تمرين امتحاني رائع

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $\begin{cases} u_0 = e^2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$ و المطلوب :

١- برهن من أجل $n \geq 0$ صحة العلاقة : $1 < u_{n+1} \leq u_n$.

٢- استنتج أن المتتالية u_n متقاربة .

٣- لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = \ln u_n$ أثبت أنّ المتتالية v_n هندسية عيّن أساسها و حدّها الأوّل .

٤- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

٥- نضع $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ ، احسب $\ln P_n$ بدلالة n ثم استنتج P_n بدلالة n .

الحل : الطلب الأوّل :

$$E(n):\ 1 < u_{n+1} \leq u_n$$

$E(0)$ محقّقة لأنّ :

$$1 < u_1 = e \leq u_0 = e^2$$

نفرض صحّة $E(n)$ و نبرهن صحّة $E(n+1)$:

$$1 < u_{n+1} \leq u_n$$
$$\sqrt{1} < \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$$
$$1 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة .

فالقضيّة صحيحة و أثبتنا ذلك بالتدريج .

الطلب الثاني :

وجدنا أنّ :

$$1 < u_{n+1} \leq u_n$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد 1

فهي متقاربة .

الطلب الثالث :

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln\sqrt{u_n} = \frac{1}{2}\ln u_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدّها الأوّل :

$$v_0 = \ln u_0 = \ln e^2 = 2$$

الطلب الرابع :

$$v_n = v_0 q^n$$

$$v_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا $v_n = \ln u_n$ إذاً $u_n = e^{v_n}$:

$$u_n = e^{2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

بما أنّ $\left|q = \frac{1}{2}\right| < 1$ نجد $\lim\limits_{n\to+\infty} (q)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{2\left(\frac{1}{2}\right)^n} = e^{2(0)} = 1$$

الطلب الخامس :

$$\ln P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$$
$$= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \cdots + \ln(u_n)$$
$$= v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

و هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدّها الأوّل $a = v_0 = 2$ و عدد الحدود $n+1$:

$$\ln P_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\ln P_n = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

و عليه فإنّ :

$$P_n = \exp\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$