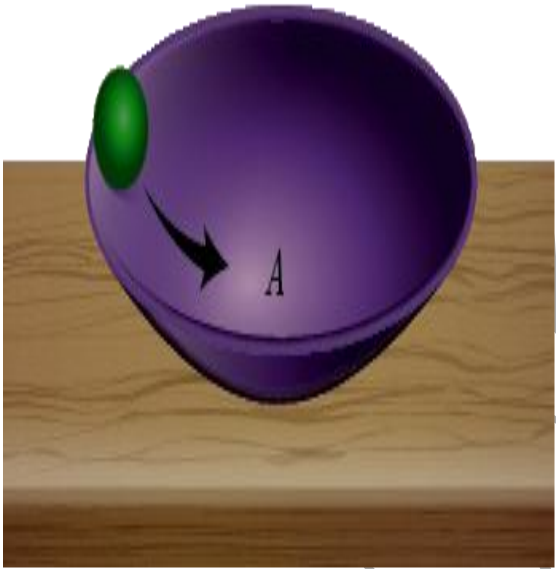
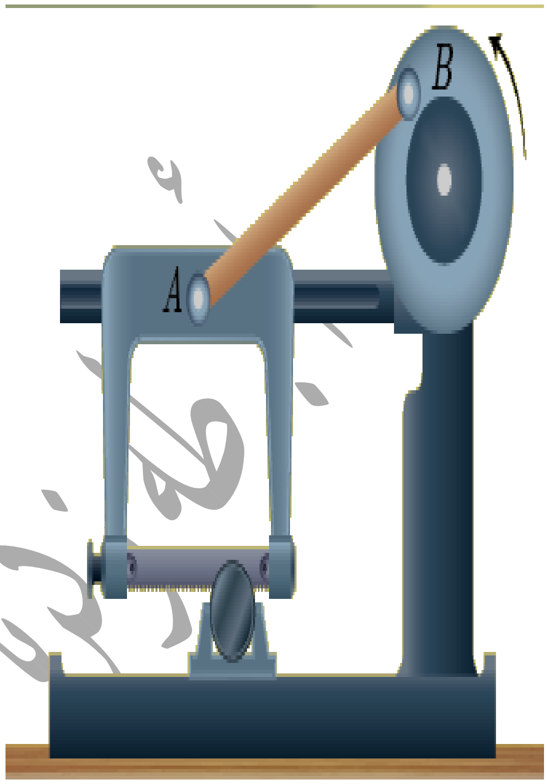
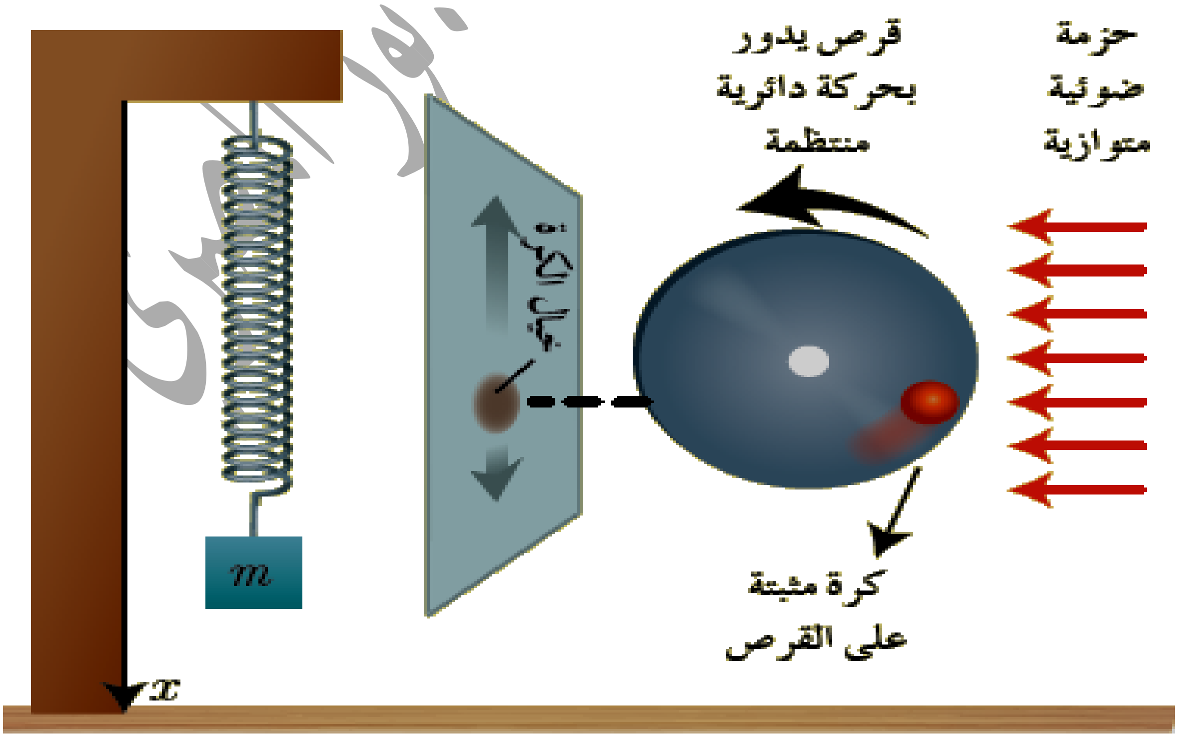
الوحدة الأولى : الحركة والتّحريك

الدّرس الأوّل : الحركة التّوافقيّة البسيطة

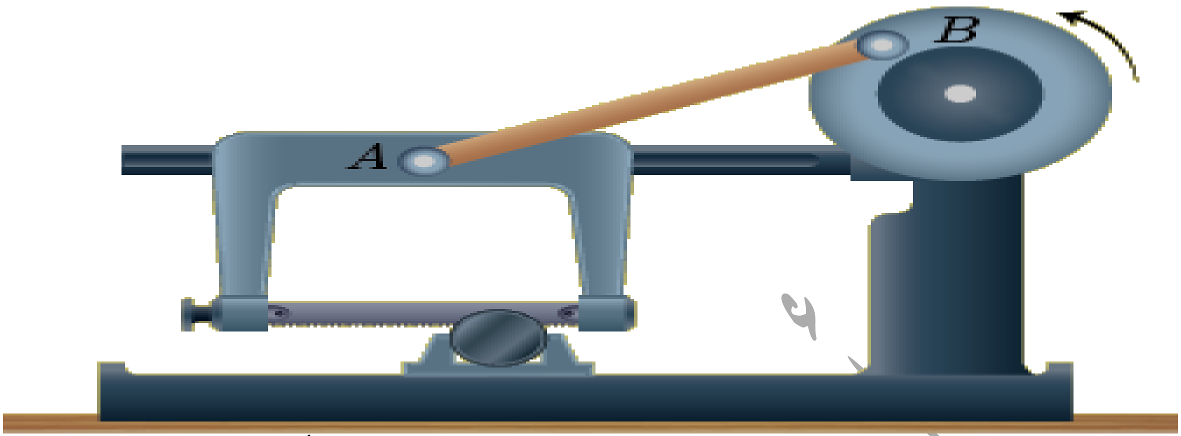
(النواس المرن)







نشاط(١):



* يعمل منشار بواسطة محرك كهربائي يدور بسرعة زاوية ثابتة ، نلاحظ أن:

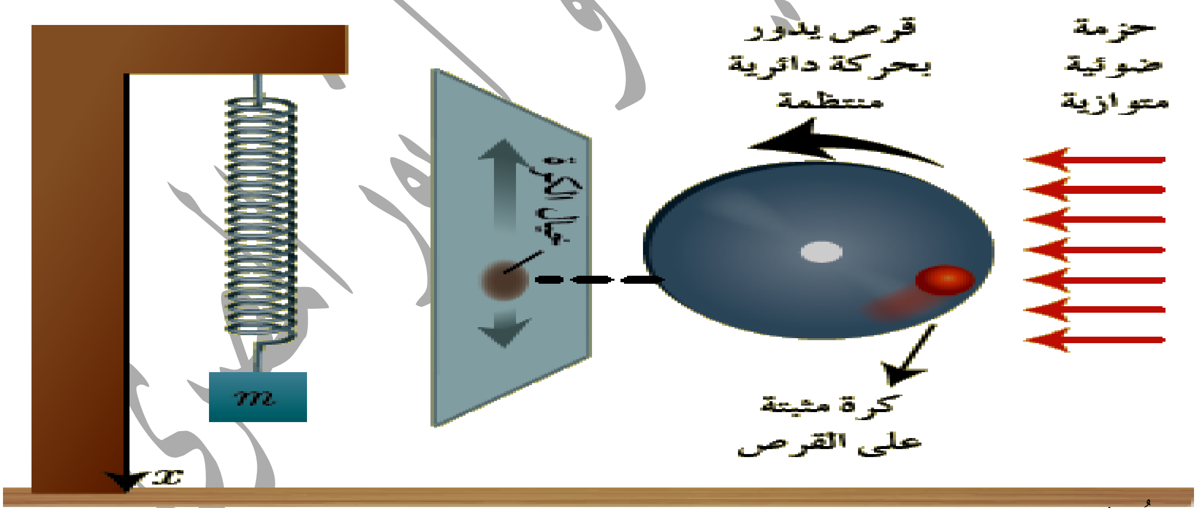
١-شكل مسار حركة النقطة A من المنشار مستقيم .

٢- شكل مسار حركة النقطة B دائري بنصف قطر ثابت .

٣-حركة النقطة A تتم باتجاهين متعاكسين مقيدة بقطعة مستقيمة طولها ثابت.

نتيجة: أن حركة النقطة B التي تنتمي إلى الدولاب هي حركة دائرية منتظمة تحولت لحركة اهتزازية في المنشار الذي تنتمي إليه النقطة A بمسار مستقيم تمثله قطعة مستقيمة طولها ثابت

نشاط(٢):



١- أثبّتُ كرةً صغيرةً بالقربِ من محيط قرصٍ قابلٍ للدوران حول محورٍ كما في الشكل.

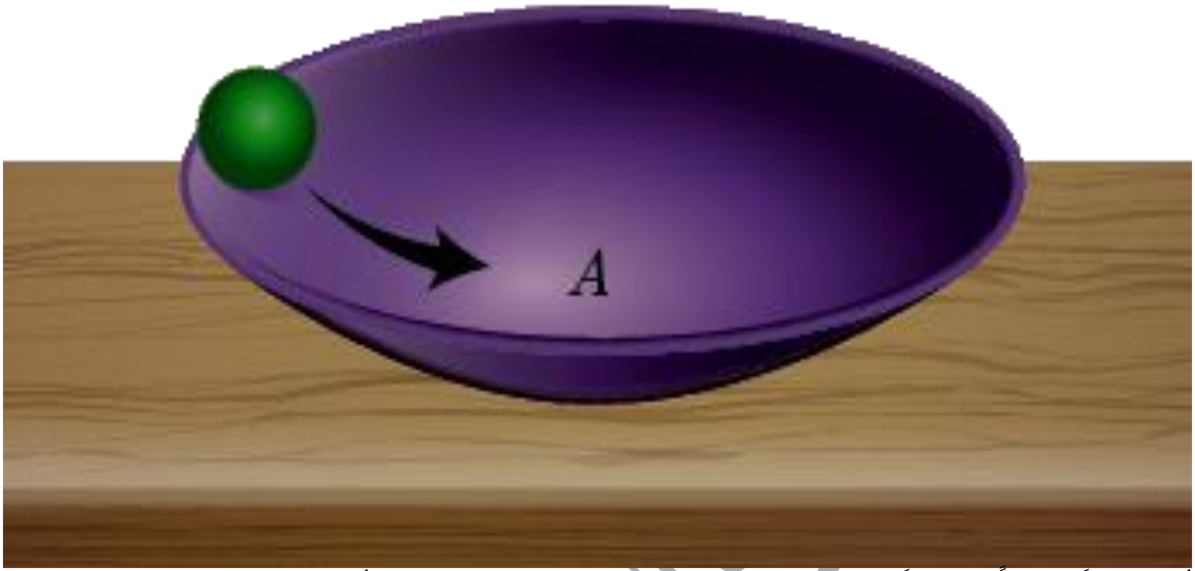
٢- أُسلّط حزمةً ضوئيّةً أفقيّاً ليتشكّل خيالٌ للكرة في مستوٍ شاقوليٍّ.

٣- أُديرُ القرصَ بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ بوساطةِ محرّك كهربائيّ.

٤- نستنتج أن حركةُ خيال الكرة المثبتة على محيط القرص المضاء أفقياً هي حركةٌ اهتزازيّةٌ إلى جانبَي نقطةٍ ثابتةٍ تُسمّى مركزَ الاهتزاز.

٥- حركة خيال الكرة تشبه حركة جسم صلب معلق بنابض مرن شاقولي حلقاته متباعدة.

نشاط(٣):



أتركُ كرةً معدِنيّةً صغيرةً دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ على طرفِ وعاءٍ دائري أملسٍ مُقعّرٍ كما هو موضّحٌ في الشكل:

نستنتج مايلي:

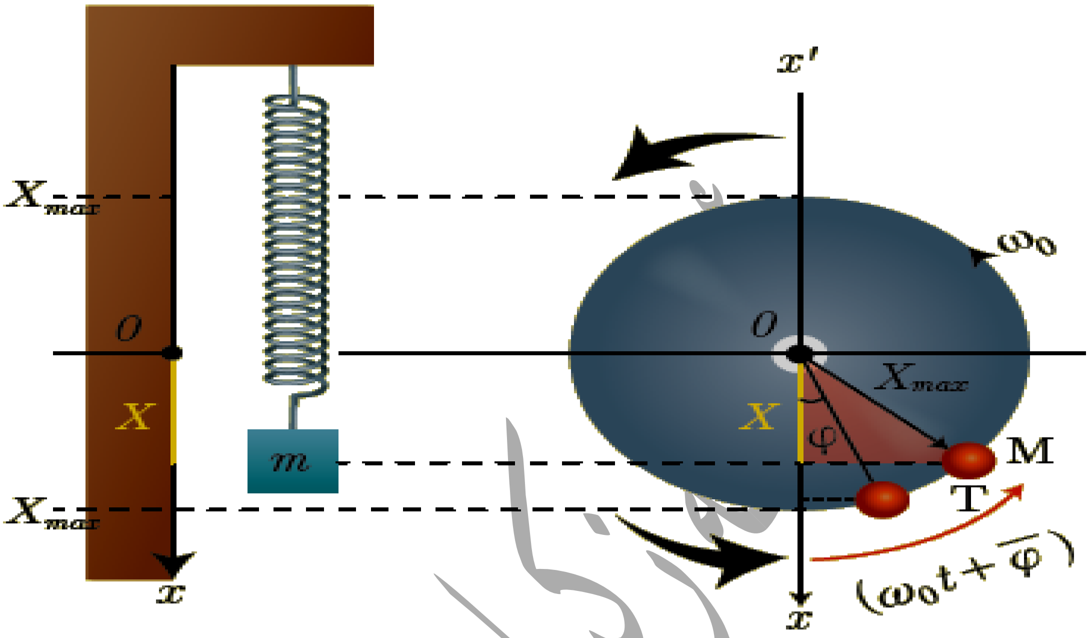
١- تتحرك الكرة باتجاهين متعاكسين بالنسبة لنقطة A التي تقع في قاع الوعاء.

٢- سرعة الكرة غير ثابتة أثناء الحركة.

٣- تنعدم السرعة عند طرفي الوعاء(في الوضعين الطرفين للوعاء)

نتيجة:الحركةَ الاهتزازيّةَ :حركة جسمٍ يهتزّ إلى جانبَي نقطةٍ ثابتةٍ تُسمّى مركزَ الاهتزاز، أو مركزَ التوازن. إنّ حركةَ اهتزازِ جسمٍ صُلْب معلّقٍ بنابضٍ مرنٍ حلقاتُهُ متباعدةٌ هي أوضحُ مثالٍ على الحركة التوافقيّة البسيطة، ويُدعى هذا النوّاس المرنَ.

العلاقةُ بينَ الحركةِ الدائريّةِ المنتظمةِ والحركةِ التوافقيّةِ البسيطة (تمثيل فرينل):



في الشكلِ المجاورِ تدورُ نقطةٌ ماديّة(M)بحركةٍ دائريّةٍ منتظمةٍ سرعتُها الزاويّة (ω_0) وشعاعُ الموضع(شعاع نصف القطر $\overrightarrow{OM}$) طويلته (X_{max}):

١- يصنع($\overrightarrow{OM}$) مع المحور ($\overrightarrow{x'x}$) زاوية ($\overline{\varphi}$) وهي الطور الابتدائي للحركة في اللحظة ($t=0$) .

٢- بينما في اللحظة ($t \neq 0$) يصنع ($\overrightarrow{OM}$) مع المحور($\overrightarrow{x'x}$) زاوية ($\omega_0 t+\overline{\varphi}$) وهي الطور الحركة في اللحظة (t)

٣- سعةُ الحركة (X_{max}) هي طويلةُ الشعاع ($\overrightarrow{OM}$) الثابتة عند الدوران.

٤-النبضُ الخاصُّ للحركة (ω_0) يقابل السرعة الزاويّة الثابتة التي تدور بها النقطة(M)

٥-مطالُ الحركة($\bar{x}$) هو مسقطُ الشعاع ($\overrightarrow{OM}$)على محور($\overrightarrow{x'x}$) وهو متغيّر بتغيّر الزمن.

٦-النسبة:

$$\cos(\omega_0 t+\overline{\varphi}) = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$$

٧-التابعُ الزمنيُّ لحركةِ المسقطِ تابعٌ جَيبيٌّ من الشكل:

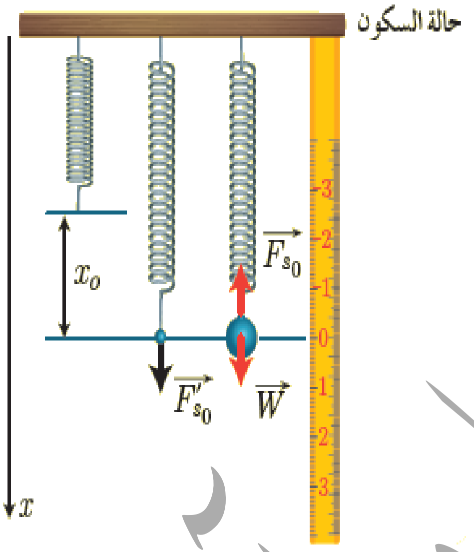
$$\bar{x} = X_{max}.\cos(\omega_0 t+\overline{\varphi})$$

لذلك تُسمّى الحركةُ جَيبيّةً انسحابيّةً (توافقيّة بسيطة).

النوّاس المرِنُ:

سؤال دورة: استنتج علاقة قوة الإرجاع؟

(لاستنتاج علاقة قوة الإرجاع نقوم بدراسية تحريكية لجسم صلب معلق بنابض في حالتي السكون والحركة ونذكر القوى المؤثرة على النابض)



أ-حالة السكون : أ- يستطيلُ النابضُ مسافةَ x_0(استطالة سكونية) بعد تعليق الجسم فيه،

ويتوازنُ الجسمُ :

أ- القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم : ١- قوّة ثِقله $\vec{w}$:

٢ - قوّة توتّر النابض وبما أنّ الجسم ساكن $\overrightarrow{F_{s0}}$

$$F_{s0} = kx_0$$

ب-نطبق شرط التوازن السكوني في الحركة الإنسحابية (نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي)

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{w} + \overrightarrow{F_{s0}} = \vec{0}$$

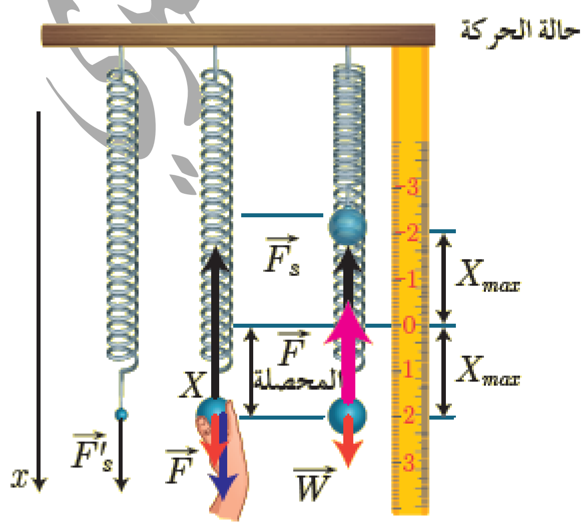
بالإسقاط على محورٍ شاقوليٍّ موجّهٍ نحوَ الأسفل:

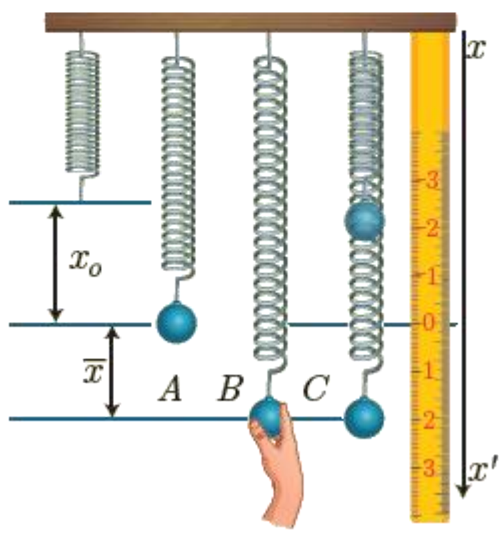
$$w - F_{s0} = 0$$

$$w = F_{s0}$$

تؤثّر في النابضِ القوّة $\overrightarrow{F_{s0}'}$ التي تسبّبُ له الاستطالة x_0 إذْ: $F_{s0} = F_{s0}' = w = kx_0$

ب- حالة الحركة:





أ-القوى الخارجيّةُ المؤثّرةُ في مركز عطالة الجسم: ١- قوّة ثقِله الثابتة $\vec{w}$: $w = kx_0$

٢ - قوّة توتّر النابض $\vec{F_s}$ في حالة الحركة: $F_s = k(\bar{x} + x_0)$

تؤثّر في النابضِ القوّة $\vec{F_s'}$ التي تسبّبُ له الاستطالة $(\bar{x} + x_0)$ إذْ:

$$F_s = F_s' = k(\bar{x} + x_0)$$

ب-نطبق قانون نيوتن الثاني (القانون الأساسي في التحريك الإنسحابي)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \Longrightarrow \vec{w} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محورٍ شاقوليٍّ موجّهٍ نحوَ الأسفل: $w - F_s = m\bar{a}$

نعوض علاقة w و F_s : $kx_0 - k(\bar{x} + x_0) = m\bar{a}$

$$kx_0 - k\bar{x} - kx_0 = m\bar{a}$$

بالاختصار نجد أن: $-k\bar{x} = m\bar{a}$

بالمقارنة مع قانون نيوتن: $\bar{F} = m\bar{a}$

نجد أن : $\Longrightarrow \boxed{\bar{F} = -k\bar{x}}$

نتيجة :إنّ محصلّة القوى الخارجيّة المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كلّ لحظةٍ هي قوّة إرجاع لأنّها تُعيدُ الجسمَ إلى مركزِ الاهتزازِ دوماً، وهي تتناسبُ طرداً مع المطال $\bar{x}$ وتعاكسُه بالإشارة.

سؤال دورة :يتغيّرُ مطالُ الجسم (زيادةً ونقصاناً) بمرورِ الزمن إذْ يتحرّكُ الجسمُ بين موضعين متناظرَين بالنسبة إلى مركز الاهتزاز،انطلاقاً من العلاقة $m\bar{a} = -k\bar{x}$ فما طبيعةُ هذه الحركة؟ استنتج علاقة الدور الخاص؟

$$m\bar{a} = -k\bar{x} \qquad \Longrightarrow \bar{a} = \frac{-k}{m}\bar{x}$$

$$\bar{a} = (\bar{x})''_t \quad \Longrightarrow (\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

وهي معادلةٌ تفاضليّةٌمن المرتبة الثانية تقبلُ حلاًّجيبياً من الشكل: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقّقِ من صحّة الحلّ نشتقّ تابع المطال مرّتين بالنسبة للزّمن نجد:

$$(\bar{x})'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

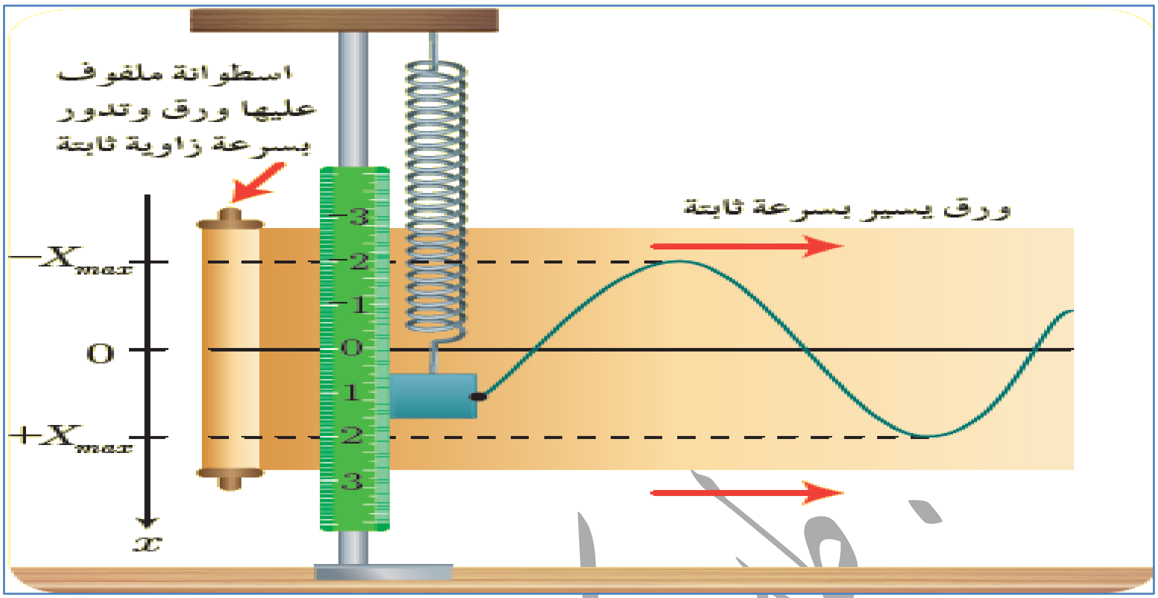
$$(\bar{x})''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 . X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 . \bar{x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجدأن :

وهذا محقّقٌ لأنّ k , m موجبان.

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0}$$



نتيجة: إنّ حركة النوّاس المرنِ هي حركة جيبيّة انسحابيّة (هزازة توافقيّة بسيطة) الشكل العام للتابع الزمنيّ للمطال (الموضع) يُعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$\bar{x}$: المطالُ أو(موضعُ الجسم)في اللحظة t ويقدّرُ بالمتر (m) .

X_{max} : سعةُ الحركة وتقدّرُ بالمتر (m).

ω_0 : النبض الخاص للحركة ويقدّرُ $rad.s^{-1}$.

$\bar{\varphi}$: الطورُ الابتدائيُّ في اللحظة $t = 0$ ويقدّرُ بالراديان(rad) .

$(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: طورُ الحركةِ في اللحظة t .

ندعو كلاًّ من $\bar{\varphi}$ ، X_{max} ، ω_0 ثوابتَ الحركة.

استنتاجُ علاقةِ الدّورِ الخاصِّ للنوّاس المرن:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالمساواة بين (1)و(2) نجد أن :

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

وهي علاقةُ الدّورِ الخاصِّ للنوّاس المرنِ غيرِ المُتخامدِ. من العلاقةِ السّابقةِ أستنتجُ أنّ الدورَ الخاصَّ:١- لا يتعلّقُ بسعةِ الاهتزاز X_{max} .

٢- يتناسبُ طرداً مع الجذرِ التربيعيِّ لكتلةِ الجسم المهتزّ m .

٣- يتناسبُ عكساً مع الجذرِ التربيعيِّ لثابتِ صلابةِ النابض k .

توابعُ حركةِ النوّاس المرنِ

سؤال دورة: الشكلُ العامُّ للتابعِ الزمنيِّ للمطال: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
ما شكلُ هذا التابعِ بفرضِ أنّ الجسمَ كان في مطاله الأعظميّ الموجبِ $\bar{x} = +X_{max} / t = 0$ ؟

الحل: نعوض الشروط $\bar{x} = +X_{max} \quad / t = 0$ في التابع

$$X_{max} = X_{max}\cos(0 + \bar{\varphi}) \Longrightarrow X_{max} = X_{max}\cos(\bar{\varphi})$$

$$\Longrightarrow \cos(\bar{\varphi}) = 1 \Longrightarrow \varphi = 0rad$$

نعوض في التابع : $\boxed{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t)}$ وهو الشكل المختزل لتابع

من أجل رسم تغير المطال بدلالة الزمن لدينا $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ نعوض في الشكل المختزل

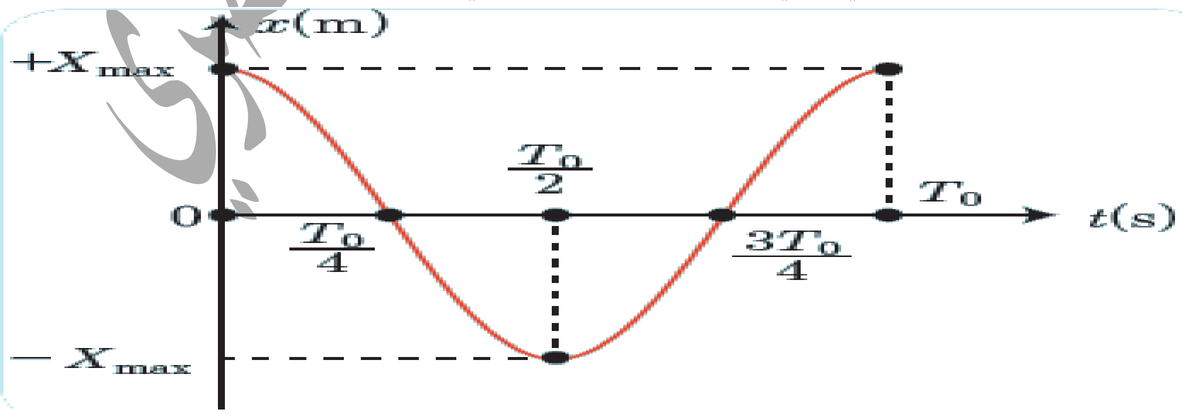
$\bar{x} = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ نعوض قيم مختلفة لزمن ونوجد المطال

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$	$+1$	0	-1	0	$+1$
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

نجد أن: **المطالُ أعظميّ(طويلة)في الموضعين الطرفيّين** $x = |\pm X_{max}|$.

المطالُ معدومٌ في مركز الاهتزاز $x = 0$.

بتحديد هذه النقاط على منحني بياني نحصل على الشكل التالي:



٢- تابعُ السرعة:

سؤال دورة: انطلاقاً من تابع المطال : $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t)$ استنتج تابع السرعة وبين متى يكون أعظمي ومتى يكون معدوم وارسم تغير السرعة بدلالة تغير الزمن ؟

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$\boldsymbol{\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)}$$

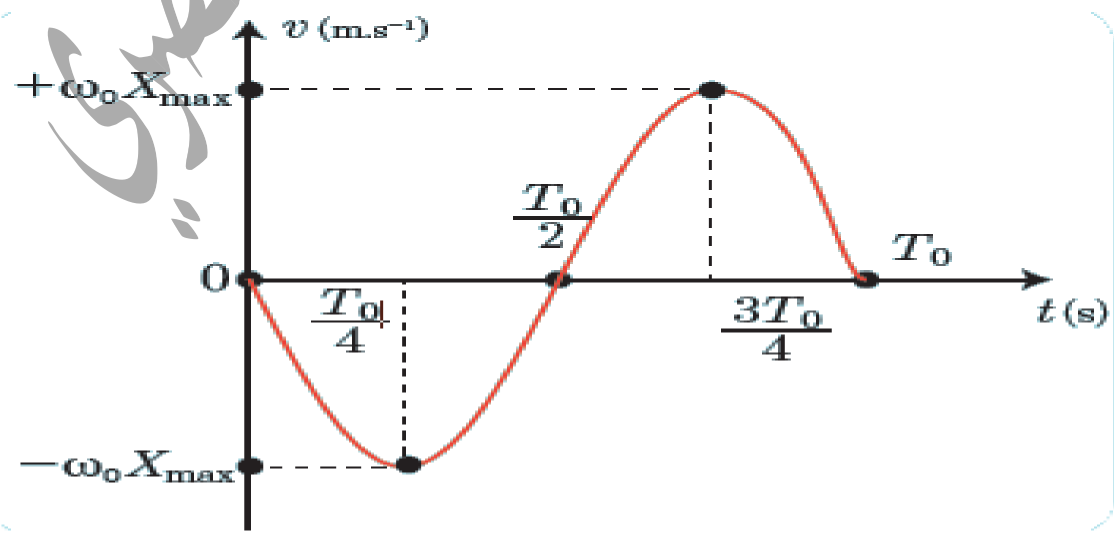
من أجل رسم تغير المطال بدلالة الزمن لدينا $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ نعوض في التابع.

$\boldsymbol{\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\frac{2\pi}{T_0}t)}$ نعوض قيم مختلفة لزمن في التابع

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$	0	$+1$	0	-1	0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

<u>السرعة أعظميّة(طويلة)</u> $v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$ لحظة المرور في مركز الاهتزاز.

<u>السرعةُ معدومةٌ</u> $v = 0$ لحظة المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيّين)



٣-تابعُ التسارع:

سؤال دورة: انطلاقاً من تابع المطال: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t)$ استنتج تابع التسارع وبين متى يكون أعظمي ومتى يكون معدوم وارسم تغير التسارع بدلالة تغير الزمن ؟

$$\bar{a} = (\bar{x})''_t$$

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$$

$$\bar{a} = (\bar{x})''_t = -\omega_0{}^2 . X_{max}\cos(\omega_0 t)$$

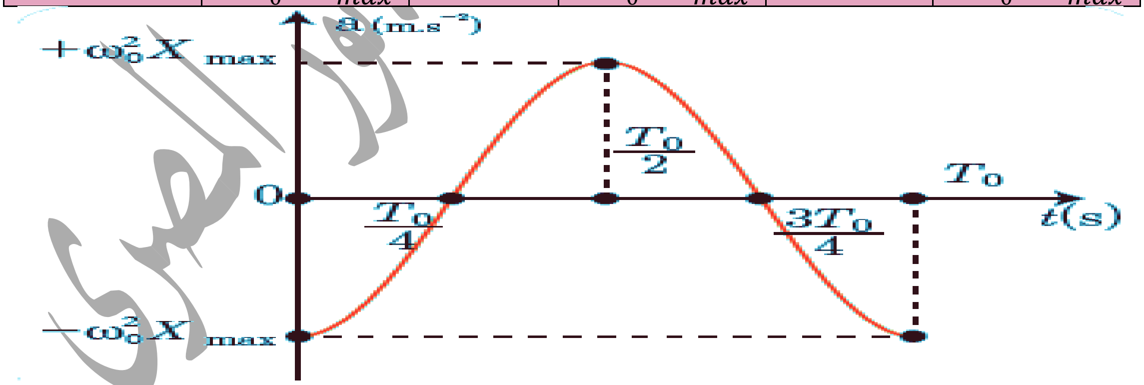
يكون تابع التسارع بدلالة المطال : $\boldsymbol{\bar{a} = -\omega_0{}^2 . \bar{x}}$

$$\boldsymbol{\bar{a} = -\omega_0{}^2 . X_{max}\cos(\omega_0 t)}$$

من أجل رسم تغير المطال بدلالة الزمن لدينا $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ نعوض في التابع.

نعوض قيم مختلفة لزمن في التابع $\bar{a} = -\omega_0{}^2 . X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$	$+1$	0	-1	0	$+1$
a	$-\omega_0{}^2 . X_{max}$	0	$+\omega_0{}^2 . X_{max}$	0	$-\omega_0{}^2 . X_{max}$



التسارع أعظميّ (طويلة) $a_{max} = |\pm\omega_0{}^2 X_{max}|$ **عند المرور في المطالين الأعظمين (الموضعين الطرفيّين).**

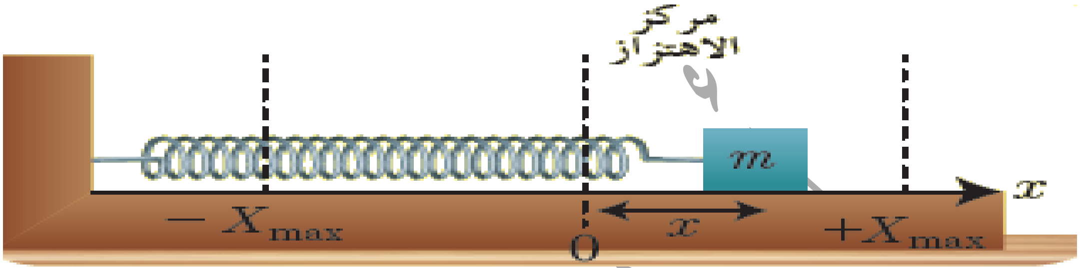
التسارع معدومٌ $a = 0$ **عند المرور في مركز الاهتزاز.**

التسارعُ غيرُ ثابتٍ تتغيّرُ قيمتُه بتغيّر المطال.

الطاقةُ في الحركةِ التوافقيّةِ البسيطة:

سؤال دورة :استنتج علاقة الطاقة الميكانيكيّة(الكلية) للنوّاس المرنِ (هزازة توافقية بسيطة)؟

نثبّت إلى بداية ساق أفقية ملساء طرف نابض مرن ونثبّت إلى نهايته الثانية جسماً صلباً كتلته ونعدّ مركز عطالة الجسم وهو ساكن مبدأ للفواصل ،نزيح الجسم عن وضع توازنه ونتركه يهتز إلى جانبي موضع توازنه على طول قطعة مستقيمة لنشكّل بذلك نواساً مرناً غير متخامد



الحل: إن الطاقةُ الميكانيكيّة للنوّاس المرنِ هي مجموعُ الطاقتين: الكامنة والحركيّة

$$E_{total} = E_p + E_k \text{ ……………………… } (*)$$

١-نوجد E_p :

$$E_P = \frac{1}{2}k.x^2$$

تابع المطال

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نربع التابع

$$x^2 = X_{max}^2.\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نعوض في E_p

$$\boldsymbol{E_P = \frac{1}{2}kX_{max}^2.\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \text{ ………………………… } (1)}$$

٢-نوجد E_k :

$$E_k = \frac{1}{2}m.v^2$$

تابع السرعة

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نربع

$$v^2 = \omega_0{}^2.X_{max}^2.\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نعوض في E_k

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2.X_{max}^2.\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لدينا

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow \omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_0{}^2.m = k}$$

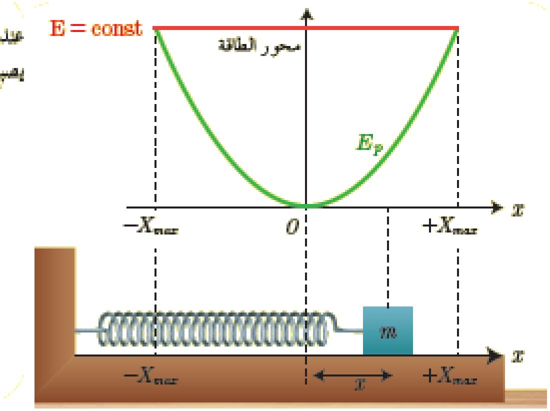
$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}k.X_{max}^2.\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \text{ ………………………… } (2)}$$

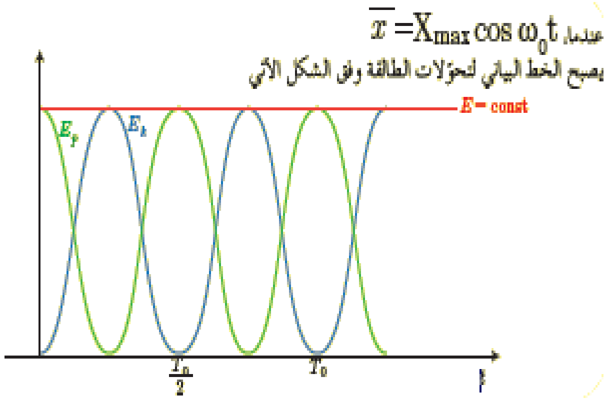
نعوض (1)و(2) في (*)

$$E_{total} = \frac{1}{2}kX_{max}^2.\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}k.X_{max}^2.\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{total} = \frac{1}{2}kX_{max}^2.[\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})]$$

$$E_{total} = \frac{1}{2}kX_{max}^2.[1] \Longrightarrow \boldsymbol{E_{total} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = const}$$





نتائج: ١- تمثل الطاقة الكامنة قطع مكافئ ذروته في مركز الاهتزاز .

٢- تمثل الطاقة الكلية بمستقيم يوازي محور المطال.

٣- تكون الطاقة الكامنة عظمى في المطالين الأعظميين(الموضعين الطرفيّين).

٤- تكون الطاقة الكامنة معدومة في مركز الاهتزاز.

٥- تكون الطاقة الحركية عظمى في مركز الاهتزاز.

٦- تكون الطاقة الحركية معدومة في المطالين الأعظميين(الموضعين الطرفيّين).

٧- كلما اقتربنا نحو مركز الاهتزاز تنقص الطاقة الكامنة وتزداد الطاقة الحركية .

كلما اقتربنا نحو الوضعين الطرفين تزداد الطاقة الكامنة وتنقص الطاقة الحركية .

٨- أي زيادة في أحد الطاقتين هو نفسه مقدار نقص في الطاقة الأخرى

$$E_{total} = E_p + E_k = const$$

تطبيق: نوّاس مرنٌ أفقيٌّ مؤلّفٌ من جسمٍ ونابضٍ مرنٍ تابعُه الزمنيُ $x = 0.1\cos(\pi t + \pi)$

المطلوب: 1.حدّدْ ثوابتَ الحركة لهذا النوّاس. 2.احسبْ دورَ T_0

3.حدد موضع المتحرّك(الجسم)في لحظة بدء الزمن.

الحل: ١-

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = 0.1\cos(\pi t + \pi)$$

بمقارنة الثوابت نجد أن		
$\varphi = \pi(rad)$	$\omega_0 = \pi\ (rad.s^{-1})$	$X_{max} = 0.1\ (m)$

٢- $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad \text{sec}$$

٣- في بدء الزمن $t = 0$ نعوض في التابع

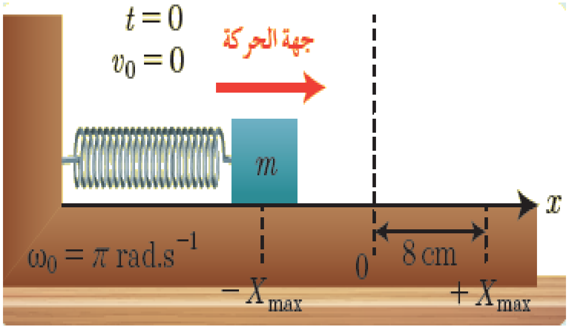
$$x = 0.1\cos(\pi(0) + \pi) \Longrightarrow x = 0.1\cos(\pi)$$

$$\Longrightarrow x = 0.1(-1) \Longrightarrow x = -0.1\ (m)$$

أي المتحرك في مطاله الأعظمي السالب في لحظة بدء الزمن.

أولا :اختر الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

١- تابعُ المطال الذي يصفُ حركة الهزّازة الجيبيّة في الشكل المجاور هو:



a. $x = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

b. $x = 8\cos(\pi t - \pi)$

c. $x = 0.008\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

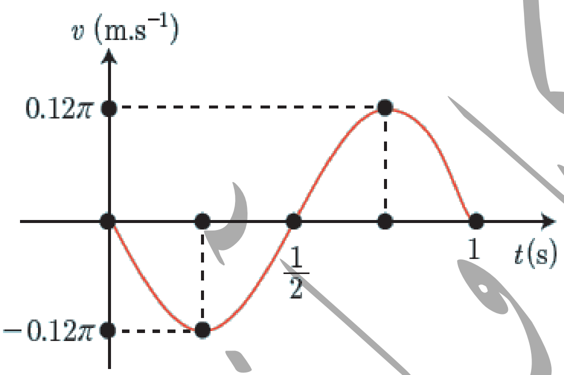
d. $x = 0.8\cos(\pi t)$

الحل: نلاحظ من الشكل أن $X_{max} = 8cm \Longrightarrow X_{max} = 8 \times 10^{-2} = 0.08m$

الإجابة

a. $x = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

٢- الرسمُ البيانيُّ جانباً يمثّلُ تغيّرات السرعةِ مع الزمن لجسم مرتبطٍ بنابضٍ مرن يتحرّكُ بحركةٍ توافقيّةٍ بسيطة، فيكونُ التابعُ الزمنيُّ للسرعة هو:



a. $v = 0.06\,\pi\cos(\pi t)$

b. $v = -0.06\,\pi\cos(2\pi t)$

c. $v = -0.12\,\pi\sin(2\pi t)$

d. $v = 0.12\,\pi\sin(\pi t)$

الحل: من الشكل نلاحظ أن $T_0 = 1sec$ نحسب w_0: $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ \ rad.s^{-1}$

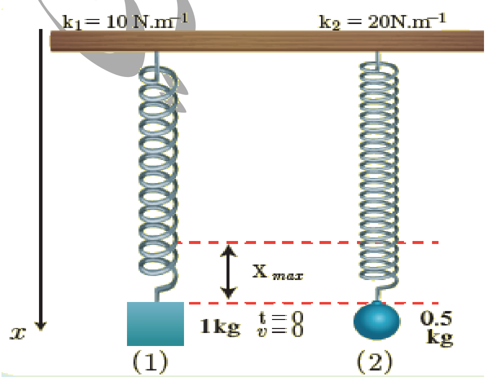
من الشكل نلاحظ أيضاً: $\omega_0 X_{max} = 0.12\pi\ \ m.s^{-1}$

الإجابة:

$$\overline{v} = (\overline{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$$

$$\Longrightarrow\ v = -0.12\,\pi\sin(2\pi t)\ \ .c$$

٣- يمثّلُ الشكلُ المجاورُ هزّازتان توافقيّتان (١) و(٢) تنطلقان من الموضع نفسِه، وفي اللحظةِ نفسها، فإنّهما بعد مضيّ $3\ s$ من بدء حركتِهما:



a.تلتقيان في مركز الاهتزاز.

b.تلتقيان في الموضع$(+X_{max})$.

c.لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى$(+X_{max})$ ومطالَ الثانية$(-X_{max})$.

d.لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى$(-X_{max})$ ومطالَ الثانية$(+X_{max})$

الحل: سوف نوجد المطال لتابعين x_1 و x_2 بعد زمن $3\,s$ ومنه نستطيع معرفة الجواب الصحيح

$$\overline{x_1} = X_{max}\cos(\omega_{0_1}.t)$$

نحسب ω_{0_1} المعطيات من الشكل: $\omega_{0_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = \sqrt{10} = \pi\ rad.s^{-1}$

نعوض في التابع: $\overline{x_1} = X_{max}\cos(\omega_{0_1}.t) \implies \overline{x_1} = X_{max}\cos(\pi.3)$

(حيث $\cos(3\pi) = -1$) $\implies \overline{x_1} = X_{max}\cos(3\pi) \implies \overline{x_1} = X_{max}(-1) = -X_{max}$

بنفس الطريقة نوجد x_2: $\overline{x_2} = X_{max}\cos(\omega_{0_2}.t)$

نحسب ω_{0_2}: $\omega_{0_2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{20}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

نعوض في التابع: $\overline{x_2} = X_{max}\cos(\omega_{0_2}.t) \implies \overline{x_1} = X_{max}\cos(2\pi.3)$

(حيث: $\cos(6\pi) = +1$) $\implies \overline{x_2} = X_{max}\cos(6\pi) \implies \overline{x_2} = X_{max}(+1) = +X_{max}$

الإجابة:

d. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $(-X_{max})$ ومطال الثانية $(+X_{max})$

ثانياً: أجبْ عن الأسئلةِ الآتيةِ:

1. أثبتْ صحّةَ العلاقة: $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقيّة البسيطة.

الحل: من الطاقة الحركية: $E_{total} = E_p + E_k \implies E_k = E_{total} - E_p$

$$\frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}k.x^2 \implies m.v^2 = kX_{max}^2 - k.x^2$$

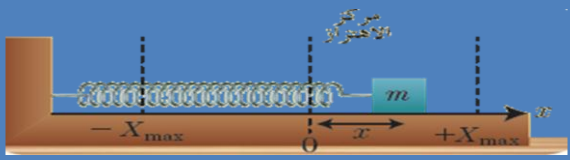
$$\implies m.v^2 = k(X_{max}^2 - x^2) \implies v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - x^2)$$

لدينا $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$

$$\implies v^2 = {\omega_0}^2(X_{max}^2 - x^2) \implies v = \omega_0\sqrt{(X_{max}^2 - x^2)}$$

وهو المطلوب.

2 . نابضٌ مرنٌ مهملُ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدة ثابتُ صلابتِه k ، مثبّتٌ من أحدِ طرفيه، ويُربط بطرفه الآخرِ جسمٌ صُلبٌ كتلتُه m



على سطحٍ أفقيٍّ أملسٍ، كما في الشكل المجاور، نشدّ الجسمَ مسافةً أفقيّةً مناسبةً، ونتركُهُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّة .المطلوب

a. ادرسْ حركة الجسم، واستنتج التابع الزمنيَّ للمطال.

حل:

١- جملة المقارنة :خارجية ٢- الجملة المدروسة :الجسم الصلب

٣- القوى الخارجيّةُ المؤثّرةُ في مركز عطالة الجسم:

أ- قوّة ثقِله الثابتة $\vec{w}$. ب- قوة رد فعل السطح الأفقي $\vec{R}$.

ج - قوّة توتّر النابض $\vec{F_s}$. $F_s = k\bar{x}$

٤- نطبق قانون نيوتن الثاني (العلاقة الأساسية في التحريك الأنسحابي)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \vec{R} + \vec{w} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محورٍ أفقي موجّهٍ نحوَ الحركة: $0 + 0 - F_s = m\bar{a} \Longrightarrow F_s = m\bar{a}$

تؤثّر في النابضِ القوّة $\vec{F_s'}$ التي تسبّبُ له الاستطالة $\bar{x}$)إذْ $F_s = F_s' = k\bar{x}$

$$\Longrightarrow -k\bar{x} = m\bar{a} \qquad \Longrightarrow \bar{a} = \frac{-k}{m}\bar{x}$$

$$\bar{a}=(\bar{x})''_t \quad \Longrightarrow (\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وهي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبلُ حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقّقِ من صحّة الحلّ نشتقّ تابع المطال مرّتين بالنسبة للزّمن نجد:

$$(\bar{x})'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = \bar{a} = -\omega_0{}^2 . X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0{}^2 . \bar{x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجدأن :

$$\boldsymbol{\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0}$$

وهذا محقّقٌ لأنّ k , m موجبان.

نتيجة:: إنّ حركة النّواس المرنِ هي حركة جيبيّة انسحابيّة(هزازة توافقيّة بسيطة) الشكل العام للتابع الزمنيّ للمطال (الموضع)يُعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

b . استنتجْ علاقةَ الطاقة الحركيّة للجسم بدلالة X_{max} في كلٍّ من الموضعين: A وB

$x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ و $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ وماذا تستنتج ؟

الحلb : $E_k = ?$ عند $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ و $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$

$$E_{total} = E_p + E_k \Longrightarrow E_k = E_{total} - E_p \Longrightarrow E_k = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 - \frac{1}{2}k.x^2$$

١- نعوض $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ في العلاقة:

$$\Longrightarrow E_{kA} = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 - \frac{1}{2}k.\left(-\frac{X_{max}}{2}\right)^2 \Longrightarrow E_{kA} = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 - \frac{1}{2}k\frac{X_{max}^2}{4}$$

$$\Longrightarrow E_{kA} = \frac{1}{2}k.X_{max}^2\left[1-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}k.X_{max}^2\left[\frac{3}{4}\right] = \frac{3}{8}k.X_{max}^2 = \frac{3}{4}E$$

هنا الطاقة الحركية لاتساوي الطاقة الكامنة لأن الحركية ثلاث أرباع الكلية والكامنة ربع الكلية

٢- نعوض $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ في العلاقة:

$$\Longrightarrow E_{kB} = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 - \frac{1}{2}k.\left(+\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 \Longrightarrow E_{kB} = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 - \frac{1}{2}k\frac{X_{max}^2}{2}$$

$$\Longrightarrow E_{kB} = \frac{1}{2}k.X_{max}^2\left[1-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}k.X_{max}^2\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}k.X_{max}^2 = \frac{1}{2}E$$

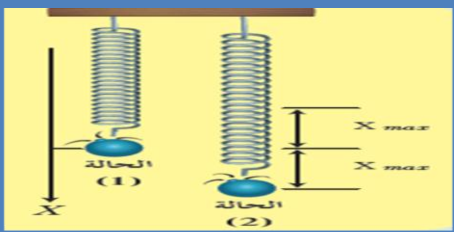
هنا الطاقة الحركية تساوي الطاقة الكامنة $E_{kB} = \frac{1}{2}E$ ، $E_{pB} = \frac{1}{2}E$

نستنتج أن: الطاقة الحركية للجسم تنقص بازدياد مطاله وبالتالي تزداد طاقته الكامنة.

3-جسمٌ معلّقٌ بنابضٍ مرن شاقوليٍّ حلقاتُهُ متباعدةٌ يهتزُّ بدوره الخاصِّ ،ما نوعُ حركةِ الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتيين، ولماذا؟

a.مركز الاهتزاز، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب؟

b.المطال الأعظميّ الموجب؟



<u>الحل</u>: **a.** بعد انفصال الجسم عن النّابض في مركز الاهتزاز وهو يتحرّك بالاتّجاه السّالب:

تكون القوى الخارجيّة المؤثّرة فيه هي قوّة ثقله فقط $\qquad \sum \vec{F} = m\vec{a}$

حيث: $\qquad \Longrightarrow \vec{w} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$

ولكنّه اكتسب سرعة ابتدائيّة نحو الأعلى هي $(-v_{max})$ بالتّالي تُقسم حركته إلى مرحلتين:

<u>**الأولى:**</u> <u>حركة مستقيمة متباطئة بانتظام</u> التّسارع فيها $g = -10\ m.s^{-2}$ إلى أن يصل إلى الموضع $-X_{max}$ فتكون طاقته الحركيّة عند هذا الموضع قد نفذت.

<u>**الثّانية:**</u> <u>سقوط حرّ</u> بدءاً من الموضع $(-X_{max}$ حركة مستقيمة متسارعة بانتظام السّرعة الابتدائيّة فيها معدومة والتّسارع هو $g = +10\ m.s^{-2}$)

b. بعد انفصال الجسم عن النّابض في المطال الأعظمي الموجب تكون القوى الخارجيّة المؤثّرة فيه هي قوّة ثقله فقط وسرعته عندئذٍ معدومة بالتّالي تكون <u>حركته سقوط حرّ</u>(حركة مستقيمة متسارعة بانتظام السّرعة الابتدائيّة فيها معدومة والتّسارع هو $g = +10\ m.s^{-2}$)

ثالثاً: حُلَّ المسائلَ الآتيةَ(في جميع المسائل $(4\pi = 12.5\ ,\ \pi^2 = 10\ ,\ g = 10 mS^{-2}$

المسألة الأولى: تتألّفُ هزّازةٌ جيبيّةٌ انسحابية من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابتِه $k = 10\ N.m^{-1}$ **، مثبّتٌ من أحد طرفيه، ويحملُ في طرفه الآخر جسماً كتلتُه** m **، ويُعطى التابعُ الزمنيُّ لمطال حركتها بالعلاقة.** $x = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

المطلوب: 1. أوجدْ قيمَ ثوابت الحركة ودورَها الخاصّ.

2.احسبْ كتلة الجسم m**.**

3.احسب قيمةَ السّرعة في موضعٍ مطالُه $x = 5\ cm$ **، والجسمُ يتحرّكُ بالاتّجاه الموجبِ للمحور.**

الحل: ١-

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

بمقارنة الثوابت نجد أن		
$X_{max} = 0.1\ (m)$	$\omega_0 = \pi\ (rad.s^{-1})$	$\varphi = \frac{\pi}{2}(rad)$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ \ sec$$

٢- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow$ نربع $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow m = \frac{k}{\omega_0{}^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10} = 1\ kg$

٣- $x = 5 \times 10^{-2} = 0.05\ m \qquad X_{max} = 0.1m$

من الطاقة الحركية : $E_{total} = E_p + E_k \Longrightarrow E_k = E_{total} - E_p$

$$\frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}k.x^2 \Longrightarrow m.v^2 = kX_{max}^2 - k.x^2$$

$$\Longrightarrow m.v^2 = k(X_{max}^2 - x^2) \Longrightarrow v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - x^2)$$

لدينا	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$

$$\Longrightarrow v^2 = \omega_0{}^2(X_{max}^2 - x^2) \Longrightarrow v = \omega_0\sqrt{(X_{max}^2 - x^2)}$$

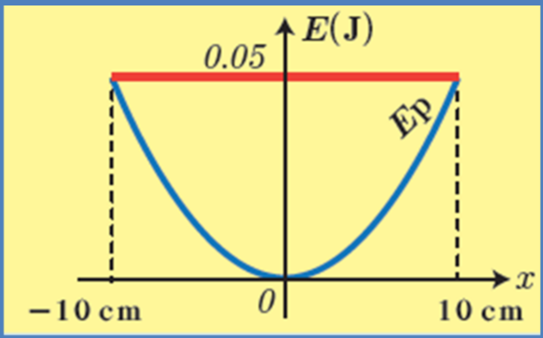
$$v = \pi\sqrt{(0.1)^2 - (0.05)^2} = \pi\sqrt{0.01 - 0.0025} = \pi\sqrt{0.0075}$$

$$v = \pi\sqrt{3 \times 25 \times 10^{-4}} = \mp 5\sqrt{3}\pi \times 10^{-2} m.s^{-1}$$

وبما أنّ الجسم يتحرّك بالاتّجاه الموجب للمحور تكون السّرعة

$v = +5\sqrt{3}\pi \times 10^{-2} m.s^{-1}$ وهو المطلوب

المسألة الثانية: يوضّحُ الرسمُ البيانيُّ المجاورُ تغيّراتِ الطاقةِ الكامنة المرونية بتغيّرِ الموضعِ لهزّازةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ مؤلّفةٍ من نابضٍ مرنٍ حلقاتُهُ متباعدةٌ ثابتُ صلابته k معلّقٌ به جسمٌ كتلتُهُ 0.4 kg المطلوب:



1. استنتجْ قيمةَ ثابت صلابة النابض k .
2. احسبْ الدورَ الخاصّ للحركة .
3. احسبْ قيمةَ السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز

المعطيات $E = 0.05\,J$ و $X_{max} = 10 \times 10^{-2} = 10^{-1}\,m$ و m=0.4 kg

الحل : 1 −

$$E = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{X_{max}^2} = \frac{2(5\times10^{-2})}{(10^{-1})^2} = \frac{10\times10^{-2}}{10^{-2}} = 10\,N.m^{-1}$$

-2

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\times10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{4\times10^{-2}} = 2\pi(2\times10^{-1})$$

$$T_0 = 4\pi\times10^{-1} = 12.5\times10^{-1} = 1.25\text{ s}$$

-3 عند المرور في مركز الاهتزاز تكون السرعة عظمى (طويلة)

$$v_{max} = |\pm\omega_0.X_{max}| \Rightarrow v_{max} = \omega_0.X_{max}$$

نحسب ω_0 : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4\pi\times10^{-1}} = \frac{10}{2} = 5\ rad..s^{-1}$

$$\Rightarrow v_{max} = 5\times10^{-1} = 0.5\ \ m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة: نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطة من جسم كتلتُهُ $m = 1$ kg معلّقٌ بطرفِ نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ فينجزُ 10 هزّاتٍ في 8 s ، ويرسمُ في أثناءِ حركتِه قطعةً مستقيمةً طولُها 24 cm . المطلوب:

١-استنتجْ قيمةَ الاستطالة السكونيّة لهذا النابض، ثمّ احسبْ قيمتها.

٢-احسبْ قيمةَ السرعة العظمى(طويلة).

٣-احسبْ قيمةَ التسارع في مطال $x = 10$ cm .

٤-احسبِ الطاقةَ الكامنةَ المرونيّة في موضع مطاله $x = -4$ cm ، واحسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ.

المعطيات: $m = 1$ kg , عدد الهزات $n = 10$ ، زمن الهزات $t = 8s$

$T_0 = \frac{t}{n} = \frac{8}{10} = 0.8 = 8\times10^{-1}\ \ s$ ، قطعة مستقيمة $2X_{max} = 24\times10^{-2}m$

$X_{max} = 12\times10^{-2}m$

الحل: ١- نطبق شرط التوازن السكوني في الحركة الأنسحابية :

$$\sum\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{w} + \overrightarrow{F_{s0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محورٍ شاقوليٍّ موجّهٍ نحوَ الأسفل:

$$w - F_{s0} = 0 \Rightarrow w = F_{s0} = F_{s0}{}' \Rightarrow m.g = k.x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{m}{k}.g$$

$F_{s0}{}'$: القوة التي تشد النابض نحو الأسفل باستطالة x_0

نوجد $\frac{m}{k}$ من T_0 : $\frac{m}{k} = \frac{T_0{}^2}{4\pi^2}$ $\Leftarrow$ $T_0{}^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$ نربع $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{T_0{}^2}{4\pi^2}.g = \frac{(8\times10^{-1})^2}{40}\times 10 = \frac{64\times10^{-2}}{4} = 16\times10^{-2} = 0.16 \quad m$$

٢- السرعة عظمى (طويلة)

$$v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}| \Rightarrow v_{max} = \omega_0 X_{max}$$

نحسب ω_0 : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{8\times10^{-1}} = \frac{10\pi}{4} = 2.5\pi \ rad..s^{-1}$

$$\Rightarrow v_{max} = \frac{10\pi}{4}\times 12\times10^{-2} = 3\pi\times10^{-1} = 0.3\pi \ m.s^{-1}$$

٣-حساب قيمة التّسارع a في مطال: $(x=10\ cm \Rightarrow x=0.1\ m)$ -

$$a=-\omega_0{}^2.x = -(2.5\pi)^2\times0.1 = -6.25\times10\times0.1 = -6.25\ m.s^{-2}$$

٤-حساب الطّاقة الكامنة المرونيّة في موضع مطاله$(x=-4\ cm \Rightarrow x=-4\times10^{-2}\ m)$ -

$$E_P = \frac{1}{2}k.x^2$$

نحسب k : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$ نربع $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0{}^2.m$

$$\Rightarrow k = (2.5\pi)^2\times 1 = 6.25\times\pi^2 = 6.25\times10 = 62.5\ N.m^{-1}$$

$$E_P = \frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}62.5\,(-4\times10^{-2})^2 = \frac{1}{2}625\times10^{-1}\times16\times10^{-4}$$

$$E_P = 5\times10^{-2}\ J$$

ولحساب الطّاقة الحركيّة يجب حساب الطّاقة الميكانيكيّة:

$$E_{total} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}62.5\,(12\times10^{-2})^2 = \frac{1}{2}\times62.5\times144\times10^{-4}$$

$$E_{total} = 45\times10^{-2}\ J$$

$$E_{total} = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E_{total} - E_p = 45\times10^{-2} - 5\times10^{-2}$$

$$E_k = 40\times10^{-2}\ J$$

المسألة الرابعة: تهتزّ كرة معدنيّة كتلتُها m بمرونةِ نابضٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 16\ N.m^{-1}$ بحركة توافقيّة بسيطة دورُها الخاصّ 1 s ، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1m$، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالُها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرّك بالاتّجاه السالب 1.استنتجِ التابعَ الزمنيَّ لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العامّ.

2.عيّنْ لحظتَي المرور الأوّلِ والثالثِ للكرة في موضع التوازن

3-احسبْ شدّةَ قوّة الإرجاع في مطال 0.1m

4-احسب كتلة الجسم

المعطيات: $k = 16\ N.m^{-1}$ ، $X_{max} = 0.1m$ ، $x = \frac{X_{max}}{2}$ ، $T_0 = 1s$

مبدأ الزمن $t = 0$ ، وهي تتحرّك بالاتّجاه السالب $v < 0$ شروط البدء

الحل: ١- تابع المطال شكله العام هو $x=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

الثوابت في التابع هي (φ, X_{max}, w_0) نوجد هذه المجاهيل:

المجهول الأول X_{max} من نص المسألة	$X_{max}=0.1\ m$
المجهول الثاني ω_0 من علاقة الدور لدينا	$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{1}=2\pi\ \text{rad.sec}^{-1}$

المجهول الثالث φ: من شروط البدء نعوض الشروط في التابع لإيجاد φ

$$\frac{X_{max}}{2}=X_{max}\cos(\varphi)\Longrightarrow\cos(\varphi)=\frac{1}{2}$$

لدينا حلان **الحل الأول:** $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ **rad** **الحل الثاني:** $\varphi=\frac{\pi}{3}$ **rad**

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة في اللحظة $t=0$ ، $v=-w_0\ X_{max}\sin(\varphi)$

نعوض الحل الأول $\varphi=\frac{\pi}{3}$ **rad** في تابع v : سالب و هو المقبول $v=-w_0\ X_{max}\sin(\frac{\pi}{3})\Longrightarrow v=-w_0\ X_{max}(\frac{\sqrt{3}}{2})<0$
نعوض الحل الثاني $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ **rad** في تابع v : $v=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{5\pi}{3})\Longrightarrow v=-\omega_0 X_{max}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\omega_0 X_{max}(\frac{\sqrt{3}}{2})>0$ الجواب هنا موجب مرفوض
الحل المقبول هو: $\varphi=\frac{\pi}{3}$ **rad**

نعوض في التابع: $x=0.1\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})$ **(m)**

٢- زمن المرور في مركز الاهتزاز: $x=0$

$$x=0.1\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})\Longrightarrow 0=0.1\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})\Longrightarrow\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})=0$$

حسب قاعدة مثلثية: $\cos(A)=0\Longrightarrow A=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$$2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

(مرور أول: $k=0$) : $2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow 2\pi t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\Longrightarrow 2\pi t=\frac{\pi}{6}$

$$\Longrightarrow t=\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}\Longrightarrow t=\frac{1}{12}\quad s$$

(مرور ثالث: $k=2$) : $2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi\Longrightarrow 2\pi t=\frac{\pi}{2}+2\pi-\frac{\pi}{3}$

$$\Longrightarrow 2\pi t=\frac{13\pi}{6}\Longrightarrow t=\frac{\frac{13\pi}{6}}{2\pi}\Longrightarrow t=\frac{13}{12}\quad s$$

٣- حساب شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها($x=+0.1\ m$) -

$$F=-kx=-16\times 0.1=-1.6\text{N}$$

بمأنه شدة قوة إرجاع يجب أن تكون موجبة $F=1.6\ N$

4حساب كتلة الكرةm : من$\boldsymbol{\omega_0}$ أو T_0

$$\boldsymbol{\omega_0}=\sqrt{\frac{k}{m}}\Longrightarrow \text{نربع}\boldsymbol{\omega_0}^2=\frac{k}{m}\Longrightarrow m=\frac{k}{\boldsymbol{\omega_0}^2}=\frac{16}{(2\pi)^2}=\frac{16}{40}=\frac{4}{10}=0.4\ kg$$

وظيفة :أعد حل المسألة عند **نقطة مطالُها**$\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ بنفس المعطيات .

مسألة خارجية: نريدُ قطعَ أسطوانةٍ معدِنيّةٍ باستعمالِ منشارٍ كهربائيٍّ مخصّصٍ لذلك، فإذا فرضنا أنّ حركةَ المنشارِ توافقيّةٌ بسيطةٌ حيثُ يرسمُ المنشارُ أثناءَ حركته قطعةً مستقيمةً طولُها 16 cm ويستغرقُ لقطع تلك المسافة زمناً قدرُه 0.5 s= ($\frac{1}{2}$) وقد بدأ حركتَه في اللحظة $t=0$ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ، وهو في مطاله الأعظميِّ الموجب. المطلوب:

1.أوجدِ التابعَ الزمنيَّ لحركة المنشار انطلاقاً من شكلِه العامِّ.

2.احسبْ قيمةَ سرعةِ المنشارِ لحظةَ مرورِه الأوّلِ في مركز الاهتزاز.

3.إذا افترضْنا أنَّ قطرَ الأسطوانةِ المُراد قطعها 5 cm ويتمّ نشر 0.5mm في كلّ ثانيةٍ من قطرها، فما الزمنُ الازمُ لقطع تلك الأسطوانة كلّها؟

المعطيات: $X_{max}=8\times 10^{-2}m \Longleftarrow$ قطعة مستقيمة $2X_{max}=16\times 10^{-2}m$

زمن القطعة المستقيمة $\frac{T_0}{2}$ (زمن ذهاب فقط) $\frac{T_0}{2}=\frac{1}{2}\Longrightarrow T_0=1\ s$

شروط البدء: $t=0$ و $v=0\Longrightarrow x=X_{max}=8\times 10^{-2}m$ ترك دون سرعة ابتدائية

الحل: تابع المطال شكله العام هو $x=X_{max}\cos(\boldsymbol{\omega_0}t+\boldsymbol{\varphi})$

الثوابت في التابع هي ($\varphi,\ X_{max},w_0$) نوجد هذه المجاهيل:

المجهول الأول X_{max} من نص المسألة	$X_{max}=8\times 10^{-2}\ m$
المجهول الثاني w_0 من علاقة الدور لدينا	$\boldsymbol{\omega_0}=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{1}=2\pi\ \text{rad.sec}^{-1}$

المجهول الثالث φ : من شروط البدء نعوض الشروط في التابع لإيجادφ

$$X_{max}=X_{max}\cos(\varphi)\Longrightarrow\cos(\varphi)=1\Longrightarrow\varphi=0\text{rad}$$

نعوض في التابع: $\boldsymbol{x=8\times 10^{-2}\cos(2\pi t)}\quad \textbf{(m)}$

٣- السرعة لحظة المرور الأول بوضع التوازن $v=-\boldsymbol{\omega_0}X_{max}\sin(w_0.t_1)$

نوجد زمن المرور الأول في مركز الاهتزاز: $x=0$

$$\Longrightarrow x=8\times 10^{-2}\cos(2\pi t)\Longrightarrow 0=8\times 10^{-2}\cos(2\pi t)\Longrightarrow\cos(2\pi t)=0$$

حسب قاعدة مثلثية: $\cos(A)=0\Longrightarrow A=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$$2\pi t=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

(مرور أول: $k=0$) :	$2\pi t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2(2\pi)}=\frac{1}{4}\ s$

نعوض في v : $\quad v=-2\pi\times 8\times 10^{-2}\ \sin(2\pi\frac{1}{4})$

$$\Rightarrow v=-16\pi\times 10^{-2}\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow v=-16\pi\times 10^{-2}\quad m.s^{-1}$$

تدلّ إشارة السّالب إلى أنّ المنشار عند تلك اللّحظة يتّجه بالاتّجاه السّالب لمحور الحركة.

3- حساب الزمن اللازم لقطع تلك الأسطوانة كاملة: عن طريق التناسب

كلّ $1\ s$ يتمّ نشر $0.5\ mm=0.5\times 10^{-3}m$

كل t يتمّ نشر $5\ cm=5\times 10^{-2}m$

$$t=\frac{5\times10^{-2}}{0.5\times10^{-3}}=100s$$

المسألة الأولى عامة: نشكّلُ هزّازةً توافقيّة بسيطة مؤلّفة من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k=10N.m^{-1}$ مثبّتٍ من إحدى نهايتيه إلى نقطةٍ ثابتةٍ، ويحملُ في نهايته الثانية جسماً كتلتُهُ $m=0.1$ kg فإذا علمتَ أنّ مبدأ الزمن لحظةَ مرور الجسم في مركز التوازن، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب بسرعة $v=-3m.s^{-1}$. المطلوب: 1.احسبْ نبضَ الحركة. 2.استنتجِ التابعَ الزمنيَّ لمطال الحركة. 3.احسبْ شدّة قوّة الإرجاع عند مطال $x=3Cm$

المعطيات: $k=10\ N.m^{-1}$ ،	$m=0.1=10^{-1}$ kg
شروط البدء: $v=-3m.s^{-1}<0$ ، مبدأ الزمن $t=0$ لحظةَ مرور الجسم في مركز التوازن $x=0$،	

الحل: ١- $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{10}{10^{-1}}}=\sqrt{100}=10\quad rad.s^{-1}$

٢- تابع المطال شكله العام هو $x=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

الثوابت في التابع هي $(\varphi,\ X_{max},w_0)$ نوجد هذه المجاهيل:

المجهول الأول ω_0 من الطلب الأول:	$\omega_0=10\quad rad.s^{-1}$
المجهول الثاني φ من شروط البدء نعوض الشروط في تابع x و v تابع x : $x=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$ $\Longrightarrow 0=X_{max}\cos(\varphi)$ $\Longrightarrow 0=\cos(\varphi)$	

لدينا حلان	الحل الأول: $\varphi=+\frac{\pi}{2}$ rad	الحل الثاني: $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ rad

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة في اللحظة $t=0$ ، $v=-w_0\ X_{max}\sin(\varphi)$

نعوض الحل الأول $\varphi=\frac{\pi}{2}$ **rad** في تابع v :   سالب وهو المقبول $v=-w_0\ X_{max}\sin(\frac{\pi}{2})\Rightarrow v=-w_0\ X_{max}(1)<0$
نعوض الحل الثاني $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ **rad** في تابع v : $v=-w_0\ X_{max}\sin(-\frac{\pi}{2})\Rightarrow v=-w_0\ X_{max}(-1)=w_0\ X_{max}(1)>0$

الجواب هنا موجب مرفوض
الحل المقبول هو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **rad**

المجهول الثالثX_{max} : من شروط البدء في وضع التوازن تكون السرعة عظمى

$$v_{max} = |-3| = 3m.s^{-1}$$

$$v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}| \Rightarrow v_{max} = \omega_0 X_{max} \Rightarrow X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow X_{max} = 0.3m$$

نعوض في التابع: $x=0.3\cos(10t+\frac{\pi}{2})$ (m)

٣-قوة الأرجاع: $F = -kx = -10 \times 3 \times 10^{-2} = -3N$

شدة قوة الإرجاع (يجب أن تكون موجبة) $F = |-3| = 3N$

المسألة الثانية عامة: تهتزّ نقطة ماديَّة كتلتها 0.5 kg بحركة توافقيَّة بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، شاقوليّ وبدور 4 s وبسعة اهتزاز X_{max}= 8 cm فإذا علمت أنَّ النقطة كانت في موضع مطاله$x = \frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحرِّكة بالاتِّجاه السالب. المطلوب:

1.استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.

2.عيّن لحظتي المرور الأوَّل والثالث في وضع التوازن.

3.عيّن المواضع التي تكون فيها شدَّة محصِّلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، وحدّد موضعاً تنعدم فيه شدَّة هذه المحصِّلة.

4.احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغيَّر هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلَّقة؟

5.احسب الكتلة التي تجعل الدَّور الخاص 1 s .

المعطيات: $m = 0.5\,Kg$ ، $T_0 = 4$ sec , $X_{max} = 8cm \Rightarrow X_{max} = 8 \times 10^{-2}m$
شروط البدء($x = \frac{X_{max}}{2} = 4\times10^{-2}m$, $X_{max} = 8 \times 10^{-2}m$, $t=0$
يتحرك في الاتجاه السالب أي السرعة سالبة$v < 0$)

الحل: ١)إيجاد تابع المطال شكله العام هو $x=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

المجاهيل في التابع هي كالعادة (φ, X_{max} ,ω_0) نوجد هذه المجاهيل:

المجهول الأولX_{max} من نص المسألة	$X_{max} = 8 \times 10^{-2}\,m$
المجهول الثانيω_0 من علاقة الدور	
لدينا	$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$rad.sec^{-1}

المجهول الثالثφ من شروط البدء

$$(\quad v < 0 \quad , \quad t=0 \quad , X_{max} = 8 \times 10^{-2}m \quad ,x = \frac{X_{max}}{2} = 4\times10^{-2}m)$$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}.\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{1}{2}$$

لدينا حلان: الحل الأول: $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad الحل الثاني: $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ rad

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة في اللحظة $t=0$ $\quad v = -\omega_0 X_{max}\sin(\varphi)$

نعوض الحل الأول $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad في تابع v :

الجواب سالب و هو المقبول $v = -\omega_0 X_{max}\sin(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max}(\frac{\sqrt{3}}{2}) < 0$

نعوض الحل الثاني $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ rad في تابع v :

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\frac{5\pi}{3}) \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \omega_0 X_{max}(\frac{\sqrt{3}}{2}) > 0$$

الجواب هنا موجب مرفوض

الحل المقبول هو: $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad

نعوض في التابع: $x = 8\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$ (m)

٢- زمن المرور في مركز الاهتزاز: $x=0$

$$x = 8\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 0 = 8\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) = 0$$

حسب قاعدة مثلثية: $\cos(A) = 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

(مرور أول: $k = 0$) :

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow t = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad s$$

(مرور ثالث: $k = 2$)

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} + 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{13\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{\frac{13\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow t = \frac{2\times13}{6} = \frac{13}{3} \quad s$$

٣-تكون شدة محصلة القوى عظمى في الوضعين الطرفين لأن التسارع يكون أعظمي

تعطى $\sum F = F_{max} = m.a_{max}$ نوجد التسارع الأعظمي

$$a_{max} = |\mp\omega_0^2.X_{max}| = \omega_0^2.X_{max} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 8\times10^{-2} = \frac{10}{4}\times 8\times10^{-2}$$

$$a_{max} = 2\times10^{-1} m.s^{-2}$$

$$F_{max} = \frac{1}{2}2\times10^{-1} = 10^{-1} = 0.1\ N$$

تكون شدة محصلة القوى معدومة عند مرور الجسم من مركز التوازن

$$x = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sum F = ma = 0$$

٤- حساب ثابت الصلابة: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ نربع $\Rightarrow T_0^2 = 4\times10\frac{m}{k}$

$$\Rightarrow k=4\times10\frac{m}{T_0{}^2}\Rightarrow k=4\times10\frac{5\times10^{-1}}{16}=\frac{5}{4}N.m^{-1}$$

لا تتغير هذه القيمّة بتغير الكتلة المعلقة ،
حيث يتعلق k (١-نوع مادة النابض،٢-قطر حلقة النابض،٣-طول النابض)

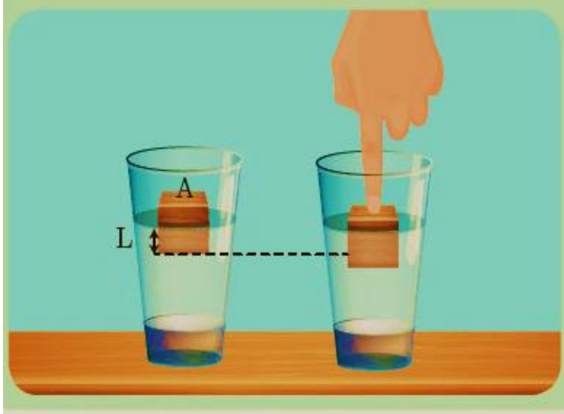
-٥ $T_o'=1sec$ $m'=?$

$$T_o'=2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} \text{ نربع } \Rightarrow T_o'^2=4\times10\frac{m'}{k}\Rightarrow m'=\frac{T_o'^2.k}{4\times10}$$

$$m'=\frac{(1)^2.\frac{5}{4}}{4\times10}\Rightarrow m'=\frac{5}{160}=\frac{1}{32}=31.25\times10^{-3}\,kg$$

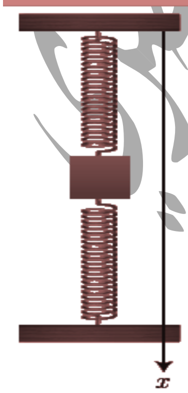
تفكير ناقد

يحوي كأس ماء كتلته الحجمية ρ_{H_2O}،
يُوضع فيه مكعب خشبي كتلته m_{wood} و كتلته الحجمية ρ_{wood} حيث $\rho_{H_2O} > \rho_{wood}$ ومساحة سطحه A فيطفو وهو بحالة توازن وقد برز جزء منه فوق سطح الماء.
عند التأثير بقوة شاقولية على المكعب الخشبي ليغمر كلياً بالماء ثم يترك فجأة.
ما نوع حركة المكعب الخشبي؟



الحل: الحركة بإهمال الاحتكاك ولزوجة الماء الحركة اهتزازية توافقية بسيطة (الجسم يخضع لدافعة ارخميدس و قوة الثقل فتكون محصلة القوى هي قوة إرجاع)
في حالة عدم اهمال الاحتكاك ولزوجة الماء الحركة اهتزازية متخامدة

أبحث أكثر



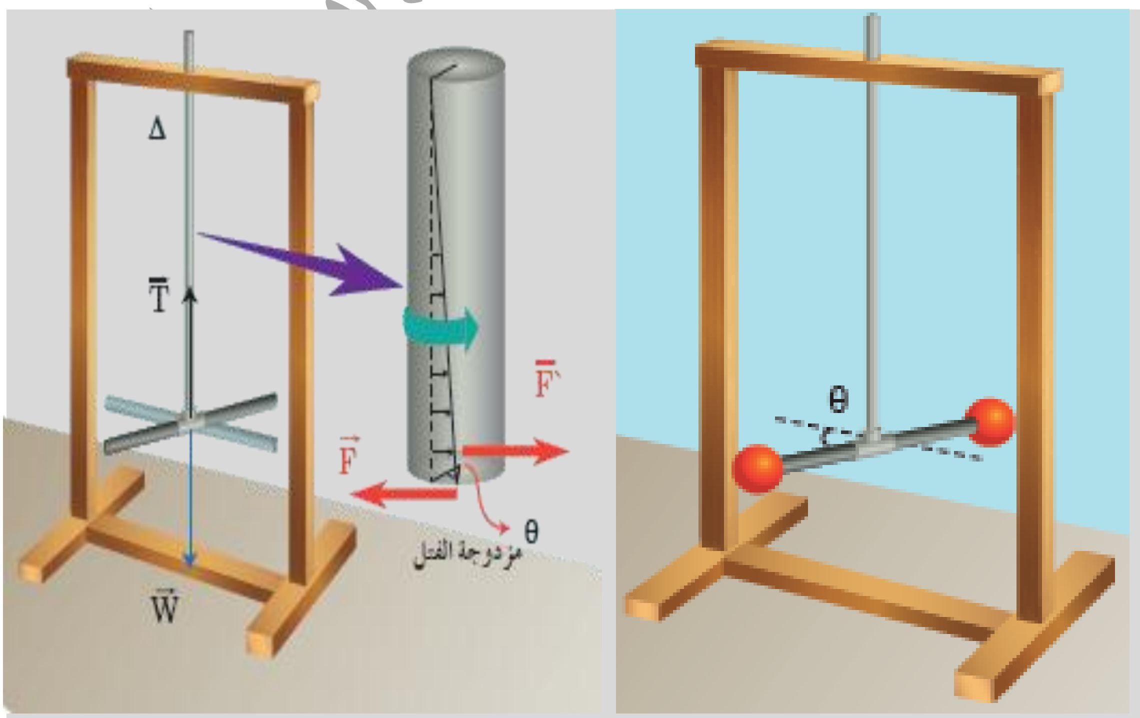
لديك الجملة الموضحة بالشكل المجاور والمؤلفة من نابضين متماثلين ثابت صلابة كل منهما k:
1. قمنا باجراء تجربتين على الجملة إحداهما على الأرض والأخرى في المحطة الفضائية.
2. هل يختلف دور الاهتزاز للجملة أما لا؟ ولماذا؟

الحل: لا يتغير الدور الخاص لأن الدور ليس له علاقة بالجاذبية الأرضية

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

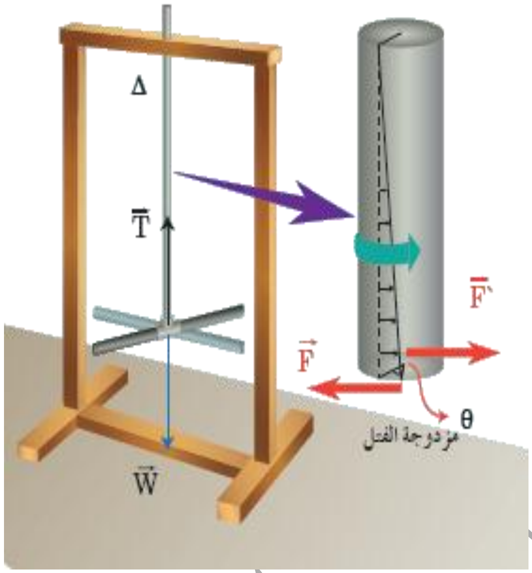
الدرس الثانى: الاهتزازاتُ الجيبيّةُ الدّورانيّةُ

نوّاس الفتلِ غيرُ المُتخامدِ



تعريف نواس الفتل: هو عبارة عن (قرص أفقي) أو(ساقَ أفقية) المعلّقة بسلكِ الفتلِ تهتزُّ في مستوٍ أفقيٍّ حولَ سلكِ الفتلِ الشاقوليِّ بتأثير عزم مزدوجةِ الفتلِ.

سؤال دورة: ادرس حركة نواس الفتل مستنتجاً المعادلة التفاضلية وبين الحل الجيبي فقط؟



- القوى الخارجيّة المؤثّرة في الساق:

أ- قوّة الثقل $\vec{w}$

ب- قوّة التوتّر $\vec{T}$

ج- عندما نُدير الساق زاوية θ عن وضع توازنها في مستوٍ أفقيٍّ تنشأ في السلك مزدوجة فتل η تقاوم عمليّة الفتل تعمل على إعادة الساق إلى وضع توازنها عزمُها هو عزمُ إرجاع يتناسب طرداً مع زاوية الفتل θ ويعاكسها بالإشارة $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -k\bar{\theta}$

٢- بتطبيق العلاقة الأساسيّة في التحريك الدورانيّ(نظرية التسارع الزاويّ)حول محور Δمنطبقٍ على سلك الفتل الشاقوليّ:

$$\sum \bar{\Gamma}_{\vec{F}/\Delta} = I_\Delta . \bar{\alpha}$$

حيث I_Δ عزمُ عطالة الساقِ حولَ محورِ الدوران Δ (السلك) ، α التسارع الزاويّ.

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = I_\Delta . \bar{\alpha}$$

٣- نوجد العزوم :

$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = 0$

لأنّ حاملَ كلٍّ $\vec{T}$ ، $\vec{w}$منطبقٌ على محور الدوران Δ .

$\bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = 0$

عزمُ مزدوجة الفتل $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -k\bar{\theta}$

$$0 + 0 - k\bar{\theta} = I_\Delta . \bar{\alpha} \qquad \Rightarrow -k\bar{\theta} = I_\Delta . \bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t \quad \Rightarrow -k\bar{\theta} = I_\Delta . (\bar{\theta})''_t \Longrightarrow \quad \boldsymbol{(\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\bar{\theta}}$$

وهي معادلةتفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبلُ حلاًجيبياً من الشكل: $\boldsymbol{\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$

سؤال دورة : انطلاقاً من العلاقة ($-k\bar{\theta} = I_\Delta . \bar{\alpha}$)استنتج طبيعة الحركة (النبض الخاص ودور الخاص)لنواس الفتل؟

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t \quad \Rightarrow -k\bar{\theta} = I_\Delta . (\bar{\theta})''_t \Longrightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\bar{\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

وهي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبلُ حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقّقِ من صحّة الحلّ نشتقّ تابع المطال مرّتين بالنسبة للزّمن نجد:

$$(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$(\theta)''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0{}^2.\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0{}^2.\bar{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجد أن :

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0}$$

وهذا محقّقٌ لأنّ $\boldsymbol{k}$, I_Δ موجبان.

نتيجة: إنّ حركة النوّاس الفتل هي حركة جيبيّة دورانية الشكل العام للتابع الزمنيّ

$$\boldsymbol{\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$\boldsymbol{\bar{\theta}}$: المطالُ الزاوي أو(موضعُ الجسم)في اللحظة tويقدّرُ rad .

$\boldsymbol{\theta_{max}}$: سعةُ الزاوية (المطال الزاوي الأعظمي) وتقدّرُ rad

$\boldsymbol{\omega_0}$: النبض الخاص للحركة ويقدّرُ $rad.s^{-1}$.

$\boldsymbol{\bar{\varphi}}$: الطورُ الابتدائيُّ في اللحظة $t = 0$ ويقدّرُ بالراديان rad .

$\boldsymbol{(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$: طورُ الحركةِ في اللحظة t .

ندعو كلَّ من $\bar{\varphi}$ ، θ_{max} ، ω_0 ثوابتَ الحركة.

استنتاجُ علاقةِ الدّورِ الخاصِّ للنوّاس الفتل:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالمساواة بين (1)و(2) نجد أن : $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \Longrightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$

وهي علاقةُ الدّورِ الخاصِّ للنوّاسِ الفتل غيرِ المُتخامِدِ. من العلاقةِ السّابقةِ أستنتجُ أنّ الدورَ الخاصَّ:١-لا يتعلّقُ بسعةِ الاهتزاز θ_{max} .

٢- يتناسبُ طرداً مع الجذرِ التربيعيِّ لعزم عطالة جملة النوّاس حول محور الدوران (سلك الفتل) I_Δ واحدته$(kg.m^2)$

٣- يتناسبُ عكساً مع الجذرِ التربيعيِّ لثابتِ فتل السلك k واحدته$(m.N.rad^{-1})$

ملاحظة: يُعطى ثابتُ فتل السلك بدلالة طول السلك بالعلاقة:

k': ثابت يتعلق بنوع مادة السلك (فولاذ – فضة..........)

$2r$: قطر السلك ، l : طول السلك

$$k = k'\frac{(2r)^4}{l_{\text{سلك}}}$$

- التشابهُ الشكليُّ بين النوّاس المرن ونوّاس الفتل:

نواس المرن	نواس فتل
حركة جيبية انسحابية	حركة جيبية دورنية
مطال انسحابي $\bar{x}$	مطال زاوي $\bar{\theta}$
السرعة $\bar{v} = (\bar{x})'_t$	السرعة الزاوية $\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t$
التسارع السرعة $\bar{a} = (\bar{x})''_t$	التسارع الزاوي $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$
كتلة m	عزم العطالة I_Δ
ثابت الصلابة k	ثابت الفتل k
قوة الإرجاع $\bar{F} = -k\bar{x}$	عزم الإرجاع $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -k\bar{\theta}$
الطاقة الحركية $E_k = \frac{1}{2}m.v^2$	الطاقة الحركية $E_k = \frac{1}{2}I_\Delta.\omega^2$
الطاقة الكامنة $E_P = \frac{1}{2}k.x^2$	الطاقة الكامنة $E_P = \frac{1}{2}k.\theta^2$
الطاقة الميكانيكية $E = \frac{1}{2}k.X_{max}^2$	الطاقة الميكانيكية $E = \frac{1}{2}k.\theta_{max}^2$

نتائج تجريبية:

١- لا تتغيّرُ قيمة الدّورِ الخاصِّ لنوّاس الفتل بتغيّر السعةِ الزاويّة للحركة.

٢- نعلق على طرفي السّاق كتلتين نقطيّتين متساويتين $m_1 = m_2$،

وعلى بعدين متساويين $r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$ نلاحظ إن عزم العطالة يزداد وبالتالي الدور يزداد

$$I_{\Delta جملة} > I_{\Delta ساق} \Longrightarrow \qquad T_0{}' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta جملة}}{k}} > T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta ساق}}{k}}$$

٢- يزدادُ الدورُ الخاصُّ لنوّاس الفتل بزيادة عزم عطالة الجملة.

٣ - نجعل طول السلك نصف ما كان عليه نلاحظ.

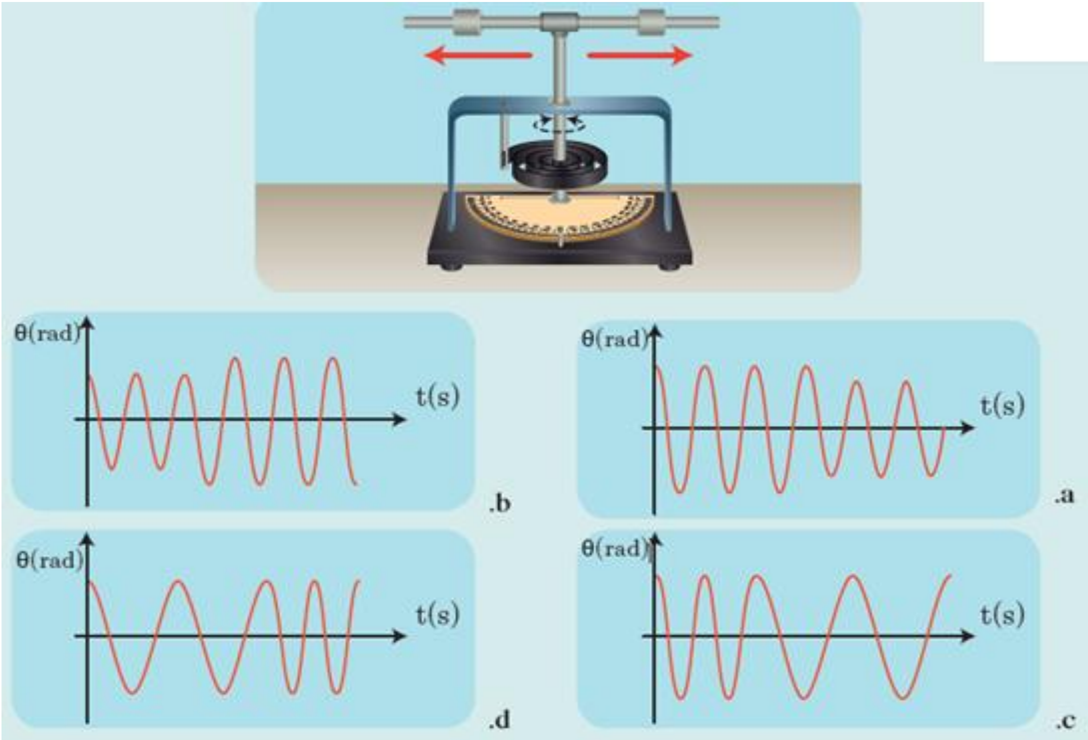
$$k_1 = k'\frac{(2r)^4}{\frac{l}{2}_{سلك}} \Longrightarrow k_1 = 2k'\frac{(2r)^4}{l_{سلك}} \Longrightarrow k_1 = 2k$$

$$T_0{}' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_1}} \Longrightarrow T_0{}' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta ساق}}{2k}} \Longrightarrow T_0{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta ساق}}{k}} \Longrightarrow T_0{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0$$

٣- ينقصُ الدورُ الخاصُّ لنوّاس الفتل بنقصان طول سلك الفتل.

حل الأسئلة النظرية: أولا :اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

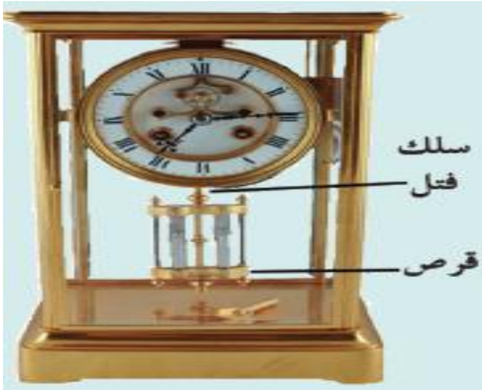
1. يهتزُّ نوّاس فتل بدور خاصّ T_0 ، في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسِه كما هو موضّحٌ بالشكل، فالرسمُ البيانيُّ الذي يعبّرُ عن تغيّر المطال مع الزمن في هذه الحالة هو:



الحل: ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسِه أي بعد الكتلة عن محور الدوران يزداد r وبالتالي عزم العطالة يزداد $I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2} = m_1.r^2$ ومنه الدور يزداد

الدور $T_0=2\pi\sqrt{\frac{2\,I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/\text{ساق}}}{k}}$

الإجابة: C



٢- ميقاتيّة تعتمدُ في عملها على نوّاس فتل كما في الشكل المجاور، ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدّم الطلّاب مقترحاتِهم، فإنّ الاقتراح الصحيح هو:

a. زيادةُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل

b. زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.

c. إنقاصُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

d. زيادةُ قطر القرص مع المحافظة على كتلته.

الحل: (أي الزمن(الدور) كبير ويحدث تأخير) لتصحيح التأخير يجب تصغير الدور نقوم بانقاص طول السلك ومنه الدور ينقص لأن التناسب طردي مع الطول كم في العلاقات

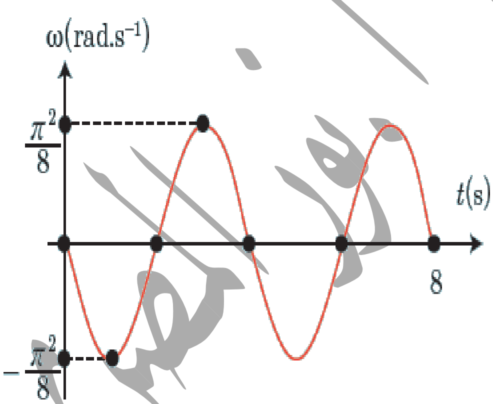
$$k = k' \frac{(2r)^4}{l_{\text{سلك}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta\text{ساق}}}{k'\frac{(2r)^4}{l_{\text{سلك}}}}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}.l_{\text{سلك}}}{k'.(2r)^4}} \Longrightarrow$$

الإجابة:

c.إنقاصُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

٣-يمثّلُ الرسمُ البيانيُّ المجاورُ تغيّراتِ السرعة الزاويّة لنوّاس فتل بتغيّر الزمن، فإنّ تابع السرعة



$\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{8}\sin(3\pi t)$ **.a**

$\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin(2\pi t)$ **.b**

$\bar{\omega} = +\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ **.c**

$\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin(\frac{\pi}{2}t)$ **.d**

الحل: من الرسم نلاحظ: $2T_0 = 8\,S \Longrightarrow T_0 = 4\,S$ و $\omega_0.\theta_{max} = \frac{\pi^2}{8}\ rad.s^{-1}$

نحسب ω_0 : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$

الإجابة:

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t) \Longrightarrow \bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin(\frac{\pi}{2}t) \quad .\text{d}$$

ثانياً :أجبْ عن الأسئلةِ الآتيةِ:

1.انطلاقاً من مصونيّة الطاقة الميكانيكيّة برهن أنّ حركة نوّاس الفتل حركةٌ جيبيّةٌ دورانيّة.

الحل:

$$E_{TOT} = E_P + E_K$$

$$\frac{1}{2}k\theta_{max}^2 = \frac{1}{2}k\bar{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 \Longrightarrow k\theta_{max}^2 = k\bar{\theta}^2 + I_\Delta\bar{\omega}^2 \quad \Longrightarrow$$

$$k\theta_{max}^2 - k\bar{\theta}^2 = I_\Delta\omega^2 \Longrightarrow k\theta_{max}^2 - k\bar{\theta}^2 = I_\Delta(\bar{\theta})_t'^2$$

نشتق بالنسبة لزمن: $0 - 2k.\bar{\theta}(\bar{\theta})_t' = 2I_\Delta(\bar{\theta})_t'.(\bar{\theta})_t''$

بالاختصار: $-k.\bar{\theta} = I_\Delta.(\bar{\theta})_t'' \Longrightarrow \quad (\bar{\theta})_t'' = -\frac{k}{I_\Delta}\bar{\theta}$

وهي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبلُ حلاًجيبياً من الشكل: $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta_{max}}\cos(\boldsymbol{\omega_0 t} + \bar{\boldsymbol{\varphi}})$

للتحقّقِ من صحّة الحلّ نشتقّ تابع المطال مرّتين بالنسبة للزّمن نجد:

$$(\bar{\theta})_t' = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)_t'' = \bar{\alpha} = -\omega_0{}^2.\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})_t'' = -\omega_0{}^2.\bar{\theta} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجدأن :

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{I_\Delta}}} > \boldsymbol{0}$$

وهذا محقّقٌ لأنّ $\boldsymbol{k}$, I_Δ موجبان.

نتيجة: إنّ حركة النوّاس الفتل هي حركة جيبيّة دورانية

2.نعلّق ساقين متماثلتين بسلكَي فتلٍ متماثلين طولُ الأوّل $\boldsymbol{l_1}$ وطولُ الثاني $\boldsymbol{l_2}$ فإذا علمت أنَ $\boldsymbol{T_{01}}$=2$\boldsymbol{T_{02}}$ أوجدِ العلاقةَ بين طولَي السلكين.

الحل:

النواس الأول	النواس الثاني
$T_{01} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_1}}$	$T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_2}}$
$k = k'\frac{(2r)^4}{l_1\ \text{سلك}}$	$k = k'\frac{(2r)^4}{l_2\ \text{سلك}}$
$T_{01} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'\frac{(2r)^4}{l_1\ \text{سلك}}}}$	$T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'\frac{(2r)^4}{l_2\ \text{سلك}}}}$
$\Longrightarrow T_{01} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta.l_1\ \text{سلك}}{k'.(2r)^4}}$	$\Longrightarrow T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta.l_2\ \text{سلك}}{k'.(2r)^4}}$

$$T_{01}=2T_{02} \Longrightarrow \quad 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta.l_1\ \text{سلك}}{k'.(2r)^4}} = 2.2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta.l_2\ \text{سلك}}{k'.(2r)^4}} \quad \Longrightarrow \sqrt{l_1} = 2\sqrt{l_2}$$

نربع الطرفين: $\boxed{l_1 = 4l_2}$ وهو المطلوب

ثالثاً: حُلَّ المسائلَ الآتيةَ: (في جميع المسائل $4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10mS^{-2}$)

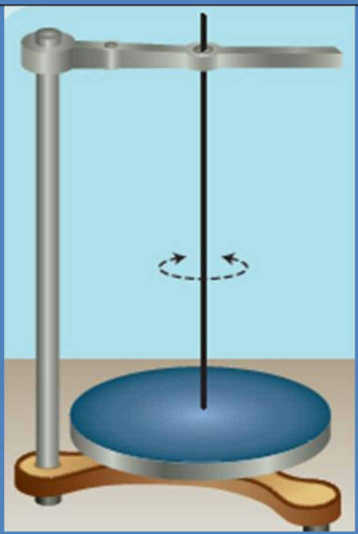
المسألة الأولى: يتألّفُ نوّاس فتل من قرصٍ متجانسٍ كتلتُه $m = 2$ kg، نصفُ قطره $r = 4$ cm، معلّقٍ من مركزه إلى سلك فتل شاقوليٍّ ثابتُ فتله $k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ ندير القرص في مستوٍ أفقيٍّ زاويةً $\theta = +\frac{\pi}{4} rad$ عن وضع توازنِهِ، ونتركُهُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ في اللحظة $t = 0$. المطلوب:

١- احسب الدورَ الخاصّ للنوّاس.

٢-استنتج التابعَ الزمنيَّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.

٣- احسبِ الطاقةَ الكامنةَ في وضع مطاله الزاويّ $\theta = \frac{\pi}{8} rad$ ثمّ احسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ

(عزم عطالة قرص حول محور عموديّ على مستويه ومارّ من مركز $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m.r^2$)



المعطيات: $m = 2$ kg ، $r = 4$ cm $\Longrightarrow r = 4 \times 10^{-2} m$

$k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ ، $\theta = +\frac{\pi}{4} rad$

شروط البدء: $t = 0$ ، $\theta = \theta_{max} = +\frac{\pi}{4} rad$ $\Longrightarrow$ ونتركُهُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ $\omega = 0$

الحل:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta/C}}{k}}$$

نحسب $I_{\Delta/C}$:

$$I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m.r^2$$

$$I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} 2 \times (4 \times 10^{-2})^2 = 16 \times 10^{-4} kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{16 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-3}}} = 2\pi \sqrt{10^{-1}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{10}} = 2 \text{ s}$$

٢- تابع المطال شكله العام هو $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

الثوابت في التابع هي (φ, θ_{max} , ω_0) نوجد هذه المجاهيل:

المجهول الأول θ_{max} من نص المسألة	$\theta_{max} = +\frac{\pi}{4} rad$
المجهول الثاني ω_0 من الدور لدينا	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad.sec^{-1}

المجهول الثالث: φ من شروط البدء نعوض الشروط في التابع لإيجاد φ

$$\theta_{max} = \theta_{max} \cos(\varphi) \Longrightarrow \cos(\varphi) = 1 \Longrightarrow \varphi = 0 rad$$

نعوض في التابع:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \cos(\pi t) \quad (rad)$$

٣- حساب الطّاقة الكامنة في موضع مطاله $(\theta = \frac{\pi}{8} rad)$ -

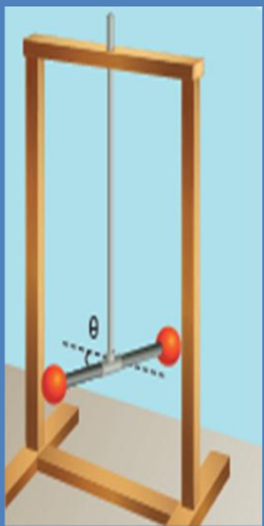
$$E_P = \frac{1}{2}k.\theta^2 = \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \times (\frac{\pi}{8})^2 = 8 \times 10^{-3} \times \left(\frac{10}{64}\right) = \frac{10^{-2}}{8} J$$

ولحساب الطّاقة الحركيّة عندئذٍ نحسب أوّلاً الطّاقة الميكانيكيّة:

$$E_{total} = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2 = \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \times (\frac{\pi}{4})^2 = 8 \times 10^{-3} \times \left(\frac{10}{16}\right) = \frac{10^{-2}}{2} J$$

ومنه نحسب الطاقة الحركية:

$$E_{total} = E_p + E_k \Longrightarrow E_k = E_{total} - E_p = \frac{10^{-2}}{2} - \frac{10^{-2}}{8} = \frac{3\times10^{-2}}{8} J$$



المسألة الثانية: ساقٌ مهملةُ الكتلةِ طولُها l، نثبّتُ في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطيّةً 125 g ، ونعلّقُ الجملة من منتصفها إلى سلكِ فتلٍ شاقوليٍّ ثابتُ فتله $k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ لتؤلّفَ الجملةُ نوّاس فتل، نزيحُ الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3} rad$ وتُترَكُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ لحظةَ بدء الزمن، فتهتزُّ بحركةٍ جيبيّة دورانيّة، دورُها الخاصّ 2 s **المطلوب:**

1. استنتجِ التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.
2. احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورِها الأوّل بوضع التوازن.
3. احسبْ طولَ الساق l

المعطيات: ساق مهملة الكتلة $m_{ساق} = 0$ ، كتل نقطية $m_1 = m_2 = 125 \times 10^{-3} kg$

$k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ ، $\theta = \frac{\pi}{3} rad$ ، $T_0 = 2\ s$

شروط البدء: $t = 0$ ، $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad \Longrightarrow$ ونتركُه دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ $\omega = 0$

<u>الحل:</u> ١- تابع المطال شكله العام هو $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

الثوابت في التابع هي $(\varphi, \theta_{max}, \omega_0)$ نوجد هذه المجاهيل:

<u>المجهول الأول</u> θ_{max} من نص المسألة	$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$
<u>المجهول الثاني</u> ω_0 من الدور لدينا	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.sec^{-1}$

<u>المجهول الثالث</u>: φ من شروط البدء نعوض الشروط في التابع لإيجاد φ

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\varphi) \Longrightarrow \cos(\varphi) = 1 \Longrightarrow \varphi = 0 rad$$

نعوض في التابع:

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}\cos(\pi t) \quad (rad)}$$

2- السرعة الزاوية لحظة المرور الأول بوضع التوازن $\omega = -w_0 \ \theta_{max} \sin(\omega_0 . t_1)$

نوجد زمن المرور الأول في مركز الاهتزاز: $\theta = 0$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\cos(\pi t) \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{3}\cos(\pi t) \Rightarrow \cos(\pi t) = 0$$

حسب قاعدة مثلثية: $\cos(A) = 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

(مرور أول: $k = 0$) : $\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2(\pi)} = \frac{1}{2} \ s$

نعوض في تابع ω : $\omega = -\pi \times \frac{\pi}{3}\sin(\pi \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{\pi^2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \omega = -\frac{10}{3} = -3.33 \ rad.s^{-1}$$

٣- نحسب طول الساق من $I_{\Delta/\text{جملة}}$ في T_0 : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{K}}$

نربع: $T_0^{\ 2} = 4\pi^2 . \frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{K} = 40\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{K}$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{T_0^{\ 2}.k}{40} = \frac{(2)^2.16\times10^{-3}}{40} = \frac{4\times16\times10^{-3}}{40} = 16\times10^{-4} kg.m^2$$

لدينا $I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/c\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{l}{2} \Rightarrow I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2} = m_1 . (\frac{l}{2})^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} = 2I_{\Delta/m_1} = 2m_1 . (\frac{l}{2})^2 = 2m_1 . \frac{l^2}{4} = m_1 . \frac{l^2}{2}$$

$$\Rightarrow I_{\Delta/\text{جملة}} = m_1 . \frac{l^2}{2} \Rightarrow l^2 = \frac{2\, I_{\Delta/\text{جملة}}}{m_1} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{2\, I_{\Delta/\text{جملة}}}{m_1}}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{2(16\times10^{-4})}{125\times10^{-3}}} = \sqrt{\frac{2(16\times10^{-4})\times8}{125\times10^{-3}\times8}} = \sqrt{\frac{16(16\times10^{-4})}{1000\times10^{-3}}}$$

$$\Rightarrow l = 16\times10^{-2} m$$

المسألة الثالثة: ساقٌ أفقيّة متجانسة طولُها $L= ab = 40\ cm$ معلّقة بسلك فتلٍ شاقوليّ يمرُّ من منتصفها.

a- نديرُ الساقَ في مستوٍ أفقيٍّ بزاوية $\theta = 60^o$ انطلاقاً من وضع توازنها، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$ فتهتزّ بحركة جيبيّة دورانيّة دورُها الخاصّ $T_0 = 1\ s$ فإذا علمتَ أنَّ عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3}\ kg.m^2$ المطلوب: 1.استنتجِ التابعَ الزمنيَّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.

2.احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورِها الثاني بوضع التوازن.

3.احسبْ قيمةَ التسارع الزاويّ للساق عندما تصنع زاوية (-30^o) مع وضع توازنها

b- نثبّت بالطرفين a, b كتلتين نقطيّتين $m_1 = m_2 = 75\ g$ استنتجْ قيمةَ الدورِ الخاصّ الجديد للجملة المهتزّة، ثم احسب قيمةَ ثابت فتل السلك.

c. نقسِّمُ سلكَ الفتل قسمين متساويين، ونعلّقُ الساقَ بعدئذٍ بنصفَي السلك معاً؛ أحدُهما من الأعلى، والآخرُ من الأسفل ومن منتصفها، ويثبّت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقوليّاً .استنتجْ قيمةَ الدور الخاصّ الجديد للساق (دون وجود كتل نقطية)افترض $\pi^2 = 10$.

المعطيات: $T_0 = 1\ s$ ، $I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3}\ kg.m^2$ ، $\theta = 60^o = \frac{\pi}{3} rad$

شروط البدء: $t = 0$ ، $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad \Longrightarrow$ ونتركُه دون سرعةٍ ابتدائيّةٍ $\omega = 0$

$l = ab = 40\ cm \Longrightarrow l = 40 \times 10^{-2}\ m \Longrightarrow \frac{l}{2} = 20 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-1}\ m$

الحل: ١- تابع المطال شكله العام هو $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

الثوابت في التابع هي $(\varphi, \theta_{max}, \omega_0)$ نوجد هذه المجاهيل:

المجهول الأول θ_{max} من نص المسألة	$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$
المجهول الثاني ω_0 من الدور لدينا	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.sec^{-1}$

المجهول الثالث φ: من شروط البدء نعوض الشروط في التابع لإيجاد φ

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\varphi) \Longrightarrow \cos(\varphi) = 1 \Longrightarrow \varphi = 0 rad$$

نعوض في التابع: $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t) \quad (rad)}$

2- السرعة الزاوية لحظة المرور الثاني بوضع التوازن $\omega = -w_0\ \theta_{max} \sin(w_0.t_2)$

نوجد زمن المرور الثاني في مركز الاهتزاز: $\theta = 0$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t) \Longrightarrow 0 = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t) \Longrightarrow \cos(2\pi t) = 0$$

حسب قاعدة مثلثية: $\cos(A) = 0 \Longrightarrow A = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

(مرور ثاني: $k = 1$) : $2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi \Longrightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2}+\pi}{(2\pi)} = \frac{3\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{3}{4}\ s$

نعوض في ω : $\omega = -2\pi \times \frac{\pi}{3}\sin(2\pi\frac{3}{4})$

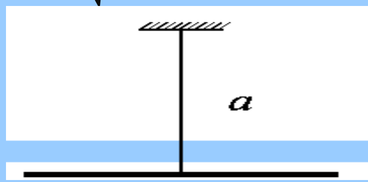
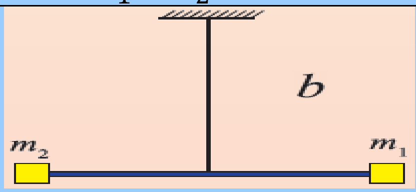
$$\Longrightarrow \omega = -\frac{2\pi^2}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \omega = -\frac{20}{3}(-1) = +\frac{20}{3}\ rad.s^{-1}$$

3 - قيمة التسارع الزاوي α عند مطال $\theta = -30^o = -\frac{\pi}{6}rad$

$$\alpha=(\theta)''_t= -\omega_0^2\theta \Longrightarrow \alpha=-(2\pi)^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = (4.\pi^2)\frac{\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}\ \text{rad.s}^{-2}$$

-b $m_1 = m_2 = 75\text{ g} \Longrightarrow m_1 = m_2 = 75\times 10^{-3}\ kg$:

$T_0 = ?$ ($k = ?$ ثم) يجب الترتيب ننسب بين T_0 و $T_0{}'$

قبل وضع الكتل	بعد وضع الكتل $m_1 = m_2 = 75\times 10^{-3}\ kg$
$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/ساق}}{k}}$ .... (1)  $T_0 = 1\ s$	 $T_0'=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{k}}$ نوجد $I_{\Delta/جملة}$: $I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} + I_{\Delta/ساق}$ بما أن $m_2 = m_1$ فإن $I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2} = m_1.r^2 = m_1.(\frac{l}{2})^2$: $I_{\Delta/جملة} = 2\,I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/ساق}$ $T_0'=2\pi\sqrt{\frac{2\,I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/ساق}}{k}}$ .... (2)

ننسب العلاقتين (١)(٢) لنتخلص من k :

$$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{2\,I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/ساق}}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/ساق}}{k}}} = \sqrt{\frac{2\,I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/ساق}}{I_{\Delta/ساق}}} \Longrightarrow T_0' = T_0\sqrt{\frac{2\,I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/ساق}}{I_{\Delta/ساق}}}$$

نحسب I_{Δ/m_1} : $I_{\Delta/m_1} = m_1.r^2 = m_1.(\frac{l}{2})^2$

$$I_{\Delta/m_1} = 75\times 10^{-3}(2\times 10^{-1})^2 = 75\times 10^{-3}\times 4\times 10^{-2}$$

$$\Longrightarrow I_{\Delta/m_1} = 300\times 10^{-3}\times 10^{-2} = 3\times 10^{-3}kg.m^2$$

$$\Longrightarrow T_0' = T_0\sqrt{\frac{2\,I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/ساق}}{I_{\Delta/ساق}}} = 1\sqrt{\frac{2\,(3\times10^{-3})+2\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}} = \sqrt{\frac{6\times10^{-3}+2\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}}$$

$$\Longrightarrow T_0' = \sqrt{\frac{8\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2\ s$$

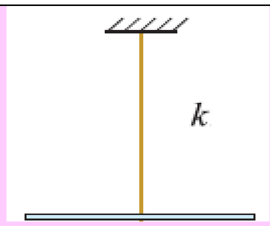
نحسب ثابت الفتل من العلاقة (١)أو(٢) من (١) نجد أن:

نربع $T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/ساق}}{k}}$ .... (1)

$$T_0^2 = 4(\pi)^2\frac{I_{\Delta/ساق}}{k}$$

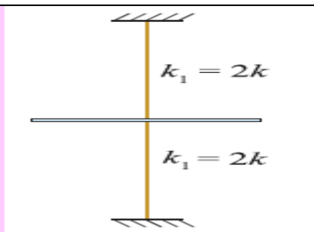
$$\Longrightarrow \quad k = 4(10)\frac{I_{\Delta/ساق}}{T_0{}^2} = 40\,\frac{2\times10^{-3}}{1} = 8\times10^{-2}\ m.N.\text{rad}^{-1}$$

c- بدون كتل:



$T_0 = 1\ s$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c\,\text{ساق}}}{k}}$$



نصفين متساوين أي لدينا ثابتين k_1 متساوين

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c\,\text{ساق}}}{k_1+k_1}}$$

نوجد k_1: $k_1 = k'\frac{(2r)^4}{\frac{l}{2}\,\text{سلك}} \Longrightarrow k_1 = 2k'\frac{(2r)^4}{l\,\text{سلك}} \Longrightarrow k_1 = 2k$

$$\Longrightarrow T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c\,\text{ساق}}}{2k+2k}} \Longrightarrow T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c\,\text{ساق}}}{4k}} \Longrightarrow T_0' = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c\,\text{ساق}}}{k}}$$

$$\Longrightarrow T_0' = \frac{1}{2}T_0 \Longrightarrow T_0' = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} = 0.5\ s$$

المسألة الثالثة عامة:

تتألّفُ ميقاتيّةٌ من قرص نحاسيٍّ كتلتُه $M_{1\,\text{قرص}} = 0.12\ kg$ نصفُ قطره $R = 0.05m$ مثبّتٌ عليه ساقٌ كتلتُها $M_{2\,\text{ساق}} = 0.012\ kg$، طولُها $L = 0.1m$ تحملُ في طرفيها كتلتين نعدّهما نقطيّتين $m_1 = m_2 = 0.05\ kg$ كتلتان تبعدان عن بعضهما البعض مسافةً قدرُها $2r = 0.04m$ يمكن تغييرُها بوساطة بزّال، نعلّق جملةالقرص وما عليه من مركز عطالتها إلى سلكِ فتلٍ شاقوليٍّ ثابتُ فتله $k = 8\times10^{-4} m.N.rad^{-1}$ كما في الشكل المجاور. المطلوب:

1.احسبْ دورَ الميقاتيّة.

2.إذا أردنا للدَّور أنْ يزدادَ بمقدار $0.86\ s$ وذلك بزيادة البعد بين الكتلتين m، فما البعدُ الجديدُ الذي يجبُ أنْ يصبحَ بينهما؟

عزم عطالة القرص حول محور مارٍّ من مركز عطالته $I_{1\Delta/C\,\text{قرص}} = \frac{1}{2}M_1.R^2$، وعزم عطالة السّاق حول محور عمودّيّ على مستويها ومارّ من مركزها $I_{2\Delta/C\,\text{ساق}} = \frac{1}{12}M_2.L^2$

المعطيات: $M_{1\,\text{قرص}} = 0.12\ kg$ ، $R = 0.05m$ ، $M_{2\,\text{ساق}} = 0.012\ kg$ ، $L = 0.1m$

$m_1 = m_2 = 0.05\ kg$ ، $2r = 0.04m \Longrightarrow r = 0.02m$ ،

$k = 8\times10^{-4} m.N.rad^{-1}$

الحل:١-
$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{k}}$$

نحسب$I_{\Delta/\text{جملة}}$:
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{1\Delta/C\text{قرص}} + I_{\Delta/C\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$m_1 = m_2 = 0.05\ kg \quad ، \quad r_1 = r_2 = r = 0.02m \Longrightarrow I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{1\Delta/C\text{قرص}} + I_{2\Delta/C\text{ساق}} + 2I_{\Delta/m_1}$$

$I_{1\Delta/C\text{قرص}} = \frac{1}{2}M_1.R^2 \Longrightarrow I_{1\Delta/C\text{قرص}} = \frac{1}{2}12\times10^{-2}(5\times10^{-2})^2$ $\Longrightarrow I_{1\Delta/C\text{قرص}} = 6\times10^{-2}\times25\times10^{-4} = 150\times10^{-6} = 15\times10^{-5}kg.m^2$
$I_{2\Delta/C\text{ساق}} = \frac{1}{12}M_2.L^2 = \frac{1}{12}12\times10^{-3}(10^{-1})^2 = 1\times10^{-5}kg.m^2$
عزم عطالة نقطة مادية $I_{\Delta/m_1} = m_1.r^2 = 5\times10^{-2}(2\times10^{-2})^2$ $I_{\Delta/m_1} = 5\times10^{-2}4\times10^{-4} = 2\times10^{-5}\ kg.m^2$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = 15\times10^{-5} + 1\times10^{-5} + 2(2\times10^{-5})$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = 16\times10^{-5} + 4\times10^{-5} = 20\times10^{-5} = 2\times10^{-4}kg.m^2$$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}} = 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \pi = 3.14\ \ s$$

-٢ $2r' = ؟$ $\quad T_0{}' = T_0 + 0.86 = 3.14 + 0.86 = 4\ \ s$

$$T_0{}'=2\pi\sqrt{\frac{I'_{\Delta/\text{جملة}}}{k}}$$

نحسب$I'_{\Delta/\text{جملة}}$: نربع الدور $\quad T_0{}'^2 = 4.\pi^2\frac{I'_{\Delta/\text{جملة}}}{k}$

$$\Longrightarrow I'_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{k.T_0{}'^2}{4.\pi^2} = \frac{8\times10^{-4}\times(4)^2}{40} = \frac{8\times10^{-4}\times16}{40} = 32\times10^{-5}kg.m^2$$

نحسب $2r'$من I'_{Δ/m_1} في $I'_{\Delta/\text{جملة}}$: $\quad I'_{\Delta/\text{جملة}} = I_{1\Delta/C\text{قرص}} + I_{2\Delta/C\text{ساق}} + I'_{\Delta/m_1} + I'_{\Delta/m_2}$

$m_1 = m_2 = 0.05\ kg \quad ، \quad r_1{}' = r_2{}' = r' = ? \Longrightarrow I'_{\Delta/m_1} = I'_{\Delta/m_2}$

$$I'_{\Delta/\text{جملة}} = I_{1\Delta/C\text{قرص}} + I_{2\Delta/C\text{ساق}} + 2I'_{\Delta/m_1}$$

$$32\times10^{-5} = 15\times10^{-5} + 1\times10^{-5} + 2I'_{\Delta/m_1}$$

$$32\times10^{-5} = 16\times10^{-5} + 2I'_{\Delta/m_1}$$

$$32\times10^{-5} - 16\times10^{-5} = 2I'_{\Delta/m_1}$$

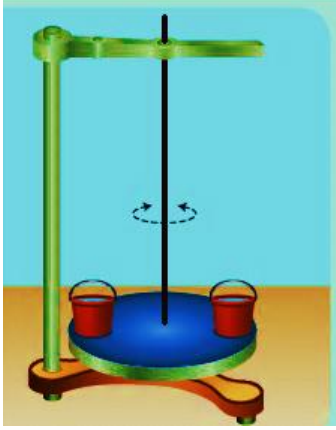
$$16\times10^{-5} = 2I'_{\Delta/m_1} \Longrightarrow I'_{\Delta/m_1} = 8\times10^{-5}\ \ kg.m^2$$

$$I'_{\Delta/m_1} = m_1.r'^2 \Longrightarrow r'^2 = \frac{I'_{\Delta/m_1}}{m_1} \Longrightarrow r' = \sqrt{\frac{I'_{\Delta/m_1}}{m_1}} \Longrightarrow 2r' = 2\sqrt{\frac{I'_{\Delta/m_1}}{m_1}}$$

$$\Longrightarrow 2r' = 2\sqrt{\frac{8\times10^{-5}}{5\times10^{-2}}} = 2\sqrt{\frac{16\times10^{-5}}{10\times10^{-2}}} = 2\sqrt{16\times10^{-4}} = 2\times4\times10^{-2}$$

البعد بين الكتلتين $\quad \Longrightarrow 2r' = 8\times10^{-2}m$

تفكير ناقد



نواس فتل مؤلف من سلك فتل ثابت فتله k وقرص معدني عزم عطالته $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2$ وقد ثُبِّت على محيطه كأسان متماثلان يحويان نفس الكمّية من الماء وقد جُهز كلّ منهما بصمّام يتجه نحو مركز القرص.
تُزاح الجملة عن موضع توازنها زاوية $\theta_{max} = \pi \text{ rad}$ وتُترك دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$، وفي إحدى النوسات تم فتح الصمامين هل تزداد السرعة الزاوية أم تنقص ولماذا؟

الحل: عند فتح الصمام وتجمعت الماء في المركز ينقص عزم العطالة وبالتالي ينقص الدور اي ازداد التواتر وبالتالي ازدادت السرعة الزاوية

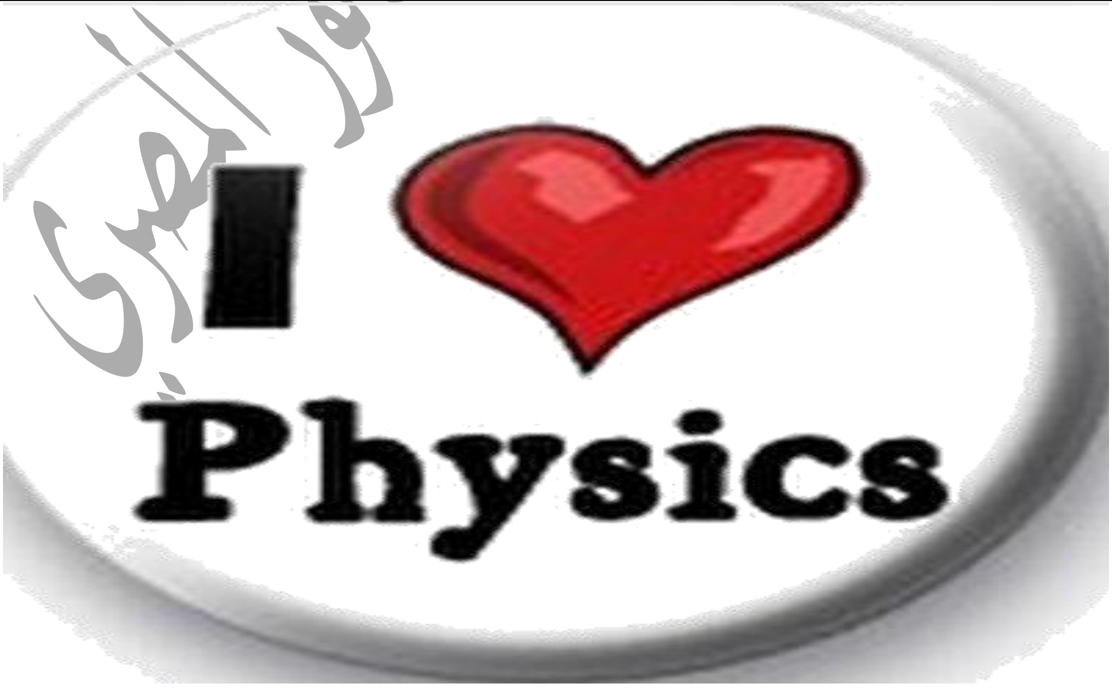
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{K}}$$

لدينا

$$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/c ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$m_1 = m_2 \Longrightarrow r_1 = r_2 \Longrightarrow I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2} = m_1 . (\frac{l}{2})^2$$

عند فتح الصمام وتجمعت الماء في المركزتنقص الكتلة الماء وبالتالي ينقص عزم العطالة ومنه ينقص الدور لأن التناسب طردي ، $\omega = \frac{2\pi}{T}$ مما يؤدي إلى زيادة السرعة الزاوية(عكسي مع الدور)

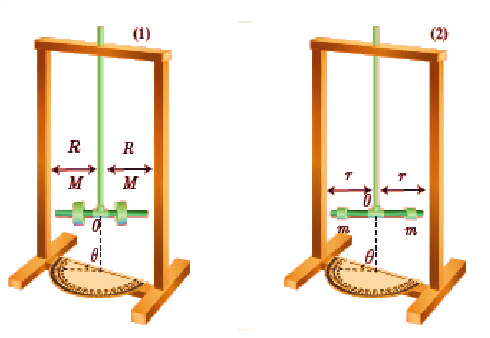


أبحث أكثر

يبيّن الشكلان المجاوران نواسَي فتل لهما نفسُ السلك وكتلة الساق مهملة

حيث $M = 2m$, $r = 2R$

أيُّ النوّاسَين دوره أكبر؟



الساق مهملة الكتلة $I_{\Delta/\text{ساق}} = 0$

النواس الأول: بعد الكتلة عن محور الدوران $R = \frac{r}{2}$

الكتلة $M = 2m$

$$T_{01} = \sqrt{\frac{I_{\Delta\text{جملة}}}{k}}$$

نوجد $I_{\Delta\text{جملة}}$: $I_{\Delta/\text{جملة}} = 2I_{\Delta/M}$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = 2(M.R^2) = 2(2m.\left(\frac{r}{2}\right)^2)$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = 2\left(2m\frac{r^2}{4}\right) = m.r^2$$

$$\boxed{T_{01}=2\pi\sqrt{\frac{m.r^2}{k}}}$$

النواس الثاني: بعد الكتلة عن محور الدوران r

الكتلة m

$$T_{02} = \sqrt{\frac{I_{\Delta\text{جملة}}}{k}}$$

نوجد $I_{\Delta\text{جملة}}$: $I_{\Delta/\text{جملة}} = 2I_{\Delta/m}$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = 2(m.r^2)$$

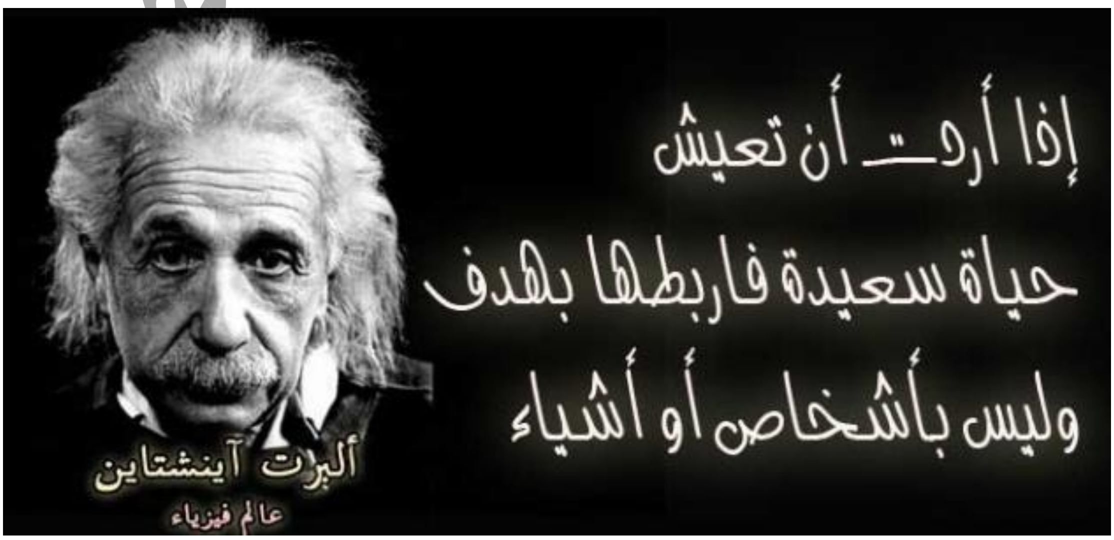
$$T_{02}=2\pi\sqrt{\frac{2m.r^2}{k}}$$

$$T_{02}=\sqrt{2}\ .2\pi\sqrt{\frac{m.r^2}{k}}$$

$$T_{02}=\sqrt{2}.T_{01}$$

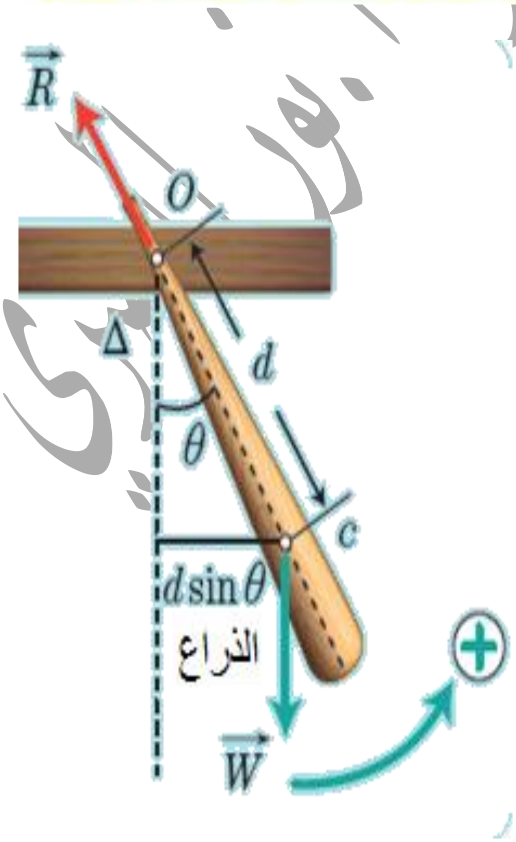
نلاحظ أن $T_{02}=\sqrt{2}.T_{01}$

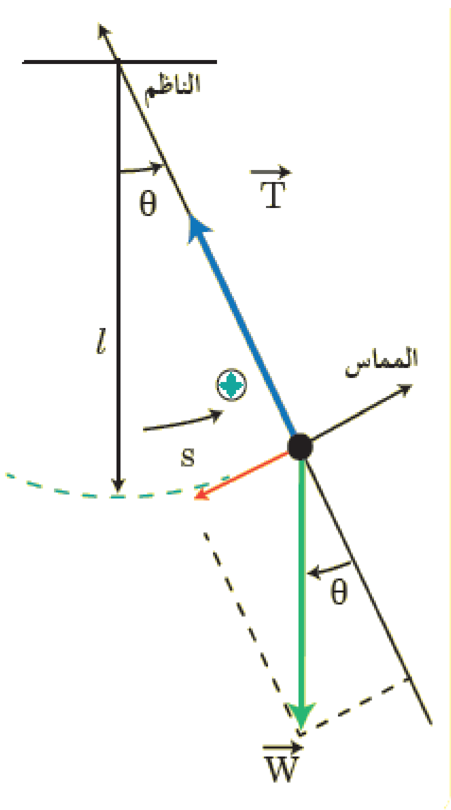
أي $T_{02} > T_{01}$



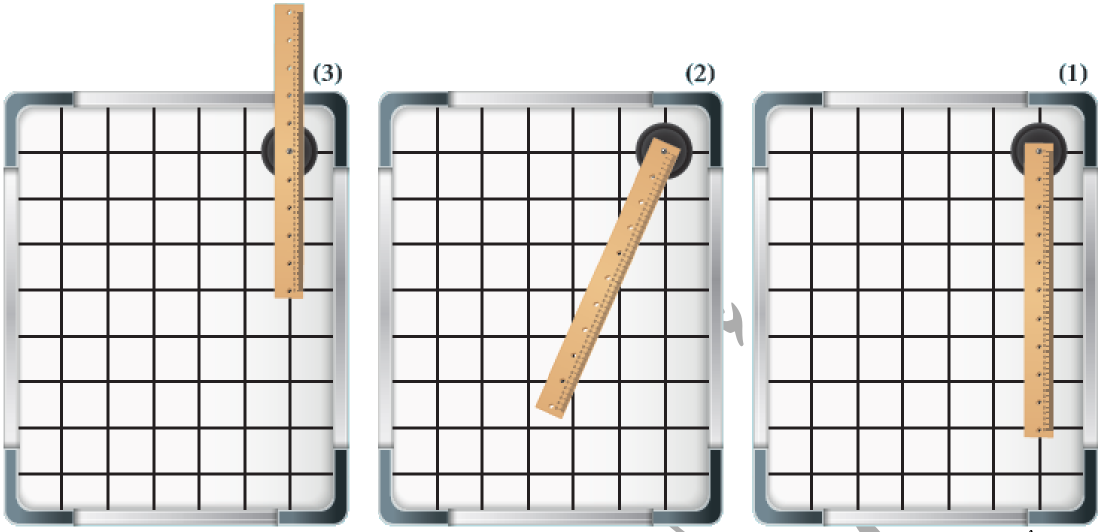
الدرس الثالث: الاهتزازاتُ غيرُ التوافقيّةِ

النوّاس الثقليّ غيرُ المتخامدِ





نشاط (١):



1. أُعلّقُ المسطرة من طرفها العلويّ في النقطة O بحامل مثبّت على اللوح، عموديّاً على مستويها الشاقوليّ، ليكونَ محورُ الدوران أفقيّاً، وأتركُها تتوازنُ شاقوليّاً.

أ- ما القوى الخارجية المؤثّرة في الساق في هذه الحالة؟

ب- أحدّدُ عزومَ القوى المؤثّرة

الحل: 1. القوى الخارجيّة المؤثّرة في الساق:أ- قوّة الثقل $\vec{w}$ و قوّة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$
ب-عزومها تساوي الصفر :لأن القوى تمر من محور الدوران

2. أزيحُ المسطرة عن موضع توازنها بزاوية θ_1 وأتركُها دون سرعة ابتدائيّة.

أ- ما نوعُ حركة المسطرة؟

ب- أحدّدُ عزوم القوى المؤثّرة في هذه الحالة.

الحل: 2. أ- حركة النوّاس الثقليّ هي حركةٌ اهتزازيّةٌ غيرُ توافقيّة. لكي تصبحُ حركةُ النوّاس الثقليّ حركة اهتزازية جيبية يجب أن تكون السّعات الزاويّة الصغيرة $(\theta \leq 0.24rad)$

ب- العزوم : $\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأنّ حاملَ $\vec{R}$ يمرُّ من محور الدورانΔ

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = \text{الذراع} \times \text{القوة} \Longrightarrow \bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -(d\sin\theta)\mathrm{w} \Longrightarrow$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -m.g.d\sin\theta$$

3. أعلّقُ المسطرةَ من ثُقب في منتصفها أزيحُ المسطرة عن موضع توازنها الشاقوليّ بزاوية θ_2 وأتركُها دون سرعة ابتدائيّة.

أ- هل تتحرّكُ المسطرة؟

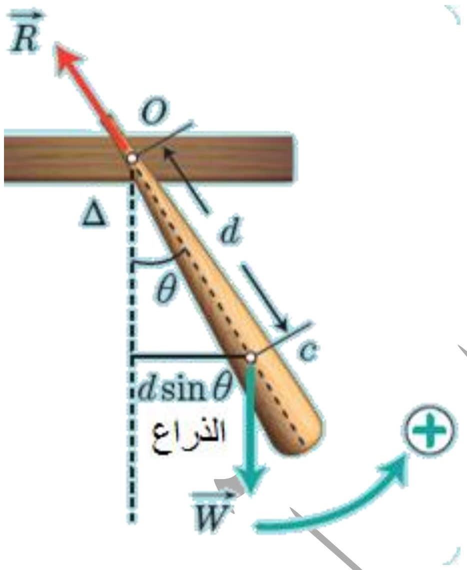
ب- ما نوعُ توازن المسطرة؟

ج- ما قيمةُ عزوم القوى المؤثّرة في هذه الحالة؟

الحل:	أ - لا تتحرك	ب- توازن مطلق	ج - معدومة

سؤال عرف نواس الثقلي: هو كلَّ جسم صُلْبٍ يهتزّ بتأثير عزم قوّة ثقله حول محور دوران عموديّ على مستويه، ولا يمرُّ من مركز عطالته.

سؤال دورة: نعلّقُ جسماً صُلباً كتلتُه m ، مركزُ عطالته C إلى محور دوران أفقيّ Δ مارّ من النقطة O من الجسم حيث البعد $d= OC$. نزيحُ الجسمَ عن موضع توازنه الشاقوليّ زاوية θ ونتركُه دون سرعة ابتدائيّة ليهتزّ في مستوٍ شاقوليّ ادرس تحريكياً نواس الثقلي المركب مستنتجاً المعادلة التفاضلية والحل الجيبي؟



١-القوى الخارجيّة المؤثّرة في الساق:

أ- قوّة الثقل $\vec{w}$

ب- قوّة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$

٢- بتطبيق العلاقة الأساسيّة في التحريك الدورانيّ (نظرية التسارع الزاوي) حول محور Δ

$$\sum \bar{\Gamma}_{\vec{F}/\Delta} = I_\Delta . \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = I_\Delta . \bar{\alpha}$$

٣- نوجد العزوم :

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأنّ حامل $\vec{R}$ يمرُّ من محور الدورانΔ

$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} =$ القوة $\times$ الذراع

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -(d \sin\theta)\mathrm{w} \Longrightarrow$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -m.g.d\sin\theta$$

بالتعويض نجد: $-m.g.d\sin\theta = I_\Delta.\bar{\alpha} \quad \Rightarrow \quad 0 - m.g.d\sin\theta = I_\Delta.\bar{\alpha}$

$\bar{\alpha}=(\theta)''_t \quad \Rightarrow -m.g.d\sin\bar{\theta} = I_\Delta.(\bar{\theta})''_t \Longrightarrow (\bar{\boldsymbol{\theta}})''_t = -\frac{\boldsymbol{m.g.d}}{\boldsymbol{I_\Delta}}\sin\bar{\boldsymbol{\theta}}$

وهي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية فهي تحوي $\sin\bar{\theta}$ بدل $\bar{\theta}$ فحلُّها ليس جيبيّاً، ومن ذلك فإنّ حركة النوّاس الثقليّ هي حركةٌ اهتزازيّةٌ غيرُ توافقيّة. لكي تصبحُ حركةُ النوّاس الثقليّ حركة اهتزازية جيبية يجب أن تكون السّعات الزاويّة الصغيرة $(\theta \leq 0.24rad)$ في هذه الحالة $\sin\bar{\theta} \simeq \bar{\theta}$:

$$\Rightarrow (\bar{\boldsymbol{\theta}})''_t = -\frac{\boldsymbol{m.g.d}}{\boldsymbol{I_\Delta}}\bar{\boldsymbol{\theta}}$$

وهي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبل حلَّ جيبيّاً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

سؤال دورة : انطلاقاً من العلاقة $(\bar{\theta})''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}\bar{\theta}$ استنتج طبيعة الحركة (النبض الخاص) ودور الخاص) لنواس الثقلي؟

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}\bar{\theta} \qquad \dots\dots\dots (1)$$

و هي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبلُ حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقّقِ من صحّة الحلّ نشتقّ تابع المطال مرّتين بالنسبة للزّمن نجد:

$$(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\theta)''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0{}^2.\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0{}^2.\bar{\theta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجدأن : $\omega_0{}^2 = \frac{m.g.d}{I_\Delta} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} > 0}$

محققٌ لأنّ g, I_Δ, m, d مقاديرموجبة.

نتيجة: إنّ حركةَ النوّاس الثقلي هي حركةٌ جيبيّةٌ دورانيّة فقط لأجل السّعات الزاويّة الصغيرة

استنتاجُ علاقةِ الدّورِ الخاصِّ للنوّاس الثقلي المركب من أجل سعات صغيرة:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بالمساواة بين (1)و(2) نجد أن :

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} \text{ نقلب } \Longrightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}} \Longrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}}$$

و هي العلاقةُ العامّةُ للدّور الخاصّ للنوّاس الثقليّ في حالة الاهتزازات صغيرة السّعة.

١- T_0 دورُ النوّاس الثقليّ الخاص بسعة زاويّة صغيرة، واحدتُه s.

٢- I_Δ عزمُ عطالة الجسم الصُلب، واحدتُه $kg.m^2$.

٣- d بعدُ محور الدوران عن مركز عطالة الجسم الصُلب C واحدتُه m ويمكنُ حسابُها بطريقتين:

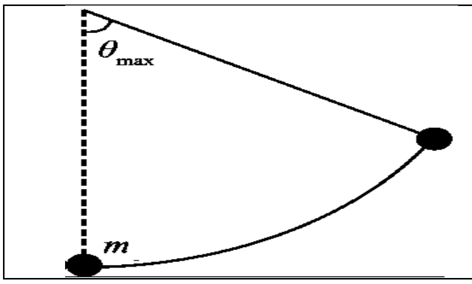
أ- بتطبيق علاقة التوازن الدورانيّ $\sum \bar{\Gamma}_{\Delta/c} = 0$ حول محور دوران مارّ من C.

ب- طريقة ثانية: $d = oc = \frac{\sum m.\bar{r}}{\sum m}$

$\bar{r}$ مقدارٌ جبريٌّ نعدُّه موجباً إذا كان مركزُ عطالة الكتلة المهتزّة تحت محور الدوران، وسالباً إذا كان مركزُ عطالة الكتلة المهتزّة فوق محور الدوران. و هي بعد النقطة المادية عن محور الدوران. (سوف نعتمد على الطريقة الثانية دوما)

النوّاس الثقلىّ البسيط:

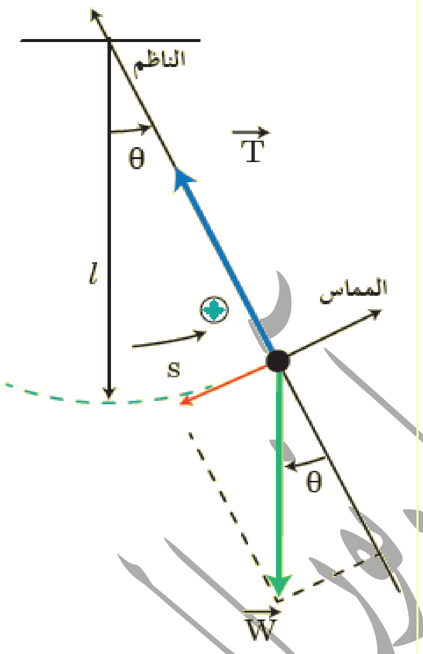
سؤال دورة: عرف نواس الثقلي البسيط نظرياً وعملياً؟



نظريّاً: نقطةٌ مادّيّةٌ تهتزّ بتأثير ثقلها على بُعد ثابت l من محور أفقيّ ثابت.

عمليّاً: كرةٌ صغيرةٌ كتلتُها m كثافتُها النسبيّة كبيرةٌ معلّقةٌ بخيطٍ مهملِ الكتلة لا يمتط طولُهُ l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

سؤال : ادرس تحريكياً كرة صغيرة كتلتُها m معلقة بخيط خيف لا يمتط مستنتجاً علاقة النبض الخاص والدور الخاص؟



١-القوى الخارجية المؤثرة:

أ- $\vec{W}$قوة ثقل الكرة لأن الخيط مهمل الكتلة.

ب- $\vec{T}$قوة توتر الخيط

٢-نطبق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Longrightarrow \quad \vec{T} + \vec{W} = m.\vec{a}$$

5-نسقط على المَمَاسّ الموجّه بجهة إزاحة الكرة

$$0 - W\sin\theta = m.a_t \Longrightarrow$$

$$-m.g\sin\theta = m.a_t$$

لدينا: $\bar{\alpha} = \frac{\bar{a_t}}{l} \Longrightarrow \bar{a_t} = l.\bar{\alpha}$

$$-m.g\sin\theta = m(\,l.\bar{\alpha})$$

$$\Longrightarrow \qquad -g\sin\theta = \,l.\bar{\alpha}$$

لدينا $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$

$$\Rightarrow\ -g\sin\bar{\theta} = l.(\bar{\theta})''_t \Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\bar{\theta}$$

في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة $(\theta \le 0.24rad)$ في هذه الحالة$\sin\bar{\theta} \simeq \bar{\theta}$:

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots.\ (1)$$

هي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبل حلّاً جيبيّاً من الشكل: $\boldsymbol{\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$

نشتق مرتين بالنسبة الزمن $(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\,\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$(\theta)''_t = \bar{\alpha} = -{\omega_0}^2.\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -{\omega_0}^2.\bar{\theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ (2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجدأن: ${\omega_0}^2 = \frac{g}{l} \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0}$$

و هذا محقّقٌ لأنّ g, l , موجبان.

نتيجة: إنّ حركةَ النوّاس الثقلي البسيط هي حركةٌ جيبيّةٌ دورانيّة فقط لأجل السّعات الزاويّة الصغيرة (لكن حركة الكرة فقط دائرية لذلك نطبق قانون نيوتن في الدراسة)

استنتاجُ علاقةِ الدّورِ الخاصِّ للنوّاس الثقلي البسيط:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالمساواة بين (1)و(2) نجد أن:

$$\Longrightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Longrightarrow \boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

وهي علاقةُ الدّور الخاصّ للنوّاس الثقليّ البسيط في السعات الصغيرة.

سؤال دورة: استنتج علاقةِ الدّور الخاصّ للنوّاس البسيط انطلاقاً من العلاقة العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثقليّ المركّب في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة؟

الحل

مركب $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$

لدينا: $d = l$, $I_\Delta = m.l^2$ نعوض في الدور

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m.l^2}{m.g.l}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

نتائج:

1. **لا يتعلّقُ دورُ النوّاس البسيط بكتلته، ولا بنوع مادّة كرته.**
2. **النوسات صغيرة السّعة لها الدورُ نفسُه(متواقتة فيما بينها)**
3. **يتناسبُ دورُ النوّاس البسيط طرداً مع الجذر التربيعيّ لطول الخيط l.**
4. **يتناسبُ دورُ النوّاس البسيط عكساً مع الجذر التربيعيّ لتسارع الجاذبيّة الأرضيّة g**

ملاحظة : إنّ مستويَ النّوَسانِ ثابتٌ طيلةَ مدَّة إجراء التجرِبة.

ملاحظة: يُعطى دورُ النوّاس الثقليّ في حال السّعات الزاويّة الكبيرة بالعلاقة:

$$T_0{}' \simeq T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

$T_0{}'$ **: دورُ النوّاس الثقليّ في حال السّعات الزاويّة الكبيرة .**

T_0 **: دورُ النوّاس في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة .**

θ_{max}**: السّعة الزاويّة مقدّرة بالراديان**

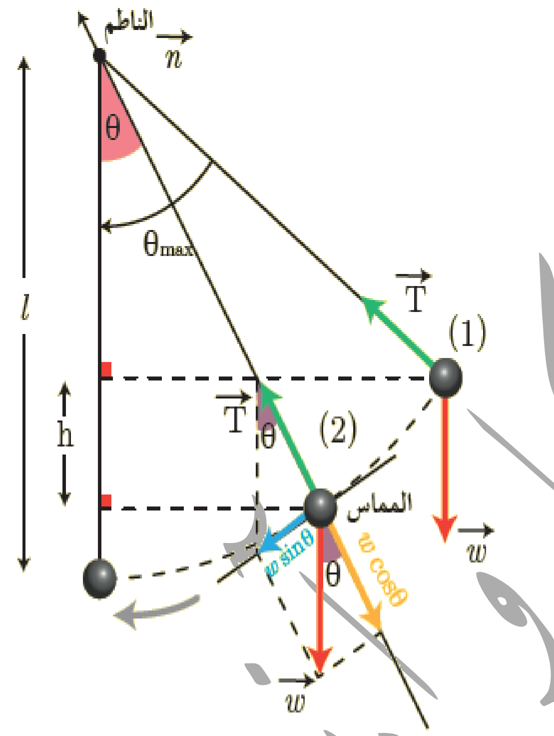
سؤال : استنتج العلاقة المحدّدة لسرعة كرة النوّاس ؟

تطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين1 و2 :

القوى الخارجيّة المؤثّرة: أ- $\vec{W}$قوة ثقل الكرة لأن الخيط مهمل الكتلة.   ب- $\vec{T}$قوة توتر الخيط

الوضع البدائي : حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ max .

الوضع النهائي: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ .



$$\Delta E_{K(1\to2)} = \sum \overline{W}_{\vec{F}} \Rightarrow$$

$$E_{K(2)} - E_{K(1)} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{T}} \ldots.(*)$$

نوجد المجاهيل الأربعة في العلاقة(١):

$$\boxed{E_{K(1)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)}$$

وذلك لأن السرعة الابتدائية معدومة لحظة ترك النواس دون سرعة بدائية

$$\boxed{E_{K(2)} = \frac{1}{2}\mathrm{m}.v^2 \quad \ldots\ldots.(2)}$$

$$\boxed{\overline{W}_{\vec{T}} = 0 \quad \ldots..(3)}$$

لأنّ حاملَ $\vec{T}$ يعامدُ الانتقال في كلّ لحظة

$$\overline{W}_{\vec{W}} = \mathrm{W} \times h \;\; = m.g \times h$$

نوجد h الإنتقال من الرسم:

$$h = l\;\cos(\theta) - l\cos(\theta_{\max})$$

$$h = l\,[\cos(\theta) - \;\cos(\theta_{\max})]$$

$$\boxed{W_{\vec{w}} = m.gl\,[\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})] \ldots\ldots\ldots\ldots..(4)}$$

نعوض (1,2,3,4,) في (*) :

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}.v^2 - 0 = m.g.l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})] + 0$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}.v^2 = m.g.l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}v^2 = g.l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})] \Rightarrow v^2 = 2g.l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})]$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g.l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})]}$$

حالة خاصّة : عند المرور بالشاقول: $\theta = 0\mathrm{rad} \Rightarrow \cos(\theta) = 1$ تصبح العلاقة :

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g.l[1 - \cos(\theta_{\max})]}$$

سؤال: استنتج العلاقة المحدّدة لقوّة توتّر الخيط في الوضع (2) عند المرور بالشاقول ؟

1-القوى الخارجية المؤثرة: أ- $\overrightarrow{W}$قوة ثقل الكرة لأن الخيط مهمل الكتلة. ب- $\overrightarrow{T}$قوة توتر الخيط

2- نطبّق العلاقة الأساسية في التحريك: $\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{T} + \overrightarrow{W} = m.\vec{a}$

3-نسقط الأشعة على محور ينطبق على حامل $\overrightarrow{T}$ وبجهته(الناظم):

$$T - W\cos(\theta) = m.a_{c_{\text{ناظم}}}$$

لدينا $a_{c_{\text{ناظم}}} = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$ نعزل T ونعوض قيمة $a_{c_{\text{ناظم}}}$ فنجد أن:

$$T = m.a_{c_{\text{ناظم}}} + W\cos(\theta) \quad \Rightarrow T = m.\frac{v^2}{l} + m.g\cos(\theta)$$

لدينا $v^2 = 2g.l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{max})]$ نعوض في T

$$\Rightarrow T = m.\frac{2g.l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{max})]}{l} + m.g\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow T = 2m.g.[\cos(\theta) - \cos(\theta_{max})] + m.g\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow T = 2m.g\cos(\theta) - 2m.g\cos(\theta_{max}) + m.g\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow T = 3m.g\cos(\theta) - 2m.g\cos(\theta_{max})$$

$$\Rightarrow T = m.g[3\cos(\theta) - 2\cos(\theta_{max})]$$

حالة خاصّة : عند المرور بالشاقول $\theta = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 1$

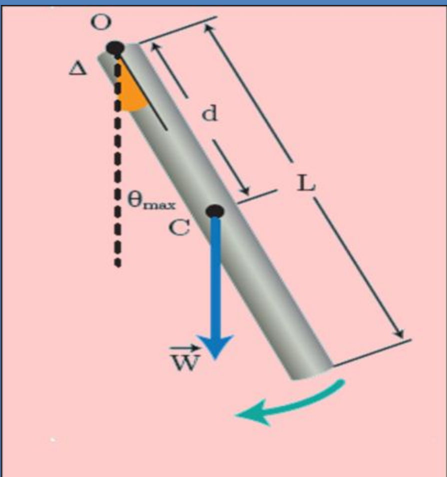
$$\Rightarrow T = m.g[3 - 2\cos(\theta_{max})]$$

الطاقةُ الميكانيكيّة للنوّاس الثقليّ البسيط:

١- إنّ الطاقة الميكانيكيّة للنوّاس الثقليّ البسيط ثابتةٌ بإهمال القوى المبدّدة للطاقة إذْ يهتزُّ بسعة زاويّة ثابتة θ_{max} إلى جانبَي موضع توازنه الشاقوليّ.

٢- إنَّ الطاقة الميكانيكيّة هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقاليّة، والحركيّة، بفرض أنّ مبدأ قياس الطاقة الكامنة الثقاليّة هوالمستوي الأفقيُّ المارُّ من مركز عطالة الكرة عند مرور النوّاس في وضع توازنه الشاقوليّ. $E_{TOT} = E_K + E_{P_{\text{ثقالية}}} = const$

مثال محلول: **نوّاسٌ ثقليٌّ مؤلّفٌ من ساقٍ متجانسةٍ طولُها $L = 0.375 = \frac{3}{8}m$ وكتلتُها M معلّقةٌ من طرفها العلويّ بمحور أفقيّ عموديّ على مستويها الشاقوليّ، نزيحُ الساق عن موضع توازنها الشاقوليّ زاويةً صغيرةً $\theta \leq 14^o$ ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة . استنتِجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة للدّور الخاصّ انطلاقاً من العلاقة العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثقليّ المركّب، ثمّ احسب قيمتَها، علماً أنّ عزمَ عطالة السّاق حول محور عموديّ على مستويها ومارّ من مركز عطالته $(I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}M.L^2)$**



المعطيات : $L = 0.375 = \frac{3}{8}\mathrm{m}$ $\quad I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}M.L^2$

الحل: معلّقةٌ من طرفها العلويّ أي نطبق هايغنز

من أجل نوسات صغيرة علاقة الدورعندما يمر محور الدوران من على محيط القرص

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{هايغنز}}}{M.g.d}}$ المجاهيل ($I_{\Delta/\text{هايغنز}}$ و d)

نوجد المجهول الأول: $d = oc = \frac{L}{2}$ وذلك من خلال الرسم
نوجد المجهول الثاني $I_{\Delta/\text{هايغنز}}$ حسب هويغنز لأن محور الدوران يمر من على محيط القرص $I_{\Delta/\text{هايغنز}} = I\Delta/c + M.d^2 \Longrightarrow I_{\Delta/\text{هايغنز}} = \frac{1}{12}ML^2 + +M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4}$ $I_{\Delta/\text{هايغنز}} = \frac{1}{3}M.L^2$

نعوض في T_0 :

$$T0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}M.L^2}{M.g.\frac{L}{2}}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}L}{\frac{1}{2}g}} \text{ بالرموز } \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}(\frac{3}{8})}{\frac{1}{2}(10)}}$$

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{(\frac{1}{8})}{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2} = 1 \quad S$$

حل الأسئلة النظرية:

أولا :اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

1. قمتَ بزيارةِ بيتِ جدّك، وطلبتْ إليك جدّتُك تصحيحَ الميقاتيّة المعلّقة على الجدار، وهي مؤلّفة من ساق منتهية بقرص قابل للحركة صعوداً أو هبوطاً، فاتّصلت بالساعة الناطقة فأشارت إلى السادسة تماماً عندما كانت الميقاتيّةُ تشيرُ إلى السادسة وخمسِ دقائقَ، ولتصحيح الوقت يجبُ:

a. إيقافُ الميقاتيّة، وخفضُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها.

b. إيقافُ الميقاتيّة، ورفعُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها.

c. تصحيحُ عقربِ الدقائق، وإعادتُه ليشيرَ الوقتُ إلى السادسة تماماً.

d. إيقافُ الميقاتيّة مدّة خمسِ دقائقَ، ثمّ إعادةُ تشغيلها مرّة أخرى.

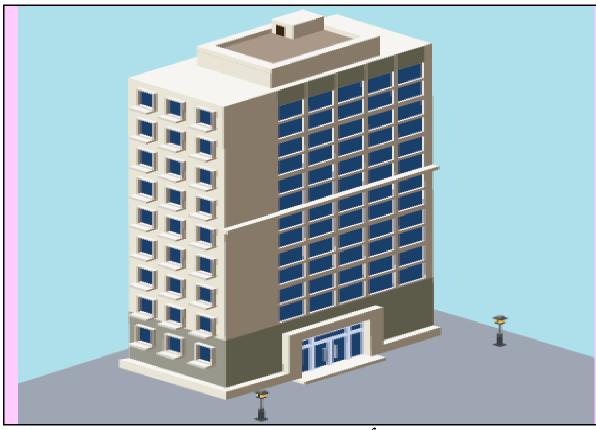
الحل: بما أن الميقاتية مسبقة يجب تأخيرها لتصحيح عملها من خلال زيادة مدة الدور وذلك بزيادة عزم العطالة الناتج عن زيادة بعد الكتلة عن محور الدوران بخفضها قليلا للاسفل

الإجابة:

a. إيقافُ الميقاتيّة، وخفضُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها.

2. ميقاتيّتان متماثلتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت المحلّيّ، نضع الأولى بالطابق الأرضيّ لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنّه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة:

a. تشيران إلى التوقيت نفسه .
b. تقدم الثانية، ويجب تعديلُها .
c. تؤخرُ الثانية، ويجبُ تعديلُها.
d. تؤخرُ الأولى، ويجبُ تعديلُها.

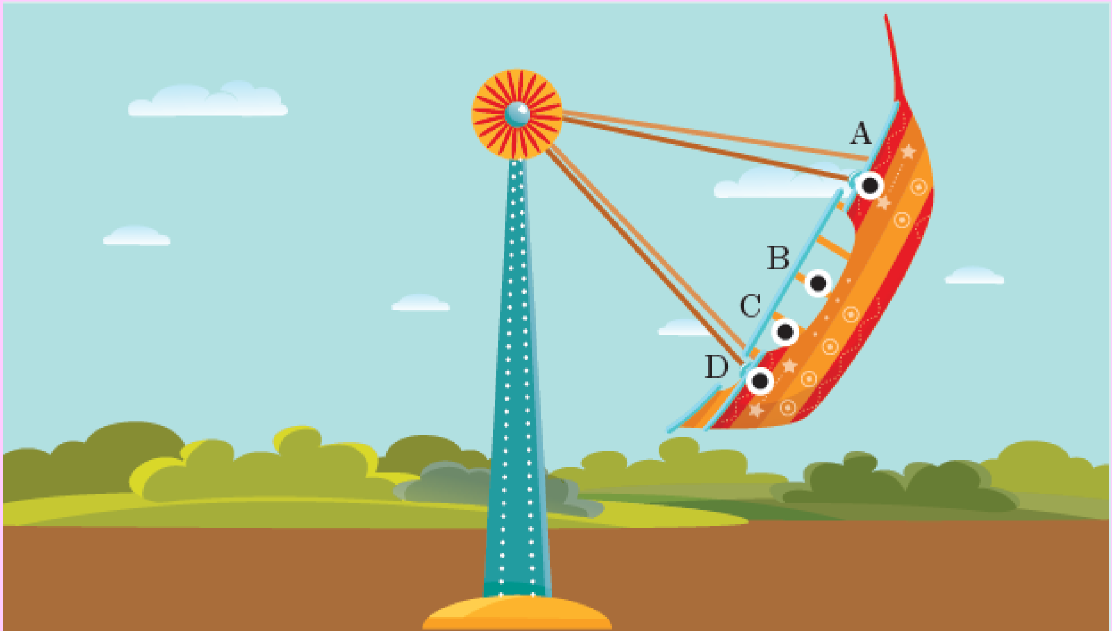


الحل: كلما ارتفعنا الجاذبية تنقص وبالتالي الدور يزداد لأن التناسب عكسي

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$ أو $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ وبالتالي الميقاتية تتأخر لعد هذا الدور

الإجابة: **c. تؤخرُ الثانية، ويجبُ تعديلَها.**

3 - أرجوحةٌ كبيرةٌ نعدُّها نوّاساً ثقليّاً مركّباً كما هو موضّح بالشكل جانباً تهتزّ إلى جانبَي موضعِ توازنها بسعة كبيرة، ويجلس فيها أربعةُ أشخاص A, B, C, D :



فالشخصُ الذي تكونُ سرعتُه الخطيّةُ أكبرَ ما يمكنُ عند المرور بوضع الشاقول هو:

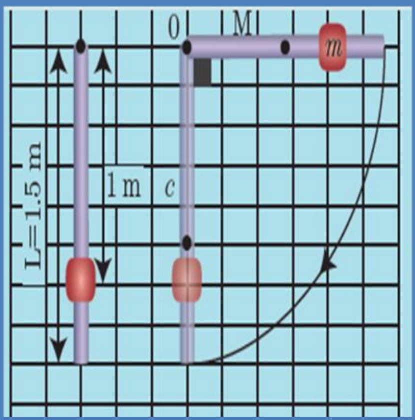
a. الشخصُ B . **b.** الشخصُ A . **c.** الشخصُ C. **d.** الشخصُ D .

الإجابة: أكبر سرعة يبلغها النواس لحظة المرور بوضع الشاقول هي سرعة مركز العطالة و النقطة Bهي الأقرب لمركز العطالة

a.الشخصُ B

ثالثاً :حُلَّ المسائلَ الآتيةَ: (في جميع المسائل $4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10mS^{-2}$)

المسألة الأولى: يتألّفُ نوّاسٌ ثقليٌّ مركّبٌ من ساقٍ شاقوليّةٍ، متجانسةٍ، كتلتُها $M = 0.5$ kg ، طولُها 1.5m ، يمكنُها أنْ تنوس حولَ محورٍ أفقيٍّ مارٍّ من طرفها العلويّ، ومثبّت عليها كتلة نقطيّة $m' = 0.5$ kg على بُعد 1m من هذا الطرف، كما في الشكل المجاور المطلوب.:



1.احسبْ دورَ هذا النوّاس في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

2.نزيحُ جملة النوّاس عن موضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\frac{\pi}{2}$ rad، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة .احسبِ الطاقةَ الحركيّة للنوّاس لحظة مروره بالشاقول، ثمّ احسب السرعة الخطّيّة للكتلة النقطيّة m' عندئذٍ. (عزم عطالة ساق حول محور عموديّ على مستويها ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} M.L^2$)

المعطيات: $M = 0.5$ kg ساق/ كتلةٌ نقطيّة $m' = 0.5$ kg / و $l' = 1\ m$ بعد الكتلة النقطية
طول الساق $L=1.5=\frac{3}{2}$m

الحل: ١- علاقة الدور من أجل الجملة (محور الدوران يمر من الأعلى نطبق هايغنز)

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{m_{جملة}.g.d}}$ المجاهيل ($I_{\Delta/جملة}$ و $m_{جملة}$ و d) نوجد المجاهيل

المجهول الأول : $m_{جملة}$ $m_{جملة} = M + m' = 0.5 + 0.5 = 1Kg$

المجهول الثاني : $I_{\Delta/جملة}$ $I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/هايغنز} + I_{\Delta/m'}$

نوجد : $I_{\Delta/هايغنز}$ $I_{\Delta/هايغنز} = \frac{1}{12} ML^2 + Mr^2$

بعد كتلة الساق عن محور الدوران $r = \frac{L}{2}$ لأن كتلة الساق بالمنتصف

$$I_{\Delta/هايغنز} = \frac{1}{12} ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3} ML^2$$

نوجد $I_{\Delta/m'}$: $I_{\Delta/m'} = m'(l')^2$

$$I_{\Delta/جملة} = \frac{1}{3} ML^2 + m'(l')^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(1)^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}\ kg.m^2$$

المجهول الثالث : $d = oc$ $d = \frac{\sum m_i.r_i}{\sum m_i}$ الكتلتين تحت الحور أي $m_i.r_i$ موجبتين

$$d = \frac{M.(\frac{L}{2})+m'.l'}{M+m'} = \frac{0.5(\frac{3}{2})+0.5(1)}{1} = 0.5\left[\left(\frac{3}{4}\right) + (1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{4}\right] = \frac{7}{8}\ m$$

نعوض المجاهيل بعلاقة الدور: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1\times10\times\frac{7}{8}}} = 2\sqrt{1} = 2$ sec

٢- نزيح الساق بزاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{2} rad$ فوراً نطبق نظرية الطاقة الحركية في حالة وضعين: $E_{K(2)} = ?$ جملة المقارنة :خارجية

القوى الخارجيّة المؤثّرة: أ- $\overrightarrow{W}$قوة ثقل الجملة.

ب- $\overrightarrow{R}$قوة رد فعل محور الدوران

الوضع البدائي(١): $\theta_1 = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} Rad$ إزاحة عظمى

الوضع النهائي(٢): $\theta_2 = 0$ المرور بالشاقول

$$\overline{\Delta E_{K_{(1\to2)}}} = \sum \overline{W_{\vec{F}}} \Longrightarrow E_{K(2)} - E_{K(1)} = W_{\overrightarrow{w_{جملة}}} + W_{\vec{R}} \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

نوجد المجاهيل في العلاقة(*): $E_{K(1)} = 0$ ....(1)

وذلك لأن السرعة الابتدائية معدومة لحظة ترك النواس دون سرعة

$W_{\vec{R}} = 0$ ....(3) لأن نقطة تأثير القوة $\vec{R}$ لا تنتقل أبداً.

$$W_{\vec{w}} = w \times h = mg \times h$$

$$\boxed{\Longrightarrow h = d[\cos(\theta) - \cos(\theta_{max})] \Longrightarrow h = d[1 - \cos(\theta_{max})]}$$

$$W_{\vec{w}} = m_{جملة}.g.d[1 - \cos(\theta_{max})]$$

$$W_{\vec{w}} = m_{جملة} g d[1 - \cos(\theta_{max})] \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض $(1,2,3,45)$ في $(*)$: $E_{K(2)} - 0 = m_{جملة} g.d[1 - \cos(\theta_{max})] + 0$:

$$E_{K(2)} = m_{جملة} g.d[1 - \cos(\theta_{max})] = 1 \times 10 \times \frac{7}{8}[1 - 0] = \frac{70}{8} \quad J$$

السرعة الخطية **<u>للكتلة النقطية</u>** $v_{m'} = ?$ نحسب w أولاً

$$E_{K(2)} = \frac{1}{2} I_{\Delta/جملة} . w^2 \Longrightarrow w^2 = \frac{2.E_{K(2)}}{I_{\Delta/جملة}} \Longrightarrow w = \sqrt{\frac{2.E_{K(2)}}{I_{\Delta/جملة}}}$$

$$w = \sqrt{\frac{2 \times \frac{70}{8}}{\frac{7}{8}}} \Longrightarrow w = \sqrt{2 \times 10} = \sqrt{2}\pi \qquad rad.s^{-1}$$

السرعة الخطية **<u>للكتلة النقطية</u>**، هناك علاقة بين السرعة الخطية و الدورانية

(هنا نقول $r_{m'} = l'$)

$$v = w.r_{m'} \Longrightarrow v = w.l' \Longrightarrow v = \sqrt{2}\pi.(1) = \sqrt{2}\,\pi \qquad m.\sec^{-1}$$

المسألة الثانية: خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40\ cm$ نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m_1 = 100\ g$ المطلوب:

1.يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية θ_{max} ونترك الكرة بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v = 2 m.S^{-1}$ استنتج قيمة الزاوية θ_{max} .

2.استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بوضع الشاقول ثم احسب قيمته.

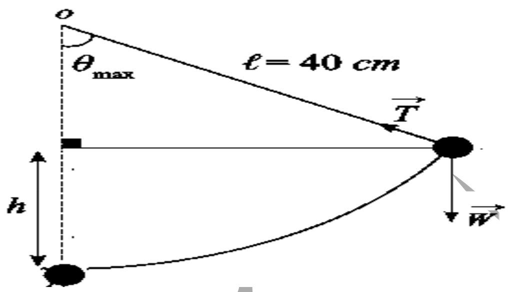
المعطيات: $l = 40\times10^{-2}\ m \quad , \quad m_1 = 100\times10^{-3} = 10^{-1} kg \quad , \quad v = 2\ m.s^{-1}$

الحل: ١- تطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين 1 و2 :

القوى الخارجيّة المؤثّرة: أ- قوة ثقل الكرة $\vec{W}$ لأن الخيط مهمل الكتلة. ب- قوة توتر الخيط $\vec{T}$

الوضع البدائي : حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max} .

الوضع النهائي: عند المرور بالشاقول $\theta = 0 rad$.



$$\overline{\Delta E}_{K(1\to2)} = \sum \overline{W}_{\vec{F}} \quad \Longrightarrow$$

$$E_{K(2)} - E_{K(1)} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{T}} \ \ldots.(*)$$

نوجد المجاهيل الأربعة في العلاقة(١):

$$E_{K(1)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وذلك لأن السرعة الابتدائية معدومة لحظة ترك النواس دون سرعة بدائية

$$E_{K(2)} = \frac{1}{2} m.v^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\overline{W}_{\vec{T}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$ لأنّ حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كلّ لحظة

$$\overline{W}_{\vec{W}} = W \times h = m.g \times h$$

نوجد الإنتقال h من الرسم:	$h = l\,[1 - \cos(\theta_{max})]$

$$W_{\vec{w}} = m.g \times l\,[1 - \cos(\theta_{max})] \ \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض $(1,2,3,4)$ في $(*)$: $\frac{1}{2} m.v^2 - 0 = m.g.l[1 - \cos(\theta_{max})] + 0$

$$\frac{1}{2} m.v^2 = m.g.l[1 - \cos(\theta_{max})] \Longrightarrow \frac{1}{2} v^2 = g.l[1 - \cos(\theta_{max})]$$

$$v^2 = 2g.l[1 - \cos(\theta_{max})] \Longrightarrow \frac{v^2}{2.g.l} = [1 - \cos(\theta_{max})]$$

$$\cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{v^2}{2.g.l}$$ بالرموز $$\Longrightarrow \cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{(2)^2}{2\times10\times40\times10^{-2}}$$

$$\Longrightarrow \cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{4}{2\times10\times40\times10^{-2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ومنه نوجد الزاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$ وهو المطلوب

2-١-القوى الخارجية المؤثرة أ- $\vec{W}$قوة ثقل الكرة لأن الخيط مهمل الكتلة. ب- $\vec{T}$قوة توتر الخيط

٢- نطبّق العلاقة الأساسية في التحريك: $\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Longrightarrow \vec{T} + \vec{W} = m.\vec{a}$

٣-نسقط الأشعة على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته(الناظم):

$$T - W\cos(\theta) = m.a_{c_{ناظم}}$$

لدينا $a_{c_{ناظم}} = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$ نعزل T ونعوض قيمة $a_{c_{ناظم}}$ فنجد أن:

$$T = m.a_{c_{ناظم}} + W\cos(\theta) \quad \Longrightarrow T = m.\frac{v^2}{l} + m.g\cos(\theta)$$

عند المرور بالشاقول $\theta = 0rad \; : \Longrightarrow \cos(\theta) = 1$

$$T = 10^{-1} \times \frac{(2)^2}{40 \times 10^{-2}} + 10^{-1} \times 10 \times 1 = 1 + 1 = 2 \; N$$

المسألة الثالثة: نعلّقُ كرةً صغيرةً نعدُّها نقطة ماديّة، كتلتُها $m = 0.5$ kg بخيطٍ مهملِ الكتلة، لا يمتطّ، طولُه l =: 1.6m، لتؤلّفَ نوّاساً ثقليّاً بسيطاً، ثمّ نزيحُ الكرة إلى مستوٍ أفقيّ يرتفع $h = 0.8$m عن المستوى الأفقيّ المارّ منها وهي في موضع توازنها الشاقوليّ، ليصنعَ خيطُ النوّاس مع الشاقول زاوية θ_{max} ، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة، المطلوب:

1.استنتجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول، ثمّ احسبْ قيمتها، موضّحاً بالرسم.

2.استنتجْ قيمةَ الزاوية θ_{max} ، ثمّ احسبْ قيمتها.

3.احسبْ دورَ هذا النوّاس.

4.استنتجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة لشدّة قوّة توتّر الخيط عند المرور بالشاقول، ثمّ احسب قيمتها.

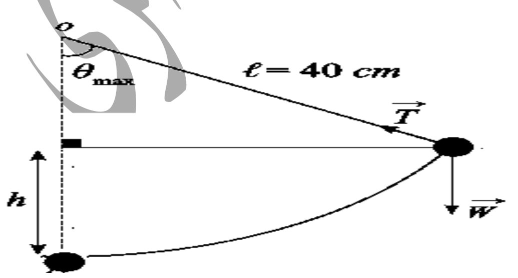
<u>المعطيات:</u> $h = 0.8$m , $m = 0.5$ kg , $l = 1.6$ (m)

<u>الحل:</u> 1- تطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين1 و2 :

القوى الخارجيّة المؤثّرة: أ- $\vec{W}$قوة ثقل الكرة لأن الخيط مهمل الكتلة. ب- $\vec{T}$قوة توتر الخيط

<u>الوضع البدائي :</u> حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max} .

<u>الوضع النهائي:</u> حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ .



$$\Longrightarrow \qquad \overline{\Delta E}_{K(1\to2)} = \sum \overline{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K(2)} - E_{K(1)} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{T}} \; ....(*)$$

نوجد المجاهيل الأربعة في العلاقة(١):

$E_{K(1)} = 0$ ....(1)

لأن النواس ترك النواس دون سرعة بدائية

$E_{K(2)} = \frac{1}{2}m.v^2$ ... ...(2)

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ ... ... (3) لأنّ حاملَ $\vec{T}$يعامدُ الانتقال في كلّ لحظة

$\overline{W}_{\vec{W}} = W \times h = m.g.h$ ... ... (4)

<u>**نعوض (1,2,3,4) في (*) :**</u> $\frac{1}{2}\text{m}.v^2 - 0 = m.g.h$

$$\frac{1}{2}\text{m}.v^2 = m.g.h \Rightarrow v^2 = \frac{2m.g.h}{\text{m}} = 2.g.h \Rightarrow v = \sqrt{2.g.h}$$

$$v = \sqrt{2(10)(0.8)} = \sqrt{16} = 4 \quad m.s^{-1}$$

٢- $\theta_{max} = ?$ من h :

$$h = l\cos(\theta) - l\cos(\theta_{max}) \Rightarrow h = l[\cos(\theta) - \cos(\theta_{max})]$$

عند المرور بالشاقول $\theta = 0 \text{ rad} : \Rightarrow \cos(\theta) = 1$

$$\Rightarrow h = l[1 - \cos(\theta_{max})] \Rightarrow [1 - \cos(\theta_{max})] = \frac{h}{l}$$

$$\cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{0.8}{1.6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ومنه نوجد الزاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$ وهو المطلوب

3- $\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad > 0.24 rad$ سعات كبيرة الدور: $T_0' \simeq T_0(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16})$

نحسب الدور من أجل سعات صغيرة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{16\times10^{-2}}$

$$T_0 = 2\pi \times 4 \times 10^{-1} = 8\pi \times 10^{-1} = 25 \times 10^{-1} = 2.5\ s$$

$$\Rightarrow T_0' \simeq 2.5(1 + \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{16}) T_0' \simeq 2.5\left(1 + \frac{\frac{10}{9}}{16}\right) \simeq 2.5\left(1 + \frac{10}{144}\right) \simeq 2.5\left(\frac{154}{144}\right)$$

$$\Rightarrow T_0' \simeq 2.067 \text{ sec}$$

4-١- القوى الخارجية المؤثرة: أ- $\vec{W}$قوة ثقل الكرة الخيط مهمل الكتلة. ب- $\vec{T}$قوة توتر الخيط

٢- نطبّق العلاقة الأساسية في التحريك: $\sum \vec{F} = \text{m}.\vec{a} \Rightarrow \vec{T} + \vec{W} = m.\vec{a}$

٣- نسقط الأشعة على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته(الناظم):

$$T - W\cos(\theta) = m.a_{c_{\text{ناظمي}}}$$

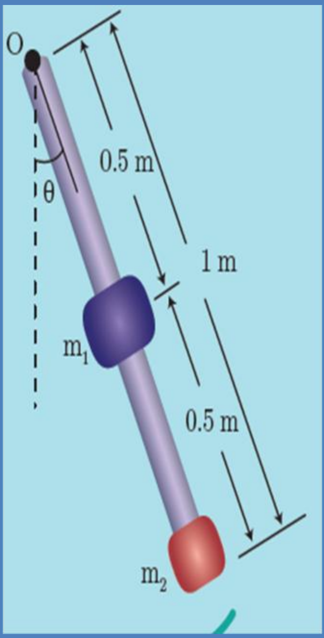
لدينا $a_{c_{\text{ناظمي}}} = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$ نعزل T ونعوض قيمة $a_{c_{\text{ناظمي}}}$ فنجد أن:

$$T = m.a_{c_{\text{ناظمي}}} + W\cos(\theta) \quad \Rightarrow T = m.\frac{v^2}{l} + m.g\cos(\theta)$$

عند المرور بالشاقول $\theta = 0 rad : \Rightarrow \cos(\theta) = 1$

$$T = (\frac{1}{2} \times \frac{(4)^2}{16\times10^{-1}}) + (\frac{1}{2} \times 10 \times 1) = (\frac{1}{2} \times \frac{16}{16\times10^{-1}}) + (5) =$$

$$T = \left(\frac{1}{2} \times 10\right) + (5) = 5 + 5 = 10\ N$$



المسألة الرابعة: ساقٌ شاقوليّةٌ، مهملةُ الكتلة، طولُها $L = 1m$، نثبّت في منتصفها كتلةً نقطيّةً $m_1 = 0.4\ kg$ ، ونثبّتُ في طرفها السفليّ كتلةً نقطيّةً $m_2 = 0.2\ kg$ ، لتولّفَ الجملةُ نوّاساً ثقليّاً مركّباً يمكنُه أنْ ينوسَ في مستوٍ شاقوليٍّ حولَ محورَ أفقيٍّ مارٍّ من الطرف العلويّ للّساق.

المطلوب: 1.احسبْ دورَ نوساتِها صغيرةِ السّعة.

2.نزيحُ الجملة عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24\ rad$ ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة، فتكونُ السرعةُ الخطيّةُ لمركز عطالة جملة النوّاس لحظةَ مرورها بالشاقول $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$ المطلوب :

a.احسبِ السرعةَ الخطيّةَ للكتلة النقطيّة m_2 .

b.استنتجْ قيمةَ الزاوية

المعطيات: $L = 1m$ ، $m_1 = 0.4\ kg$ ، $r_1 = \frac{L}{2} = 0.5m$ بعد الكتلة الأولى عن محور الدوران

$m_2 = 0.2\ kg$ ، $r_2 = L = 1m$ بعد الكتلة الثانية عن محور الدوران ، الساق مهملة الكتلة

$L = 1m$ $\quad m_{ساق} = 0\ kg \quad I_{\Delta/ساق} = 0 kg.m^2 \Longrightarrow I_{\Delta/هايغنز} = 0 kg.m^2$

الحل: من أجل نوسات صغيرة علاقة الدور من أجل الجملة

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{m_{جملة}.g.d}}$ المجاهيل ($I_{\Delta/جملة}$ و $m_{جملة}$ و d) نوجد المجاهيل

المجهول الأول : $m_{جملة}$ $\quad m_{جملة} = m_{ساق} + m_1 + m_2 = 0 + 0.2 + 0.4 = 0.6\ Kg$

المجهول الثاني : $I_{\Delta/جملة}$ $\quad I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/هايغنز} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

نحسب $I_{\Delta/جملة}$: $\quad I_{\Delta/جملة} = 0 + m_1.r_1^2 + m_2.r_2^2$

$$I_{\Delta/جملة} = [(0.4) \times (5 \times 10^{-1})^2] + [(0.2) \times (1)^2] =$$

$$I_{\Delta/جملة} = [4 \times 10^{-1} \times 25 \times 10^{-2}] + [2 \times 10^{-1}] =$$

$$I_{\Delta/جملة} = [10^{-1}] + [2 \times 10^{-1}] = 3 \times 10^{-1} kg.m^2$$

المجهول الثالث : $d = oc$ $\quad d = \frac{\sum m_i.r_i}{\sum m_i}$ الكتلتين تحت الحور أي $m_i.r_i$ موجبتين

$$d = \frac{m_1\frac{L}{2} + m_2 L}{m_1 + m_2} = \frac{0.4(0.5) + 0.2(1)}{0.2 + 0.4} = \frac{0.2 + 0.2}{0.6} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}\ m$$

نعوض المجاهيل بعلاقة الدور: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3\times10^{-1}}{6\times10^{-1}\times10\times\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$ sec

٢- a- لدينا السرعة الخطية لمركز العطالة $v_c = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$

نحسب أولاً السرعة الزاوية من السرعة الخطية لمركز العطالة $r_c = d$: $\omega = \frac{v_c}{r_c} = \frac{v_c}{d}$

$$\Longrightarrow \omega = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3\times4\pi}{2\times3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad rad.s^{-1}$$

السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 $\qquad$ (هنا نقول $r = r_{m_2} = L$)

$$v = w.r_{m_2} \Longrightarrow v = w.L \Longrightarrow v = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(1) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad m.\sec^{-1}$$

نزيح الساق بزاوية θ_{max} فورا نطبق نظرية الطاقة الحركية في حالة وضعين:

جملة المقارنة :خارجية

القوى الخارجيّة المؤثّرة: أ- $\vec{W}$ قوة ثقل الجملة.

ب- $\vec{R}$ قوة رد فعل محور الدوران

<u>الوضع البدائي(١)</u>: $\theta_1 = \theta_{max} = ?$ إزاحة عظمى

<u>الوضع النهائي(٢)</u>: $\theta_2 = 0$ المرور بالشاقول

$$\overline{\Delta E_{K(1\to2)}} = \sum \overline{W_{\vec{F}}} \Longrightarrow E_{K(2)} - E_{K(1)} = W_{\overrightarrow{w_{جملة}}} + W_{\vec{R}} \dots\dots\dots\dots (*)$$

نوجد المجاهيل الأربعة في العلاقة(١): $\quad E_{K(1)} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$

وذلك لأن السرعة الابتدائية معدومة لحظة ترك النواس دون سرعة

$$E_{K(2)} = \frac{1}{2} I_{\Delta/جملة} . w^2 \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

$W_{\vec{R}} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(3)$ لأن نقطة تأثير القوة $\vec{R}$ لا تنتقل أبداً.

$$W_{\vec{w}} = w \times h = mg \times h$$

$$\boxed{\Longrightarrow h = d[\cos(\theta) - \cos(\theta_{max})] \Longrightarrow h = d[1 - \cos(\theta_{max})]}$$

$$W_{\vec{w}} = m_{جملة}. g. d[1 - \cos(\theta_{max})]$$

$$W_{\vec{w}} = m_{جملة} g d[1 - \cos(\theta_{max})] \dots\dots\dots\dots (4)$$

<u>نعوض (1,2,3,4) في (*)</u>: $\frac{1}{2} I_{\Delta جملة} . w^2 - 0 = m_{جملة} g. d[1 - \cos(\theta_{max})] + 0$

$$\frac{I_{\Delta جملة} .w^2}{2m_{جملة} g.d} = [1 - \cos(\theta_{max})] \Longrightarrow \cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{I_{\Delta جملة} .w^2}{2m_{جملة} g.d}$$

$$\Longrightarrow \cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{3\times10^{-1}.\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\times6\times10^{-1}\times10\times\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3\left(\frac{40}{3}\right)}{8\times10} = 1 - \frac{40}{80} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ومنه نوجد الزاوية $\quad \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad \quad$ وهو المطلوب

المسألة الخامسة: يتألفُ نوّاسٌ ثقليٌّ من ساقٍ شاقوليّةٍ، مهملةِ الكتلة طولُها L ، تحملُ في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطيّةً m' ، نعلّقُ الجملةَ بمحورِ دورانٍ أفقيّ يبعدُ $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلويّ، نزيحُ الجملة عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاويةٍ $\frac{1}{2\pi}rad$ ، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t=0$ فتهتزّ بدورٍ خاصّ $T_0 = 2.5\ s$. المطلوب:

1.استنتجِ التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ لحركة هذا النوّاس انطلاقاً من شكله العامّ.

2.استنتِجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة لطول الساق، ثمّ احسب قيمته.

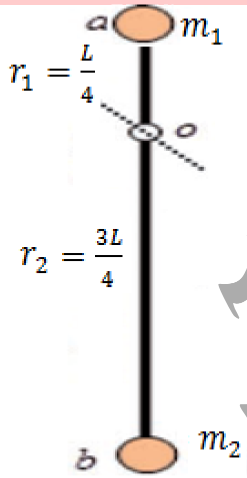
3.احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة العُظمى للحركة(طويلة) .

4.لنفرضْ أنّه في إحدى النَّوسات انفصلتِ الكتلةُ السفليّة عن الساق، استنتج الدورَ الخاصَّ الجديد للجملة في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

المعطيات: $m_1 = m_2 = m'$ الكتلة من الأعلى m_1 بعدها $r_1 = \frac{L}{4}$

الكتلة من الأسفل m_2 بعدها $r_2 = \frac{3L}{4}$ ، الساق مهملة الكتلة $m_{ساق} = 0$ ، $T_0 = 2.5\ s$.

شروط البدء: $t = 0$ ، $\frac{1}{2\pi}rad$ $\theta = \theta_{max} =$ ونتركُهُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ $\Longrightarrow$ $\omega = 0$



الحل: ١- تابع المطال شكله العام هو $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

الثوابت في التابع هي $(\varphi, \theta_{max}, \omega_0)$ نوجد هذه المجاهيل:

المجهول الأول θ_{max} : $\theta_{max} = \frac{1}{2\pi}rad$	
المجهول الثاني ω_0 : من الدور	
لدينا $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5}\ rad.sec^{-1}$	

المجهول الثالث φ: من شروط البدء نعوض في التابع

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(\varphi) \Longrightarrow \cos(\varphi) = 1 \Longrightarrow \varphi = 0rad$$

نعوض في التابع:

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2\pi}\cos(\frac{4\pi}{5}t) \quad (rad)}$$

٢- من أجل نوسات صغيرة علاقة الدور من أجل الجملة

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{m_{جملة}.g.d}}$ المجاهيل ($I_{\Delta/جملة}$ و $m_{جملة}$ و d) نوجد المجاهيل

المجهول الأول $m_{جملة}$: $m_{جملة} = m_{ساق} + m' + m' = 0 + 2m' = 2m'$

المجهول الثاني $I_{\Delta/جملة}$: $I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/ساق} + I_{\Delta/m'} + I_{\Delta/m'}$

$$I_{\Delta/جملة} = 0 + m'.r_1^2 + m'.r_2^2 = m'\left[\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{3L}{4}\right)^2\right] = m'[\frac{L^2}{16} + \frac{9L^2}{16}]$$

$$I_{\Delta/جملة} = m'.L^2\left[\frac{10}{16}\right] = \frac{5}{8}m'.L^2$$

المجهول الثالث $d = oc$: $d = \frac{\sum m_i.r_i}{\sum m_i}$ الكتلة السفلية m_2 بعدها $r_2 = \frac{3L}{4}$ (موجبة)

الكتلة من العلوية m_1 بعدها $r_1 = \frac{L}{4}$

$$d = \frac{+m'r_2 - m'r_1}{m' + m'} = \frac{+m'(\frac{3L}{4}) - m'(\frac{L}{4})}{2m'} = \frac{m'L[\frac{3}{4}-\frac{1}{4}]}{2m'} = \frac{L[\frac{2}{4}]}{2} = \frac{L}{4}\ m$$

نعوض المجاهيل بعلاقة الدور:

نربع
$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m'.L^2\left[\frac{5}{8}\right]}{2m'\times10\times\frac{L}{4}}} = 2\sqrt{\frac{L\left[\frac{5}{8}\right]}{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{L\left[\frac{10}{8}\right]}$$

$$T_0{}^2 = 4L\left[\frac{10}{8}\right] \Rightarrow T_0{}^2 = L\left[\frac{10}{2}\right] \Rightarrow T_0{}^2 = L[5] \Rightarrow L = \frac{T_0{}^2}{5} = \frac{(\frac{5}{2})^2}{5}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\frac{25}{4}}{5} = \frac{25}{4\times5} = \frac{5}{4} = 1.25\ m$$

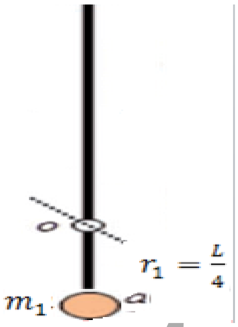
-٣ $\bar{\omega} = (\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t) \Rightarrow \omega_{max} = |\pm\omega_0\theta_{max}|$

$$\omega_{max} = \omega_0\theta_{max} = \frac{4\pi}{5}\times\frac{1}{2\pi} = \frac{2}{5}\ rad.s^{-1}$$

٤- من أجل نوسات صغيرة الدور الجملة

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{m_{\text{جملة}}.g.d}}$ المجاهيل ($I_{\Delta/\text{جملة}}$ و $m_{\text{جملة}}$ و d)

أصبحت الكتلة العلوية من الأسفل لأن الساق انقلبت تحت تأثير تلك القوة



المجهول الأول: $m_{\text{جملة}}$	$m_{\text{جملة}} = m_{\text{ساق}} + m' = 0 + m' = m'$
المجهول الثاني: $I_{\Delta/\text{جملة}}$	$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{هايغنز}} + I_{\Delta/m'}$ $I_{\Delta/\text{جملة}} = 0 + m'.r_1{}^2 = m'\left(\frac{L}{4}\right)^2 = m'\left[\frac{L^2}{16}\right]$ $I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{16}m'.L^2$
المجهول الثالث: d = oc	$d = \frac{\sum m_i.r_i}{\sum m_i}$ الكتلة m_1 أصبحت من الأسفل بسبب دوران الساق تحت تأثير هذه الكتلة (موجبة) بعدها $r_1 = \frac{L}{4}$ $d = \frac{+m'r_1}{m'} = r_1 = \frac{L}{4}$

نعوض المجاهيل بعلاقة الدور: نربع
$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{16}m'.L^2}{m'\times10\times\frac{L}{4}}} = 2\sqrt{\frac{L\left[\frac{1}{16}\right]}{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{L\left[\frac{1}{4}\right]}$$

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{5}{4}\left[\frac{1}{4}\right]} = 2\sqrt{\frac{5}{16}} = 2\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}\quad S$$

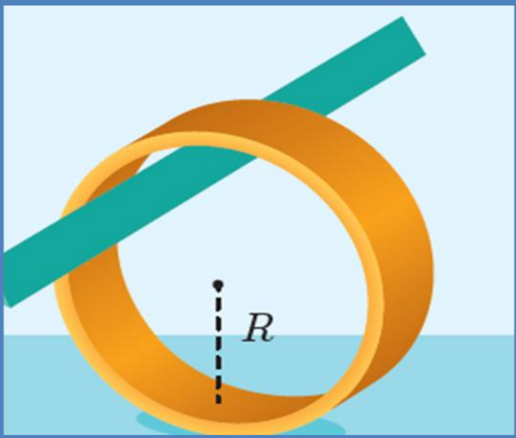
المسألة الرابعة عامة:

نعلّقُ حلقةً معدِنيّةً نصفُ قطرها $R = 12.5$ cm ، كتلتُها $M = 0.05$ kg ، بمحور أفقيّ ثابت، كما هو موضّحٌ بالشكل.

المطلوب:

1.احسبِ الدورَ الخاصّ لاهتزاز هذا النوّاس من أجل السّعات الزاوية الصغيرة إذا علمت أنّ عزم عطالة الحلقة حول محور عموديّ على مستويها، ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/c\text{حلقة}} = M.R^2$

2.احسبْ طول النوّاس البسيط الموافق.



المعطيات: $R = 12.5\times 10^{-2} m$ ⟸ $R = 12.5$ cm ، $M = 0.05$ kg
$I_{\Delta/c\text{حلقة}} = M.R^2$ هنا هايغنز محور الدوران يمر من الأعلى

الحل: من أجل نوسات صغيرة علاقة الدورمن أجل الجملة

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{هايغنز}}}{M.g.d}}$ المجاهيل($I_{\Delta/\text{هايغنز}}$ و d)

المجهول الأول:d محور الدوران o من الأعلى مركز العطالة c في المنتصف $d = oc = R$
المجهول الثاني: $I_{\Delta/\text{هايغنز}} = I_{\Delta/c\text{حلقة}} + M.d^2 = M.R^2 + M.R^2 = 2M.R^2$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2M.R^2}{M.g.R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\times12.5\times10^{-2}}{10}} = 2\sqrt{25\times10^{-2}}$$

$$T_0 = 2\times5\times10^{-1} = 10\times10^{-1} = 1\,s$$

٢- طول النواس البسيط الموافق لنواس المركب السابق من شرط $T_{0(\text{المركب})} = T_{0(\text{البسيط})}$

$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}} \Rightarrow 1 = 2\sqrt{l} \Rightarrow \sqrt{l} = \frac{1}{2}\ \text{نربع} \Rightarrow l = \frac{1}{4}\ m$$

المسألة الخامسة عامة(دورة) :

يتألَّف نوَّاس ثقليٌّ من ساق شاقوليّة مهملة الكتلة طولها 1m تحمل في نهايتها العلويّة كتلة نقطيَّة $m_1 = 0.2\ kg$ وتحمل في نهايتها السفليَّة كتلة نقطيَّة $m_2 = 0.6\ kg$ تهتزُّ هذه السّاق حول محور أفقيّ مارّ من منتصفها المطلوب:

1. احسب دور النوّاس في حالة السّعات الصَّغيرة.
2. احسب طول النوَّاس البسيط الموافق لهذا النوّاس.
3. احسب دور النوَّاس لو ناس بسعة زاوية $\theta_{max} = 0.4\ rad$.
4. نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\theta_{max} = 60^o$ ونتركها دون سرعة ابتدائيَّة.

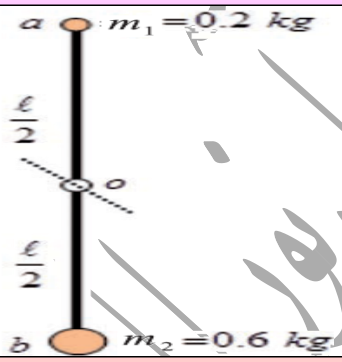
a. استنتج بالرموز علاقة السّرعة الزاوية لجملة النوَّاس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق، ثمَّ احسب قيمتها

b. احسب السُّرعة الخطِّيَّة لمركز عطالة جملة النوّاس لحظة المرور بالشّاقول.

5. نستبدل بالكتلة m_2 كتلة $m_1 = m_2 = 0.2\ kg$ ونعلِّق السَّاق من منتصفها بسلك فتل شاقوليّ لنشكِّل بذلك نوّاساً للفتل، نزيح السَّاق الأفقيَّة عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائيّة فتهتزُّ بدور $T_0 = 2\pi\ s$ احسب قيمة ثابت فتل سلك التعليق.
6. احسب قيمة التَّسارع الزاوي لنوَّاس الفتل عند المرور بوضع $\theta = 0.5\ rad$

المعطيات: $m_2 = 0.6\ Kg \quad m_1 = 0.2\ Kg \quad l = 1\ m$

$m_{ساق} = 0kg$ حيث الساق مهملة الكتلة



الحل: ١-من أجل نوسات صغيرة علاقة الدورمن أجل الجملة

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{m_{جملة}.g.d}}$ المجاهيل ($I_{\Delta/جملة}$ و $m_{جملة}$ و d)

المجهول الأول $m_{جملة}$:

$$m_{جملة} = m_1 + m_2 + m_{ساق}$$

$$m_{جملة} = 0.2 + 0.6 + 0 = 0.8\ Kg$$

المجهول الثاني $I_{\Delta/جملة}$:

$$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} + I_{\Delta c/ساق}$$

$$I_{\Delta/جملة} = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 0 \Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \left(\frac{l}{2}\right)^2(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow I_{\Delta/جملة} = \left(\frac{1}{2}\right)^2(0.2 + 0.6) = \frac{1}{4}(0.8) = 0.2\quad Kg.m^2$$

المجهول الثالث : $d = oc$ الكتلة m_1 فوق المحوريكون $m_1 r_1$ سالب، و الكتلة m_2 تحت المحوريكون $m_2 r_2$ موجب

$$d = \frac{\sum m_i.r_i}{\sum m_i} = \frac{+m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_2 + m_1} = \frac{m_2\frac{l}{2} - m_1\frac{l}{2}}{m_2 + m_1} = \frac{0.6\frac{1}{2} - 0.2\frac{1}{2}}{0.6 + 0.2} = \frac{0.3 - 0.1}{0.8} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4}\ m$$

نعوض المجاهيل بعلاقة الدور: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8\times10\times\frac{1}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\ sec$

٢- طول النواس البسيط المواقت لنواس المركب السابق من شرط $T_{0(\text{المركب})} = T_{0(\text{البسيط})}$

$$2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}} \Rightarrow 2 = 2\sqrt{l} \Rightarrow \sqrt{l} = 1 \text{ نربع} \Rightarrow l = 1\ \text{m}$$

٣- الدور من أجل سعات كبيرة: $T'_0 \simeq T_0(1+\frac{\theta\max^2}{16}) \Rightarrow T'_0 \simeq 2(1+\frac{(4\times10^{-1})^2}{16})$

$$T'_0 \simeq 2\left(1+\frac{16\times10^{-2}}{16}\right) \simeq 2(1+10^{-2}) \simeq 2(1+0.01) \simeq 2.02\text{sec}$$

٤-a- إيجاد السرعة الزاوية انطلاقاً من نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين(١)و(٢):

نزيح الساق بزاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$ فورا نطبق نظرية الطاقة الحركية في حالة وضعين: جملة المقارنة :خارجية

القوى الخارجيّة المؤثّرة: أ- $\vec{W}$قوة ثقل الجملة.

ب- $\vec{R}$قوة رد فعل محور الدوران

<u>الوضع البدائي(١):</u> $\theta_1=\theta\max = \frac{\pi}{3}\text{Rad}$ إزاحة عظمى

<u>الوضع النهائي(٢):</u> $\theta_2 = 0$ المرور بالشاقول

$$\overline{\Delta E_{K(1\to2)}} = \sum \overline{W_{\vec{F}}} \Rightarrow E_{K(2)} - E_{K(1)} = W_{\overrightarrow{w\text{جملة}}} + W_{\vec{R}} \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

نوجد المجاهيل الأربعة في العلاقة(١): $E_{K(1)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

وذلك لأن السرعة الابتدائية معدومة لحظة ترك النواس دون سرعة

$$E_{K(2)} = \frac{1}{2} I_{\Delta/\text{جملة}} . w^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$W_{\vec{R}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ لأن نقطة تأثير القوة$\vec{R}$ لا تنتقل أبداً.

$$W_{\vec{w}} = w\times h \ = mg\times h$$

$$\boxed{\Rightarrow h = d[\cos(\theta) - \cos(\theta\max)] \Rightarrow h = d[1-\cos(\theta\max)]}$$

$$W_{\vec{w}} = m_{\text{جملة}}.g.d[1-\cos(\theta\max)]$$

$$W_{\vec{w}} = m_{\text{جملة}}gd[1-\cos(\theta\max)] \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض (1,2,3,4) في (*): $\frac{1}{2}I_{\Delta\text{جملة}}.w^2 - 0 = m_{\text{جملة}}g.d[1-\cos(\theta\max)] + 0$

بالرموز $w^2 = \frac{2.m_{\text{جملة}}.g.d[1-\cos(\theta\max)]}{I_{\Delta/\text{جملة}}} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{2.m_{\text{جملة}}g.d[1-\cos(\theta\max)]}{I_{\Delta/\text{جملة}}}}$

$$w = \sqrt{\frac{2\times0.8\times10\times\frac{1}{4}[1-\frac{1}{2}]}{0.2}} \Rightarrow w = \sqrt{2\times10[\frac{1}{2}]} \Rightarrow w = \sqrt{10} \Rightarrow$$

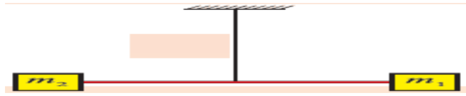
$$w = \pi\ \text{rad.sec}^{-1}$$

B-السرعة الخطية هناك علاقة بين السرعة الخطية والدورانية(هنا نقول $r_c = d$ **لمركز عطالة**)

$$v_c = w.r_c \Longrightarrow v_c = w.d \Longrightarrow v_c = \pi.(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4} m.\sec^{-1}$$

٥- أصبح لدينا نواس فتل و يحوي كتل(جملة) $m_1 = m_2 = m = 0.2$ Kg

$$T_0 = 2\pi \ \sec$$



من علاقة الدور الخاص للنواس الفتل: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{k}}$ نربع العلاقة

$$T_0^{\,2} = 4(10)\frac{I_{\Delta/جملة}}{k} \Longrightarrow k = 4(10)\frac{I_{\Delta/جملة}}{T_0^{\,2}}$$

نحسب $I_{\Delta/جملة}$ لنواس الفتل :

$$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} + I_{\Delta/ساق}$$

$$m_1 = m_2 = m \quad و \quad r_1 = r_2 = \frac{l}{2} \qquad \Longrightarrow I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2} = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta/جملة} = 2\ I_{\Delta/m_1} + 0 \Longrightarrow I_{\Delta/جملة} = 2m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta/جملة} = 2(2\times10^{-1})\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 4\times10^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 10^{-1}\ Kg.m^2$$

$$k = 4(10)\frac{I_{\Delta/جملة}}{T0^2} \Longrightarrow k = 40\frac{10^{-1}}{(2\pi)^2} = 40\frac{10^{-1}}{40} = 10^{-1}\ m.N.\text{rad}^{-1}$$

٦- علاقة التسارع α: $\alpha = -w_0^2\theta$ نوجد النبض الخاص من علاقة الدور

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{T0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ \text{rad}.\sec^{-1}}$$

لدينا من نص المسألة θ=0.5 rad نعوض بعلاقة التسارع

$$\alpha = -w_0^2\theta \Longrightarrow \alpha = -(1)^2\times0.5 = -0.5\ \text{rad}.\sec^{-2}$$

المسألة السادسة عامة (دورة) :

يتألّف نوّاس ثقلي مركَّب من قرص متجانس ،كتلتُه m نصف قطره $r = \frac{2}{3}m$ يمكن أن يهتزَّ شاقولياً حول محور أفقي مارٍّ من نقطة على محيطه

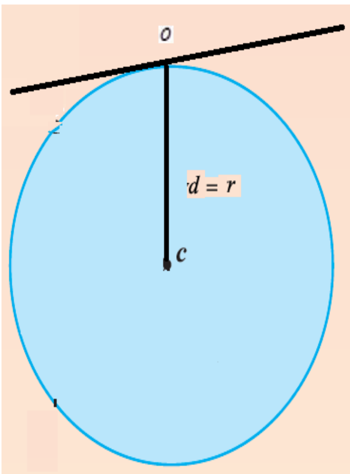
1) انطلاقاً من العلاقة العامّة لدور النواس الثقلي المركّب، استنتج العلاقة المحدّدة لدورِه الخاصّ في حالة السعات الصغيرة ،ثمَّ احسب قيمة هذا الدور.

2) احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس المركّب .

3) نثبّت في نقطة من محيط القرص كتلةً نقطية m' تساوي كتلة القرص m ونجعله يهتزّ حول محور أفقي مارّ من مركز القرص، احسب دوره في هذه الحالة من أجل السعات الزاوية الصغيرة.

4) نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقولي بسعة زاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية للكتلة النقطية m' لحظة المرور بالشاقول $v = \frac{2\pi}{3}m.s^{-1}$ احسب قيمة السعة الزاوية θ_{max} إذا علمت أنّ $\theta_{max} > 0.24\ rad$ عزم عطالة القرص حول محور مارٍّ من مركز هو عمودي على مستويه $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}m.r^2$

المعطيات: $r = \frac{2}{3}m$ ، $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}m.r^2$ هنا هايغنز لأن محور الدوران يمر من الأعلى



الحل: ١- من أجل نوسات صغيرة علاقة الدور عندما يمر محور الدوران من على محيط القرص $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/هايغنز}}{M.g.d}}$

المجاهيل ($I_{\Delta/هايغنز}$ و d)

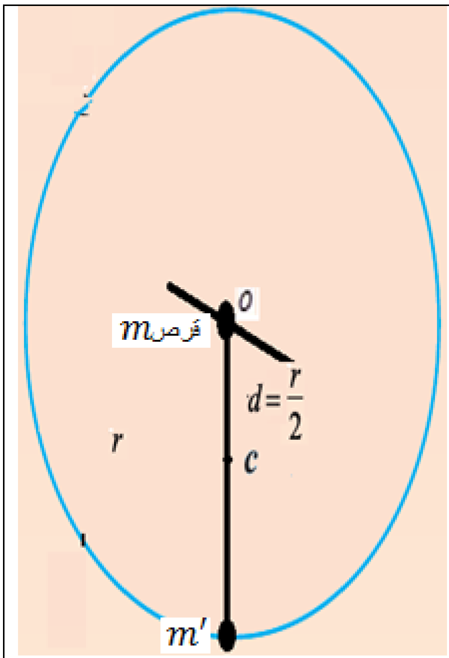
نوجد المجهول الأول: $d = oc = r$ وذلك من خلال الرسم
نوجد المجهول الثاني $I_{\Delta/هايغنز}$ حسب هايغنز لأن محور الدوران يمر من على محيط القرص $I_{\Delta/هايغنز} = I\Delta/c + m.d^2$ $I_{\Delta/هايغنز} = \frac{1}{2}mr^2 + m(r)^2 = \frac{3}{2}mr^2$

نعوض في T_0 :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{m.g.r}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}r}{g}} \text{ بالرموز} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)}{(10)}} = 2\sqrt{1} = 2\ S$$

٢- طول النواس البسيط المواقت لنواس المركب السابق من شرط $T_{0(المركب)} = T_{0(البسيط)}$

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Longrightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}} \Longrightarrow 2 = 2\sqrt{l} \Longrightarrow \sqrt{l} = \frac{2}{2} = 1 \text{ نربع} \Longrightarrow l = 1\ m$$



٣- $m_{قرص} = m'$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{m_{جملة}.g.d}}$ المجاهيل ($I_{\Delta/جملة}$ و $m_{جملة}$ و d)

المجهول الأول : $m_{جملة}$

$m_{جملة} = m_{قرص} + m' = 2m$

المجهول الثاني : $I_{\Delta/جملة}$

$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/قرص} + I_{\Delta/m'}$

$I_{\Delta/جملة} = \frac{1}{2} mr^2 + m'r^2 = \frac{3}{2} mr^2$

المجهول الثالث $: d = oc$ الكتلة $d = \frac{\sum m_i.r_i}{\sum m_i}$

m' تحت الحور أي $m.r$ موجبة بينما كتلة القرص في المنتصف(محور الدوران) بعدها عن محور الدوران معدوم $d = \frac{m.r}{m+m'} = \frac{m.r}{2m} = \frac{r}{2}$

نعوض في T_0 :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{2m.g.\frac{r}{2}}} \Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}r}{g}} \text{ بالرموز } \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)}{(10)}} = 2\sqrt{1} = 2\ S$$

٣- السرعة الخطية للكتلة النقطية m : $v = \frac{2\pi}{3} m.s^{-1}$ (هنا نقول $r_m = r$)

$$v = w.r_m \Rightarrow v = w.r \Rightarrow w = \frac{v}{r}$$

نزيح الساق بزاوية? = θ_{max} فوراً نطبق نظرية الطاقة الحركية في حالة وضعين: جملة المقارنة :خارجية

القوى الخارجيّة المؤثّرة: أ- $\vec{W}$ قوة الجملة.

ب- $\vec{R}$ قوة رد فعل محور الدوران

الوضع البدائي(١): ?= $\theta_1=\theta_{max}$ إزاحة عظمى

الوضع النهائي(٢): $\theta_2 = 0$ المرور بالشاقول

$$\overline{\Delta E_{K(1\to2)}} = \sum \overline{W_{\vec{F}}} \Rightarrow E_{K(2)} - E_{K(1)} = W_{\overrightarrow{w_{جملة}}} + W_{\vec{R}} \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

نوجد المجاهيل الأربعة في العلاقة(١): $E_{K(1)} = 0$ ....(1)

وذلك لأن السرعة الابتدائية معدومة لحظة ترك النواس دون سرعة

$$E_{K(2)} = \frac{1}{2} I_{\Delta/جملة} . w^2 \ ....(2)$$

$W_{\vec{R}} = 0$ ....(3) لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ القوة لا تنتقل.

$$W_{\vec{w}} = w \times h = mg \times h$$

$$\boxed{\Longrightarrow h = d[\cos(\theta) - \cos(\theta_{max})] \Longrightarrow h = d[1 - \cos(\theta_{max})]}$$

$$W_{\vec{w}} = m_{\text{جملة}}.\, g.\, d[1 - \cos(\theta_{max})]$$

$$W_{\vec{w}} = m_{\text{جملة}} g d[1 - \cos(\theta_{max})] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض $(1,2,3,4)$ في $(*)$: $\frac{1}{2} I_{\Delta\text{جملة}} .\, w^2 - 0 = m_{\text{جملة}} g.\, d[1 - \cos(\theta_{max})] + 0$

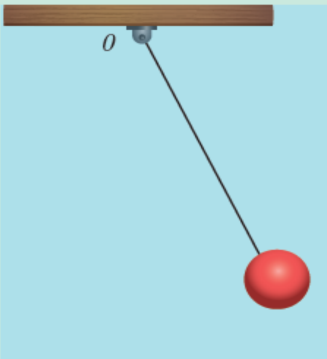
$$\frac{I_{\Delta\text{جملة}} .w^2}{2m_{\text{جملة}} g.d} = [1 - \cos(\theta_{max})] \Longrightarrow \cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{I_{\Delta\text{جملة}} .w^2}{2m_{\text{جملة}} g.d}$$

$$\Longrightarrow \cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{\frac{3}{2} mr^2 .\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2\times(2m)g\times\frac{r}{2}} = 1 - \frac{\frac{3}{2} mr^2 .\frac{v^2}{r^2}}{2\times(2m)g\times\frac{r}{2}} = 1 - \frac{\frac{3}{2}\ v^2}{2.g.r} =$$

$$\Longrightarrow \cos(\theta_{max}) = 1 - \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2}{2\times10\times\frac{2}{3}} = 1 - \frac{\frac{3}{2}\times\frac{40}{9}}{\frac{40}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ومنه نوجد الزاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$ و هو المطلوب

تفكير ناقد



من المعلوم أنه في حالة انعدام الثقل الظاهري ضمن المحطة الفضائية:

1. لدينا كرة كتلتها m معلقة بخيط مهمل الكتلة طوله l كما هو موضح بالشكل جانباً لتشكل نواساً بسيطاً عند سطح الأرض ما قيمة الدور على متن المحطة الفضائية مع التعليل.
2. كيف يمكن جعله يهتز بحركة جيبية توافقية بسيطة؟

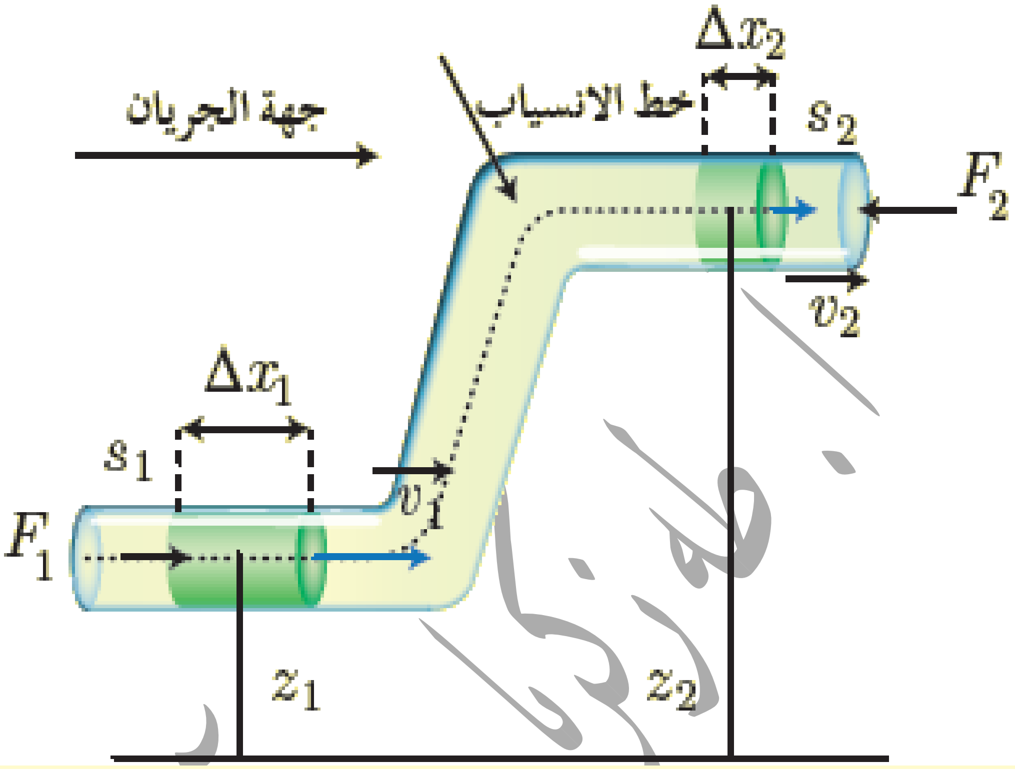
الحل: ١- الدور في المركبة لا نهاية لان محصلة القوى معدومة عليها بالنسبة لمراقب داخل المركبة لأنعدام الحقل الجاذبية الأرضية ضمن المحطة الفضائية.
٢- ليهتز بحركة جيبية طبعا : نشحن الكرة ونخضعها لحقل كهربائي منتظم (حقل صنعي) ثم نزيحها عن توازنها بسعة زاوية صغيرة ونتركها دون سرعة ابتدائية.

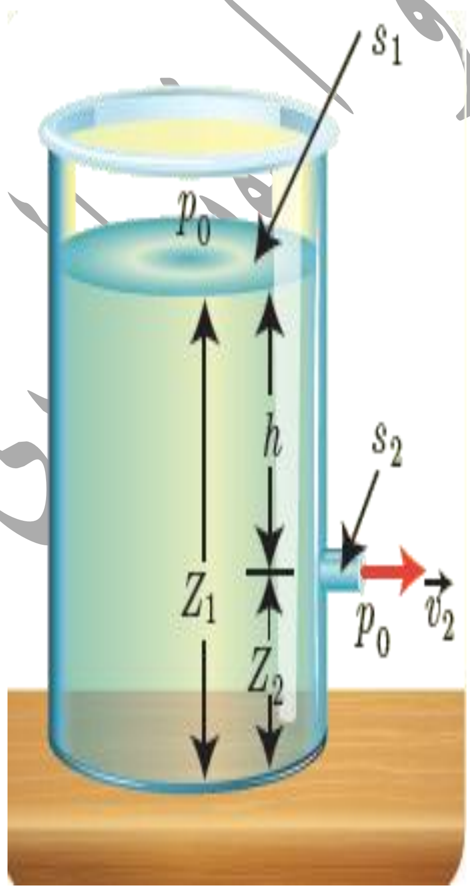
أبحث أكثر

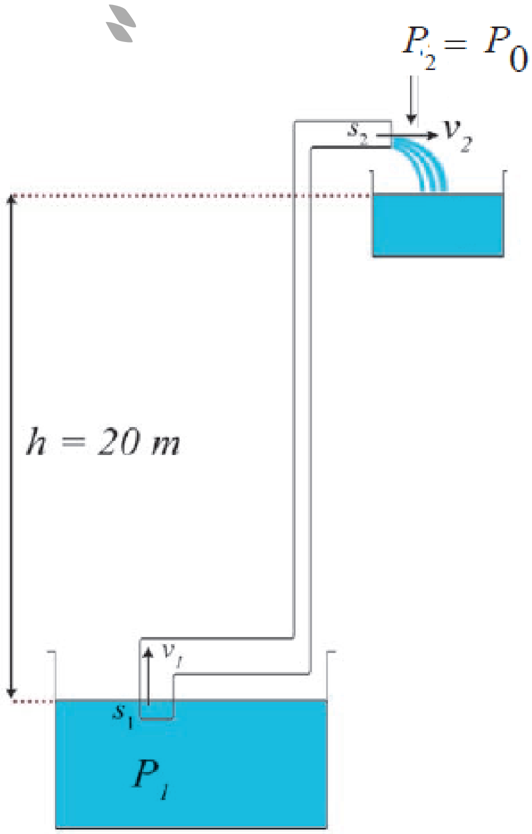
نواس فوكو

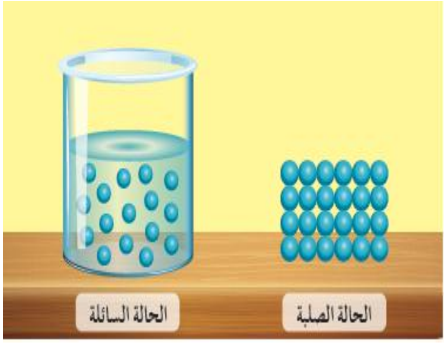
صمم الفيزيائي الفرنسي ليون فوكو تجربة لتقديم إثبات علمي بسيط لحقيقة دوران الأرض حول محورها.
ابحث عبر الشابكة حول ذلك.

الدرس الرابع: ميكانيكُ الموائعِ









•مقدمة: تتميّزُ السوائل والغازات بقوى تماسك ضعيفة نسبيّاً بين جزيئاتها، فهي لا تحافظُ على شكلٍ معيّن، وتتحرّكُ جزيئاتُها بحيث تأخذُ شكل الوعاء الذي توضع فيه، وهي تستجيبُ بسهولة للقوى الخارجيّة التي تحاولُ تغييرَ شكلها، لذلك تُسمّى السوائلُ والغازاتُ بالموائع.

سؤال: عرف جسيم المائع ؟

وهو جزء من المائع أبعادُهُ صغيرةٌ جدّاً بالنسبة لأبعاد المائع وكبيرةٌ بالنسبة لأبعاد جزيئات المائع.

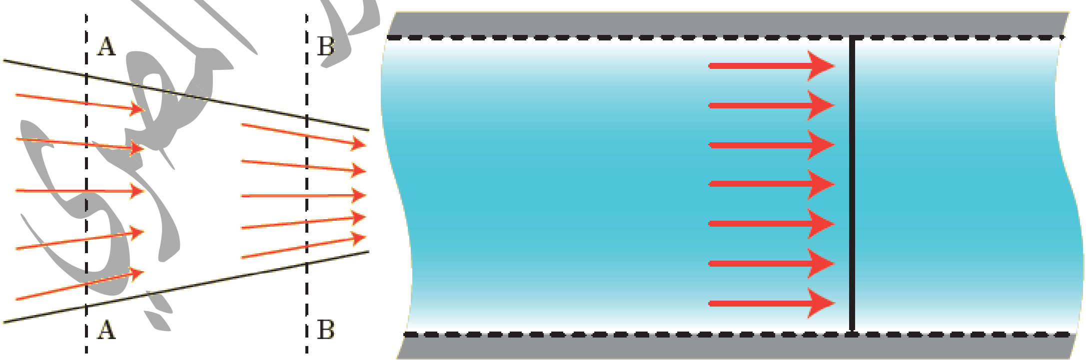
سؤال: بماذا تتميز الموائع عن غيرها؟

تتميّزُ الموائعُ بقدرتها على الجريان بتأثير قوى خارجيّة، ولوصف حركتها عند لحظةٍ ما يجبُ معرفةُ كثافةِ المائع، وضغطِهِ، وسرعتِهِ، ودرجةِ حرارتِهِ

عرف ما يلي:

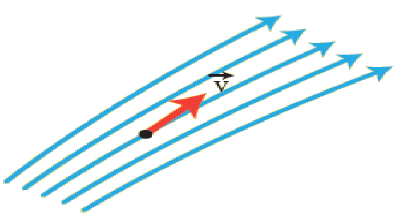
1 .الجريانُ المستقرُّ:

هو الجريانُ الذي تكونُ فيه سرعةُ جسيمات المائع ثابتةً مع مرور الزمن في النقطة نفسِها من خطّ الانسياب، فإذا تغيّرت السرعةُ من نقطة إلى أخرى بمرور الزمن كان الجريان المستقرّ غيرَ منتظم، أمّا إذا كانت السرعةُ ثابتةً في جميع نقاطِ المائع بمرور الزمن فإنّ الجريانَ المستقرَّ يكونُ منتظماً.



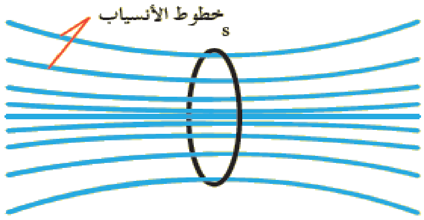
الجريان المستقرّ غير المنتظم   الجريان المستقرّ المنتظم

٢ . خط الانسياب(خطّ الجريان):



خطٌّ وهميٌّ يبيّنُ المسارَ الذي يسلكُهُ جسيمُ المائع أثناء جريانه ويمسُّ في كلّ نقطة من نقاطه شعاعَ السرعة في تلك النقطة.

٣. أنبوبُ التدفّق:



إذا أخذنا مساحةً صغيرةً عموديّة على اتّجاه جريان مائع جريانه مستقرّ، ورسمنا على محيط هذه المساحة خطوطَ الانسياب نحصلُ على أنبوبٍ وهميٍّ يحتوي المائع يُدعى أنبوبَ التدفّق.

سؤال دورة: ماهي ميزاتُ المائع المثاليّ؟

1.غيرُ قابل للانضغاط: كتلته الحجمية ثابتة مع مرور الزمن.

2.عديمُ اللّزوجة: قوى الاحتكاك الداخليّ بين مكوّناته مهملة عندما تتحرّك بالنسبة لبعضها البعض، وبالتالي لا يوجد ضياع للطاقة.

3.جريانُه مستقرّ: أي أنّ حركة جسيماته لها خطوطُ انسياب محدّدة وسرعة جسيماته عند نقطة معيّنة تكونُ ثابتةً بمرور الزمن.

4.جريانُه غيرُ دورانيّ: لا تتحرّك جسيماتُ السائل حركة دورانيّة حول أيّ نقطة في مجرى الجريان.

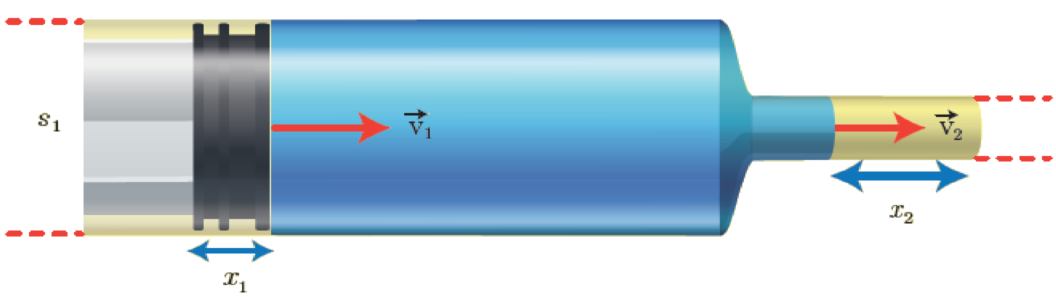
معادلة الاستمراريّة:

ملاحظة: ١- **معدّلُ التدفق الكتليّ Q لمائع هو كتلة كميّة المائع التي تعبرُ مقطع الأنبوب في واحدة الزمن، ونعبّرُ عنه بالعلاقة $Q=\frac{m}{\Delta t}$ وتُقدّرُ في الجملة الدوليّة بواحدة $kg.s^{-1}$.**

٢- معدّلُ التدفق الحجميّ Q' لمائع هو حجمُ كمية المائع التي تعبرُ مقطع الأنبوب في واحدة الزمن، ونعبّرُ عنه بالعلاقة $Q'=\frac{V}{\Delta t}$ وتُقدّرُ في الجملة الدوليّة بواحدة $m^3.s^{-1}$.

سؤال: استنتج معادلة حامل الاستمرارية؟

بافتراض مائع يتحرّك داخلَ أنبوبٍ مساحةُ كلٍّ من مقطعَي طرفيهِ تختلفُ عن الأخرى s_1، s_2
(كميّة المائع التي تدخلُ الأنبوب عند المقطع s_1 في مدّةٍ زمنيّة معيّنة)
تساوي (كميّة المائع التي تخرج من المقطع s_2)



بفرض أنّ v_1 سرعةُ المائع عبر المقطع s_1 ، و v_2 سرعةُ المائع عبر المقطع s_2

إنّ حجمَ كميّة السائل التي تعبُرُ المقطع s_1 $V_1 =$ المساحة × الأرتفاع $\Longrightarrow V_1 = s_1 . x_1$ لدينا المسافة x_1 في الزمن Δt يكون: $x_1 = v_1 . \Delta t$ $\Longrightarrow V_1 = s_1 . v_1 . \Delta t$	إنّ حجمَ كميّة السائل التي تعبُرُ المقطع s_2 $V_2 =$ المساحة × الأرتفاع $\Longrightarrow V_2 = s_2 . x_2$ لدينا المسافة x_2 في الزمن Δt يكون: $x_2 = v_2 . \Delta t$ $\Longrightarrow V_2 = s_2 . v_2 . \Delta t$

أنّ حجم كميّة المائع التي عبرت المقطع s_1 تساوي حجم كميّة المائع التي عبرت المقطع s_2 في المدّة الزمنيّة نفسِها فإنّ:

$$Q'_1 = Q'_2 \Longrightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t}$$

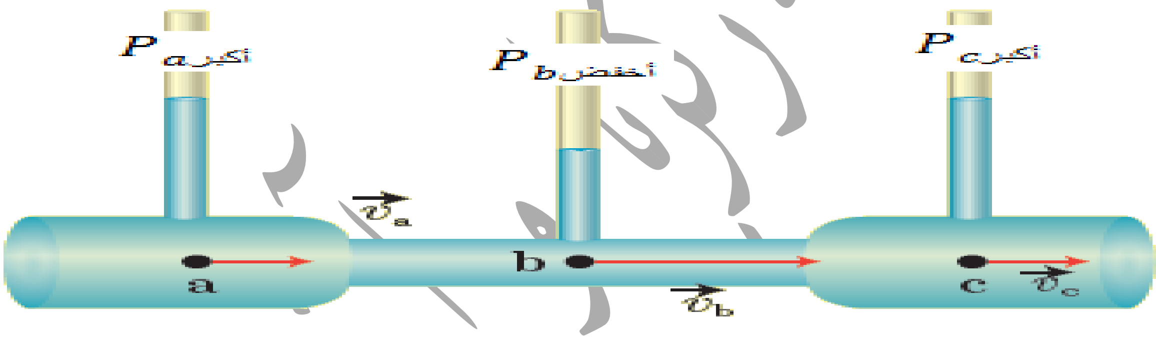
$$\Longrightarrow \frac{s_1 . v_1 . \Delta t}{\Delta t} = \frac{s_2 . v_2 . \Delta t}{\Delta t} \Longrightarrow s_1 . v_1 = s_2 . v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_2}{s_1}$$

أيْ أنّ سرعةَ تدفّق المائع تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب الذي يتدفّق منه المائع.

$$Q' = s_1 . v_1 = s_2 . v_2 = const$$

معادلة برنولي في الجريان المستقرّ:



١-ماهو سبب اختلاف ارتفاع سويّة السائل في الأنابيب الشاقوليّة عند النقاط a, b, c ؟

الحل: الضغط عند النقطة b أخفض ممّا هو عليه في كلٍّ من النقطتين a و c وذلك لأن ارتفاع السائل h_b أخفض .

٢-عند أيّ النقاط تكونُ سرعة جسيم السائل أكبر؟ وما هو تأثير الطاقة الحركيّة لجسيم السائل عند المرور بالنقطة b ؟

الحل: وجدنا من معادلة الاستمرارية أن سرعة الانسياب تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب، فسرعة جسيم السائل عند النقطة b تكون أكبرَ منها عند كلٍّ من النقطتين a و c أي أن الطاقة الحركية لجسيم السائل، قد ازدادت عند مروره في النقطة b

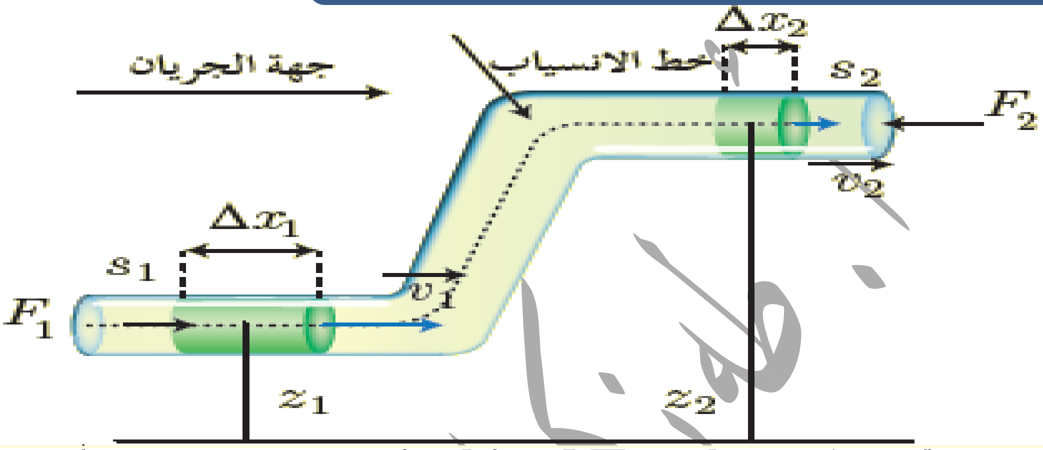
نتيجة : أي أنّ ضغط السائل يتغيّر إذا مرّ في منطقة تتغير فيها سرعة جريانه أو ارتفاعه عن سطح الأرض

سوف نوضح الزيادة في الطاقة الحركيّة لجسيم السائل عند المرور بالنقطة b وأين تذهبُ تلك الطاقة عند النقطتين c, a علماً أنّ النقاط a, b, c تقع في المستوي الأفقيّ نفسِه تجيبُ عن هذه التساؤلات نظريّةُ برنولي التي تربطُ بين الضغط وسرعة الجريان والارتفاع عند أيّ نقطة من مجرى سائلٍ مثاليّ،

سؤال: اذكر نص نظريّة برنولي؟

• إنّ مجموعَ الضغط والطاقة الحركيّة لواحدة الحجوم، والطاقة الكامنة الثقاليّة لواحدة الحجوم تساوي مقداراً ثابتاً عند أيّ نقطة من نقاط خطّ الانسياب لمائع جريانُهُ مستقرٌّ . $P+\frac{1}{2}\rho.v^2+\rho.g.z=const$

سؤال: استنتج معادلة برنولي في الجريان المستقرّ؟



عندما تمرُّ كميّةٌ صغيرةٌ من السائل بين مقطعين حيثُ مساحة المقطعِ الأوّل s_1 ، والضغطُ عنده P_1، وسرعةُ الجريان فيه v_1 ، والارتفاعُ عن مستوٍ مرجعيّ z_1 ومساحةُ المقطعِ الثاني s_2 ، والضغطُ عنده P_2 ، وسرعةُ الجريان فيه v_2 ، والارتفاعُ z_1 عن المستوي المرجعيّ.

(العمل الكلّيّ W_{TOT}المبذول لتحريك كتلة السائل من المقطع الأوّل إلى المقطع الثاني) = (عمل قوّتي الثقل W_w)+(عمل قوّة ضغط السائل المؤثر على طرفي الأنبوب W_1+W_2).

$$W_{TOT}=W_w+W_1+W_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (*)$$

وبحسب مصونيّة الطاقة فإنّ:	$W_{TOT}=E_{K_2}-E_{K_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \ \dots\dots (1)$
عملُ قوّة الثقل	$W_w=-mg(z_2-z_1)\dots\dots\dots.(2)$

عملُ قوّة ضغط السائل

١- يتأثر سطحُ المقطعُ S_1 بقوّة F_1 لها جهة الجريان، وتنتقلُ نقطةُ تأثيرها مسافةً قدرُها Δx_1في مدّةٍ زمنيّة Δt فتقوم بعملٍ محرّكٍ(موجب)	٢- يتأثر سطحُ المقطعُ S_2 بقوّة F_2 عكس جهةِ الجريان، وتنتقلُ نقطةُ تأثيرها مسافةً قدرُها Δx_2 في مدّةٍ زمنيّة Δt فتقوم بعملٍ محرّكٍ(مقاوم)
$W_1=+F_1.\Delta x_1$	$W_2=-F_2.\Delta x_2$
لدينا $F_1=P_1.s_1$	لدينا $F_2=P_2.s_2$
$W_1=+P_1.s_1.\Delta x_1$	$W_2=-P_2.s_2.\Delta x_2$
لدينا الحجم ΔV : $\Delta V=s_1.\Delta x_1$	لدينا الحجم ΔV : $\Delta V=s_2.\Delta x_2$
$W_1=+P_1.\Delta V\dots\dots\dots.(3)$	$W_2=-P_2.\Delta V\dots\dots\dots.(4)$

حيث ΔV حجم كميّة السائل التي تعبرُ المقطع S_2 في المدّة الزمنيّة Δt نفسِها، وهي تساوي حجم كميّة السائل التي تعبرُ المقطع S_1 في المدّة الزمنيّة Δt ، وذلك لأنّ السائلَ غيرُ قابلٍ للانضغاط.

نعوض (1)(2)(3)(4) في $(*)$: $(*)$ .... $W_{TOT} = W_w + W_1 + W_2$

ننشر $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mg(z_2 - z_1) + P_1.\Delta V - P_2.\Delta V$

ننقل الأطراف $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mg.z_2 + mg.z_1 + P_1.\Delta V - P_2.\Delta V$

نقسم على ΔV $P_2.\Delta V + \frac{1}{2}mv_2^2 + mg.z_2 = P_1.\Delta V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mg.z_1$

$$P_2 + \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\Delta V} + \frac{mg.z_2}{\Delta V} = P_1 + \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\Delta V} + \frac{mg.z_1}{\Delta V}$$

لدينا $m = \rho.\Delta V \implies \rho = \frac{m}{\Delta V}$

حفظ $P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_2$

$$\implies P + \frac{1}{2}\rho.v^2 + \rho.g.z = const$$

$(\rho.g.z)$ يمثّل الطاقة الكامنة الثقاليّة(طاقة الوضع) لواحدة الحجوم من السائل .

$(\frac{1}{2}\rho.v^2)$ يمثل الطاقة الحركية لوحدة الحجوم من المائع .

وبالتالي يجبُ أنْ يكونَ الضغطُ P طاقة واحدة الحجوم أيضاً وبذلك حتى تتناسق وحدات الكميّات الواردة في المعادلة، ويمكنُ أنْ نتحقّق من ذلك لو كتبنا واحدات الضغط إذْ نجدُ:

$P = \frac{F}{S}$ الواحدات $\left(\frac{N}{m^2} = \frac{N.m}{m^3} = \frac{J}{m^3}\right)$

سؤال: استنتج معادلة برنولي الخاصة لأنبوب أفقي $z_1 = z_2$؟

من برنولي العامة $P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_1$

$$\implies P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2$$

$$\implies P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho.v_2^2 - \frac{1}{2}\rho.v_1^2$$

$$\implies P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

نتيجة: ينقصُ ضغطُ المائع كلّما ازدادت سرعتُه.

سؤال:انطلاقاً من معادلة برونولي استنتج معادلةَ المانومتر ، سكونُ الموائع؟

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_2$$

سكون الموائع $v_1 = v_2 = 0$

$$P_1 + \rho.g.z_1 = P_2 + \rho.g.z_2$$

$$\implies P_1 - P_2 = \rho.g.z_2 - \rho.g.z_1$$

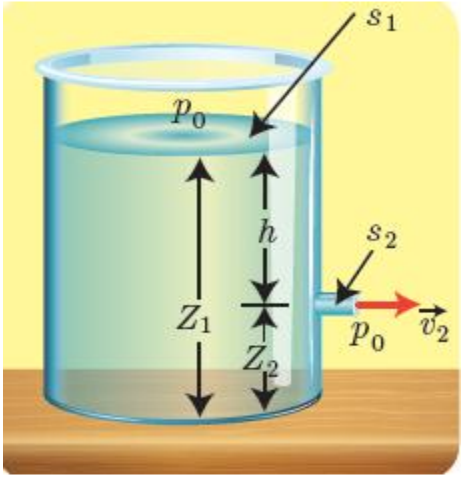
$$\implies P_1 - P_2 = \rho.g(z_2 - z_1)$$

لدينا $h = z_2 - z_1$

$$\implies P_1 - P_2 = \rho.g.h$$

نظريّة تورشيللى:

سؤال دورة: يحتوي خزّانٌ على سائل(مائع)كتلتُه الحجميّةρ ، مساحة سطحُ مقطعه s_1كبيرة بالنسبة إلى فتحةٍ جانبيّةٍ مساحةُ مقطعها s_2صغيرةٌ تقعُ قُربَ قعره وعلى عُمق $h = z_1 - z_2$ من السطح الحرّ للسائل .استنتج علاقة السرعةُ التي يخرجُ بها السائلُ من الفتحة الجانبيّة ؟



لدينا من الشكل

$$h = z_2 - z_1 \text{ ، } v_1 = 0 \text{ ، } P_1 = P_2 = P_0$$

نعوض في معادلة برنولي

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.z_1$$

$$\frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_2 = \rho.g.z_1$$

$$\frac{1}{2}\rho.v_2^2 = \rho.g.z_1 - \rho.g.z_2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\rho.v_2^2 = \rho.g(z_1 - z_2) \Longrightarrow \frac{1}{2}v_2^2 = g(z_1 - z_2)$$

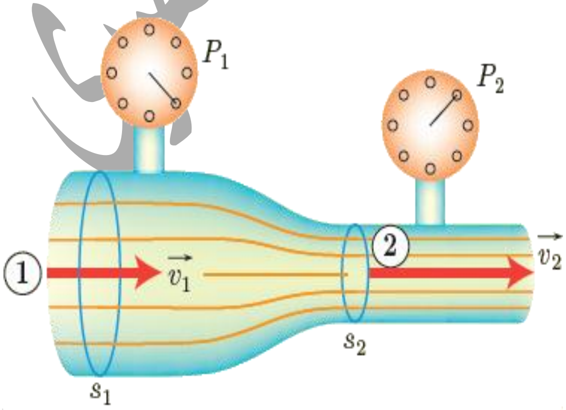
$$\frac{1}{2}v_2^2 = g.h \Longrightarrow v_2^2 = 2g.h$$

$$\boxed{\Longrightarrow v_2 = \sqrt{2g.h}}$$

إنّ سرعةَ خروج السائل تساوي السرعةَ التي يسقطُ بها جسمٌ مائع سقوطاً حرّاً من ارتفاعh . وتنطبقُ هذه العلاقة عند أيّ فتحةٍ في الوعاء، سواء في قعره كانت أم في جدارِهِ الجانبيّ.

أنبوبُ فنتوري:

سؤال: مما يتألف أنبوبُ فنتوري؟



يتألّفُ أنبوبُ فنتوري من أنبوب مساحةُ مقطعهs_1 يجري فيه سائلٌ بسرعةv_1 في منطقةٍ ضغطُهاP_1 فيصلُ لاختناق مساحته s_2 ، ولمعرفة فرق الضغط بين الجذع الرئيسِ والاختناق نستعملُ أنبوبَ فنتوري. نطبّقُ معادلة برنولي بين النقطتين 1 و 2 اللتين تقعان في المستوي الأفقيّ نفسِه.$z_2 = z_1$

$$P_1+\frac{1}{2}\rho.v_1^2+\rho.g.z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho.v_2^2+\rho.g.z_1$$
$$\Longrightarrow P_1+\frac{1}{2}\rho.v_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho.v_2^2$$
$$\Longrightarrow P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho.v_2^2-\frac{1}{2}\rho.v_1^2 \Longrightarrow P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)$$

لدينا من معادلة الاستمرارية $s_1v_1=s_2v_2 \Longrightarrow v_2=\frac{s_1}{s_2}v_1$

$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2}{v_1}^2-v_1^2\right)\Longrightarrow \boldsymbol{P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2}-1\right){v_1}^2}$$

لدينا : $s_1>s_2 \Longrightarrow P_1>P_2$

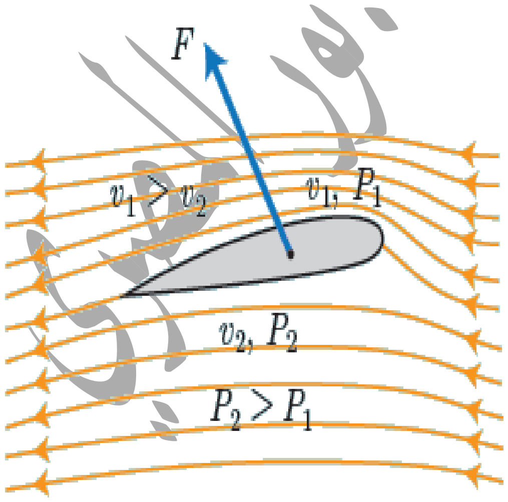
أيْ أنّ الضغطَ في الاختناق أقلُّ من الضغطِ في الجذع الرئيس للأنبوب.

ملاحظة: يُستفادُ من هذه الخاصية في الطّبّ، فقد تتناقصُ مساحةُ مقطع الشرايين في منطقةٍ ما نتيجةَ تراكم الدهون والشحوم، وهذا يعيقُ جريان الدّم في هذه الشرايين، ويتناقصُ ضغطُ الدّم في المقاطع المتضيّقة عن قيمته الطبيعيّة اللازمة لمقاومة الضغوط الخارجيّة.

جناحُ الطائرة وقوّةُ الرفع:

اشرح كيف تطيرُ الطائرةُ؟

عندما تُقلعُ طائرةٌ فإنّ الهواء يندفعُ من حول جناحيها من الأعلى والأسفل بشكلٍ يماثلُ جريان سائلٍ في أنبوب، وتتكثّفُ خطوطُ الجريان بحسب ميل الجناح وتصميمه بحيث تكونُ سرعةُ جريان الهواء من الأعلى أكبرَ ممّا هي عليه من الأسفلِ، وهذا يجعلُ الضغطَ من الأسفل أكبرَ منه في الأعلى، وينشأ فرقٌ في الضغطِ يؤدّي إلى رفعِ الطائرة للأعلى، تُسمّى قوّةُ فرق الضغط هذه بقوّة الرفع، وتناسبُ سرعةَ الطائرة



أنبوبُ بيتوت:

سؤال :استنتج علاقة السرعة بأنبوبُ بيتوت؟

يستعملُ أنبوبُ بيتوت لقياس سرعة جريان سائلٍ في منطقةٍ معيّنةٍ حيثُ يقيسُ المانومتر فرقَ الضغط بين نقطتين إذْ إنّ السرعةَ عندَ إحداهما معدومةٌ عمليّاً $v_2 = 0$ في المانومتر $z_1 = z_2$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_1$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 = P_2$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho.v_1^2$$

لكن لدينا سابقا : $P_2 - P_1 = \rho'.h.g$ **حيث** ρ' كثافةُ السائل في المانومتر.

$$\frac{1}{2}\rho.v_1^2 = \rho'.h.g \Rightarrow v_1^2 = \frac{2.\rho'.h.g}{\rho} \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \sqrt{\frac{2.\rho'.h.g}{\rho}}$$

ولمّا كانت ρ , ρ' . معروفتين من قبلُ؛ يمكنُ معايرةُ الجهاز بحيثُ تقرأُ السرعة من معرفة الارتفاع h

أولا :اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ ممّا يأتي:

1.عندما تهبُّ رياحٌ أفقيّةٌ عند فوهة مدخنة شاقوليّة فإنّ:

a .سرعة خروج الدخان من فوّهة المدخنة:

a. تزداد **b.** تنقص **c.** تبقى دون تغيّر **d.** تنعدم

الإجابة :

a. تزداد

b .ويمكن تفسيرُ النتيجةِ وفقَ:

a.مبدأ باسكال **b.** مبدأ برنولي **c.** قاعدة أرخميدس **d.** معادلة الاستمراريّة

الإجابة:

b.مبدأ برنولي

2.يتّصف السائلُ المثاليُّ بأنّه:

a. قابلٌ للانضغاط وعديمُ اللزوجة **b.**غيرُ قابل للانضغاط ولزوجتُه غيرُ مهملة.

c.غيرُ قابل للانضغاط وعديمُ اللزوجة **d.** .قابلٌ للانضغاط ولزوجتُه غيرُ مهملة.

الإجابة:

c.غيرُ قابل للانضغاط وعديمُ اللزوجة

3.خرطومٌ مساحة مقطعه عند فوّهة دخول الماء فيه s_1 وسرعة جريان الماءعند تلك الفوّهة v_1فتكونُ سرعةُ خروج الماء v_2 من نهاية الخرطوم حيثُ مساحةُ المقطع $s_2 = \frac{1}{4}s_1$ مساويةً:

a. v_1

b. $\frac{1}{4}v_1$ **c.** $4v_1$ **d.** $16v_1$

الحل: حسب معادلة الاستمرارية $Q'_1 = Q'_2 \Rightarrow s_1v_1 = s_2v_2 \Rightarrow s_1v_1 = \frac{1}{4}s_1v_2$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{4}v_2 \Rightarrow \qquad v_2 = 4v_1$$

الإجابة: **c.** $4v_1$

ثانياً :أعطِ تفسيراً علميّاً باستخدام العلاقات الرياضيّة المناسبة لكلٍّ ممّا يأتي:

1.اختلافِ سرعةِ جريانِ الماءِ عبرَ مقاطعَ مختلفةِ المساحةِ في مجرى نهرٍ جريانُه أفقيٌّ.

الحل: معدل التدفّق الحجمي : $Q_1{}' = Q_2{}' \Rightarrow s_1v_1 = s_2v_2 \Rightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}$
ازدياد المساحة s تنقص السرعة v (تناسب عكسي) **إذا كان** $s_2 \ll s_1$ **فإن** $v_2 \gg v_1$

2.اندفاعِ ستائرِ النوافذِ المفتوحةِ إلى خارجِ السيّارةِ عندما تتحرّك بسرعةٍ معيّنة.

الحل: ينتج عن حركة السيارة في الهواء زيادة في سرعة الجريان الأفقي لجزيئات الهواء بجوار النوافذ مما يسبب نقصان الضغط عندها بالنسبة للهواء داخل السيارة فيندفع الهواء (بفعل قوى الضغط) من الضغط المرتفع (داخل السيارة) إلى الضغط المنخفض (خارج السيارة) دافعاً الستائر نحو الخارج وذلك بحسب معادلة برنولي $P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

3.عدمِ تقاطعِ خطوطِ الانسيابِ لسائلٍ.

الحل: نعلم أنّ خطّ الانسياب يمسُّ في كل نقطة شعاع السرعة $\vec{v}$في تلك اللحظة لجسيم السائل فلو فرضنا أنَّ خطين للانسياب تقاطعا في نقطة ما فيكون للجسيم سرعتان بالمكان نفسه وباتجاهين مختلفين وهذا مرفوض فيزيائياً لايجوز أن يكون لجسم أكثر من شعاع سرعة .

4.ينقصُ مقطعُ عمودِ الماءِ المتدفّقِ من الخرطومِ عندما تُوجَّهُ فوّهتُهُ للأسفلِ، ويزدادُ مقطعُهُ عندما تُوجَّهُ فوهتُهُ رأسيّاً للأعلى.

الحل: لأنّ **سرعة جسيمات السائل تزداد** كلّما ابتعد عن فوهة الصنبور وبالتالي **ينقص الضغط** عندها ويكون الضغط المجاور لها (الضغط الجوي) أكبر فيضغطها نحو الداخل حسب برنولي $P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ وحسب الاستمرارية $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}$ **تنقص مساحة مقطع الماء** المتدفّق من الخرطوم عندما تُوجَّهُ فوهتُهُ للأسفل ، وبالعكس يزدادُ مقطعُهُ عندما فوهتُهُ رأسيّاً للأعلى .

5.يندفعُ الماء بسرعةٍ كبيرةٍ من ثقبٍ صغيرٍ حدَثَ في جدارِ خرطومٍ ينقلُ الماء.

الحل : حسب الاستمرارية $s_1v_1 = s_2v_2 \Rightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}$ التناسب عكسي بين مساحة مقطع الثقب وسرعة الماء . إذا كان $s_2 \ll s_1$ فإن $v_2 \gg v_1$

6.تستطيعُ خراطيمُ سياراتِ الإطفاءِ إيصالَ الماء لارتفاعاتٍ ومسافاتٍ كبيرة.

الحل: لأن السرعة تتناسب عكساً مع مساحة المقطع حسب الاستمرارية
$s_1 v_1 = s_2 v_2 \Longrightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}$ حيث أنّ فوهة الخرطوم تضيق فتزداد سرعة الماء وبالتالي يصل إلى ارتفاعات أعلى ومسافات أطول .
وحسب معادلة برنولي: $P + \frac{1}{2}\rho . v^2 + \rho . g . z = const$
بنقصان الضغط(عند فوهة الخرطوم) تزداد السرعة v و الارتفاع Z.
حسب الاستمرارية . إذا كان $s_2 \ll s_1$ فإن $v_2 \gg v_1$

7.تكونُ مساحةُ فتحاتِ الغازِ في موقدِ الغازِ صغيرةً.

الحل: حسب الاستمرارية تكون مساحة فتحات الغاز في موقد الغاز صغيرة لزيادة سرعة اندفاع الغاز منها مما يسمح بإيصاله إلى مسافات أبعد وامتداد اللهب وزيادة مسافة مصدر الغاز
$s_1 v_1 = s_2 v_2 \Longrightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}$
إذا كان $s_2 \ll s_1$ فإن $v_2 \gg v_1$

8.لجعلِ الماءِ المتدفّقِ من فتحةِ خرطومٍ يصلُ إلى مسافاتٍ أبعدَ نُغلقُ جزءاً من فتحةالخرطوم

الحل: لأن تصغير فوهة الخرطوم يزيد من سرعة اندفاع الماء منه فتزداد طاقته مما يسمح بإيصال الماء إلى مسافات أبعد وارتفاعات أعلى حسب معادلة الاستمرارية
$s_1 v_1 = s_2 v_2 \Longrightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}$
إذا كان $s_2 \ll s_1$ **فإن** $v_2 \gg v_1$

9.عندما تهبُّ الأعاصيرُ يُنصحُ بفتحِ النوافذِ في البيوت.

الحل: عندما تهب الأعاصير تزداد سرعة الجريان الأفقي لجزيئات الهواء حول المنازل فينقص ضغط الهواء في الخارج مما يهدد بتدميرها(اقتلاع الأسقف والنوافذ) ولذلك نفتح النوافذ ليتعادل الضغط بين الداخل والخارج وذلك حسب معادلة برنولي . $P + \frac{1}{2}\rho . v^2 = const$

ثالثاً :حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: لملِءِ خزّانٍ حجمُه $600\ L$ بالماء استُعمِلَ خرطومٌ مساحةُ مقطعِه $5cm^2$ فاستغرقت العمليّة $300\ s$:
المطلوب 1.احسبْ معدّلَ التدفّقِ الحجميّ Q' . 2.احسبْ سرعة تدفّق الماء من فتحة الخرطوم.
3.كمْ تصبحُ سرعة تدفّق الماء من فتحة الخرطوم إذا نَقَصَ مقطعُها ليصبحَ رُبعَ ما كان عليه؟

المعطيات: $V = 600\ L \Rightarrow V = 600 \times 10^{-3} m^3$ ، $S = 5\times10^{-4} m^2$ ، $\Delta t = 300 sec$

الحل: ١- $Q' = \frac{V}{\Delta t} = \frac{600\times10^{-3}}{300} = 2\times10^{-3}\ \frac{m^3}{sec}$

٢- $Q' = v.s \Rightarrow v = \frac{Q'}{s} = \frac{2\times10^{-3}}{5\times10^{-4}} = \frac{20}{5} = 4\ \ m.sec^{-1}$

٣- حسب الاستمرارية: $Q'_1 = Q'_2 \Longrightarrow s_1 v_1 = s_2 v_2 \Longrightarrow s_1 v_1 = \frac{1}{4} s_1 v_2$
$\Longrightarrow v_1 = \frac{1}{4} v_2 \Longrightarrow v_2 = 4 v_1 \Longrightarrow v_2 = 4 \times 4 = 16\ \ m.sec^{-1}$

المسألة الثانية: ترفعُ مِضخّةُ الماءَ من خزّانٍ أرضيٍّ عبرَ أنبوبٍ مساحةُ مقطعِه $S_1 = 10cm^2$ إلى خزّانٍ يقعُ على سطح بناء، فإذا علمتَ أنّ مساحةَ مقطعِ الأنبوب الذي يصبُّ في الخزّان العلويّ $S_2 = 5cm^2$، وأنّ معدّل الضخّ $Q' = 0.005m^3.s^{-1}$. المطلوب:

1.احسب سرعةِ الماءِ عندَ دخولِه الأنبوبَ وعند فتحةِ خروجِه من الأنبوبِ.

2.احسب قيمةِ ضغطِ الماءِ عندَ دخولِه الأنبوبَ علماً بأنّ الضغطَ الجويّ $1 \times 10^5 Pa$ ، والارتفاعَ بينَ الفوّهتين 20m .

3.احسب العمل الميكانيكي اللازم لضخ 100 L من الماء إلى الخزان العلوي.

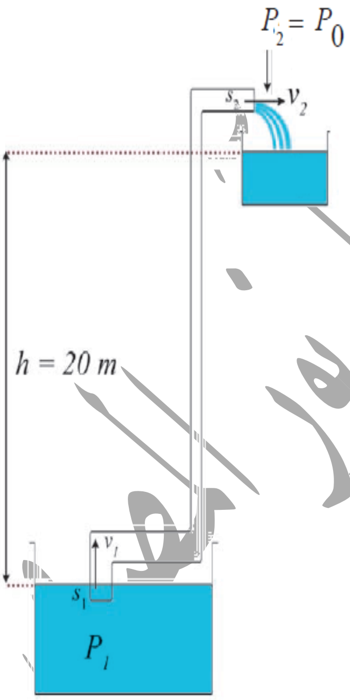
$$\rho_{H_2O} = 1000Kg.m^{-3} \quad , \quad g = 10m.s^{-2}$$

المعطيات: $S_1 = 10 \times 10^{-4} = 10^{-3} m^2$ ، $S_2 = 5 \times 10^{-4} m^2$

$Q'_1 = Q'_2 = 0.005 = 5 \times 10^{-3} m^3.s^{-1}$

$P_2 = P_0 = 1 \times 10^5 Pa$ ، $h = Z = Z_2 - Z_1 = 20 \ m$

$\rho_{H_2O} = 1000Kg.m^{-3} \quad , \quad g = 10m.s^{-2}$



الحل: ١- **نوجد v_1 من:** $Q'_1 = S_1 . v_1$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{Q'_1}{S_1} = \frac{5\times10^{-3}}{10^{-3}} = 5\ m.s^{-1}$$

نوجد v_2 من: $Q'_2 = S_2 . v_2$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{Q'_2}{S_2} = \frac{5\times10^{-3}}{5\times10^{-4}} = 10\ m.s^{-1}$$

٢-ضغط الماء عند دخول الأنبوب P_1: من معادلة برنولي

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.g.z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_2$$

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.z_2 - \frac{1}{2}\rho.v_1^2 - \rho.g.z_1$$

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g.(z_2 - z_1) - \frac{1}{2}\rho.v_2^2$$

نلاحظ من الرسم أن: $h = z = z_2 - z_1 = 20 \ m$

و $P_2 = P_0 = 10^5\ pa$

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.g(h) - \frac{1}{2}\rho.v_1^2$$

نعوض:

$$P_1 = 10^5 + (\frac{1}{2} \times 1000 \times 100) + (1000 \times 10 \times 20) - (\frac{1}{2} \times 1000 \times 25)$$

$$P_1 = 10^5 + (\frac{1}{2} \times 10^5) + (2 \times 10^5) - (12.5 \times 10^3)$$

$$P_1 = 10^5[1 + \frac{1}{2} + 2] - 12.5 \times 10^3$$

$$P_1 = 3.5 \times 10^5 - 12.5 \times 10^3 = 3.5 \times 10^2 \times 10^3 - 12.5 \times 10^3$$

$$P_1 = 350 \times 10^3 - 12.5 \times 10^3 = 337.5 \times 10^3 = 3.375 \times 10^5 pa$$

٣- $W_{TOT} = W_w + W_1 + W_2 \Rightarrow W_{TOT} = -m.gh + P_1.\Delta V - P_2.\Delta V$

$$\Rightarrow W_{TOT} = -\rho\Delta V.gh + P_1.\Delta V - P_2.\Delta V$$

$$\Rightarrow W_{TOT} = \Delta V[-\rho.gh + P_1 - P_2]$$

$$\Rightarrow W_{TOT} = 100 \times 10^{-3}[(-10^3 \times 10 \times 20) + (3.375 \times 10^5) - 10^5]$$

$$\Rightarrow W_{TOT} = 10^{-1}[(-2 \times 10^5) + (3.375 \times 10^5) - 10^5]$$

$$\Rightarrow W_{TOT} = 10^{-1}[(-2 + 3.375 - 1)10^5] = 10^{-1}[(0.375)10^5] =$$

$$\Rightarrow W_{TOT} = 0.375 \times 10^4 = 3750 \quad J$$

المسألة الثالثة: ينتهي أنبوبُ ماءٍ مساحة مقطعِهِ $10cm^2$ إلى رشّاش الاستحمام فيه 25 ثقباً متماثاً مساحةُ مقطعِ كلِّ ثقبٍ $0.1cm^2$، فإذا علمتَ أنّ سرعةَ تدفّق الماء عبر الأنبوب $50\ cm.s^{-1}$

المطلوب: 1.احسب معدّلِ التدفّق الحجميّ للماء.

2.احسب سرعةِ تدفّق الماء من كلِّ ثقب.

المعطيات: $S = 10cm^2 \Rightarrow S = 10 \times 10^{-4} = 10^{-3}m^2$

(مدخل واحد) $v = 50\ cm.s^{-1} \Rightarrow v = 50 \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$

عدد الثقوب المتماثلة $n = 25$ (25 مخرج متماثل)

مساحة الثقب الواحد $s_n = 0.1 \times 10^{-4} = 10^{-5}m^2$

الحل:

١- $Q' = S.v = 10^{-3} \times 50 \times 10^{-2} = 50 \times 10^{-5}m^3.s^{-1}$

٢- $Q'_{مدخل} = Q'_{25مخرج} \Rightarrow Q' = 25\ s_n \times v_n$

$$\Rightarrow v_n = \frac{Q'}{25\ s_n} = \frac{50\times10^{-5}}{25\times10^{-5}} = 2\ \ m.s^{-1}$$

المسألة الرابعة: مِحقنٌ أسطوانيُّ الشكلِ مساحة مقطعِهِ $1.25cm^2$ مركّبٌ عليه إبرةٌ معدِنيّةٌ مساحة مقطعها $4 \times 10^{-4}cm^2$ المطلوب:

1.احسب سرعةِ تدفقِ المحلولِ عبرَ مقطعِ المحقنِ عندما يكونُ معدّلُ التدفّق $5 \times 10^{-5}m^3.s^{-1}$

2. احسب سرعة تدفقِ المحلولِ لحظةَ خروجِهِ من فوّهةِ الإبرة.

المعطيات: $s_1 = 1.25cm^2 \Rightarrow s_1 = 1.25 \times 10^{-4}m^2$ مساحة مقطع المحقن

$s_2 = 4 \times 10^{-4}cm^2 \Rightarrow s_2 = 4 \times 10^{-4} \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-8}m^2$ مساحة الإبرةٌ

$Q'_1 = Q'_2 = 5 \times 10^{-5}m^3.s^{-1}$

الحل: ١-نوجد v_1 من: $Q'_1 = S_1.v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{Q'_1}{S_1} = \frac{5\times10^{-5}}{1.25\times10^{-4}} = 4 \times 10^{-1}\ m.s^{-1}$

٢-نوجد v_2 من: $Q'_2 = S_2.v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{Q'_2}{S_2} = \frac{5\times10^{-5}}{4\times10^{-8}} = \frac{5}{4} \times 10^3$

$$\Rightarrow v_2 = 1.25 \times 10^3 = 1250\ m.s^{-1}$$

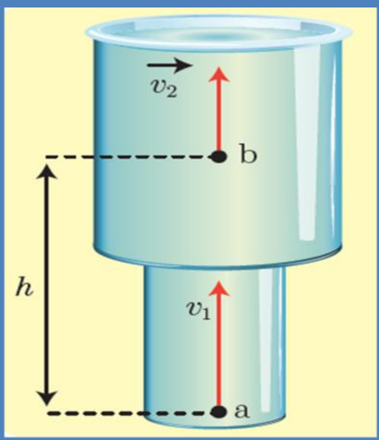
المسألة الخامسة: ثلاثةُ صنابيرِ ماءٍ، يملأ الأوّلُ حَوضاً في ساعة، ويملأ الثاني الحوضَ نفسَه في نصفِ ساعة، ويملأ الثالثُ الحوضَ نفسَه في ربعِ ساعة، احسبِ الزّمنَ الازمَ لملْءِ الحوضِ عندما تفتحُ الصنابيرُ الثلاثةُ معاً.

المعطيات: $\Delta t_3 = \frac{1}{4}\,h$ ، $\Delta t_2 = \frac{1}{2}\,h$ ، $\Delta t_1 = 1\,h$

الحل: $Q'_{\text{الكلي}} = \sum Q'_{\text{صنابير}} \Longrightarrow Q'_{\text{كلي}} = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3$

$$\frac{V}{\Delta t} = \frac{V}{\Delta t_1} + \frac{V}{\Delta t_2} + \frac{V}{\Delta t_3} \Longrightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2} + \frac{1}{\Delta t_3}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} \Longrightarrow \frac{1}{\Delta t} = 1 + 2 + 4 = 7 \Longrightarrow \Delta t = \frac{1}{7}\,h$$



المسألة العامة السابعة:

يجري الماء داخل الأنابيب الموضَّحة في الشكل من(a) إلى (b) حيث نصف قطر الأنبوب عند(a) $r_1 = 5$ cm و نصف قطر الأنبوب عند النقطة (b) $r_2 = 10$ cm والمسافة الشاقوليَّة بين(a)و(b) $h = 50cm$

1. احسب سرعة جريان الماء عند النقطة(b) علماً أنَّ سرعة جريان الماء عند النقطة(a) $v_1 = 4m.s^{-1}$

2. احسب قيمة فرق الضَّغط $(p_a - p_b)$

علماً $\rho_{H_2O} = 1000kg.m^{-3}$

المعطيات: $r_1 = 0.05\text{m}$, $r_2 = 0.1\text{ m}$, $h = 0.5\text{ m}$, $v_1 = 4\text{ m.sec}^{-1}$

الحل: ١-نوجد v_2 من معادلة الاستمرارية: $v_1 . s_1 = v_2 . s_2 \Longrightarrow v_2 = \frac{v_1 . s_1}{s_2}$

$$\Longrightarrow v_2 = \frac{v_1 .\pi . r_1^2}{\pi . r_2^2} \Longrightarrow v_2 = \frac{4\times\pi\times(5\times10^{-2})^2}{\pi(10\times10^{-2})^2} = \frac{4\times\pi\times25\times10^{-4}}{\pi\times100\times10^{-4}} = 1\ \text{m.sec}^{-1}$$

٢- حسب معادلة برنولي: $P_{a\,1} + \frac{1}{2}\rho.\, v_{a\,1}^2 + \rho.g.\,z_1 = P_{b\,2} + \frac{1}{2}\rho.\, v_{b\,2}^2 + \rho.g.\,z_2$

$$P_{a\,1} - P_{b\,2} = \frac{1}{2}\rho.\, v_{b\,2}^2 + \rho.g.\,z_2 - \frac{1}{2}\rho.\, v_{a\,1}^2 - \rho.g.z_1$$

$$P_{a\,1} - P_{b\,2} = \frac{1}{2}\rho.\, v_{b\,2}^2 - \frac{1}{2}\rho.\, v_{a\,1}^2 + \rho.g(z_2 - z_1)$$

نلاحظ من الرسم أن: $h = z_2 - z_1$

نعوض $P_{a\,1} - P_{b\,2} = \frac{1}{2}\rho.\, v_{b\,2}^2 - \frac{1}{2}\rho.\, v_{a\,1}^2 + \rho.g(h)$

$$P_{a\,1} - P_{b\,2} = \frac{1}{2}\times 1000\times 1 - \frac{1}{2}\times 1000\times 16 + 1000\times 10\times 50\times 10^{-2}$$

$$P_{a\,1} - P_{b\,2} = \frac{1}{2}\times 10^3 - 8\times 10^3 + 10^3\times 5 = -2.5\times 10^3\ \ pa$$

تدل الإشارة السالبة على أن $P_{a\,1} < P_{b\,2}$

تفكير ناقد

أيّهما أكثر تقوساً السطح العلوي أم السطح السفلي لجناح الطائرة؟

الحل: السطح العلوي أكثر تقوساً وهذا التقوس يولد قوة الرفع التي ترفع الطائرة عن الأرض وتبقى عليها في الجو

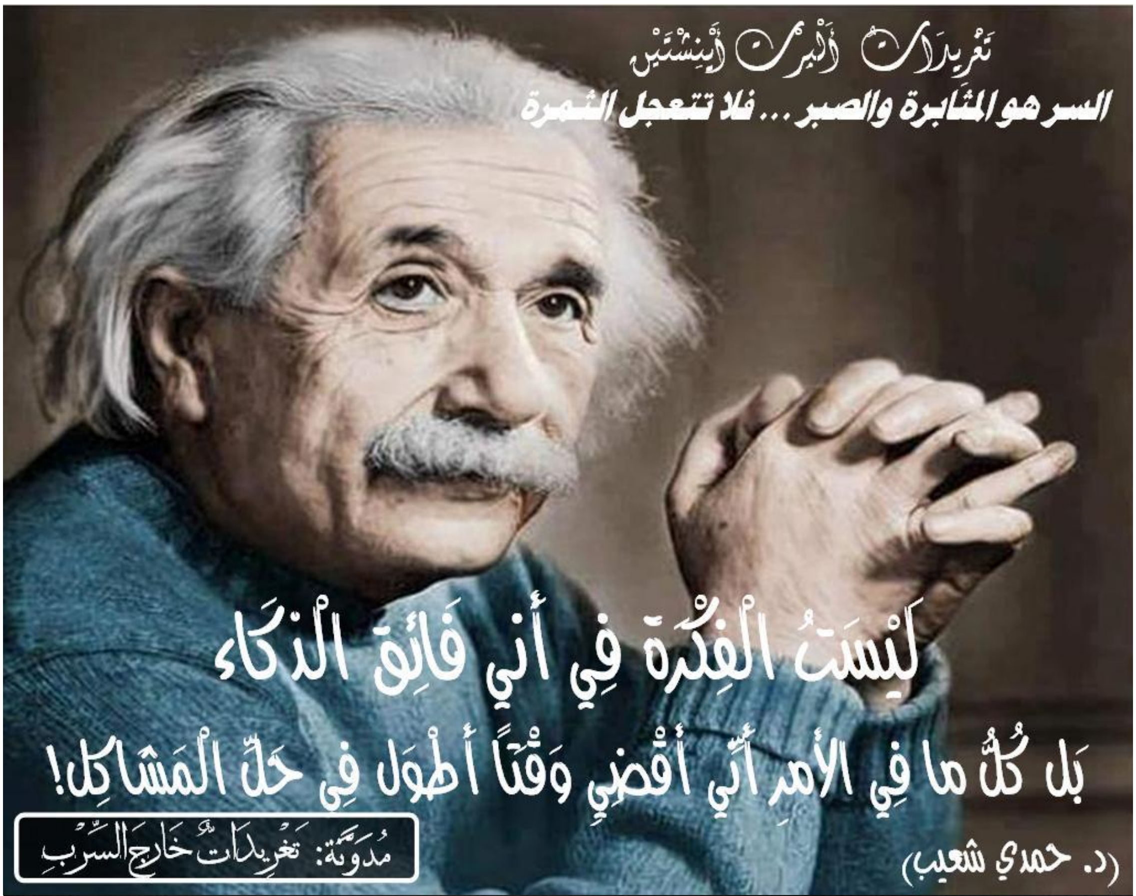
أبحث أكثر

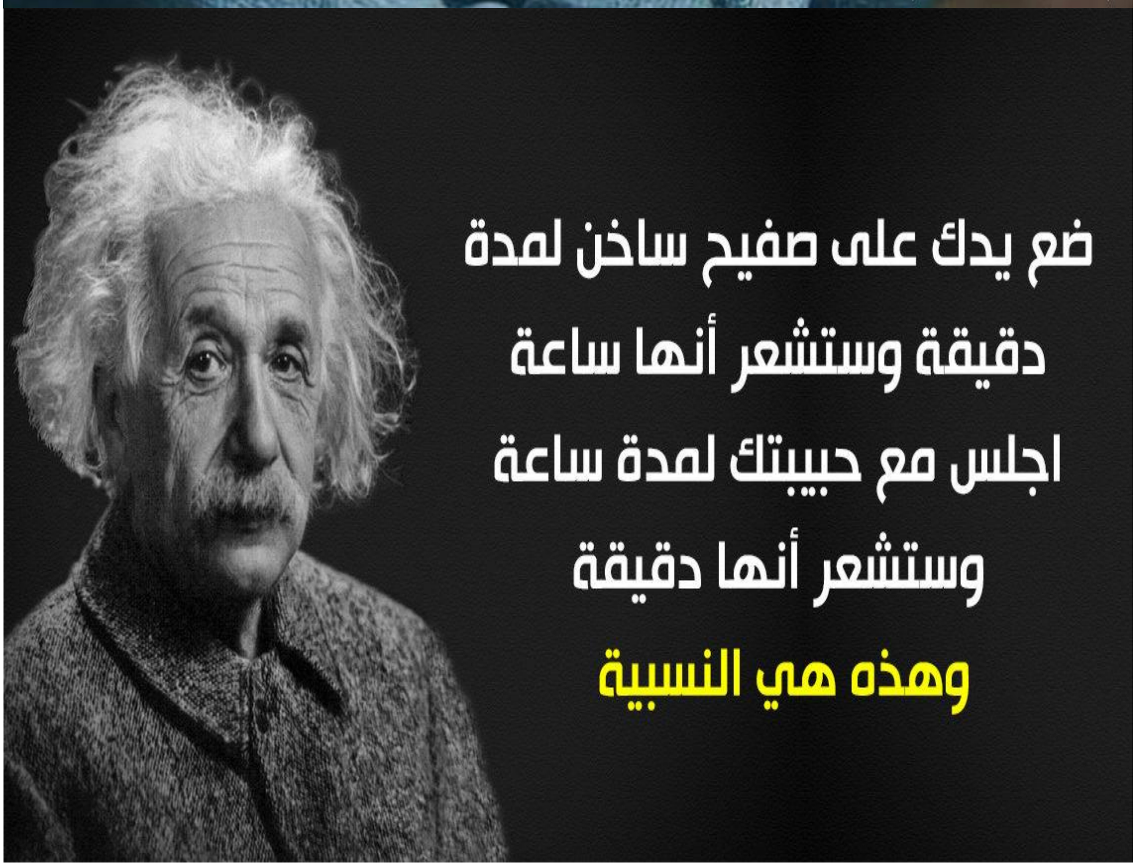
يزدادُ استهلاكُ السيّارة للوقود عندما تسيرُ بسرعةٍ عالية علماً أنها تقطعُ المسافةَ نفسَها بزمن أقلّ.

١- بسبب انخفاض الضغط في الاطارات كلما زاد احتكاك الاطار يحتاج المحرك لطاقة أكبر وبالتالي يستهلك المحرك كمية أكبر من الوقود

٢- وبسبب استخدام زيت غير مناسب للمحرك وخصوصا ذو لزوجة عالية يمكن أن يزيد من الطاقة التي يحتاجها المحرك من أجل الدوران وبالتالي زيادة استهلاك الوقود

الدرس الخامس :النسبيّةُ الخاصّةُ





مقدمة: الكثيرُ من المقاديرِ الفيزيائيّةِ هي مقاديرُ نسبيّة، أيْ تختلفُ قيمتُها باختلافِ جملةِ المقارنة، لكنْ هل ينطبقُ ذلك على الزمن مثلاً؟ فهل يختلفُ زمنُ ظاهرةٍ ما باختلاف جملة المقارنة؟ **وماذا عن الطول، والكتلة؟**

أتساءلُ، وأجيبُ:
١- يُطلقُ شخصٌ متحرّكٌ سهماً بجهة حركته، هل تختلفُ سرعةُ السهم بالنسبة للشخص الذي أطلق السهم عنها بالنسبة لمراقب آخرَ يقفُ ساكناً على الطريق؟
٢- لو أضاءَ شخصٌ متحرّكٌ مصباحاً بجهة حركته، هل تتوقّعُ أنْ تكونَ سرعةُ الضوء الصادر عن المصباح بالنسبة للشخص هي نفسَها تماماً بالنسبة لمراقبٍ ساكن؟
للإجابة عن تلك الأفكار نذكر فرضيتي اينشتاين

نستنتج أن

١- السرعةُ مفهومٌ نسبيٌّ يختلفُ باختلاف جملة المقارنة.
٢- سرعةُ انتشارِ الضوء ثابتةٌ في الوسط نفسِه مهما اختلفتْ سرعةُ المنبع الضوئيِّ، أو سرعةُ المراقب.

معلومة: لقد حاول العالمان مايكلسون ومورلي دراسةَ الفرق بين سرعة شعاع ضوئيٍّ يُطلق بجهة دوران الأرض حول الشمس، وسرعة شعاع ضوئيٍّ مُعامدٍ له، في تجربتهما لإثبات وجود الأثير الذي كان يعتقدُ أنّه وسط انتشار الضوء، لكن التجربة أخفقتْ في إثبات ذلك؛ لأنّ سرعةَ انتشار الضوء كانت نفسَها في جميع الحالات. إنّ تجربة مايكلسون -مورلي كانت من أسبابِ نجاح النظريّة النسبيّة لأينشتاين، الذي نفى وجود الأثير، وأكّد ثباتَ سرعة الضوء في وسطٍ محدّدٍ مهما اختلفت سرعةُ المنبع الضوئيّ أو سرعةُ المراقب.

سؤال : اذكر فرضية أينشتاين الأولى؟

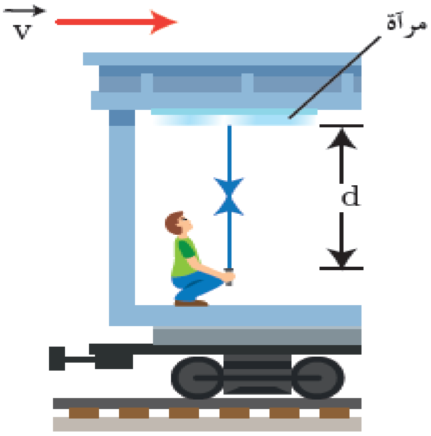
- **سرعةُ انتشارِ الضوءِ في الخلاءِ هي نفسُها $C = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$ في جميع جمل المقارنة.**

تجربة: أجريتُ تجربةَ حسابِ تسارع الجاذبيّة الأرضيّة بوساطة النوّاس الثقليّ البسيط في مخبر المدرسة، ثمّ كرّرتُ التجربة السابقة ضمن باصٍ يسيرُ بحركةٍ مستقيمةٍ منتظمة.
نجد أن القوانينُ الفيزيائيّة تبقى نفسَها في جميع جمل المقارنة العطاليّة

سؤال :اذكر فرضية أينشتاين الثانية؟

- **القوانينُ الفيزيائيّة تبقى نفسَها في جميع جمل المقارنة العطاليّة.**

تمدّدُ الزمن:



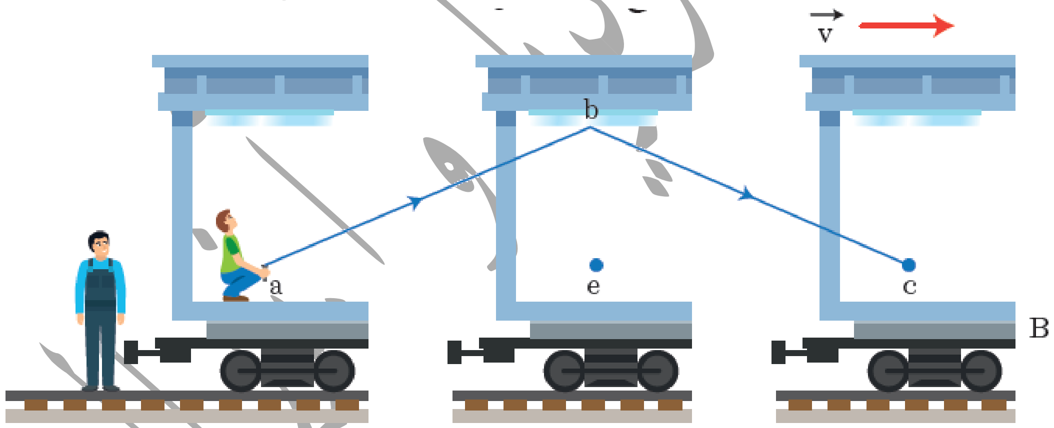
بفرضِ أنّ قطاراً يسيرُ بسرعةٍ ثابتةٍ v ، مثبّتٌ على سقفِ إحدى عرباتِهِ مرآةٌ مستويةٌ ترتفعُ مسافة d عن منبعٍ ضوئيٍّ بيدِ مراقبٍ يقفُ ساكناً في العربة ذاتِها، يرسلُ المراقبُ ومضةً ضوئيّةً باتّجاه المرآة، ويسجّلُ الزمن t_0الذي تستغرقُه الومضةُ الضوئيّةُ للعودة إلى المنبع.

بعدِّ سرعةِ الشعاعِ الضوئيّ c يكون:

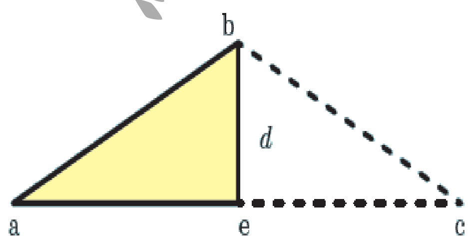
$$c \text{ السرعة} = \frac{2d \text{ المسافة}}{t_0 \text{ الزمن}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{c.t_0}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{2d}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

أمّا بالنسبةِ لمراقبٍ خارجيٍّ يقفُ ساكناً خارجَ القطار على استقامةٍ واحدةٍ مع المنبع الضوئيّ لحظةَ إصدار الومضة الضوئيّة فإنّ الزمن الذي تستغرقُهُ الومضةُ الضوئيّةُ للعودة إلى المنبع هو t فهل $t = t_0$؟ سوف نرى ذلك ونستنتج علاقة تمدد الزمن γ .



إنّ المسافة التي تقطعُها الومضةُ الضوئيّةُ للعودة إلى المنبع بالنسبة للمراقب الخارجيّ هي $(ab + bc)$ لو طبّقنا هنا الميكانيك الكلاسيكيّ لأضفنا سرعة القطار v إلى سرعة الضوء، لكنْ وفقَ النظريّة النسبيّة الخاصّة فإنّ سرعةَ الضوء لا تتغيّرُ بتغيّر المراقب .فكيف قطع الضوء مسافة أكبر بالسرعة نفسها؟



$$c \text{ السرعة} = \frac{(ab+bc) \text{ المسافة}}{t \text{ الزمن}}$$

$$c = \frac{2ab}{t} \Rightarrow \quad ab = \frac{c.t}{2}$$

المنبعُ انتقلَ من النقطة a إلى النقطة c :

$$v \text{ السرعة} = \frac{(ae+ec) \text{ المسافة}}{t \text{ الزمن}}$$

$$v = \frac{ac}{t} \Rightarrow v = \frac{2ae}{t} \Rightarrow ae = \frac{v.t}{2} \ldots (2)$$

بتطبيقِ نظريّة فيثاغورث في المثلّث القائم abe نجدُ: $(ab)^2 = (ae)^2 + (ed)^2$

$$\left(\frac{c.t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v.t}{2}\right)^2 + (d)^2 \Rightarrow \frac{c^2.t^2}{4} = \frac{v^2.t^2}{4} + d^2 \Rightarrow \frac{c^2.t^2}{4} - \frac{v^2.t^2}{4} = d^2$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{4}(c^2 - v^2) = d^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4d^2}{(c^2-v^2)}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}} \quad .....(3)$$

ومن العلاقة(1) : $\boldsymbol{t_0 = \frac{2d}{c}}$ .... (4)

بقسمة العلاقة (3) إلى (4) نجدُ : $\frac{t}{t_0} = \frac{\frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}}}{\frac{2d}{c}} \Rightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}$

نخرج c^2عامل مشترك من تحت الجذر في المقام $\Rightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{c}{\sqrt{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}}$

$$\Rightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{c}{c.\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \Rightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

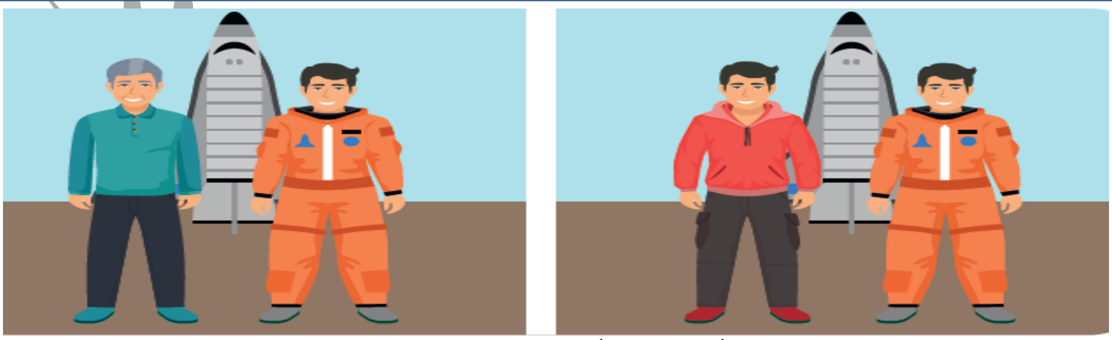
ندعو $\gamma = \frac{t}{t_0}$

حفظ $\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$

$$\gamma = \frac{t}{t_0} > 1 \qquad \Rightarrow \quad t = \gamma . t_0$$

نتيجة:• يتمدّدُ(يتباطأ)الزمنُ عند الحركة.

تطبيق(مفارقة التوأمان) : بفرض أنّ أخوين توأمين أحدُهما رائدُ فضاءٍ طار بسرعةٍ قريبةٍ من سرعة الضوء في الخلاء$(v \simeq c)$ $v = \frac{\sqrt{899}}{30}c$ وبقي رائدُ الفضاء في رحلته سنةً واحدةً وفق ميقاتيّةٍ يحملها، فما الزمنُ الذي انتظره أخوه التوأم على الأرض ليعود رائدُ الفضاء من رحلته؟



<u>الحل:</u> الزمنُ الذي سجّلته الميقاتيّةُ التي يحملُها رائدُ الفضاء $t_0 = 1\ year$

الزمنُ الذي سجّله المراقبُ الخارجيّ للرحلة (الأخ التوأم الذي بقي على الأرضt)

$$\gamma = \frac{t}{t_0} \quad \Longrightarrow t = \gamma . t_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{(\frac{\sqrt{899}}{30}c)^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\frac{899}{900}c^2}{c^2}\right)}}$$

$$\Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{899}{900}\right)}} = 30$$

$$\Longrightarrow t = \gamma . t_0 \Longrightarrow t = 30 \times 1 = 30 \quad year$$

أي أنّ الأخَ التوأمَ انتظرَ ثلاثينَ عاماً حتى انتهت رحلةُ أخيه التوأم التي استغرقتْ بالنسبة له عاماً واحداً.

تقلّص الأطوال:

تخيّل مراقبَين؛ الأوّلُ في محطّةِ إطلاقٍ على الأرض، والثاني هو روبوت في مركبة فضاءٍ انطلقت من محطّةِ الفضاء نحو الشمس بسرعةٍ ثابتة بالنسبة للمراقب الأوّل.

تسجّلُ العدّاداتُ في المحطّة على الأرض الآتي:

المسافةُ بينَ الأرض والشمس L_0 ، الزمنُ الذي استغرقتهُ مركبةُ الفضاء في رحلتها t :

$$L_0 = v . t$$

وتسجّلُ عدّاداتُ مركبةِ الفضاءِ المعطياتِ الآتيةَ:

المسافةُ المقطوعةُ بين الأرض والشمس L، وزمنُ الرحلة t_0 فيكون: $L = v . t_0$

بقسمة العلاقتين بعضِهما على بعضٍ نجدُ: $\frac{L_0}{L} = \frac{v.t}{v.t_0} \Longrightarrow \frac{L_0}{L} = \frac{t}{t_0}$

لكنّ الزمنَ الذي استغرقتْهُ رحلةُ المركبة الفضائيّة يتمدّدُ بالنسبة للمراقب الأوّل $t = \gamma . t_0$

$$\Longrightarrow \frac{L_0}{L} = \frac{\gamma . t_0}{t_0} \Longrightarrow \frac{L_0}{L} = \gamma$$

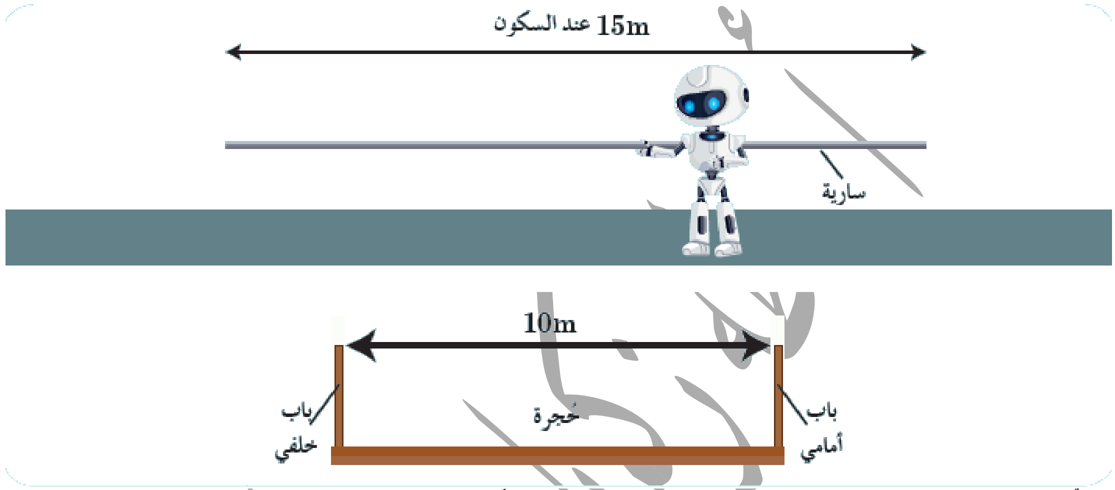
أمّا بالنسبةِ لطولِ المركبةِ الفضائيّة(وفق منحى سرعتها)فيعدُّ L بالنسبة للمراقب الأرضيّ في المحطّة لأنّ المركبة الفضائيّة متحرّكة بالنسبة له، ويعتبرُ L_0 بالنسبة للمراقب في المركبة الفضائيّة فيكونُ طولُ المركبة بالنسبة للمراقب الأرضيّ أقصرَ ممّا هو عليه بالنسبة لمراقب في المركبة.

نتيجة: • يتقلّصُ(ينكمش)الطولُ عند الحركة.

تطبيق(السارية والحُجرة):

بفرضِ أنّ روبوتاً رياضيّاً يحملُ ساريةً أفقيّةً طولَها 15m وهي ساكنة ، يتحرّكُ بسرعةٍ أفقيّة(0.75 من سرعة الضوء) 0.75 c وأمامَه حُجْرةٌ لها بابانِ أماميٌّ وخلفيٌّ، البُعد بينهما 10m يمكنُ التحكّمُ بفتحهما، وإغلاقهما آنيّاً بالنسبة لمراقبٍ ساكن، هل يمكنُ أنْ تعبرَ الساريةُ الحُجرةَ بأمانٍ إذا أغلقَ المراقبُ الساكنُ البابين وفتحَهما آنياً(بالنسبة له)عندَ عبور الروبوت مع السارية للحُجرة؟ (نعدّ $\sqrt{0.4375} \approx 0.66$)

الحل:



يعُدُّ المراقبُ الساكنُ طولَ الساريةِ المتحرّكةِ L وطولَها وهي ساكنة L_0 فيكون:

لدينا
$$\frac{L_0}{L} = \gamma$$
$$\Longrightarrow \quad L = \frac{L_0}{\gamma}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{(0.75\,c)^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-(0.75\,)^2\,)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-0.5625\,)}}$$
$$\Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-0.5625\,)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{0.4375}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{0.66}$$
$$L = \frac{L_0}{\gamma} \Longrightarrow L = \frac{15}{\frac{1}{0.66}} = 15 \times 0.66 = 9.9m \quad < 10m$$

بمأن $L = 9.9m \quad < 10m$ لذلك يمكنُ أنْ تعبرَ الساريةُ بأمان.

تكافؤُ الكتلة - الطاقة:

الكتلة ثابتة في الميكانيك الكلاسيكيّ من أجل السّرعات الصغيرة أمامَ سرعة انتشار الضوء في الخلاء،
أمّا وَفقَ الميكانيك النسبيِّ فإنّ الكتلةَ تزدادُ بزيادة السّرعة، وتُعطى بالعلاقة: $\boldsymbol{m = \gamma . m_0}$
حيثُ $\boldsymbol{m}$: الكتلةُ عند الحركة، $\boldsymbol{m_0}$ الكتلةُ عند السكون.
سؤال بين من أين أتتْ هذه الزيادةُ في الكتلة؟

الحل: لدينا ($m = \gamma . m_0$) $\Delta m = m - m_0$

$$\Delta m = \gamma . m_0 - m_0 \Rightarrow \Delta m = m_0(\gamma - 1)$$

لدينا:
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \gamma = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

نعوض γ في Δm
$$\Rightarrow \Delta m = m_0\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

ووفقَ دستور التقريب $(1+\bar{\varepsilon})^n \approx 1 + n\bar{\varepsilon}$ ،بعد $\bar{\varepsilon} \ll 1$ من أجلِ سّرعات صغيرة يكونُ:

$$\Rightarrow \Delta m = m - m_0 = \gamma m_0 - m_0 = m_0(\gamma - 1) = m_0[1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1]$$

$$\Rightarrow \Delta m = m_0[\frac{v^2}{2c^2}] = \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2} \Rightarrow \Delta m = \frac{E_k}{c^2}$$

نتيجة: عندما يتحرّكُ الجسمُ تزدادُ كتلتُه بمقدارِ يساوي طاقتَه الحركيّة مقسومةً على رقم ثابت c^2 ، أي أنّ الكتلةَ تكافئُ الطاقة.

الطاقةُ الكليّة في الميكانيك النسبيّ:

لدينا: $\Delta m = m - m_0 = \frac{E_k}{c^2} \quad ....(1)$

نضربُ العلاقة (1) بالثابت c^2 فنجدُ: $m.c^2 - m_0.c^2 = E_k$

$$E - E_0 = E_k \quad \Rightarrow E = E_k + E_0$$

نتيجة: إنّ الطاقة الكليّة في الميكانيك النسبيّ هي مجموعُ الطاقة السكونيّة والطاقة الحركيّة.

الطاقة السكونيّة: $E_0 = m_0 . c^2$

والطاقة الحركيّة : $E_k = E - E_0$

الطاقة الكليّةَ: $E = m.c^2$

تطبيق محلول: يتحرّكُ إلكترون في أنبوبةٍ تلفاز بطاقة حركيّة $27 \times 10^{-16} J$:

1.أحسبِ النسبةَ المئويّة للزيادة في كتلةِ الإلكترون نتيجةَ طاقتهِ الحركيّة.

2.أحسبْ طاقتَه السكونيّة . علماً أن: $c = 3 \times 10^{8} m.s^{-1}$ $m_e = 9 \times 10^{-31} Kg$

المعطيات: $E_k = 27 \times 10^{-16} J$ $m_e = 9 \times 10^{-31} Kg$، $c = 3 \times 10^{8} m.s^{-1}$

الحل: $E_k = m.c^2 - m_0.c^2 \Rightarrow E_k = c^2(m - m_0)$

$$\Rightarrow (m - m_0) = \frac{E_k}{c^2} = \frac{27\times10^{-16}}{(3\times10^8)^2} = \frac{27\times10^{-16}}{9\times10^{16}} = 3 \times 10^{32} kg$$

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{\text{الفرق في الكتلة}}{\text{كتلة الألكترون}} \times 100\,\% = \frac{m - m_0}{m_e} \times 100\%$$

$$\Rightarrow \text{النسبة المئوية} = \frac{3\times10^{32}}{9\times10^{-31}} \times 100\% \quad \Rightarrow \quad \text{النسبة المئوية} = 3.33\%$$

2. طاقةُ الإلكترون السكونيّة:

$$E_0 = m_0.c^2 = 9 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16}$$

$$E_0 = 81 \times 10^{-15} J$$

نتيجة: إنّ أثرَ النظريّة النسبيّة الخاصّة يُهملُ من أجل السّرعات الصغيرة بالنسبة إلى سرعة انتشارِ الضوءِ في الخلاء، وتؤوّل عندها العلاقاتُ الفيزيائيّةُ إلى شكلها الكلاسيكيّ.

سؤال: انطلاقاً من علاقاتِ الميكانيكِ النسبيّ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$ هل يمكنُ التوصّلُ إلى العلاقاتِ المطبّقة في الميكانيك الكلاسيكيّ؟ بين ذلك في الطاقة الحركية؟

الحل: من أجل السّرعات الصغيرة أمامَ سرعة الضوء في الخلاء $v \ll c$ فأن $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ووفقَ دستورِ التقريب $(1 + \bar{\varepsilon})^n \approx 1 + n\bar{\varepsilon}$ بعد، من أجلِ $\bar{\varepsilon} \ll 1$ سّرعات صغيرة يكونُ:

$$\Rightarrow \gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

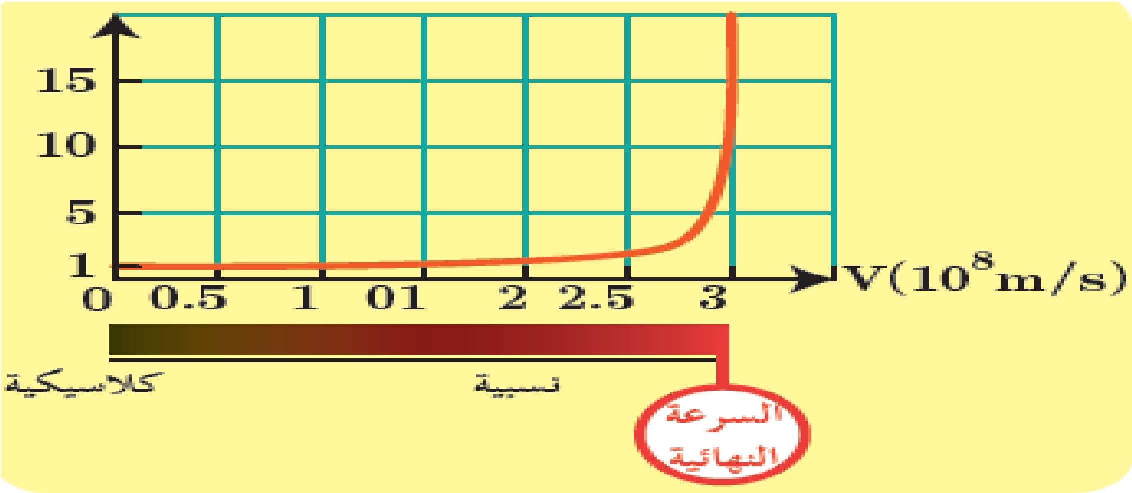
لنأخذْ على سبيلِ المثال علاقةَ الطاقةِ الحركيّة في الميكانيك النسبيّ: (لدينا $E = \gamma.E_0$)

$$E_k = E - E_0 \Rightarrow E_k = \gamma.E_0 - E_0 \Rightarrow E_k = (\gamma - 1)E_0$$

نعوّضُ عن γ فنجدُ: $\Rightarrow E_k = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right)E_0$

$$\Rightarrow E_k = \left(\frac{v^2}{2c^2}\right)m_0.c^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}m_0.v^2$$

و هي علاقةُ الطاقةِ الحركيّة في الميكانيك الكلاسيكيّ.



سؤال: انطلاقاً من الميكانيك النسبيّ استنتج العلاقةَ المحدّدةَ لكميّة الحركة في الميكانيك الكلاسيكيّ؟

<u>الحل:</u> علاقةَ شعاع كمية الحركة في الميكانيك النسبيّ: $\vec{p} = m.\vec{v}$

$$\vec{p} = \gamma m_0.\vec{v}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ووفقَ دستورِ التقريب $(1+\bar{\varepsilon})^n \approx 1+n\bar{\varepsilon}$ ،بعد $\bar{\varepsilon} \ll 1$ من أجلِ السّرعات الصغيرة يكونُ:

$$\Rightarrow \gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

السّرعات الصغيرة أمامَ سرعة الضوء في الخلاء $v \ll c$ فأن $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

نعوّضُ عن γ فنجدُ: $\Rightarrow \vec{p} = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)m_0.\vec{v}$

السّرعات الصغيرة أمامَ سرعة الضوء في الخلاء $v \ll c$ فأن $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

لذلك يهمل الحد $\frac{v^2}{c^2}$ لأنه صغير جداً فتصبح العلاقة $\vec{p} = (1)m_0.\vec{v} = m_0.\vec{v}$

وهي عبارة شعاع كمية الحركة في الميكانيك الكلاسيكي لكن الميكانيك النسبي أكثر شمولاً من الميكانيك الكلاسيكي التي تبقى علاقته صحيحةمن أجل سرعة $42 \times 10^6 m.s^{-1}$ بتقريب مقبول 1%

إضاءة

- قارنَ العالمان هافل، وكيتنج بينَ قياساتِ أربعِ ساعاتٍ ذرّيّةٍ في رحلةٍ على متنِ طائرةٍ نفّاثةٍ، وقياساتِ ساعاتٍ ذرّيّةٍ على الأرض مع مراعاةِ جميع الظروف، فتأكّدَ تمدّدُ الزمن، وتأكّدت تجريبيّاً الحساباتُ النظريّةُ للنسبيّة.

حل الأسئلة النظرية:

أولاً :اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1. أفترضُ أنّ صاروخين في الخلاء يتحرّكُ كلٌّ منهما نحوَ الآخر بسرعةٍ قريبةٍ من سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء، وفي لحظةٍ ما أضاء الصاروخُ الأوّلُ مصابيحَه، إنّ سرعةَ ضوء الصاروخ الأولِ بالنسبةِ للصاروخ الثاني هي:

a. c **b.** أكبر من c **d** أصغر من c **c.** معدومة

الحل: حسب الفرض الأول لانيشتأين (**سرعةُ انتشارِ الضوءِ في الخلاءِ هي نفسُها** $C = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$ **في جميع جمل المقارنة**)

الإجابة: a . c

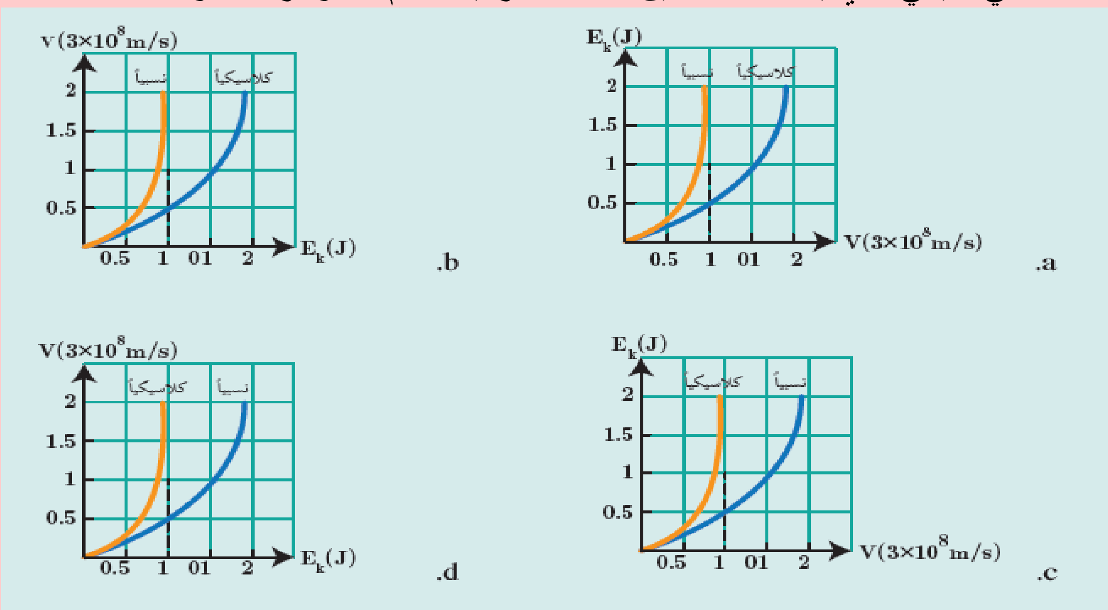
2. أفترضُ أنّ طاقمَ سفينةِ فضاءٍ تطيرُ بسرعةٍ قريبةٍ من سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء يشاهدون تسجيلاً لمباراةِ كرةِ قدم مدّتُها ساعةٌ ونصفٌ، ويتابعُهم مراقبٌ أرضيٌّ بتلسكوبٍ دقيقٍ جدّاً، فيرى مدّة المباراة:

a. *هي نفسها* **b.** أكبر **d** أصغر **c.** معدومة

الحل: بسبب تمدد الزمن $t = \gamma . t_0$

الاجابة: b. أكبر

3 المنحني البيانيّ الذي يمثّل العلاقة بين الطاقة الحركيّة لجسم ما، وسرعته هو:



الاجابة : a

ثانياً :أجبْ عن السؤالين الآتيين:

1. يحاولُ العلماء عندَ دراستهم خصائصَ الجسيماتِ تحريكَها بسُرعاتٍ كبيرةٍ جدّاً باستخدام المسرّعات هل يمكنُ أنْ تصلَ سرعةُ هذه الجسيماتِ إلى سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء تماماً؟ لماذا؟

الحل: كلا . لأنه كلما اقتربت سرعتها من سرعة الضوء تزداد كتلتها وتقترب من اللانهاية وبالتالي تحتاج لقوى لا نهائية لتسريعها وهذا غير ممكن

$$m = \gamma . m_0 \Rightarrow \; m = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} . m_0$$

اذا كان $v = c \Rightarrow \quad m = \frac{1}{\sqrt{(0)}} . m_0 \Rightarrow \quad \mathrm{m} \rightarrow \infty$

2. يقفُ جسمٌ ساكنٌ عند مستوٍ مرجعيّ(سطح الأرض مثلاً)، ما قيمةُ طاقتهِ الحركيّة عندئذٍ؟ وما قيمةُ طاقتهِ الكامنة الثقاليّة بالنسبة للمستوي المرجعيّ؟ هل طاقتُهُ الكليّةُ النسبيّة معدومة؟ ولماذا؟

الحل: طاقته الحركية معدومة $\left(E_k = \frac{1}{2} m . v^2\right)$ (لأنه ساكن بالنسبة للأرض)

طاقته الكامنة الثقالية معدومة $\left(E_p = m . g . h\right)$ (لأنه عند المستوي المرجعي)

الطاقة الكلية النسبية غير معدومة لأنه يمتلك كتلة سكونية وبالتالي له طاقة كلية تساوي طاقته السكونية $E = E_0 = m_0 . c^2$

ثالثّاً :حُلَّ المسائلَ الآتيةَ:

المسألة الأولى: درسَ العلماء جسيماتِ الميونات(وهي جسيماتٌ أوليّة)في المختبر فوجدوا أنّها تتحلّلُ إلى جسيماتٍ أخفَّ منها خلالَ زمنٍ $2.2\ \mu.s$ **المطلوب:**

1. رصدت الميونات بدايةً قربَ سطح الأرض، أحسبْ أقصى ارتفاعٍ عن سطح الأرضِ يمكنُ أن تكونَ قد تولّدت عنده وفق القوانين الكلاسيكيّة؟ إذا علمت أنّ سرعتها 0.995 c

2. أرسلَ العلماء بعدئذٍ مناطيدَ تحملُ كواشفَ لهذه الميونات، فوجدوها على ارتفاعاتٍ أعلى بكثيرٍ من الارتفاع المحسوب كلاسيكيّاً، فأخذوا بعين الاعتبار تباطؤَ الزمنِ وفقَ النظريّة النسبيّة الخاصّة، احسبِ الزمنَ الذي تستغرقُهُ هذه الميونات في رحلتها وفق القوانين النسبيّة بالنسبة لمراقبٍ ساكنٍ على سطح الأرض(باعتبار $\sqrt{0.009975} \approx 0.1$)ثمّ احسبْ أقصى ارتفاعٍ عن سطح الأرضِ (بالنسبة لمراقبٍ ساكنٍ على الأرض)يمكنُ أن تكونَ قد تولّدت عنده هذه الميونات.

3. حدّدْ زمنَ الرحلةِ ومسافَتها اللذينِ يسجّلهما مراقبٌ إذا تحرّك مع هذه الميونات.

المعطيات: t_0=2.2 $\mu.S \Rightarrow t_0 = 2.2 \times 10^{-6}\, s$
$v = 0.995\text{ c} = 0.995 \times 3 \times 10^8 = 2.985 \times 10^8\ m.s^{-1}$

الحل: ١- الارتفاع = السرعة × الزمن

$$L = v.t_0 = 2.985 \times 10^8 \times 2.2 \times 10^{-6} = 6.567 \times 10^2 = 656.7\, m$$

٢- $t = ?$

$L_0 = ?$

نحسب الزمن $\Longrightarrow t = \gamma . t_0$

نحسب γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{(0.995c)^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{0.990025c^2}{c^2}\right)}}$$

$$\Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-0.990025)}} = \frac{1}{\sqrt{(0.009975)}} \approx 10$$

$$\Longrightarrow t = \gamma . t_0 \Longrightarrow t = 10 \times 2.2 \times 10^{-6} = 22 \times 10^{-6}\quad s$$

$$\Longrightarrow L_0 = v.t = 2.985 \times 10^8 \times 22 \times 10^{-6} = 6567\, m$$

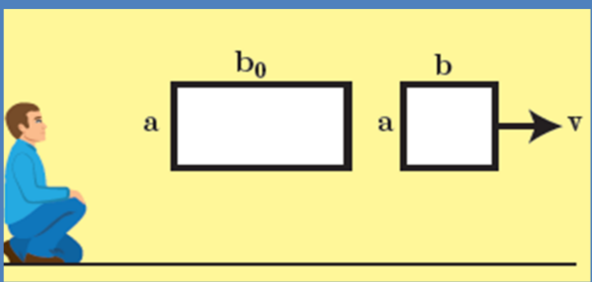
٣- زمن الرحلة: $t = \gamma . t_0 \Longrightarrow t_0 = \frac{t}{\gamma} = \frac{22\times10^{-6}}{10} = 2.2 \times 10^{-6}\, s$

مسافة الرحلة: $\Longrightarrow L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{6567}{10} = 656.7m$

وهذا ما تؤكده الحسابات

$$h = v.t = 2.985 \times 10^8 \times 22 \times 10^{-7} = 6.567 \times 10^2 = 656.7\, m$$

المسألة الثانية: جسمٌ مستطيلُ الشكلِ طولُه وهو ساكن $L_0 = b_0$ يساوي ضعفي عرضه a ، يتحرّك هذا الجسمُ بحيثُ يكونُ طولُه موازياً لشعاع سرعته $\vec{v}$ بالنسبة لمراقبٍ في الجملة الساكنة، فيبدو له مربّعاً، احسبْ قيمةَ سرعة الجسم.



المعطيات: طول المستطيل وهو ساكن $b_0 = L_0$ ،
عرض المستطيل (نفسه طول المستطيل وهو متحرك لأنه مربع) $a = b = L$
من فرض المسألة $L = \frac{1}{2} L_0 \quad b_0 = 2a \Longrightarrow L_0 = 2L \Longrightarrow$

الحل: لدينا من فرض المسألة $L = \frac{1}{2}L_0$

$$\Longrightarrow \quad L = \frac{L_0}{\gamma}$$

بالمقارنة نجد أن: $\gamma = 2$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

نربع: $4 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4}$

$$\Longrightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Longrightarrow v^2 = \frac{3}{4}.c^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4}}.c = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 \times 10^8 = 2.595 \times 10^8 m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة: يتحرّكُ إلكترونٌ بسرعة c،$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **المطلوب :**

احسب كميّة حركةِ الإلكترون وفقَ قوانين الميكانيك الكلاسيكيّ، ثمّ وفقَ الميكانيك النسبيّ، أيهُّما الأصحُّ برأيك؟

المعطيات: $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$ كتلة الالكترون $m_0 = 9 \times 10^{-31}kg$

الحل:

الميكانيك الكلاسيكيّ كمية الحركة

$$p = m_0.v = m_0.\frac{2\sqrt{2}}{3}c = 9 \times 10^{-31} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 \times 10^8$$

$$p = 18\sqrt{2} \times 10^{-23} = 25.2 \times 10^{-23} kg.ms^{-1}$$

وفقَ الميكانيك النسبيّ $p' = m.v = \gamma.m_0.v = \gamma.m_0 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}c$

نحسب γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{(\frac{2\sqrt{2}}{3}c)^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{4\times2}{9}\right)}}$$

$$\Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{8}{9}\right)}} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

لدينا من الميكانيك الكلاسيكي: $p = m_0.\frac{2\sqrt{2}}{3}c$

ولدينا من الميكانيك النسبيّ: $p' = \gamma.m_0 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}c$

نجد أن : $p' = \gamma.p$

$$\Longrightarrow p' = 3 \times 25.2 \times 10^{-23} = 75.6 \times 10^{-23} kg.ms^{-1}$$

الأصح هو p' هذه النتيجة التي حصلنا عليها من قوانين الميكانيك النسبي . لأن سرعة الإلكترون قريبة من سرعة الضوء ولا يمكن إهمال تغيرات الكتلة عند هذه السرعة.

المسالة الرابعة: تبلغُ الكتلة السكونيّةَ لبروتون $m_p = 1.67 \times 10^{-27} kg$، وطاقتهُ الكليّة تساوي ثلاثةَ أضعافِ طاقتِهِ السكونيّة المطلوب :احسب كلٍّ من طاقته السكونيّة، وطاقته الحركيّة في الميكانيك النسبيّ، وكتلته في الميكانيك النسبيّ..

المعطيات: $m_p = m_0 = 1.67 \times 10^{-27} kg$ (لدينا $E = 3E_0$) $m =?\ E_k =?\ E_0 =?$

الحل: $E_0 = m_0 . c^2 = 1.67 \times 10^{-27} (3 \times 10^8)^2 = 1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}$

$$E_0 = 15.03 \times 10^{-11}\ J$$

$$E_k = E - E_0 = 3E_0 - E_0 = 2E_0 = 2 \times 15.03 \times 10^{-11} = 30.06 \times 10^{-11}\ J$$

$$E = m.c^2 \Longrightarrow \mathrm{m} = \frac{E}{c^2} = \frac{3E_0}{c^2} = \frac{3m_0.c^2}{c^2} = 3m_0 = 3 \times 1.67 \times 10^{-27}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{m} = 5.01 \times 10^{-27} kg$$

المسألة الثامنة عامة: تخيّل أنّ مركبة فضاء لها شكل مستطيل تقوم برحلة إلى نجم" الشعرى" وفق مسار مستقيم، بحيث يكون شعاع سرعة المركبة دوماً موازياً لطول المركبة، فتسجّل أجهزة المركبة المسافرة القياسات الآتية: طول المركبة 100m، عرض المركبة 25m المسافة المقطوعة 4 سنة ضوئيّة، زمن الرحلة$\frac{8}{\sqrt{3}}$سنة، وتسجّل أجهزة المحطَّة الأرضيَّة قياساتها لتلك الرحلة باستخدام تيلسكوب دقيق، احسب كلَّ من سرعة المركبة وطولها وعرضها في أثناء الرحلة، والمسافة التي قطعتها وزمن الرحلة وفق قياسات المحطَّة الأرضيَّة (سرعة الضّوء في الخلاء $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$)

المعطيات: طول المركبة: $L_0 = 100m$ ،	عرض المركبة: $d_0 = 25m$
المسافة المقطوعة: $x_0 = 4t_1 . c\ year\ light$ ، ،	زمن الرحلة $t_0 = \frac{8}{\sqrt{3}} t_1\ year$

الحل:- السرعة $v = \frac{x_0}{t_0} = \frac{4t_1.c}{\frac{8}{\sqrt{3}} t_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \boldsymbol{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 \times 10^8 = 2.595 \times 10^8\ m.s^{-1}$

حيث t_1 هو عدد الثواني في السنة $t_1 = 365 \times 24 \times 3600 = 31536000\ s$

طول السفينة: $\Longrightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Longrightarrow L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{100}{2} = 50\ m$$

عرض السفينة: لا يتأثر $d = d_0 = 25m$

المسافة التي قطعتها $x = v.t = v.\gamma t_0$

لدينا: $x_0 = v.t_0$

$$x = x_0 . \gamma = 4 \times 2 = 8\ year\ light$$

زمن الرحلة: $t = \gamma . t_0 = 2 \times \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}\ year$

المسألة التاسعة عامة: إذا علمت أنّ الكتلة السكونيّة للبروتون $1.67 \times 10^{-27}kg$ وفي أحد التجارب كانت طاقته الكلّيَّة تساوي ثلاثة أضعاف طاقته السكونيّة. المطلوب:

1.احسب الطّاقة السكونيَّة للبروتون مقاسة بالإلكترون فولط 2. احسب سرعة البروتون في هذه التجربة.

3.احسب الطّاقة الحركيَّة لهذا البروتون. 4.احسب كمِّيَّة الحركة له

5.باعتبار كمِّيَّة الحركة p والطّاقة السُّكونيَّة E_0 والطّاقة الكُلِّيَّة استنتج أنّ: $E^2 = p^2c^2 + {E_0}^2$ ثمّ تأكّد من ذلك حسابيّاً بالنسبة للبروتون المدروس في هذه التجربة(سرعة الضّوء في الخلاء $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$)

المعطيات: $m_0 = 1.67 \times 10^{-27}kg$ ، $E = 3E_0$ ، $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$

الحل: ١-

$$E_0 = m_0.c^2 = 1.67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 = 1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}$$

$$E_0 = 15.03 \times 10^{-11}\, J$$

لتحويل من J إلى eV نقسم على 1.6×10^{-19} (شحنة الالكترون)

$$E_0 = \frac{15.03\times10^{-11}}{1.6\times10^{-19}} \simeq 9.4 \times 10^8 \quad eV$$

٢- لدينا $E = 3E_0$

$$E = m.c^2 \Longrightarrow 3E_0 = m.c^2 \Longrightarrow 3E_0 = \gamma m_0.c^2$$

بالمقارنة نجد أن $\gamma = 3$ ، $E_0 = m_0.c^2$

نربع $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$9 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Longrightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} \Longrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Longrightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{8}{9} \Longrightarrow v^2 = \frac{8}{9}.c^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{8}{9}}.c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 \times 10^8 = 2\sqrt{2} \times 10^8 m.s^{-1}$$

٣- $$E_k = E - E_0 = 3E_0 - E_0 = 2E_0 = 2 \times 15.03 \times 10^{-11} = 30.06 \times 10^{-11}\, J$$

٤- $$p = m.v = \gamma.m_0.v = 3 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 2\sqrt{2} \times 10^8$$

$$p = 10.02\sqrt{2} \times 10^{-19} kg.m.s^{-1}$$

٥- $$E = m.c^2 \Longrightarrow E = \gamma m_0.c^2 \Longrightarrow E = \gamma.E_0 \Longrightarrow E = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}.E_0$$

نربع E: $$E^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.{E_0}^2 \Longrightarrow E^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = {E_0}^2$$

$$\Longrightarrow E^2 - E^2\,\frac{v^2}{c^2} = {E_0}^2 \Longrightarrow E^2 = (m.c^2)^2\,\frac{v^2}{c^2} + {E_0}^2$$

$$\Longrightarrow E^2 = m^2.c^4\,\frac{v^2}{c^2} + {E_0}^2 \Longrightarrow E^2 = m^2.v^2.c^2 + {E_0}^2$$

وهذا محقق $$\Longrightarrow E^2 = p^2.c^2 + {E_0}^2$$

حسابياً:

$$\Rightarrow E^2 = p^2.c^2 + {E_0}^2$$

لدينا: لدينا $E = 3E_0$

$$\Rightarrow (3E_0)^2 = p^2.c^2 + {E_0}^2$$

$$\Rightarrow (3 \times 15.03 \times 10^{-11})^2 = (10.02\sqrt{2} \times 10^{-19})^2.(3 \times 10^8)^2 + (15.03 \times 10^{-11})^2$$

$$\Rightarrow 2033.108 \times 10^{-22} = 1807.2072 \times 10^{-22} + 225.9009 \times 10^{-22}$$

و هذا محقق $\Rightarrow 2033.108 \times 10^{-22} = 2033.108 \times 10^{-22}$

تفكير ناقد

في الميكانيك الكلاسيكي إذا تضاعفت كمية حركة جسيم ما فإنّ طاقته الحركية تزداد أربعة أضعاف، فهل يتحقق ذلك في الميكانيك النسبي؟ وضّح ذلك.

الميكانيك الكلاسيكي:

$$p = m.v \Rightarrow v = \frac{p}{m}$$

$$E_k = \frac{1}{2}m.v^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}m.(\frac{p}{m})^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}m.\frac{p^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}.\frac{p^2}{m}$$

عندما نضاعف كمية الحركة $p' = 2p$

$$E_k' = \frac{1}{2}.\frac{(p')^2}{m}$$

$$\Rightarrow E_k' = \frac{1}{2}.\frac{(2p)^2}{m}$$

$$\Rightarrow E_k' = \frac{1}{2}.\frac{4p^2}{m}$$

$$\Rightarrow E_k' = 4\left(\frac{1}{2}.\frac{p^2}{m}\right)$$

$$\Rightarrow E_k' = 4(E_k)$$

حسب ميكانيك الكلاسيك تزداد الطاقة الحركية أربعة أضعاف

الميكانيك النسبي:

$$p = \gamma m_0.c \Rightarrow m_0 = \frac{p}{\gamma.c}$$

$$E_k = (\gamma - 1)m_0.c^2$$

$$\Rightarrow E_k = (\gamma - 1)\frac{p}{\gamma.c}.c^2$$

$$\Rightarrow E_k = (\gamma - 1)\frac{p}{\gamma}.c$$

عندما نضاعف كمية الحركة $p' = 2p$

$$E_k' = (\gamma - 1).\frac{p'}{\gamma}.c$$

$$E_k' = (\gamma - 1).\frac{2p}{\gamma}.c$$

$$E_k' = 2[(\gamma - 1).\frac{p}{\gamma}.c]$$

$$\Rightarrow E_k' = 2(E_k)$$

حسب ميكانيك النسبي تزداد الطاقة الحركية ضعفين

أبحث أكثر

تُطبّقُ النسبيّة الخاصّة (المقيّدة) في حالة انعدام التسارع، أبحثُ في النسبيّة العامّة وما قدّمته من تفسيرٍ للجاذبية الكتليّة.