2-b^2-c^2}{4}$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

$$\|\overrightarrow{OD'}\| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2-b^2-c^2}{4}}{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}} = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعباً، يصبح

$$a = b = c$$

فيكون

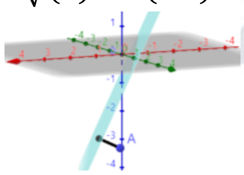
$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

المسألة العاشرة: صفحة 69

في الحالتين الآتيتين، احسب بُعد A عن المستوي $\mathcal{P}$:

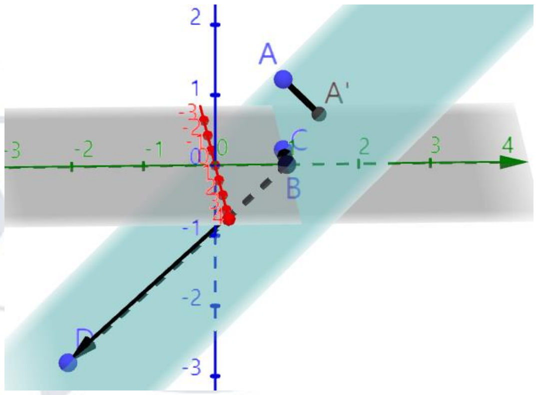
1) $A(1,2,-3)$ و $\mathcal{P}: 2x - y + z + 1 = 0$.

$$dist(A,\mathcal{P}) = \frac{|2(1) - 2 - 3 + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

2) $A(-1,1,1)$ و $\mathcal{P}$ هو المستوي المار بالنقاط $B(0,1,0)$ و $C(-1,1,0)$ و $D(-1,-2,-3)$.



نتأكد من أنَّ النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة (بإثبات عدم الارتباط الخطي لشعاعين)، وبالتالي تشكل المستوي المطلوب.

$B(0,1,0)$	$C(-1,1,0)$	$D(-1,-2,-3)$
$\overrightarrow{BC}(-1,0,0)$		$\overrightarrow{BD}(-1,-3,-3)$

نلاحظ أنَّ الشّعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما،

$$\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-3}$$

بفرض النقطة $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$ عندئذٍ يوجد عددين حقيقيين α,β يحققان:

$$\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$$

ومنه

$$(x,y-1,z) = (-\alpha,0,0) + (-\beta,-3\beta,-3\beta)$$

$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta & (1) \\ y - 1 = -3\beta & (2) \\ z = -3\beta & (3) \end{cases}$$

بطرح (3) من (2) نحصل على معادلة للمستوي:

$$\mathcal{P}:\ y - z - 1 = 0$$

لاحظ أنَّ النقطة $A(-1,1,1) \notin \mathcal{P}$ حيث

$$1 - 1 - 1 \neq 0$$

أو لأنه لا يمكن إيجاد عددين حقيقيين α,β يحققان:

$$\overrightarrow{BA} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$$

ومنه

$$dist(A,\mathcal{P}) = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{(0)^2+(1)^2+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

طريقة (2):

بفرض النقطة $A'(a,b,c)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD)، فيكون AA' هو البعد المطلوب حسابه.

$$\overrightarrow{AA'}(a+1,b-1,c-1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow a = -1 \\ \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow b = 2 - c \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AA'}(0,1-c,c-1)$$

ولدينا أيضاً

$$\overrightarrow{BA'}(a,b-1,c) = (-1,1-c,c)$$

$$\{\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BA'} = 0$$

$$\Rightarrow (c-1)^2 + c(c-1) = 0$$

$$(c-1)(2c-1) = 0$$

إما $c = 1$ وهي حالة مرفوضة لأنها تعني انطباق النقطة A على A'، $\overrightarrow{AA'}(0,0,0)$.

أو $c = \frac{1}{2}$ وبالتالي $b = \frac{3}{2}$، ومنه

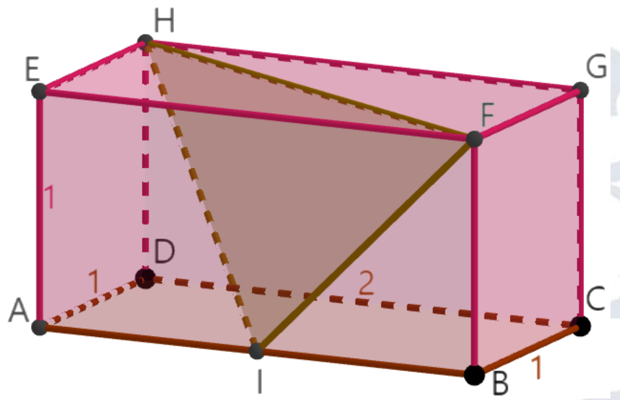
$$A'\left(-1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ و } \overrightarrow{AA'}\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\|\overrightarrow{AA'}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

المسألة الحادية عشرة: صفحة 69

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$. لتكن النقطة I منتصف $[AB]$.

1) أعط معلماً متجانساً مبدؤه A ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة.



لنأخذ المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، حيث $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

تكون عندئذٍ إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات

$A(0,0,0)$	$B(2,0,0)$	$C(2,1,0)$	$D(0,1,0)$
$E(0,0,1)$	$F(2,0,1)$	$G(2,1,1)$	$H(0,1,1)$

2) اكتب معادلة للمستوي (IFH).

لدينا النقطة I منتصف $[AB]$

$I(1,0,0)$	$F(2,0,1)$	$H(0,1,1)$
$\overrightarrow{IF}(1,0,1)$		$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$

لاحظ أنَّ الشعاعين $\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IH}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما $\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

بفرض النقطة $M(x,y,z) \in (IFH)$ عندئذٍ يوجد عددين حقيقيين α,β يحققان:

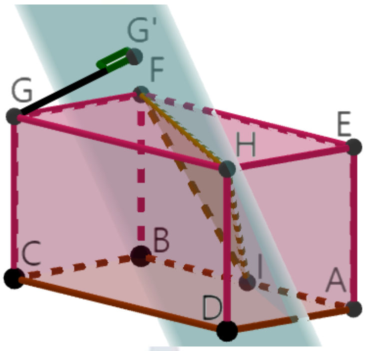
$$\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{IF} + \beta\overrightarrow{IH}$$
$$(x-1,y,z) = (\alpha,0,\alpha) + (-\beta,\beta,\beta)$$
$$\begin{cases} x-1 = \alpha-\beta & (1) \\ y = \beta & (2) \\ z = \alpha+\beta & (3) \end{cases}$$

بطرح (3) من (1) نجد:

$$x - z - 1 = -2\beta$$

نعوض $y=\beta$ من (2)، نجد معادلة المستوي

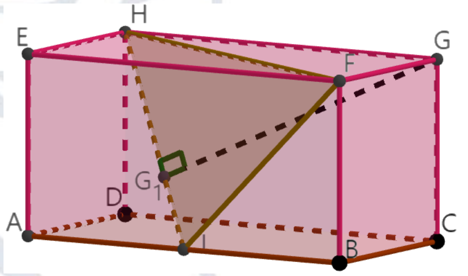
$$\boxed{x + 2y - z - 1 = 0}$$



3) احسب بُعد G عن المستوي (IFH).

بفرض النقطة G' المسقط القائم للنقطة G على (IFH)

$$GG' = dist\big(G,(IFH)\big)$$
$$= \frac{|2+2(1)-1-1|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$



4) احسب بُعد G عن المستقيم (IH)، أينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH)؟

بفرض النقطة $G_1(a,b,c)$ المسقط القائم للنقطة G على (IH)، عندئذٍ

$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$	$\overrightarrow{GG_1}(a-2,b-1,c-1)$

$$\begin{cases} \boxed{1}\ \overrightarrow{GG_1} \perp \overrightarrow{IH} \Rightarrow \overrightarrow{GG_1}.\overrightarrow{IH} = 0 \\ \boxed{2}\ G_1 \in (IH) \Rightarrow \overrightarrow{IG_1} = k.\overrightarrow{IH} \end{cases}$$

$$\boxed{1}\ \overrightarrow{GG_1}.\overrightarrow{IH} = 0 \Rightarrow -a+2+b-1+c-1=0$$
$$\Rightarrow \boxed{b+c-a=0}$$

$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$	$\overrightarrow{IG_1}(a-1,b,c)$

$$\boxed{2}\ \overrightarrow{IG_1} = k.\overrightarrow{IH} \Rightarrow (a-1,b,c) = (-k,k,k)$$
$$\begin{cases} a = 1-k \\ b = k \\ c = k \end{cases}$$

بالتعويض في $\boxed{1}$ نجد:

$$k + k - 1 + k = 0 \Longrightarrow k = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{G_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}$$

وبالتالي:

$$GG_1 = \sqrt{\left(2-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

مسقط نقطة على مستقيم يعطي المسافة الأصغر بين تلك النقطة والمستقيم، لاحظ أنَّ

$$GG' = \frac{2}{\sqrt{6}} < \frac{4}{\sqrt{6}} = GG_1$$

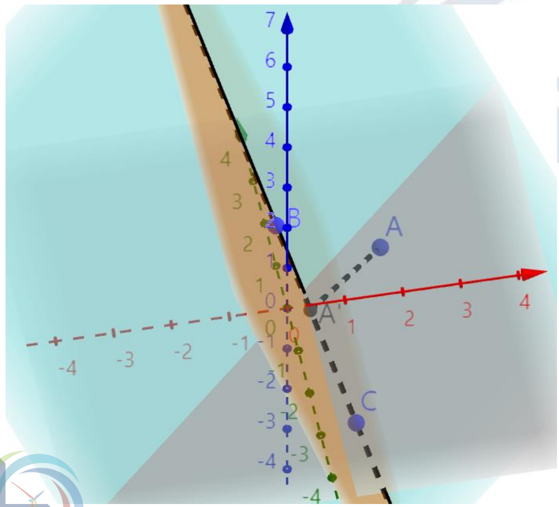
وبالتالي فإنَّ G' حتماً لا تنتمي للمستقيم (IH).

<u>المسألة الثانية عشر</u>: صفحة 69

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، لدينا النقطة $A(2,2,-1)$، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}: x - y + z = 0$$
$$\mathcal{Q}: 3x + z - 1 = 0$$

احسب بُعد A عن المستقيم d الذي يُمثّل الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

لتكن النقطة $A'(a,b,c)$ المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d، عندئذٍ فإنّ A' تحقق:

$$\begin{cases} \boxed{1}\ A' \in d \begin{cases} A' \in \mathcal{P} \Rightarrow a-b+c=0 \\ A' \in Q \Rightarrow 3a+c-1=0 \end{cases} \\ \boxed{2}\ \overrightarrow{AA'} \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0, \text{شعاع موجه لـ } d\ \vec{u} \end{cases}$$

لتعيين $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً لـ d، نختار نقطتين B و C من d فيكون $\vec{u}=\overrightarrow{BC}$ شعاع التوجيه.

$$B(x,y,z)\in d \begin{cases} B\in\mathcal{P} \Rightarrow x-y+z=0 \\ B\in Q \Rightarrow 3x+z-1=0 \end{cases}$$

نختار قيمة لأحد المتغيرات ولتكن من أجل $x=0$ ونعوض

$$\begin{cases} y=z \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y=1, z=1 \Rightarrow \boxed{B(0,1,1)}$$

ومن أجل النقطة $C(x,y,z)$ نختار $x=1$

$$\begin{cases} y=z+1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow y=-1, z=-2$$

$$\Rightarrow \boxed{C(1,-1,-2)}$$

ومنه

$$\vec{u}=\overrightarrow{BC}(1,-2,-3)$$
$$\overrightarrow{AA'}(a-2,b-2,c+1)$$

$$\begin{cases} \boxed{1} \begin{cases} A'\in\mathcal{P} \Rightarrow c=b-a \\ A'\in Q \Rightarrow c=1-3a \end{cases} \\ \boxed{2}\ \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow a-2b-3c=1 \end{cases}$$

بحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً نجد من $\boxed{1}$

$$b-a=1-3a \Rightarrow b=1-2a$$

نعوض في $\boxed{2}$

$$a-2+4a-3+9a=1 \Rightarrow a=\frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow b=\frac{1}{7}, \qquad c=-\frac{2}{7}$$

$A'\left(\frac{3}{7},\frac{1}{7},-\frac{2}{7}\right)$	$\overrightarrow{AA'}\left(-\frac{11}{7},-\frac{13}{7},\frac{5}{7}\right)$

$$\|\overrightarrow{AA'}\|=\sqrt{\frac{121+169+25}{49}}=\frac{\sqrt{315}}{7}=\frac{3\sqrt{35}}{7}$$

المسألة الثالثة عشر: صفحة 69

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطة $A(2,1,2)$، والمستويين $\mathcal{P}$ و Q:

$$\mathcal{P}: x+y-2z-1=0$$
$$Q: x+y+z=0$$

1) أثبت أنَّ المستويين $\mathcal{P}$ و Q متعامدان.

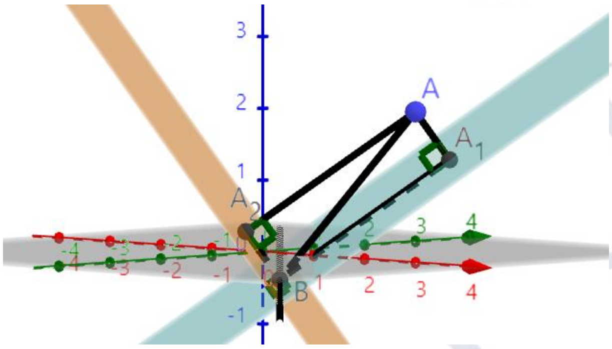
نبرهن أنَّ ناظميهما متعامدان، أي $\overrightarrow{n_\mathcal{P}} \perp \overrightarrow{n_Q}$،

$$\overrightarrow{n_\mathcal{P}}.\overrightarrow{n_Q}=0$$

$$\overrightarrow{n_\mathcal{P}}(1,1,-2), \qquad \overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{n_\mathcal{P}}.\overrightarrow{n_Q}=1+1-2=0$$

فالمستويان متعامدان.



2) احسب بُعد A عن كلٍّ من المستويين $\mathcal{P}$ و Q.

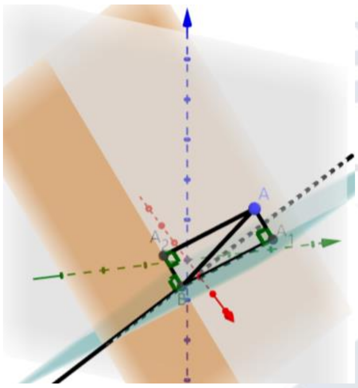
A_1 مسقط A على $\mathcal{P}$

$$AA_1=dist(A,\mathcal{P})=\frac{|2+1-2(2)-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

A_2 مسقط A على Q

$$AA_2=dist(A,Q)=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

3) استنتج بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q.



الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q هو d

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1}\perp\mathcal{P} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1}\perp d \\ \overrightarrow{AA_2}\perp Q \Rightarrow \overrightarrow{AA_2}\perp d \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\perp(AA_1A_2)$$

لتكن B مسقط النقطة A على المستقيم d، (وهي أيضاً نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (AA_1A_2))

ينتج لدينا المستطيل AA_1BA_2 (لأنّ فيه ثلاث زوايا قائمة).

ومنه حسب فيثاغورث

$$BA^2=(AA_1)^2+(AA_2)^2=\frac{54}{6}=9$$
$$\Rightarrow BA=3$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة الرابعة عشر: صفحة 69

في كلٍّ من الحالات الآتية، نعطي نقطتين A و B والمعادلة الديكارتية لمستوٍ $\mathcal{P}$. تيقّن في كل حالة أنَّ المستقيم (AB) ليس عمودياً على $\mathcal{P}$. ثمَّ أعط معادلة للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B.

$\boxed{1}$ $B(0,1,1),\quad A(1,0,0),\quad \mathcal{P}: x+y+z=0$

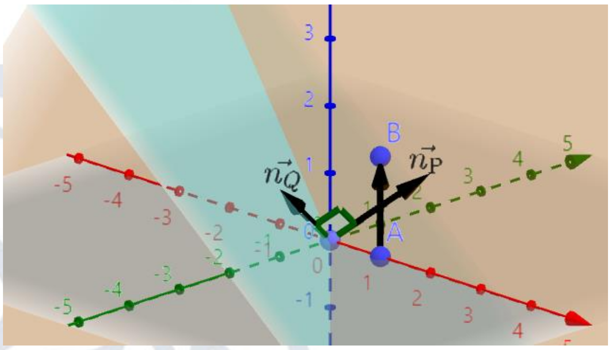
لإثبات أن المستقيم (AB) لا يتعامد مع المستوي $\mathcal{P}$

يكفي أن نبرهن أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ غير مرتبطين خطياً

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,1,1)$	$\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$-\frac{1}{1} \neq \frac{1}{1}$$



لإيجاد معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ومار بالنقطتين A,B

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} \Rightarrow a+b+c=0 \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow -a+b+c=0 \end{cases}$$

معادلتين بثلاث مجاهيل نعطي قيمة لأحد المجاهيل ونعوض،

وليكن من أجل $c=1$،

$$a+b=-1$$
$$-a+b=-1$$

بجمع المعادلتين نجد

$$b=-1 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}(0,-1,1)$$

ومنه معادلة المستوي Q

$$0(x-1)-1(y-0)+1(z-0)=0$$
$$Q:\ -y+z=0$$

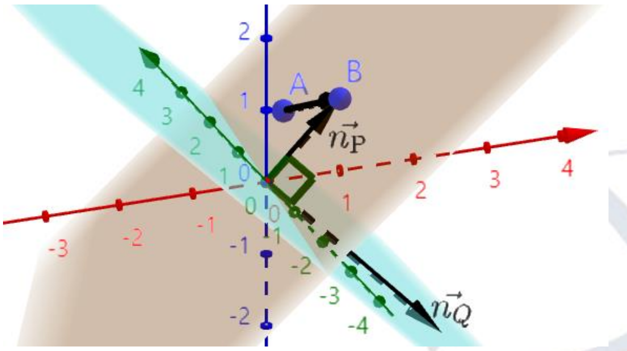
$\boxed{2}$ $B(1,0,1),\quad A(1,2,0),\quad \mathcal{P}: x+z=0$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,0,1)$	$\overrightarrow{AB}(0,-2,1)$

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

لإيجاد معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ومار بالنقطتين A,B



$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} \Rightarrow a+c=0 \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow -2b+c=0 \end{cases}$$

معادلتين بثلاث مجاهيل نعطي قيمة لأحد المجاهيل ونعوض،

وليكن من أجل $c=1$،

$$a=-1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\left(-1,\frac{1}{2},1\right)$$

ومنه معادلة المستوي Q

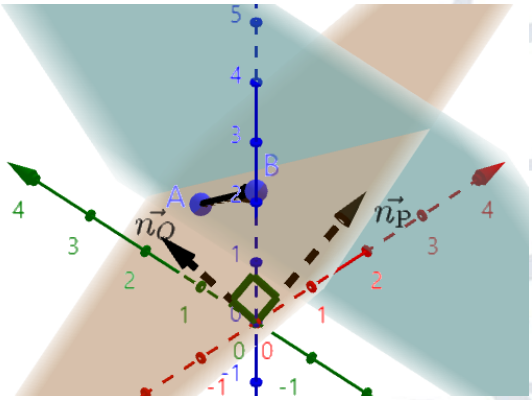
$$-1(x-1)+\frac{1}{2}(y-0)+1(z-1)=0$$
$$Q:\ 2x-y-2z=0$$

$\boxed{2}$ $B(1,1,1),\quad A(2,3,-1),\quad \mathcal{P}: 2x+z-4=0$

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,0,1)$	$\overrightarrow{AB}(-1,-2,2)$

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$-\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$$



لإيجاد معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ومار بالنقطتين A,B

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} \Rightarrow 2a+c=0 \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow -a-2b+2c=0 \end{cases}$$

من أجل $c=1$

$$a=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{5}{4} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4},1\right)$$

ومنه

$$Q:\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}y+z-\frac{7}{4}=0$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

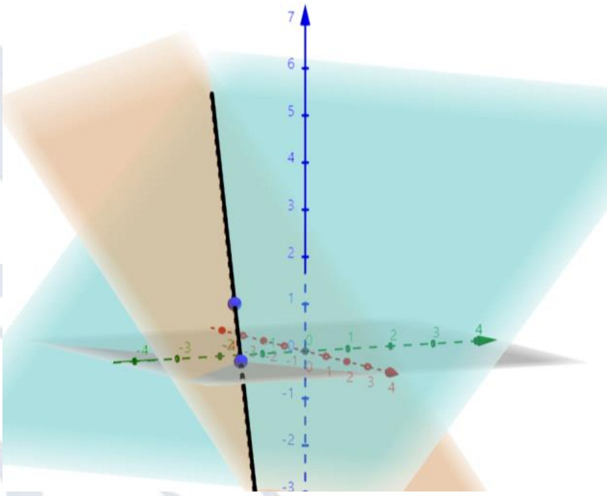
المسألة الخامسة عشر: صفحة 70

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، المستويين $\mathcal{P}$ و$\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}: x-2y+3z-5=0$$
$$\mathcal{Q}: x+y+z+1=0$$

1) علل كون المستويين $\mathcal{P}$ و$\mathcal{Q}$ متقاطعين. نرمز بالرمز d إلى فصلهما المشترك.

يكون المستويان متقاطعان إذا كان ناظميهما غير مرتبطين خطياً



$\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(1,1,1)$	$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-2,3)$

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً

$$\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}$$

وبالتالي المستويان متقاطعان بفصل مشترك d.

2) أثبت أنَّ d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$ عندما تتحول z في $\mathbb{R}$.

تنتمي النقاط إلى d إذا انتمت إلى $\mathcal{P}$ و$\mathcal{Q}$ معاً،

$$M(x,y,z)\in d$$
$$\Longrightarrow\begin{cases}M\in\mathcal{P}\Rightarrow x-2y+3z-5=0 & (1)\\ M\in\mathcal{Q}\Rightarrow x+y+z+1=0 & (2)\end{cases}$$

معادلتين بثلاثة مجاهيل، نستطيع بالحل المشترك كتابة كل من x وy بدلالة z.

بطرح (2) من (1) نجد:

$$-3y+2z-6=0\Rightarrow y=\frac{2}{3}z-2$$

نعوض في (1)

$$x=2\left(\frac{2}{3}z-2\right)-3z+5\Rightarrow x=\frac{4}{3}z-3z+1$$
$$\Rightarrow x=-\frac{5}{3}z+1$$

ومنه مجموعة النقاط التي تنتمي إلى d هي من الشكل

$$M\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right),\qquad z\in\mathbb{R}$$

3) أعطي شعاعاً موجهاً للمستقيم d.

أي نقطتين من المستقيم يعينان شعاع توجيه

وجدنا من الطلب السابق أنَّ d هو مجموعة النقاط

$$M\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right),\qquad z\in\mathbb{R}$$

باختيار $z=0$، نجد النقطة

$$M_1(1,-2,0)\in d$$

باختيار $z=1$، نجد النقطة

$$M_2\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},1\right)\in d$$

ومنه نجد $\overrightarrow{M_1M_2}$ شعاع توجيه لـ d

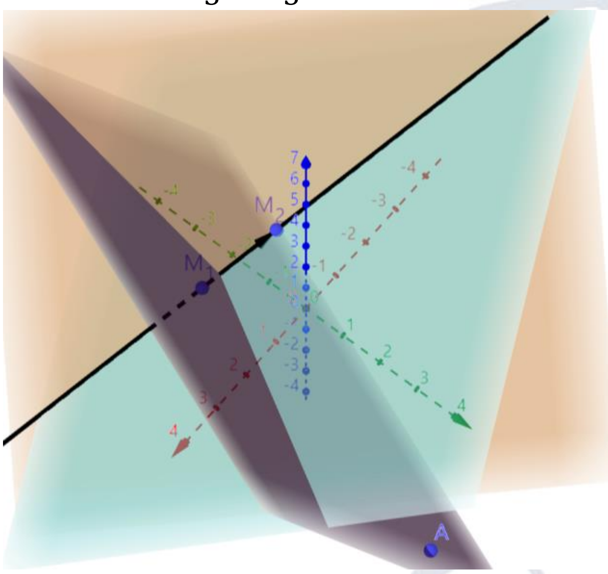
$$\overrightarrow{M_1M_2}\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

4) اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ العمودي على كلٍ من $\mathcal{P}$ و$\mathcal{Q}$ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$.

بما أنَّ المستوي $\mathcal{R}$ عمودي على $\mathcal{P}$ و$\mathcal{Q}$، فهو عمودي على فصلهما المشترك d، وبالتالي شعاع توجيه المستقيم $\overrightarrow{M_1M_2}$ عمودي على المستوي فهو ناظم له،

معادلة مستوٍ ناظمه $\overrightarrow{M_1M_2}$ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

$$-\frac{5}{3}(x-2)+\frac{2}{3}(y-5)+(z+2)=0$$
$$\mathcal{R}:\ -\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}y+z+2=0$$

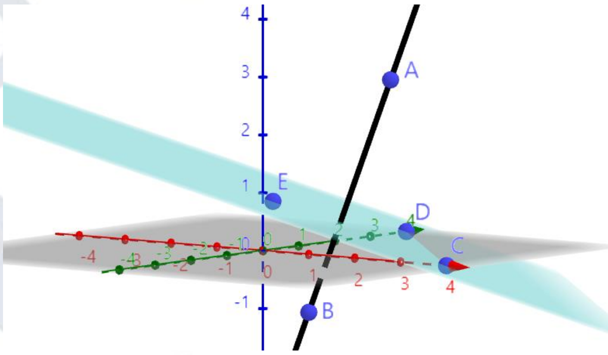


نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

المسألة السادسة عشر: صفحة 70

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط: $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$.

1) أثبت أنَّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.



لإثبات أنّ C و D و E ليست على استقامة واحدة، نثبت أنَّ $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطة خطياً

$C(4,0,0)$	$D(0,4,0)$	$E(1,-1,1)$
$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$		$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$

نلاحظ أنَّ الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

$$\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}$$

وبالتالي النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

2) أثبت أنَّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

لإثبات أنَّ المستقيم عمودي على المستوي نثبت أنَّه عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه

$\overrightarrow{BA}(1,1,4)$	$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$	$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$

يكفي أن نثبت أنَّ

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD} \ , \ \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CE}$$

أي

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = 0 \ , \ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CE} = 0$$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = -4 + 4 + 0 = 0$ محققة

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CE} = -3 - 1 + 4 = 0$ محققة

ومنه يكون

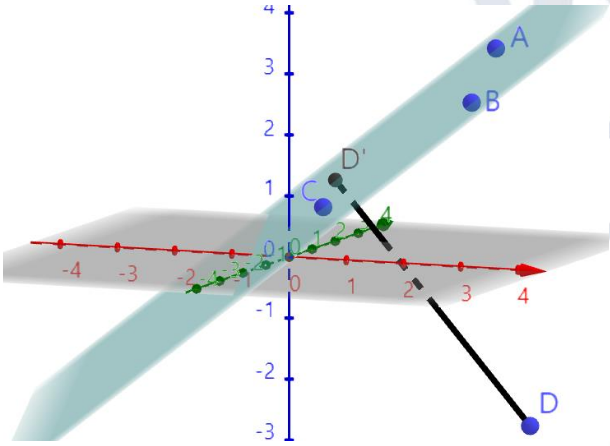
$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD} \ , \ \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CE}$$

وبالتالي المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

المسألة السابعة عشر: صفحة 70

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط: $A(2,4,3)$ و $B(4,-2,3)$ و $C(1,-1,1)$ و $D(3,3,-3)$.

1) أثبت أنَّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.



$A(2,4,3)$	$B(4,-2,3)$	$C(1,-1,1)$
$\overrightarrow{AB}(2,-6,0)$		$\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$

نلاحظ أنَّ الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{-6}{-5} \neq \frac{0}{-2}$$

وبالتالي النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

2) عيّن إحداثيات المسقط القائم D' للنقطة D على المستوي (ABC).

$$D'(x,y,z)$$

$$\begin{cases} \boxed{1}\ D' \in (ABC) \Rightarrow \overrightarrow{AD'} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \\ \boxed{2}\ \begin{cases} \overrightarrow{DD'} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{DD'}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DD'} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DD'}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\overrightarrow{AD'}(x-2,y-4,z-3)$	$\overrightarrow{AB}(2,-6,0)$
$\overrightarrow{DD'}(x-3,y-3,z+3)$	$\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$

$$\boxed{1}\ \overrightarrow{AD'} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$(x-2,y-4,z-3) = \alpha(2,-6,0) + \beta(-1,-5,-2)$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha - \beta + 2 & (1) \\ y = -6\alpha - 5\beta + 4 & (2) \\ z - 3 = -2\beta & (3) \end{cases}$$

بالحل المشترك للحصول على معادلة تحوي x,y,z بدون α,β (وهي معادلة المستوي)، نضرب طرفي (1) بـ 3 ونجمعها مع (2)،

$$3x + y = -8\beta + 10 \Rightarrow \beta = \frac{-3x - y + 10}{8}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

نعوض في (3)،

$$4z = 3x + y + 2 \Rightarrow \boxed{3x + y - 4z + 2 = 0}$$

$$\boxed{2}\ \begin{cases} \overrightarrow{DD'}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow 2x - 6 - 6y + 18 = 0 \\ \boxed{x - 3y + 6 = 0} \end{cases}$$

$$\boxed{2}\ \begin{cases} \overrightarrow{DD'}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \\ -x + 3 - 5y + 15 - 2z - 6 = 0 \\ \boxed{x + 5y + 2z - 12 = 0} \end{cases}$$

أصبح لدينا ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل بحلها حلاً مشتركاً نجد المطلوب

$$3x + y - 4z + 2 = 0 \ \ (1')$$
$$x = 3y - 6 \ \ (2')$$
$$x + 5y + 2z - 12 = 0 \ \ (3')$$

نعوض $(2')$ في $(1')$ نجد

$$10y - 18 - 4z + 2 = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}y - z = 4$$

نعوض $(2')$ في $(3')$ نجد

$$8y + 2z - 18 = 0 \Rightarrow 4y + z = 9$$

بجمع العلاقتين الأخيرتين نجد:

$$y = 2 \Longrightarrow z = 1 \Longrightarrow x = 0$$

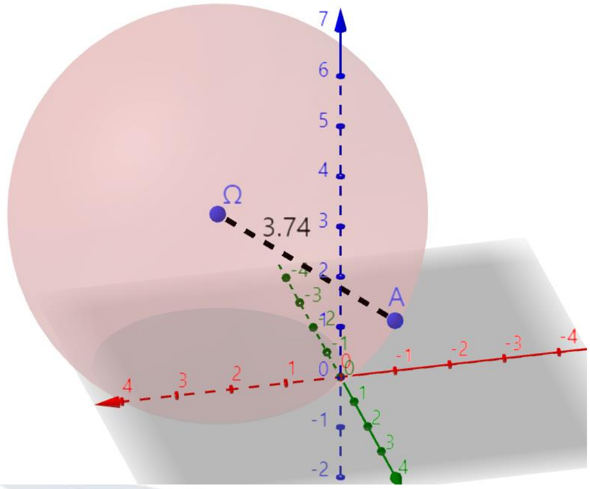
ومنه

$$D'(0,2,1)$$

<u>المسألة الثامنة عشر:</u> صفحة 70

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، النقطتين $\Omega(2,-1,3)$ و$A(-1,0,1)$. نهدف إلى كتابة معادلة للكرة S التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

1) احسب ΩA.



$$\Omega A = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-1)^2 + (1-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ احسب ΩM^2 بدلالة x و y و z.

$$\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$$

3) أثبت أنَّ " $M(x,y,z)$ نقطة من S " إذا وفقط إذا تحقق الشرط " $\Omega M^2 = \Omega A^2$ " واستنتج معادلة للكرة S المطلوبة.

نعلم أنَّ الكرة هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تبعد عن نقطة ثابتة Ω مسافة ثابتة R، $R = \Omega M$، ولكن لدينا

$$R = \Omega A \Longrightarrow \Omega M = \Omega A \Longrightarrow \Omega M^2 = \Omega A^2$$

ومنه معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $R = \sqrt{14}$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$$

<u>المسألة التاسعة عشر:</u> صفحة 70

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

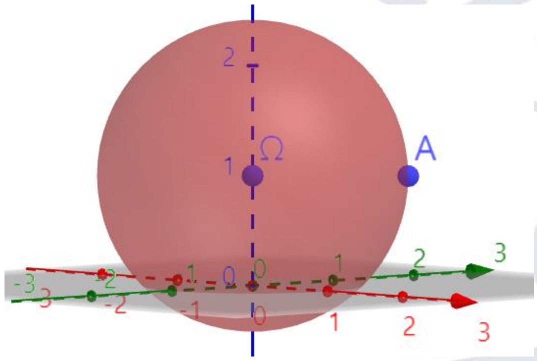
$\boxed{1}$ $A(1,1,1)$ و $\Omega(0,0,1)$

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = \Omega A^2$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$$

حيث

$$R = \Omega A = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

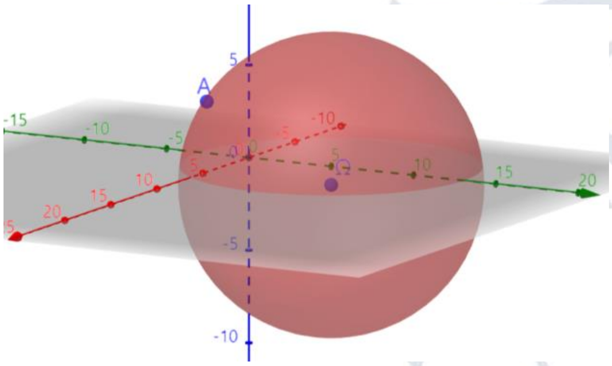


$\boxed{2}$ $A(1,-2,3)$ و $\Omega(0,5,-1)$

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = \Omega A^2$$
$$x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 66$$

حيث

$$R = \Omega A = \sqrt{1 + (-7)^2 + (4)^2} = \sqrt{66}$$



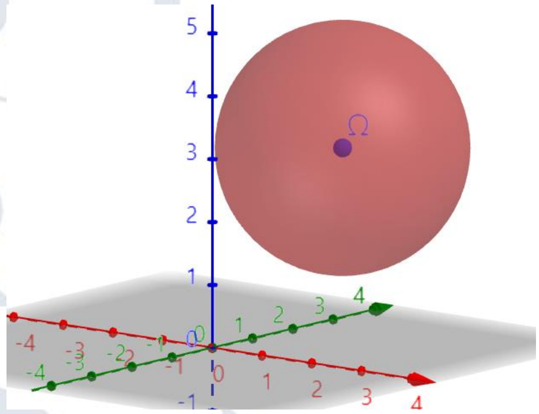
المسألة العشرون: صفحة 70

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r.

$\boxed{1}$ $r=2$ و $\Omega(1,2,3)$

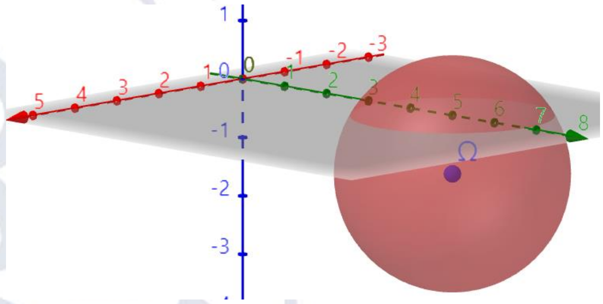
$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$$



$\boxed{2}$ $r=\sqrt{3}$ و $\Omega(0,5,-1)$

$$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$$



المسألة الواحدة والعشرون: صفحة 70

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

$\boxed{1}$ $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

الاتمام إلى مربع كامل لرد المعادلة إلى شكل قياسي

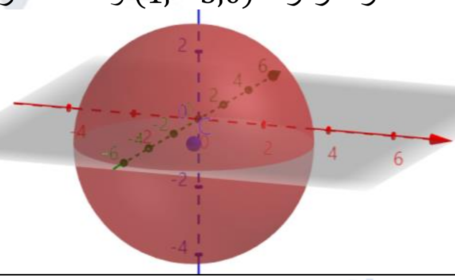
معروف

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$$

$$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2=2$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

وهي معادلة كرة مركزها $(1,-3,0)$ ونصف قطرها $2\sqrt{3}$



$\boxed{2}$ $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

$$x^2-10x+25-25+y^2+z^2+2z+1-1+26=0$$

$$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$$

تمثل نقطة وحيدة $(5,0,-1)$.

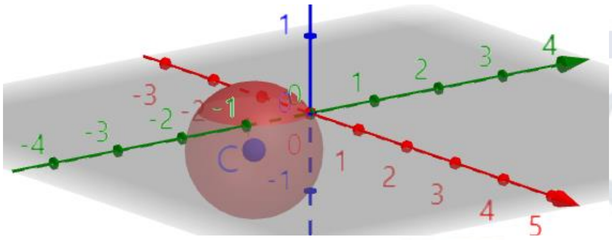
مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ هي النقطة $(5,0,-1)$.

$\boxed{3}$ $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

$$x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

إذاً مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$\boxed{4}$ $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

$$x^2-4x+4-4+y^2+z^2+5=0$$

$$(x-2)^2+y^2+z^2=-1$$

لا توجد نقاط تحقق المعادلة، وتكون مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ هي المجموعة الخالية.

--تذكرة بالاتمام إلى مربع كامل--

$(\ \ )^2$

مربع كامل

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{x^2+bx+c=0}$

$$\to x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0$$

$$\to \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0$$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$

$$\to \underbrace{ax^2+bx+\frac{(b/2)^2}{a}-\frac{(b/2)^2}{a}+c=0}_{\text{لا نستخدم هذه الطريقة لأنها لا تعطي شكل مألوف}}$$

وإنما نعمل التالي

$$a\underbrace{\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)}_{\text{نتمم إلى مربع كامل كما في } \boxed{1}}+c=0$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

المسألة الثانية والعشرون: صفحة 71

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نتأمَّل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $\mathcal{P}: x+2y+3z=5$. اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

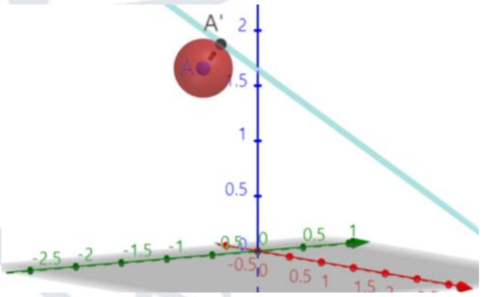
نصف قطر الكرة المطلوبة هو

$$R = dist(A,\mathcal{P})$$

$$dist(A,\mathcal{P}) = \frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

ومنه معادلة الكرة المطلوبة:

$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2 = \frac{1}{14}$$



المسألة الثالثة والعشرون: صفحة 71

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نتأمَّل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$.

1) أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

انطلق من العلاقة المعطاة للوصول إلى معادلة مألوفة

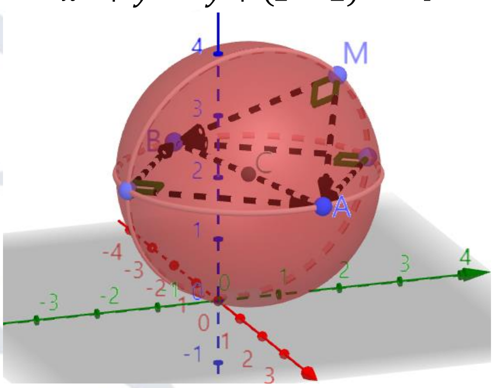
$\overrightarrow{MB}(-2-x,-y,2-z)$	$\overrightarrow{MA}(2-x,1-y,2-z)$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$

$$(2-x)(-2-x)-y(1-y)+(2-z)^2=0$$

$$-(2-x)(2+x)-y+y^2+(z-2)^2=0$$

$$x^2+y^2-y+(z-2)^2=4$$



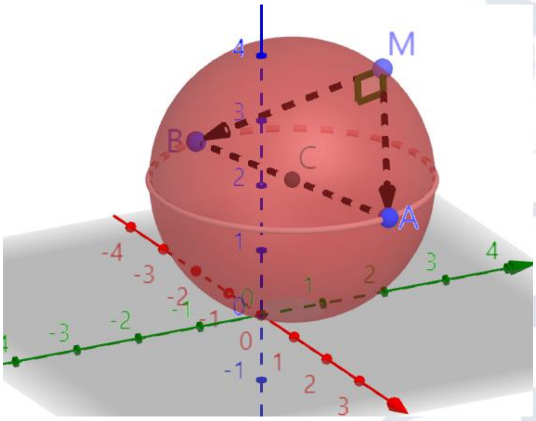
2) ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$ ؟

$$x^2+y^2-y+(z-2)^2=4$$

$$x^2+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+(z-2)^2=4$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$$

وهي معادلة كرة مركزها $\left(0,\frac{1}{2},2\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{17}}{2}$



المسألة الرابعة والعشرون: صفحة 71

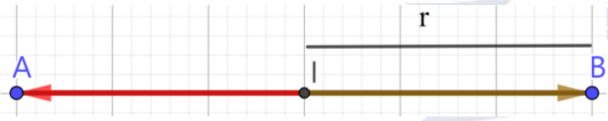
نتأمَّل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. نضع $r=\frac{1}{2}AB$، ونعرّف I منتصف $[AB]$.

1) أثبت أنّه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقّق المساواة:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$$

ننطلق من الطرف الأول وصولاً إلى الطرف الثاني بالاستفادة من معطيات المسألة

$$\underbrace{\overrightarrow{MA}}_{I\ \text{ندخل}}.\underbrace{\overrightarrow{MB}}_{I\ \text{ندخل}}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$$



$$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2$$

$$=MI^2-r^2$$

2) أثبت أنَّ مجموعة نقاط الفراغ التي تحقّق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r، وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

استفد من الطلب السابق

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Longrightarrow MI^2-r^2=0 \Longrightarrow MI^2=r^2$$

وهي تمثل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي مركزها I ونصف قطرها r، ويكون وضوحاً $[AB]$ قطراً فيها.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

المسألة الخامسة والعشرون: صفحة 71

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ نتأمَّل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$.

1) أعط معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA = 2MB$.

انطلق من العلاقة المعطاة للوصول إلى معادلة مألوفة

$\overrightarrow{MA}(1-x,1-y,1-z)$	$\overrightarrow{MB}(-x,-1-y,-1-z)$

$$MA = 2MB$$

نربع حتى نتخلص من الجذر

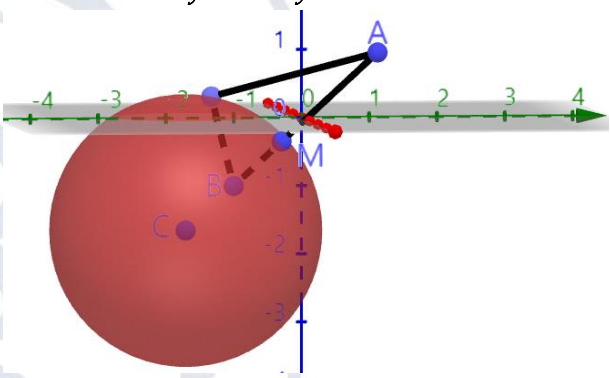
$$MA^2 = 4MB^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2 = 4x^2+4(1+y)^2+4(1+z)^2$$

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2 = 4x^2+4+8y+4y^2+4+8z+4z^2$$

$$\Rightarrow$$

$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$



2) ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل نجد:

$$3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+3\left(y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}\right)+3\left(z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}\right)+5=0$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}+\frac{1}{9}+\frac{50}{9}$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2 = 4$$

وهي معادلة كرة مركزها $\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$ ونصف قطرها $R=2$

3) أعط معادلة للمجموعة $\mathcal{P}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA = MB$.

$$MA = MB$$

نربع حتى نتخلص من الجذر

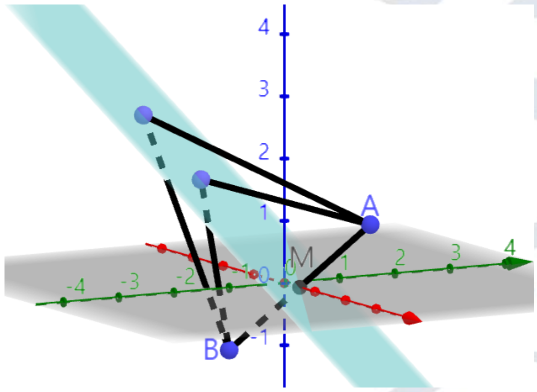
$$MA^2 = MB^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2 = x^2+(1+y)^2+(1+z)^2$$

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2 = x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2$$

$$\Rightarrow$$

$$2x+4y+4z-1=0$$



4) ما طبيعة المجموعة $\mathcal{P}$؟

$$2x+4y+4z-1=0$$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل مستوٍ.

وهو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $MA = MB$

المسألة السادسة والعشرون: صفحة 71

نتأمَّل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. وعدداً موجباً غير معدوم k. نعرّف $\mathcal{E}_k$ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق الشّرط $AM = k.BM$.

حالة $k=1$.

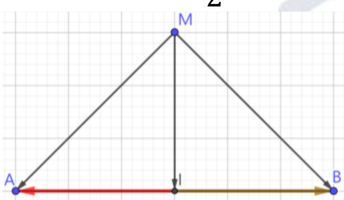
1) لتكن I منتصف $[AB]$ أثبت أنّ

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = \frac{MA^2-MB^2}{2}$$

$$AM = k.BM,\qquad k=1 \Longrightarrow \boxed{AM = BM}$$

بما أنّ I منتصف $[AB]$

$$\overrightarrow{MI} = \frac{\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)}{2}$$



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right).\frac{\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)}{2}=$$

$$=\frac{MA^2-MB^2}{2}$$

2) استنتج أنَّ $\mathcal{E}_1$ هي المستوي $\mathcal{P}$ المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والعمودي على (AB). (المستوي المحوري للقطعة $[AB]$).

بما أنَّ:

$$AM=BM$$

ولدينا

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}=\frac{MA^2-MB^2}{2}=0$$

أي إنَّ M تنتمي للمستوي المار من I والعمودي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$. فهو إذن المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

حالة $k\neq 1$.

3) لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و(B,k)، ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و$(B,-k)$. أثبت أنَّ

$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{1-k^2}\left(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right)$$

$$=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و(B,k)، أي

$$\overrightarrow{IA}+k\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+k\overrightarrow{MI}+k\overrightarrow{IB}$$

$$=(1+k)\overrightarrow{MI}\quad(1)$$

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و$(B,-k)$، أي

$$\overrightarrow{JA}-k\overrightarrow{JB}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+k\overrightarrow{MJ}+k\overrightarrow{JB}$$

$$=(1-k)\overrightarrow{MJ}\quad(2)$$

من (1) و(2) نجد:

$$(1-k)\overrightarrow{MJ}.(1+k)\overrightarrow{MI}$$

$$=\left(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right)$$

$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{1-k^2}\left(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right)$$

$$=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$$

4) استنتج أنَّ $\mathcal{E}_k$ هي الكرة $\mathcal{S}$ التي تقبل القطعة المستقيمة $[IJ]$ قطراً فيها.

لدينا

$$AM=k.BM$$

ومنه

$$AM^2=k^2.BM^2$$

$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}=0\Rightarrow\overrightarrow{MI}\perp\overrightarrow{MJ}$$

ومنه استناداً إلى المسألة 24 فإنّ مجموعة النقاط M تمثل كرة يكون $[IJ]$ قطراً فيها.

المسألة السابعة والعشرون: صفحة 72

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمّل النقاط $A(4,0,-3)$ و$B(2,2,2)$ و$C(3,-3,-1)$ و$D(0,0,-3)$.

1) أعط معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$.

لتكن M منتصف $[AB]$ عندئذٍ تكون إحداثياتها

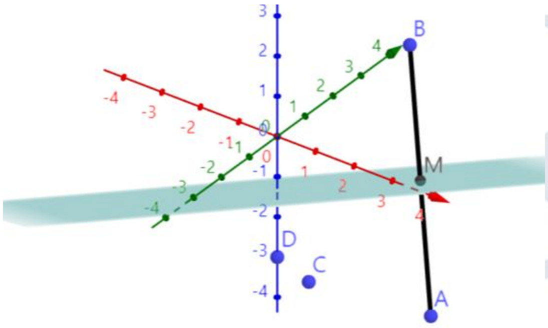
$$M\left(\frac{4+2}{2},\frac{0+2}{2},\frac{-3+2}{2}\right)\Rightarrow M\left(3,1,-\frac{1}{2}\right)$$

ويكون $\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$ شعاعاً ناظماً للمستوي المحوري $\mathcal{P}_1$،

ومنه معادلة المستوي $\mathcal{P}_1$ المار من M وناظمه $\overrightarrow{AB}$

$$-2(x-3)+2(y-1)+5\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\mathcal{P}_1:-2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$$



2) أعط معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_2$ للقطعة المستقيمة $[BC]$.

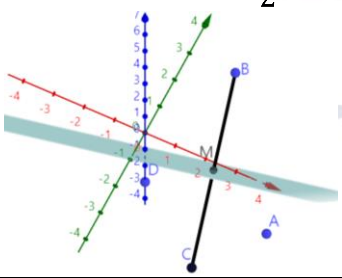
لتكن M منتصف $[BC]$ عندئذٍ تكون إحداثياتها

$$M\left(\frac{2+3}{2},\frac{2-3}{2},\frac{2-1}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ويكون $\overrightarrow{BC}(1,-5,-3)$ شعاعاً ناظماً للمستوي المحوري $\mathcal{P}_2$، ومنه معادلة المستوي $\mathcal{P}_2$ المار من M وناظمه $\overrightarrow{BC}$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)-5\left(y+\frac{1}{2}\right)-3\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\mathcal{P}_2:x-5y-3z-\frac{7}{2}=0$$



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

3) أعط معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_3$ للقطعة المستقيمة $[CD]$.

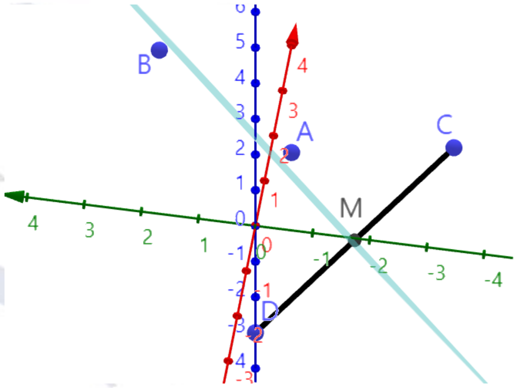
لتكن M منتصف $[CD]$ عندئذٍ تكون إحداثياتها

$$M\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-2\right)$$

ويكون $\overrightarrow{CD}(-3,3,-2)$ شعاعاً ناظماً للمستوي المحوري $\mathcal{P}_3$، ومنه معادلة $\mathcal{P}_3$ المار من M وناظمه $\overrightarrow{CD}$

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\left(y+\frac{3}{2}\right)-2(z+2)=0$$

$$\mathcal{P}_3:-3x+3y-2z+5=0$$



4) علّل لماذا إذا تقاطعت المستويات $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ في نقطة واحدة Ω. كانت Ω مركزاً لكرة تمر بالنقاط A و B و C و D.

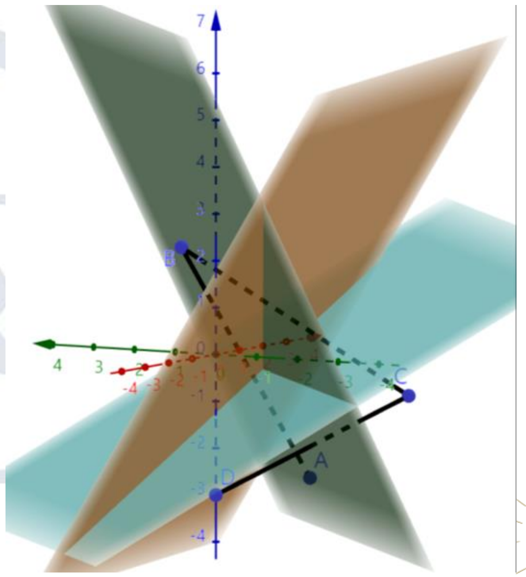
$$\begin{cases}\Omega\in\mathcal{P}_1\Longrightarrow \Omega A=\Omega B\\ \Omega\in\mathcal{P}_2\Longrightarrow \Omega C=\Omega B\\ \Omega\in\mathcal{P}_3\Longrightarrow \Omega C=\Omega D\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D}$$

وبالتالي Ω هي مركز الكرة المارة بالنقاط A و B و C و D.

5) بحلّ جملة من ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل أثبت أنَّ المستويات $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ تتقاطع في نقطة واحدة Ω.

بالحل المشترك لمعادلات المستويات نحصل على المطلوب



$$\begin{cases}-2x+2y+5z+\dfrac{13}{2}=0 & (1)\\ x-5y-3z-\dfrac{7}{2}=0 & (2)\\ -3x+3y-2z+5=0 & (3)\end{cases}$$

بضرب (2) بـ 2 وجمعها مع (1) نجد:

$$-8y-z-\frac{1}{2}=0\Longrightarrow z=-8y-\frac{1}{2}$$

بضرب (2) بـ 3 وجمعها مع (3) نجد:

$$-12y-11z-\frac{11}{2}=0\Longrightarrow z=-\frac{12}{11}y-\frac{1}{2}$$

ومنه

$$-8y-\frac{1}{2}=-\frac{12}{11}y-\frac{1}{2}\Longrightarrow y=0\Longrightarrow z=\frac{-1}{2}$$

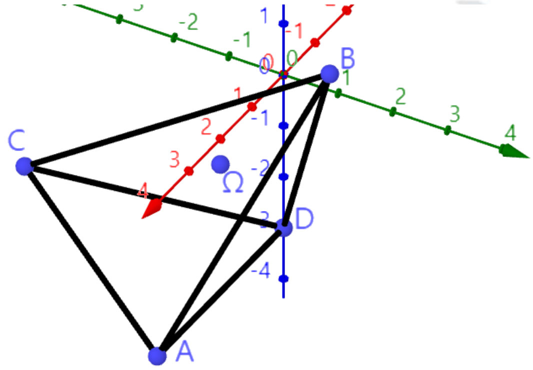
بالتعويض في (2) نجد:

$$\Longrightarrow x=2$$

$$\Longrightarrow \Omega\left(2,0,-\frac{1}{2}\right)$$

6) احسب نصف قطر الكرة $\mathcal{S}$ المارة بالنقاط A و B و C و D.

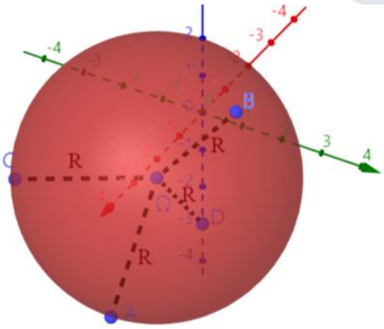
$$\Omega D=R=\sqrt{4+0+\left(-3+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$



7) اكتب معادلة للكرة $\mathcal{S}$ المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

معادلة كرة مركزها Ω ونصف قطرها R

$$(x-2)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{41}{4}$$



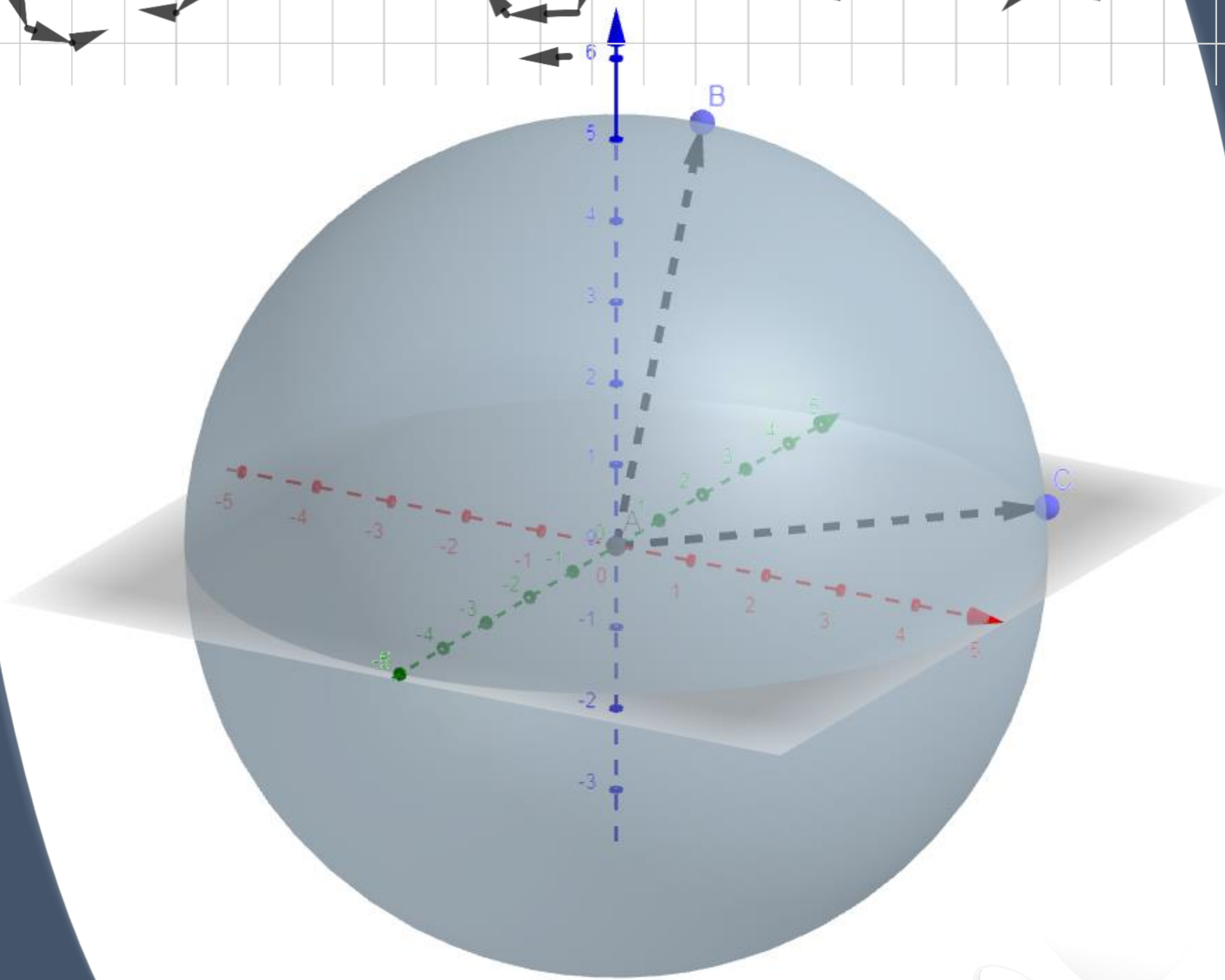
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

نلقاكم في القسم الثالث إن شاء الله

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

برلنت مطيط ونور أشقر

الأشعة في الفراغ



1444/6/17
2023/1/9