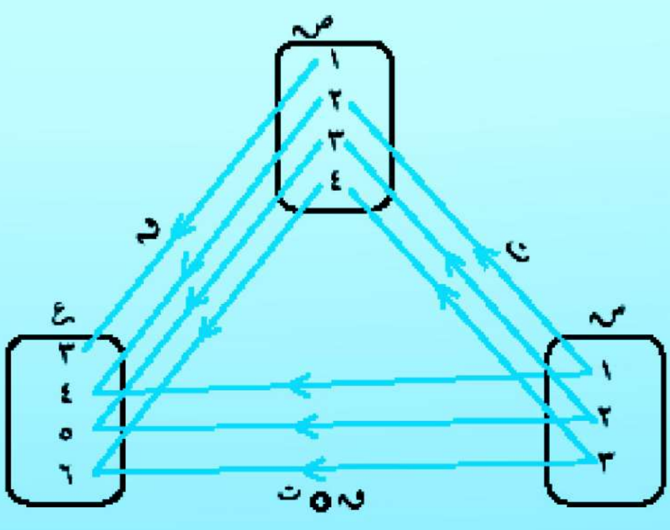
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

الجزء الأول



إيماناً منا بأهمية المعرفة ومواكبة لعصر التكنولوجيا تتشرف الإدارة العامــة للتعليم الإلكتروني بخدمــة أبنائنا الطلاب والطالبات في ربوع الوطن الحبيب بهذا العمل آملين أن ينال رضا الجميع

فكرة وإعداد

أ. عادل علي عبدالله البقع

مساعد

أ. زينب محمود السمان

مراجعة وتدقيق

أ. ميسونة العبيدي

أ. فاطمة العجل

أ. أفراح الحزمي

متابعة

أمين الإدريسي

إشراف مدير عام

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

أ. محمد عبده الصرمي

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

(الجزء الأول)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الإله علي حُمد الحوري.
أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً).
د. عوض حسين البكري.
د. محمد علي مرشد.
د. محمد رشاد الكوري.
أ. يحيى بكار مصفر.
د. محمد حسن عبده المسوري.
أ. عبدالباري طه حيدر.
د. عبدالله سالم بن شحنة.
أ. نصر محمد بدر.
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري.
أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
د. علي شاهر القرشي.
أ. عادل علي مقبل البنا.
أ. مريم عبدالجبار سلمان.
أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.
أ. يحيى محمد الكنز.

فريق المراجعة:

أ/ أحمد عبده الصغير الدبعي.
أ/ سميرة حسن فضائل.
أ/ زايد مقبل عبدالخالق الأغبري.
أ/ محمد صالح الخضر.
أ/ خالد محمد القلذي.

تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.

تدقيق: د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.

إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

صف وتصميم وإخراج : جلال سلطان علي.
إدخال التصويبات : عبدالرحمن حسين المهرس.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

النشيد الوطني

[redacted] وأعـيـدي وأعـيـدي
[redacted] مِنْ ضوءِ عيدي
[redacted] في كـل ذِمَّـة

رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس   اُخْلُـدِي خـافِقـةً في كـل قِمَّـة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي   واذْخُـرِيـنـي لَـكِ يـا أكـرمَ أمـة

عشـتُ إيمـانـي وحبِّـي أُمميًا
ومسـيـري فـوق دربـي عـربيـا
وسيبـقـى نبـضُ قـلبـي يمنيـا
لـن تـرى الـدنيـا علـى أرضـي وصيـا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي. أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.
د/ عبدالله سالم لملس. أ/ علي حسين الحيمي.
أ/ أحمد عبدالله أحمد. د/ إشراق هائل عبدالجليل الحكيمي.
د/ فضل أحمد ناصر مطلي. أ/ محسن صالح حسين اليافعي.
د/ صالح ناصر الصوفي. د/ أحمد علي المعمري.
د/ محمد عمر سالم باسليم. أ. د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.
أ. د/ داوود عبدالملك الحدابي. أ. د/ شكيب محمد باجرش.
أ. د/ محمد حاتم المخلافي. أ. د/ صالح عوض عرم.
أ. د/ محمد عبدالله الصوفي. أ. د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
د/ عبده أحمد علي النزيلي. أ. د/ إبراهيم محمد الحوثي.
أ/ محمد عبدالله زبارة. أ/ عبدالله علي أسماعيل الرازحي.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في اطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم، وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية .

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات .

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً ، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها : الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات، وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي .

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم، والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها .

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة، ومدروسة؛ لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية .

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمــــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف العاشر من التعليم العام » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين : الأساسية (١ – ٩) والثانوية (١٠ – ١٢) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق الفردية تم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد ، حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط ويكون النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

ومقارنة بالكتب السابقة فإن هذا الكتاب وما يرافقه من كتاب التمارين ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما تحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين ، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقد يم الأجود ، مادة وطريقة .. فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

المحتويات

تابع المحتويات

الوحدة الأولى
المنطق الرياضي

١ : ١ القضية المنطقية ونفيها

من دراستك لقواعد اللغة العربية ، تعلم أن الجمل في اللغة نوعان :

جمل إنشائية . مثل : لاتهمل دروسك .
ارسم مثلثاً متساوي الساقين .
في أي دولة يقع المسجد الأقصى ؟

جمل خبرية . مثل : اليمن دولة عربية .
الصلاة ركن من أركان الاسلام .
دمشق عاصمة الأردن .

تأمل الجمل السابقة بنوعيها تجد أن جميعها مفيدة ، وفي النوع الأول تجد جملتين طلبيتين ، تليهما جملة استفهامية ، لايمكن وصف مدلول أيٍّ منها بالصواب أو الخطأ . أما في النوع الآخر (الجمل الخبرية) فنجد ثلاث جمل كلٍّ منها يحمل معنى يمكن أن يوصف بأنه صائب أو خاطئ ، لذلك نسمي كلاً منها قضية منطقية .

تعريف (١ : ١)

القضية المنطقية هي جملة خبرية مفيدة يحتمل معناها الصواب أو الخطأ وليس كليهما معاً .

نستخدم لفظ « قضية » لنعني به « قضية منطقية » .

مثال (١ - ١) ميز فيما يأتي القضايا :

١) تعز مدينة في اليمن .
٢) ٥ + ٤ = ٧
٣) لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .
٤) هل أتممت دراستك ؟
٥) السماء صافية .

الحـــل

١) قضية صائبة .
٢) قضية خطأ .

٣) ليست قضية لأنها جملة طلبية . ٤) ليست قضية لأنها جملة استفهامية .

٥) قضية يمكن أن تكون صائبة أو خاطئة حسب واقع الحال .

نرمز عادة لقضية ما بحرف ، فنقول القضية أ ، والقضية ب ، والقضية جـ ، وهكذا . وإذا سلمنا أن أ قضيـــة ما فإما أن تكون صائبة، ونرمز لقيمة صوابها بالرمز (ص) أو تكون خاطئة ، ونرمز لقيمة خطئها بالرمز (خ) .

ويسمى صواب أو خطأ القضية أ بقيمتي صواب القضية أ .

نلخص ما سبق في الجدول (١–١) الذي يسمى جدول صواب القضية أ .

أ
ص
خ

جدول (١ – ١)

نفي القضية :

لنرمز للقضية « الجو ممطر » بالرمز أ . وللقضية « ليس الجو ممطراً » بالرمز ب ، ونعلم أنه لايمكن أن يكون الجو ممطر وغير ممطر في نفس الوقت ، لذلك عندما نتحقق من واقع الحال سنجد أحد الاحتمالين :

– إما القضية أ صائبة وعندئذ تكون القضية ب خاطئة .

– أو القضية أ خاطئة وعندئذ تكون القضية ب صائبة .

بمعنى أن قيم الصواب للقضيتين أ ، ب متعاكسة ، لذلك نقول أن كلاً منهما نفي للأخرى . فإذا بدأنا بالقضية أ فتكون القضية ب نفي القضية أ ونعبر عنها بالرمز « ∼ أ » ، وتقرأ (نفي أ) أو (ليس أ) ، حيث « ∼ » هو رمز النفي ، ويقرأ « نفي » أو « ليس » .

نلخص ما سبق في الجدول (١ – ٢) ، الذي يسمى جدول صواب القضية أ ونفيها .

أ	∼ أ
ص	خ
خ	ص

جدول (١ – ٢)

مثال (١ – ٢) انفِ كلاً من القضايا التالية :

١) بيروت عاصمة لبنان . ٢) زوايا المربع ليست قائمة .

٣) يقع المسجد النبوي في مكة المكرمة . ٤) ٧ $\ni$ ط .

٥) ٢ + ٣ = ٤ . ٦) ٩ > ٥ .

الحـــل

١) ليس صحيحاً أن بيروت عاصمة لبنان . أو بيروت ليست عاصمة لبنان .

٢) زوايا المربع قائمة .

٣) لا يقع المسجد النبوي في مكة المكرمة .

٤) ٧ $\not\ni$ ط .

٥) ٢ + ٣ $\neq$ ٤ .

٦) ٩ $\not>$ ٥ أو ٩ $\leq$ ٥ .

تمارين ومسائل (١ – ١)

[١] ميِّز القضايا من الجمل الآتية ، مع ذكر السبب عندما لا تكون الجملة قضية :

١ – صنعاء عاصمة اليمن .
٢ – مجموعة الأعداد الطبيعية منتهية .
٣ – متى أعيد بناء سد مأرب ؟
٤ – اكتب الكسر ٠,٢ في صورة عدد نسبي .
٥ – ما أجمل مناخ مدينة إب !
٦ – $\frac{١}{٥}$ ∈ ص .
٧ – يحتل الوطن العربي موقعاً إستراتيجياً .
٨ – لايكلف الله نفساً الاَّ وسعها .
٩ – أحلَّ الله البيع وحرَّم الربا .
١٠ – جدّة ميناء على البحر الأحمر .

[٢] انفِ كلاً من القضايا التالية ، وبين قيمة صواب كل قضية ونفيها :

١ – القاهرة عاصمة العراق .
٢ – عدد سكان اليمن أقل من عشرين مليون .
٣ – أضلاع المعين متساوية في الطول .
٤ – لايقبل العدد ٥ القسمة على ٢ .
٥ – قطرا متوازي الأضلاع متناصفان .
٦ – ٢– ∌ ط .
٧ – ٣ < ٧ .
٨ – ٢٥ = ٥^{٢} .
٩ – المثلث المتساوي الأضلاع قائم الزاوية .

١ : ٢ القضايا المركبة وأدوات الربط

تأمل القضايا التالية :

أ : عندي كتاب .
ب : عندي قلم .
جـ : عندي كتاب وعندي قلم .

تجد أن كلاً من القضيتين أ ، ب تحمل خبراً واحداً فقط ، لذلك نسمي كلاً منهما « قضية بسيطة » أما القضية جـ فهي مركبة من القضيتين أ ، ب يربط بينهما حرف العطف « و » الذي نسميه هنا أداة ربط ، لذلك نقول أن القضية جـ « قضية مركبة » والقضيتين أ ، ب مركباتها .

تُركب الجمل في اللغة بأدوات ربط كثيرة ، منها : (و) ، (أو) ، (لأن) ، (لكن) ، (إذا كان ... فإن) ، (... إذا وفقط إذا ....) . وقد يستخدم الرابط الواحد لعدة معان مما قد يؤدي إلى الالتباس والإبهام . لذا سنستخدم في تركيب القضايا المنطقية عدداً قليلاً من أدوات الربط ، بحيث لايعطي الرابط الواحد إلاّ معنى واحداً فقط . وأدوات الربط التي سنستخدمها في هذه الوحدة هي :

حرف العطف « و » ويرمز له بالرمز « ∧ » ، حرف العطف « أو » ويرمز له بالرمز « ∨ »

أداة الشرط « إذا كان ... فإن » ويرمز له بالرمز « ← »، أداة الشرط « ... إذا وفقط إذا ... » ويرمز له بالرمز « ↔ » .

ومن أمثلة القضايا المركبة :

١) القمر تابع للأرض وهو أصغر منها .   ٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أو متساوي الساقين .

٣) إذا مرض الشخص فإنه يذهب إلى الطبيب .

٤) يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان مجموع قياسي زاويتين غير متجاورتين فيه ١٨٠° .

يلاحظ من الأمثلة السابقة أن كل قضية من القضايا الأربع مركبة من قضيتين بسيطتين ، رُبط بينهما بإحدى أدوات الربط . فإذا أخذنا على سبيل المثال القضية المركبة (١) ورمزنا للقضية البسيطة الأولى منها (القمر تابع للأرض) بالرمز أ ، وللقضية البسيطة الأخرى « القمر أصغر من الأرض » بالرمز ب ، فإن القضية المركبة (١) يعبر عنها رمزياً أ ∧ ب ، وبالمثل في كل من القضايا المركبة (٢)، (٣)،(٤) إذا رمزنا للقضية البسيطة الأولى بالرمز أ ، وللقضية البسيطة الأخرى بالرمز ب ، فإن التعبير الرمزي للقضايا الثلاث يكون كما يلي :

٢) أ ∨ ب   ٣) أ ← ب   ٤) أ ↔ ب .

إن غاية دراسة القضايا المركبة هي تحديد قيم صواب قضية انطلاقاً من قيم صواب القضايا الداخلة في تركيبها، والأداة الأساس لتحقيق تلك الغاية هي ما يطلق عليه جداول الصواب .

لتكن أ ، ب قضيتين بسيطتين مختلفتين ، ونعلم أن لكل قضية منفردة قيمتي صواب محتملتين (ص أو خ) ولتحديد قيم الصواب المختلفة للقضية المركبة من القضيتين أ ، ب لابد من استعراض الحالات (الإمكانات) المختلفة لقيم صواب المركبة أ وقيم صواب المركبة ب وهي :

الحالة الأولى : أن تكون أ صائبة ، ب صائبة .   الحالة الثانية : أن تكون أ صائبة ، ب خاطئة .

الحالة الثالثة : أن تكون أ خاطئة ، ب صائبة .   الحالة الرابعة : أن تكون أ خاطئة ، ب خاطئة .

ونلخص ما سبق في الجدول (١ – ٣) .

إن الفكرة التي بني عليها الجدول (١–٣) سنعتمدها أساساً لإنشاء جدول صواب أي قضية مركبة من قضيتين بسيطتين . لاحظ أن عدد الحالات الممكنة لقيم صواب قضية مركبة من قضيتين يساوى $(٢)^{٢}$ = ٤ حالات .

أما عندما يكون عدد القضايا البسيطة الداخلة في تركيب (قضية) هو ثلاث قضايا مثل أ ، ب ، جـ فإن عدد الحالات الممكنة لقيم الصواب = $٢^{٣}$ = ٨ حالات ، نبينها في الجدول (١ – ٤) :

أ	ب
ص	ص
ص	خ
خ	ص
خ	خ

جدول (١ – ٣)

وبصورة عامة : يكون عدد إمكانات قيم صواب قضية مركبة من ﻫ من القضايا البسيطة يساوى $(٢^{ﻫ})$.

أ	ب	جـ
ص	ص	ص
ص	ص	خ
ص	خ	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	ص	خ
خ	خ	ص
خ	خ	خ

جدول (١ – ٤)

أ) القضية المركبة بأداة الربط «و» :

تعلم مما سبق أن القضية المركبة من القضيتين أ ، ب بأداة الربط «و» هي القضية أ و ب ، وتكتب رمزياً أ ∧ ب .

متى تكون القضية (أ ∧ ب) صائبة ؟

قبل الإجابة عن السؤال لنعتبر القول الآتي الذي أخبرنا به أيمن عن أخيه أشرف : استيقظ أشرف مبكراً وذهب إلى مدرسته . ونبحث معاً متى يكون أيمن صادقاً في قوله هذا : من الواضح أن أيمن يكون صادقاً في قوله إذا كان أشرف قد استيقظ مبكراً وذهب إلى مدرسته فعلاً، ولكن أيمن لايكون صادقاً في قوله في أيٍ من الحالات الآتية :

استيقظ أشرف مبكراً ولكنه لم يذهب إلى مدرسته .

لم يستيقظ أشرف مبكراً ولكنه ذهب إلى مدرسته .

لم يستيقظ أشرف مبكراً ولم يذهب إلى مدرسته .

وعليه :

القضية (أ ∧ ب) تكون صائبة فقط عندما تكون كلٌ من أ ، ب صائبتين معاً .

وقد اتفق على أن يكون جدول صواب القضية (أ ∧ ب) كما في الجدول (١ – ٥) :

أ	ب	أ ∧ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

جدول (١ – ٥)

مثال (١ – ٣)

لتكن ف ، ق قضيتين بسيطتين بحيث :

ف : العدد ٣ يقسم العدد ٩ .

ق : الهواء ضروري للحياة .

فبين قيم صواب كلٍ من القضيتين المركبتين التاليتين : ١) ف ∧ ق . ٢) ف ∧ ~ ق .

الحـــل

١) حيث أن كلاً من ف ، ق قضية صائبة فإن القضية المركبة (ف ∧ ق) صائبة .

٢) لاحظ أولاً أن ~ق (الهواء ليس ضرورياً للحياة) هي قضية خاطئة ، لذلك فالقضية المركبة (ف ∧ ~ ق) خاطئة لأن إحدى مركبتيها خاطئة .

ب) القضية المركبة بأداة الربط « أو » :

أداة العطف « أو » تستخدم بمعنى التخيير كما في الجملة « خالد في صنعاء أو في تعز » والتي تستبعد أن يكون خالد في صنعاء وفي تعز في الوقت ذاته، أي أن صحة إحدى مركبتي القضية ، تستبعد أن تكون المركبة الأخرى لها صائبة .

فإذا كانت أ ، ب قضيتين مختلفتين فإن قيم صواب القضية المركبة (أ ∨ ب) تعطى بالجدول (١–٦) .

أ	ب	أ ∨ ب
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

جدول (١ – ٦)

من الجدول (١ – ٦) نلاحظ أن :

القضية (أ ∨ ب) تكون خاطئة فقط عندما تكون أ ، ب خاطئتين معاً .

مثال (١– ٤) لتكن أ ، ب ، جـ قضايا بسيطة بحيث :

أ : بغداد عاصمة العراق .

ب : للمثلث أربعة أضلاع .

جـ : أبو بكر الصديق أول الخلفاء الراشدين .

اذكر قيم الصواب لكلٍ من القضايا المركبة التالية :

١) أ ∨ جـ ٢) أ ∨ ب ٣) ~ أ ∨ ب .

الحــل

١) صائبة لأن كلاً من أ ، جـ صائبة . ٢) صائبة لأن أ صائبة .

٣) خاطئة لأن كلاً من ~ أ ، ب خاطئة .

مثال (١ – ٥) لتكن ف ، ﻫ ، ك ثلاث قضايا بسيطة بحيث أن :

كل من ف ، ك صائبة ، ﻫ خاطئة .

اذكر قيمة صواب كلٍ من القضايا المركبة التالية :

١) ف ∧ ﻫ ٢) ف ∨ ﻫ ٣) ﻫ ∧ ك

٤) ف ∧ ك ٥) ف ∨ ك ٦) ﻫ ∨ ك .

الحــل

١) خاطئة لأن ﻫ خاطئة . ٢) صائبة لأن ف صائبة .

٣) خاطئة لأن ﻫ خاطئة . ٤) صائبة لأن كلاً من ف ، ك صائبة .

٥) صائبة . لماذا ؟ . ٦) صائبة لأن ك صائبة .

جـ) القضية الشرطية « إذا كان .... فإن .... »

نستعمل في اللغة بصفةٍ عامة وفي الرياضيات بصفةخاصة الكثير من التراكيب الشرطية التي تتكون من جملتين تربط بينهما أداة الشرط « إذا كان .... فإن .... » .

وعندما تكون الجملتان المكونتان لهذا التركيب الشرطي قضيتين ، فإننا نسمي مثل هذا التركيب قضية شرطية .

فمثلاً القضية « إذا كان س ص ع مثلثاً فإن مجموع قياسات زواياه الداخلية ١٨٠° » هي قضية شرطية .

وإذا رمزنا للقضية « س ص ع مثلث » بالرمز ا ، وللقضية « مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية ١٨٠° » بالرمز ب فإن القضية الشرطية تأخذ الشكل الرمزي التالي : ا ⟵ ب .

وتقرأ إذا كانت ا فإن ب ، وتسمى ا المقدمة (أو الشرط) وتسمى ب النتيجة (أو جواب الشرط).

سوف نتعرف على جدول صواب القضية الشرطية (ا ⟵ ب) بعد المثال التمهيدي التالي :

مثال (١ – ٦) قال رجل لولده : إذا نجحت في الامتحان فسأقدم لك هدية .

إن قول الوالد هو قضية شرطية ، ولمعرفة قيم صوابها سوف نستعرض الحالات المختلفة التالية :

١ – نجح الولد في الامتحان وقدم الوالد له هدية . صدق الوالد وعده (القضية صائبة) .

٢ – نجح الولد في الامتحان ولم يقدم الوالد له هدية . لم يصدق الوالد وعده (القضية خطأ) .

٣ – لم ينجح الولد في الامتحان وقدم الوالد له هدية . صدق الوالد وعده (القضية صائبة) .

٤ – لم ينجح الولد في الامتحان ولم يقدم الوالد له هدية . صدق الوالد وعده (القضية صائبة) .

لاحظ أننا في الحالة (٤) قلنا أن الوالد صدق وعده ، بالرغم من أن الولد لم ينجح في الامتحان ، ذلك لأننا لم نجد في قوله ما يلزمه بعدم تقديم هدية لابنه إذا هو لم ينجح .

وبصورة عامة لأي قضيتين ا ، ب تكون قيم صواب القضية الشرطية ا ⟵ ب كما يبينها الجدول (١–٧) التالي والذي يسمى جدول صواب القضية ا ⟵ ب :

ا	ب	ا ⟵ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

جدول (١ – ٧)

من الجدول (١ – ٧) نلاحظ أن :

القضية ا ⟵ ب تكون خطأ فقط عندما تكون ا صائبة و ب خطأ.

مثال (١ – ٧)

اكتب قيمة صواب كلٍ من القضايا الشرطية التالية :

١) إذا كان ٥ + ٧ = ١٠ فإن ٤ × ٤ = ٨

٢) إذا كان ٥ + ٧ = ١٠ فإن ٤ × ٤ = ١٦

٣) إذا كان ٥ + ٧ = ١٢ فإن ٤ × ٤ = ٨

٤) إذا كان ٥ + ٧ = ١٢ فإن ٤ × ٤ = ١٦

الحل

١) صائبة لأن الشرط خاطئ « انظر السطر الرابع من الجدول (١–٧) » .

٢) صائبة لأن الشرط خاطئ .

٣) خاطئة لأن الشرط صائب وجوابه خاطئ .

٤) صائبة لأن الشرط وجوابه صائبين .

مثال (١– ٨)

لتكن ا ، ب ، جـ ثلاث قضايا معرفة كما يلي :

ا : ٢^{٣} + ٥ = ١٣ ، ب : ٧٢ > ٢٧ ، جـ : القمر أصغر حجماً من الأرض .

فبين قيمة صواب كلٍ من القضايا الشرطية التالية :

١) ا ⟵ ب ٢) ا ⟵ جـ ٣) ب ⟵ ا ٤) جـ ⟵ ا .

الحـــل

١) خطأ لأن ٫ صائبة و ب خطأ. ٢) صائبة لأن كلاً من ٫ ، جـ صائبة .

٣) صائبة لأن ب خطأ و ٫ صائبة . ٤) صائبة لماذا ؟

د) القضية الشرطية « . . . . إذا وفقط إذا . . . . »

لتكن (٫ ← ب) قضية شرطية و (ب ← ٫) معكوسها ، وإذا ربطنا بين هاتين القضيتين الشرطيتين بأداة الربط «∧» سنحصل على القضية المركبة [(٫ ← ب) ∧ (ب ← ٫)] والتي يرمز لها بالرمز (٫ ↔ ب)، وتقرأ «٫ إذا وفقط إذا ب» تسمى القضية (٫ ↔ ب) قضية شرطية مزدوجة .

إن قيم صواب القضية (٫ ↔ ب) تعتمد على قيم صواب القضية (٫ ← ب) ومعكوسها (ب ← ٫) إضافة إلى قيم صواب القضية المركبة بأداة الربط ∧ . والجدول (١ – ٨) التالي يبين ذلك :

٫	ب	٫ ← ب	ب ← ٫	(٫ ← ب) ∧ (ب ← ٫) ٫ ↔ ب
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

جدول (١ – ٨)

يتضح من الجدول (١–٨)

أن القضية الشرطية المزدوجة (٫ ↔ ب) تكون صائبة عندما تكون القضيتان ٫ ، ب صائبتين معاً أو خطأين معاً ، وتكون خطأ عندما تكون إحدى القضيتين ٫ أو ب صائبة والأخرى خطأ.

مثال (١ – ٩) لتكن ٫ : ٢ × ٣ = ٥ ب : ٢ + ٣ = ٦ جـ : ٣ عدداً أولياً .

فبين قيمة صواب كلٍ من القضايا التالية :

١) ٫ ↔ ب . ٢) ٫ ↔ جـ . ٣) ~ ب ↔ جـ .

الحـــل

١) صائبة لأن كلاً من ٫ ، ب خطأ. ٢) خطأ لأن ٫ خطأ و جـ صائبة .

٣) صائبة لأن ~ ب صائبة و جـ صائبة .

تمارين ومسائل (١ – ٢)

[١] بيّن مركبات كلٍ من القضايا المركبة الآتية وأداة الربط في كلٍ منها :

١) الجو ليس حاراً والرطوبة عالية .
٢) السودان دولة أفريقية أو سوريا دولة غير أسيوية .
٣) الدب حيوان آكل للّحوم أو آكل للنبات .
٤) في الصباح تشرق الشمس وتتفتح الزهور وتغرد الطيور .
٥) كان الخيّام شاعراً وكان الخوارزمي طبيباً .
٦) تقع مدينة الخرطوم على نهر النيل أو ٦ > ٨ .
٧) إذا كانت أضلاع المثلث متساوية في الطول فإن زواياه متساوية في القياس .
٨) تتقدم الأمم إذا وفقط إذا أخذت بالعلم .

[٢] إذا كانت أ ترمز للقضية « نزل المطر » ، ب ترمز للقضية « اخضرّت الأرض » ، فاكتب قضايا وصفية للقضايا الرمزية الآتية :

١) أ ∧ ب .
٢) أ ∨ ب .
٣ – أ ∨ ~ ب .
٤) ~ أ ∧ ~ ب .
٥) أ ⟷ ب .

[٣] عيّن قيمة صواب كلٍ من القضايا المركبة الآتية :

١) الشمس كوكب و ٣ + ٤ = ٧ .
٢) القمر كوكب أو ٢ + ١ = ٦ .
٣) الصفر هو العنصر المحايد الجمعي أو تعز عاصمة اليمن .
٤) الأكسجين غاز و ٤ ≤ ٥ .
٥) إذا كانت زوايا المستطيل قائمة فإن زوايا المربع حادة .
٦) سلوى أخت أشرف إذا وفقط إذا كان أشرف أخا سلوى .

[٤] أكمل القضايا التالية بما يجعلها صائبة :

١) ٥٤ عدد صحيح ويقبل القسمة على العدد . . . . .
٢) ٢ + ٧ = ٤ أو ٢ × ٧ = ...
٣) ١٠ > ٨ ⟵ ٩ > . . . .
٤) ٢ + ٣ ≠ ٥ ⟷ ٢ + ٢ ≠ . . .

[٥] أنشئ جداول صواب القضايا التالية :

١) أ ∧ ~ ب .
٢) ~ (أ ∨ ب) .
٣) ~ أ ⟵ ب .
٤) أ ⟵ ~ ب .

[٦] أكمل جدول الصواب التالي : ثم قارن بين العمودين الخامس ، والسابع . ماذا تستنتج ؟

أ	ب	جـ	ب ∧ جـ	أ ∧ (ب ∧ جـ)	أ ∧ ب	(أ ∧ ب) ∧ جـ
ص	ص	ص				
ص	ص	خ				
ص	خ	ص				
ص	خ	خ				
خ	ص	ص				
خ	ص	خ				
خ	خ	ص				
خ	خ	خ				

جدول (١ – ٩)

١ : ٣ التكافؤ المنطقي للقضايا

تأمل جدول الصواب (١ – ١٠) الآتي :

أ	~ أ	~(~ أ)
ص	خ	ص
خ	ص	خ

جدول (١ – ١٠)

بمقارنة قيم صواب القضيتين أ ، ~(~ أ) [العمودان الأول والثالث من الجدول (١ – ١٠)] نجد أن للقضيتين قيم الصواب نفسها . أي أنه عندما تكون أ صائبة تكون ~(~ أ) صائبة ، وعندما تكون أ خاطئة تكون ~(~ أ)خاطئة .

لذلك نقول إن القضيتين أ ، ~(~ أ) متكافئتان منطقياً ونكتب ~(~ أ) ≡ أ .

وبصورة عامة يُعَرَّف التكافؤ المنطقي على النحو التالي :

تعريف (١ : ٢)

يقال عن قضيتين م ، ن أنهما متكافئتان منطقياً إذا كان لهما قيم الصواب نفسها . ونرمز لذلك بالرمز م ≡ ن وتقرأ « م تكافئ ن » .

مثال (١ – ١٠) بين أنه لأي قضيتين أ ، ب يكون : أ ∧ ب ≡ ب ∧ أ « ١ » .

الحــل

نُنشئ جدول الصواب للقضيتين (أ ∧ ب)، (ب ∧ أ) كما يلي :

أ	ب	أ ∧ ب	ب ∧ أ
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ
خ	ص	خ	خ
خ	خ	خ	خ

≡

جدول (١ – ١١)

نلاحظ من الجدول (١ – ١١) أن للقضيتين (أ ∧ ب)، (ب ∧ أ) قيم الصواب نفسها (أنظر العمودين الأخيرين) وعليه فهما متكافئتان .

أي أن أ ∧ ب ≡ ب ∧ أ .

تدريب (١ – ٢) باستخدام فكرة المثال (١ – ١٠) ، بين أن : أ ∨ ب ≡ ب ∨ أ . « ٢ »

ملاحظة : تسمى العلاقة « ١ »خاصية الإبدال للرابط (∧) ، وتسمى العلاقة « ٢ » خاصية الإبدال للرابط (∨) .

مبرهنة (١ : ١)

لأي قضيتين أ ، ب :

١) ~ (أ ∧ ب) ≡ ~أ ∨ ~ب .   ٢) ~ (أ ∨ ب) ≡ ~أ ∧ ~ب .

البرهان : ١) ننشئ جدول صواب القضايا المعطاة في (١) كما يلي :

ا	ب	~ا	~ب	ا ∧ ب	~(ا ∧ ب)	~ ا ∨ ~ ب
ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	خ	ص	ص

≡

جدول (١ – ١٢)

من الجدول (١–١٢) نلاحظ أن للقضيتين ~(ا ∧ ب) ، ~ ا ∨ ~ ب قيم الصواب نفسها (انظر العمودين الأخيرين من الجدول) ، وعليه فهما متكافئتان .

٢) استخدم فكرة البرهان في (١) لبرهان تكافؤ القضيتين في (٢) .

مبرهنة (١ – ١) تعرف بقانوني دي مورجان .

مثال (١ – ١١) اكتب نفي كلٍّ من القضيتين التاليتين وبين قيمة صواب كلٍ منها بعد النفي :

١) أضلاع المعين متساوية في الطول وقطراه متعامدان . ٢) الأرض كوكب أو القمر نجم .

الحل ١) لنرمز للقضية البسيطة « أضلاع المعين متساوية في الطول » بالرمز ا ، وللقضية البسيطة « قطرا المعين متعامدان » بالرمز ب ، فتكون القضية المعطاة هي (ا ∧ ب) [وبحسب الفرع (١) من المبرهنة (١–١)] فإن نفي القضية المعطاة هي إحدى القضيتين المتكافئتين التاليتين :

~(ا ∧ ب) : ليس صحيحاً أن « أضلاع المعين متساوية في الطول وقطراه متعامدان » أو

~ ا ∨ ~ ب : أضلاع المعين ليست متساوية في الطول أو قطراه غير متعامدين .

٢) لنرمز للقضية البسيطة « الأرض كوكب » بالرمز ا ، وللقضية البسيطة « القمر نجم » بالرمز ب . فتكون القضية المعطاة هي (ا ∨ ب) ونفيها [بحسب الفرع (٢) من المبرهنة (١–١)] هو إحدى القضيتين المتكافئتين التاليتين :

~(ا ∨ ب) : ليس صحيحاً أن « الأرض كوكب أو القمر نجم » أو

~ ا ∧ ~ب : الأرض ليست كوكب والقمر ليس نجماً .

واضح أن كلاً من القضيتين (١) ، (٢) صائبة ، وعليه تكون نفي كلٍ منهما قضية خاطئة .

مبرهنة (١ : ٢)

لأي قضيتين ا ، ب :

١) ا ← ب ≡ ~ا∨ب ≡ ~ب ← ~ ا . ٢) ~ (ا ← ب) ≡ ا∧ ~ب .

البرهان : ١) ننشئ جدول صواب القضايا الثلاث كما يلي :

أ	ب	~أ	~ب	أ ← ب	~أ ∨ ب	~ب ← ~أ
ص	ص	خ	خ	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ	خ
خ	ص	ص	خ	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص

جدول (١ – ١٣)

نلاحظ من الجدول (١–١٣) أن القضايا أ ← ب ، ~أ ∨ ب ، ~ب ← ~أ لها قيم الصواب نفسها (انظر الأعمدة الثلاثة الأخيرة من الجدول (١–١٣) ، وعليه فإنها متكافئة .

٢) ∵ أ ← ب ≡ ~أ ∨ ب [الفرع (١) من المبرهنة (١–٢)] .

∴ ~(أ ← ب) ≡ ~(~أ ∨ ب) [نفي قضيتين متكافئتين] .

≡ ~(~أ) ∧ ~ب [الفرع (٢) من المبرهنة (١–١)] .

≡ أ ∧ ~ب [~(~أ) ≡ أ] .

أي أن : ~(أ ← ب) ≡ أ ∧ ~ب وهو المطلوب .

تدريب (٢–٢) أعد برهان الفرع (٢) من المبرهنة (١–٢) باستخدام جداول الصواب .

مثال (١ – ١٢) لتكن أ : ارتوت الأرض بالماء . ب : الزرع ينمو .

١) اكتب القضية (أ ← ب) بثلاث طرق متكافئة .

٢) اكتب نفي القضية(أ ← ب) بطريقتين متكافئتين .

الحـــل

١) أ ← ب ≡ ~أ ∨ ب ≡ ~ب ← ~أ [الفرع (١) من المبرهنة (١–٢)] أي أن القضايا الثلاث الآتية متكافئة :

« إذا ارتوت الأرض بالماء فإن الزرع ينمو » .

« لم ترتوِ الأرض بالماء أو الزرع ينمو » .

« إذا لم ينمُ الزرع فإن الأرض لم ترتو بالماء » .

٢) ~(أ ← ب) ≡ أ ∧ ~ب [الفرع (٢) من المبرهنة (١–٢)] أي أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

– ليس صحيحاً أنه « إذا ارتوت الأرض بالماء فإن الزرع ينمو » .

– ارتوت الأرض بالماء ولم ينمو الزرع .

القضايا الصائبة منطقياً :

تعريف (١ : ٣)

يقال للقضية المركبة إنها صائبة منطقياً (أو تحصيل حاصل) إذا كانت صائبة دائماً مهما كانت قيم صواب مركباتها ، كما يقال لها خطأ منطقياً (أو تناقض) إذا كانت خطأ دائماً مهما كانت قيم صواب مركباتها .

مثال (١ – ١٣) باستخدام جدول الصواب ، أثبت أن القضية (أ ∨ ب) ← (~أ ← ب) صائبة منطقياً .

الحـــل ننشئ جدول الصواب الآتي :

أ	ب	~أ	أ ∨ ب	~أ ← ب	(أ ∨ ب)←(~أ ← ب)
ص	ص	خ	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	خ	خ	ص

جدول (١ – ١٤)

يلاحظ من الجدول (١–١٤) ، العمود الأخير أن قيم صواب القضية المعطاة هي صائبة دائماً ، وعليه فإنها صائبة منطقياً .

تمارين ومسائل (١–٣)

[١] لأية قضيتين أ ، ب أثبت أن :

١) (أ ∨ ب) ≡ (أ ← ب) ← ب .

٢) ~(~أ ∧ ~ب) ≡ أ ∨ ب .

٣) أ ← ب ≢ ب ← أ .

٤) ~(أ ← ب) ≢ ~أ ← ~ب .

[٢] انفِ كل قضية مما يأتي بطريقتين مختلفتين ، وعيّن قيمة صواب كلٍ منها قبل وبعد النفي .

١) السعودية دولة نفطية والخرطوم عاصمة سوريا .

٢) يدور القمر حول الأرض أو يدور حول نفسه .

٣) إذا زاد علم الإنسان زاد تواضعه .

[٣] لأية قضيتين أ ، ب بيّن أن كلاً من القضايا المركبة الآتية هي قضية صائبة منطقياً : (استخدم جداول الصواب) .

١) (أ ∧ ب) ← أ .

٢) أ ← أ ∨ ب .

٣) أ ∨ ~ (أ ∧ ب) .

٤) (أ ∧ ب) ← (أ ∨ ب) .

[٤] إذا كانت ‍ا ، ب ، جـ ثلاث قضايا مختلفة فأثبت أن :

١) ‍ا ∨ (ب ∨ جـ) ≡ (‍ا ∨ ب) ∨ جـ . ٢) ‍ا ∨ (ب ∧ جـ) ≡ (‍ا ∨ ب) ∧ (‍ا ∨ جـ) .

٣) ‍ا ∧ (ب ∨ جـ) ≡ (‍ا ∧ ب) ∨ (‍ا ∧ جـ) .

٤) [(‍ا ← ب) ∧ (ب ← جـ)] ← (‍ا ← جـ) صائبة منطقياً .

١ : ٤ الاقتضاء المنطقي

تعلم أن القضية الشرطية (‍ا ← ب) تكون خطأ فقط عندما تكون ‍ا صائبة و ب خطأ، وعليه إذا وجدنا قضية شرطية (‍ا ← ب) تتميز بأنها حيثما تكون ‍ا صائبة تكون ب صائبة ، بمعنى أن (‍ا ← ب) صائبة منطقياً. فإننا نسمي هذه القضية الشرطية اقتضاءً منطقياً ، ونعبر عن هذا الاقتضاء رمزياً كما يلي : ‍ا ⇐ ب . ونقرأ ‍ا تقتضي ب .

تعريف (١ : ٤)

لأية قضيتين ‍ا ، ب نقول إن ‍ا تقتضي ب (ونكتب ‍ا ⇐ ب) إذا كانت القضية ‍ا ← ب صائبة منطقياً .

ملاحظات :

١) إذا كانت القضية (‍ا ← ب) ليست صائبة منطقياً فمعنى ذلك أن ‍ا لاتقتضي ب ونكتب (‍ا ⇍ ب).

٢) إذا كان ‍ا ⇐ ب ، ب ⇐ ‍ا فإننا نكتب ذلك رمزياً ‍ا ⇔ ب (وتقرأ ‍ا شرط ضروري وكافٍ لـ ب)

وفي هذه الحالة يكون للرمزين ⇔ ، ≡ نفس المعنى الرياضي .

٣) إذا كان ‍ا ⇐ ب بينما ب ⇍ ‍ا عندئذٍ نكتب ‍ا ⇎ ب (وتقرأ ‍ا لايكافئ ب) .

بعض طرق البرهان الرياضي :

يلعب مفهوم الاقتضاء دوراً هاماً في الرياضيات ، إذ يشكل أساساً للعديد من أساليب البرهان الرياضي ، فيما يلي نتناول منها أسلوبين :

‍ا) طريقة البرهان المباشر : إن الفكرة الأساسية التي يعتمد عليها الأسلوب المباشر للبرهان هي أن علاقة الاقتضاء « ⇐ » هي علاقة متعدية ، أي أن لأي ثلاث قضايا ‍ا ، ب ، جـ :

[(‍ا ⇐ ب) ∧ (ب ⇐ جـ)] ⇐ (‍ا ⇐ جـ) .

وفي هذه الطريقة نبدأ بافتراض صحة المقدمة (الشرط ‍ا) لنستنتج بطريقة منطقية صحة النتيجة الأولى ب، وهكذا حتى نصل إلى صحة النتيجة المطلوبة .

مثال (١ – ١٤) برهن أن : إذا كان س عدداً فردياً فإن س^{٢} عدد فردي ، علماً بأن العدد الفردي ممكن كتابته على الصورة: ٢ ن + ١ ، ن ∈ ص .

البرهان : نقوم بإثبات أن إذا كان س عدد فردي ⇐ س^{٢} عدد فردي كما يلي :

∵ س عدد فردي ⇐ س = ٢ د + ١ ، د ∈ ص .

⇐ س^{٢} = (٢ د + ١)^{٢} بالتربيع للطرفين

⇐ س^{٢} = ٤ د^{٢} + ٤ د + ١

⇐ س^{٢} = ٢ (٢ د^{٢} + ٢ د) + ١

⇐ س^{٢} = ٢ م + ١ ، م = (٢ د^{٢} + ٢ د) ∈ ص .

⇐ س^{٢} عدد فردي .

أي أن س عدد فردي ⇐ س^{٢} عدد فردي وهو المطلوب .

ب) طريقة نقض الفرض : وهي إحدى طرق البرهان غير المباشر .

إن الأساس النظري لهذه الطريقة هو ما برهناه في المبرهنة (١–٢) من أن : ا ← ب ≡ ~ ب ← ~ ا .

وبما أن الاقتضاء (ا ⇐ ب) يتحقق عندما تكون (ا ← ب) صائبة منطقياً ، فإن الاقتضاء ~ ب ⇐ ~ ا يتحقق عندما تكون (~ ب ← ~ ا) صائبة منطقياً .

وتتلخص خطوات البرهان بطريقة نقض الفرض بما يلي :

لإثبات أن صواب الشرط ا يقتضي صواب النتيجة ب ، نفرض أن ب خاطئة (أي أن ~ ب صائبة) رغم صواب ا ، فننطلق من (~ ب) وبطرق مباشرة متتالية حتى إذا توصلنا إلى أن ~ ا صائبة (أي أن ا خاطئة) وهذا يناقض ما فرضناه سلفاً أن ا صائبة ، وهذا التناقض يُعزى إلى خطأ الفرض بأن ب خاطئة . فنستنتج أن ب صائبة .

مثال (١ – ١٥) أثبت أن : إذا كان س^{٢} عدداً زوجياً فإن س عدد زوجي : س ∈ ص

البرهان : سنبرهن المطلوب باستخدام طريقة نقض الفرض .

نفرض أن س^{٢} عدد زوجي ، س عدد فردي .

س عدد فردي ⇐ س = ٢ د + ١ ، د ∈ ص ومن المثال (١–١٤) نجد أن :

س عدد فردي ⇐ س^{٢} عدد فردي، وهذا يناقض الفرض س^{٢} عدد زوجي ، وهذا التناقض نتج عن خطأ الفرض (س عدد فردي) إذاً نفي (الفرض) صواب . أي أن س عدد زوجي وهو المطلوب .

تمارين ومسائل (١ – ٤)

[١] أكمل ما يلي بوضع أحد الرمزين (⇐) أو (⇍) في الفراغ المناسب :

١) ا ب جـ د مربع ... ا ب جـ د مستطيل . ٢) س ∈ ط .... س ∈ ص .

٣) ا عدد زوجي ... ا يقبل القسمة على ٢ .

٤) ا ب جـ مثلث متساوي الساقين ... ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع .

٥) س^{٢} = ٤ .... س = –٢ .

[٢] بيِّن ما إذا كان يمكننا كتابة ما يلي ، وعلل إجابتك :

١) س = ٢ ⟸ س^{٣} = ٨ ٢) س = ٢ ⟺ س^{٣} = ٨

٣) س >٠ ⟸ س^{٢} > ٠ ٤) س >٠ ⇎ س^{٢} > ٠

[٣] لأي قضيتين أ ، ب بين أن :

١) (أ ∧ ب) ⟸ ب ٢) [(أ ∨ ب) ∧ ~ب] ⟸ أ

٣) [(أ ∨ ب) ∧ ~أ] ⟸ ب ٤) [(أ ⟵ ب) ∧ أ] ⟸ ب

٥) (أ ⟷ ب) ⟸ (أ ⟵ ب)

[٤] باستخدام طريقة البرهان المباشر ، أثبت أن :

١) س = ٣ ⟸ س^{٢} = ٩ . ٢) س = ٥ ⟺ س^{٣} = ١٢٥

[٥] أثبت بطريقة نقض الفرض أن : س^{٢} عدد فردي ⟸ س عدد فردي : س ∈ ص

١ : ٥ المســوَّرات

علمت من دراستك في المرحلة الأساسية أن :

الجملة المفتوحة : هي جملة خبرية تتضمن متغيراً أو أكثر .

وفي البند (١ : ١) من هذه الوحدة عرّفنا القضية المنطقية بأنها جملة خبرية يحتمل معناها الصواب أو الخطأ وليس كليهما معاً .

في ضوء ما سبق تأمل الجمل الآتية :

١) س عدد طبيعي أصغر من ٥ ٢) ص + ع = ٣ حيث ص ، ع ∈ ص

٣) .... أحد الخلفاء الراشدين .

تجد أن كلاً منها جملة مفتوحة ، لكنها ليست قضية في وضعها الراهن ، وعندما نعوض عن س بالعدد ٣ مثلاً ، تصبح (١) « ٣ عدد طبيعي أصغر من ٥ » قضية صائبة .

أما عندما س = ٦ تصبح (١) « ٦ عدد طبيعي أصغر من ٥ » قضية خطأ.

بالمثل لو عوضنا عن ص = ٢ ، ع = ١ في (٢) نحصل على « ٢ + ١ = ٣ » قضية صائبة بينما ص = ع = ٢ تجعل (٢) قضية خطأ.

كذلك الجملة (٣) تتحول إلى قضية صائبة إذا وضعنا أيّاً من الأسماء (أبو بكر ، عمر ، عثمان ، علي) بدلاً عن .... ، وتكون خطأ فيما عدا ذلك .

في كلٍ من الجمل الثلاث السابقة نجد متغيراً أو متغيرين هي عناصر من مجموعة تسمى مجموعة التعويض ، وعندما نعوض في الجملة بعنصر من مجموعة التعويض الخاصة بهذا المتغير نحصل على قضية .

لذلك يمكن إعادة تعريف الجملة المفتوحة كما يلي :

تعريف (١ : ٥)

الجملة المفتوحة هي جملة خبرية تتضمن متغيراً أو أكثر ، وتتحول إلى قضية عندما نعوّض عن كل متغير بعنصر من مجموعة التعويض .

تسمى مجموعة العناصر التي يأخذها المتغير من مجموعة التعويض وتحقق الجملة المفتوحة (تحولها إلى قضية صائبة) مجموعة الحل .

تستخدم الرموز م (س) ، هـ (س) ، ق (س) ، ... لتدل على جمل مفتوحة تحتوي على المتغير س .

فنكتب مثلاً : م (س) : س^{٢} − س − ٦ = ٠ ، س ∈ ح

لتدل على الجملة المفتوحة س^{٢} − س − ٦ = ٠ ، س ∈ ح

فيما يلي سوف نتعرف على نوعين من القضايا المنطقية هما : القضايا المسوَّرة كلياً ، والقضايا المسوَّرة جزئياً .

أ) القضايا المسوَّرة كلياً :

تأمل الجملة المفتوحة :

م (س) : س + ٢ < ٥ ، س ∈ ط .

إن مجموعة الحل لها هي المجموعة { ٠ ، ١ ، ٢ } ، لماذا ؟

فإذا رمزنا لمجموعة الحل بالرمز سـ، أي أن سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ }

فإن الجملة (∀ س ∈ سـ : م (س)) قضية صائبة ——— (١)

أما الجملة : « لكل س ∈ ط : م (س) » والتي تعني أن (جميع عناصر ط تحقق س + ٢ < ٥)

هي قضية خاطئة ، ونكتب ذلك رمزياً كما يلي : « ∀ س ∈ ط : م (س) » ——— (٢)

يسمى كل من (١) ، (٢) قضية مسوَّرة كلياً ، الرمز ∀ مسوّراً كلياً .

تعريف (١ : ٦)

لتكن م (س) جملة مفتوحة ، سـ مجموعة تعويضها . تكون القضية المسوَّرة كلياً « ∀ س ∈ سـ : م (س) » صائبة : إذا كانت م (س) قضية صائبة لجميع قيم س ∈ سـ ، وتكون القضية خطأً : إذا وجد على الأقل عنصر س ∈ سـ يجعل م (س) قضية خطأً .

مثال (١ − ١٦) لتكن هـ (س) : س + ٥ = ٥ + س ، س ∈ ط ،

ق (س) : س^{٢} − ٩ = ٠ ، س ∈ ح

فبين قيم صواب كلٍ من :

١ − « ∀ س ∈ ط : هـ (س) » ٢ − « ∀ س ∈ ح : ق (س) »

الحل ١ − صائبة لأن كل تعويض عن س بعدد طبيعي يجعل هـ (س) قضية صائبة .

٢ – خطأ لأنه توجد أعداد حقيقية تجعل ق (س) قضية خطأ .

فمثلاً ١ ∈ ح ، ق(١) : (١)^{٢} – ٩ = – ٨ ≠ ٠ .

ب) القضايا المسوَّرة جزئياً : لنعد إلى الجملة المفتوحة ق(س) المعرفة في المثال (١ – ١٦) ولنكتب « لبعض قيم س ∈ ح تتحقق ق(س) » فإننا نكون بذلك قد حددنا قضية صائبة من الجملة المفتوحة ق (س) ، ذلك لأن العدد ٣ ∈ ح مثلاً يجعل ق(س) قضية صائبة .

أي أن ق (٣) : (٣)^{٢} – ٩ = ٠ .

نعبِّر عن القضية السابقة رمزياً كما يلي : « ∃ س ∈ ح : ق(س) » «٣»

تسمى «٣» قضية مسوَّرة جزئياً ، والرمز ∃ مسوَّر جزئي ، ويقرأ « يوجد على الأقل » .

تعريف (١ : ٧)

لتكن هـ (س) جملة مفتوحة ، س مجموعة تعويضها . تكون القضية المسوَّرة جزئياً « ∃ س ∈ س : هـ (س) »

صائبة : إذا وجُد على الأقل عنصر س ∈ س يجعل هـ (س) قضية صائبة .

خطأ : إذا كان كل تعويض لـ س ∈ س يجعل هـ (س) قضية خطأ.

مثال (١ – ١٧) لتكن م (س) : س > ٥ ، س ∈ ط ، هـ (س) : ٢ س = ٣ ، س ∈ ص.

فبين قيم صواب كلٍ من :

١ – « ∃ س ∈ ط : م (س) » . ٢ – « ∃ س ∈ ص : هـ (س) » .

الحـــل

١ – صائبة : لأن العدد ٢ ∈ ط يحقق م (س) .

٢ – خطأ لأن أي تعويض لـ س ∈ ص يجعل هـ (س) قضية خطأ.

وبأسلوب آخر نجد أن العدد الوحيد الذي يحقق هـ (س) هو العدد $\frac{٣}{٢}$ ∉ ص .

مثال (١ – ١٨) لتكن م (س) : س^{٢} > ٣ ، س ∈ ص .

* كوّن بدلالة م (س) قضيتين إحداهما مسوَّرة كلياً، والأخرى مسوَّرة جزئياً، وبين قيم صواب كلٍ من القضيتين.

الحـــل

∀س ∈ ص : م (س) وهي قضية خطأ لأن ١ ∈ ص لايحقق م (س)

∃ س ∈ ص : م (س) وهي قضية صائبة لأن ٢ ∈ ص يحقق م (س) .

نفي القضايا المسوَّرة :

تأمل أزواج القضايا المسوَّرة المتقابلة الآتية :

✻ جميع المناطق اليمنية تشتهر بزراعة البن	بعض المناطق اليمنية لاتشتهر بزراعة البن .
✻ بعض الطلاب مجتهدون	جميع الطلاب غير مجتهدين .
✻ بعض الحيوانات أليف	جميع الحيوانات غير أليفة .
✻ جميع التمارين الرياضية مفيدة	بعض التمارين الرياضية غير مفيدة .

تلاحظ أن معنى كل قضية موجودة على اليسار تنفي معنى القضية المقابلة لها على اليمين .

وبوجه عام إِن نفي القضية التي تشتمل على (الجميع ... يكون) هي قضية تشتمل على (البعض ... لايكون) بينما نفي القضية التي تشتمل على « البعض ... يكون » هي قضية تشتمل على « الجميع ... لايكون » ، ونعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :

~ [∀ س ∈ سـ : م (س)] ≡ [∃ س ∈ سـ : ~ م (س)] ،

~ [∃ س ∈ سـ : ق (س)] ≡ [∀ س ∈ سـ : ~ ق (س)] .

مثال (١ – ١٩) اكتب نفي القضايا المسوَّرة الآتية :

١ – بعض الطلاب يحبون دراسة المنطق .
٢ – بعض الأعداد الصحيحة سالبة .
٣ – لكل إِنسان أقارب .
٤ – كل كائن حي يحتاج إِلى الماء .
٥ – بعض علماء الرياضيات فلاسفة .

الحـــل

١ – كل الطلاب لايحبون دراسة المنطق .
٢ – جميع الأعداد الصحيحة ليست سالبة .
٣ – بعض الناس ليس لهم أقارب .
٤ – بعض الكائنات الحية لاتحتاج إِلى الماء .
٥ – كل علماء الرياضيات ليسوا فلاسفة .

مثال (١ – ٢٠) انفِ كل قضية من القضايا الآتية ، وبين قيمة صوابها بعد النفي :

١) ∃ س ∈ ط : ٨ س + ٦ = ٧ .
٢) ∀ س ∈ ح : س × ١ = ١ × س .
٣) ∃ س ∈ ص : س^{٢} < ٠ .

الحـــل

١) ∀ س ∈ ط : ٨ س + ٦ ≠ ٧ ، وهي قضية صائبة لأنها نفي لقضية خاطئة .
٢) ∃ س ∈ ح : س × ١ ≠ ١ × س ، وهي قضية خاطئة لأنها نفي لقضية صائبة .
٣) ∀ س ∈ ص : س^{٢} ≮ ٠ أو ∀ س ∈ ص : س^{٢} ≥ ٠ ، وهي قضية صائبة لأنها نفي لقضية خاطئة .

مثال (١ – ٢١) عبّر عن كلٍ من القضايا التالية رمزياً ، وبين قيمة صواب كلٍ منها :

أ – جميع الأعداد الطبيعية أكبر من ٢٥ .
ب – بعض الأعداد الفردية هي أعداد أولية .
جـ – عملية جمع الأعداد الصحيحة مغلقة .

الحــل

أ – لنرمز للعدد الطبيعي بالرمز س ، فتكون القضية المعطاة هي « $\forall$ س $\in$ ط : س $>$ ٢٥ » ، وهي قضية خاطئة ، لأن العدد ٥ $\in$ ط ، ٥ $>$ ٢٥ قضية خاطئة .

ب – لنرمز لمجموعة الأعداد الفردية بالرمز ف ولمجموعة الأعداد الأولية بالرمز ل ، وليكن س عدداً فردياً اختيارياً فتكون القضية المعطاة هي : $\exists$ س $\in$ ف : س $\in$ ل أو $\exists$ س : س $\in$ (ف $\cap$ ل) حيث $\cap$ رمز تقاطع المجموعات ، وهي قضية صائبة ، لأن العدد ٣ مثلاً هو عدد فردي وأولي .

جـ – ليكن س ، ص عددين صحيحين اختياريين ، فتكون القضية المعطاة هي :

$\forall$ س ، ص $\in$ صـ : (س + ص) $\in$ صـ وهي قضية صائبة .

تمارين ومسائل (١ – ٥)

[١] لتكن سـ = { أ ، ٢ ، ٤ ، هـ ، و } فبين أياً مما يلي قضية وأياً منها جملة مفتوحة :

١) س $\in$ سـ (حيث س متغير) .
٢) ٢ س $\in$ سـ .
٣) ٧ $\in$ سـ .
٤) هـ $\in$ سـ .

[٢] لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } حدّد قيمة صواب كلٍ من القضايا المسوَّرة التالية :

١) $\forall$ س $\in$ سـ : س + ٣ = ١٠ .
٢) $\forall$ س $\in$ سـ : س + ٣ $<$ ١٠ .
٣) $\exists$ س $\in$ سـ : س + ٣ $>$ ٥ .
٤) $\forall$ س $\in$ سـ : س + ٣ $\leq$ ٧

[٣] انفِ كلاً من القضايا الواردة في التمرين [٢] ، وبين قيمة صوابها .

[٤] نعلم أن الصفر هو العنصر المحايد الجمعي في مجموعة الأعداد الطبيعية ، ونعبر عن ذلك رمزياً باستخدام المسورات كما يلي : $\forall$ س $\in$ ط : س + صفر = صفر + س = س ، استخدم الفكرة السابقة وعبِّر عن الخواص الآتية رمزياً :

١) العدد ١ هو العنصر المحايد الضربي في مجموعة الأعداد الصحيحة .
٢) عملية جمع الأعداد الطبيعية إبدالية .
٣) مربع أي عدد حقيقي هو عدد غير سالب .
٤) يوجد على الأقل عددان طبيعيان الفرق بينهما ليس عدداً طبيعياً .

[٥] انفِ كلاً من القضايا الواردة في [٤] ، وبين أن كلاً منها قضية خاطئة .

الوحدة الثانية

التطبيقـــات

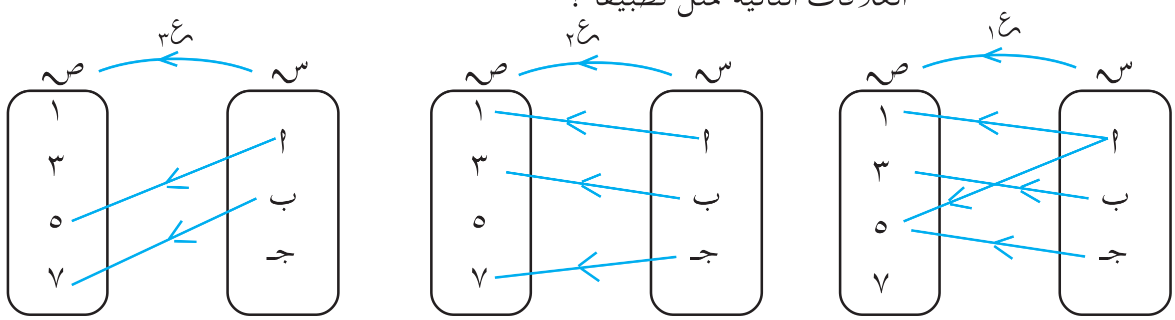
٢ : ١ مراجعـــــة

تذكر أن : **التطبيق من سہ ← صہ هو علاقة تربط كل عنصر من المجال (سہ) بعنصر وحيد من المجال المقابل (صہ) .**

وبذلك نرى أن التطبيق يتعين بمعرفة ثلاث مكونات هي : أ) المجال . ب) المجال المقابل .
جـ) قاعدة التطبيق .

تذكر أن : **قاعدة التطبيق هي العلاقة التي تربط كل عنصر من المجال بصورته من المجال المقابل ، ونعبر عنها رمزياً : ت (س) = ص .**

مثال (٢ – ١) لتكن سہ = { أ ، ب ، جـ } ، صہ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ، فبيّن أي العلاقات التالية تمثل تطبيقاً ؟



شكل (٢ – ١أ) شكل (٢ – ١ ب) شكل (٢ – ١ جـ)

الحـــل

نجد أن العلاقات :

ع١ ليست تطبيقاً ؛ لأن أ ∈ سہ ارتبط بعنصرين هما ١ ، ٥ من صہ .

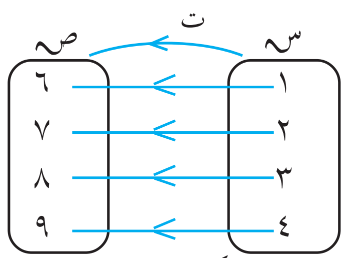
ع٢ تطبيق ؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر وحيد من المجال المقابل .

ع٣ ليست تطبيقاً ؛ لأن جـ ∈ سہ لم يرتبط بأي عنصر من صہ .

مثال (٢ – ٢) حدّد قاعدة التطبيق ت : سہ ← صہ والمعرّف بالمخطط السهمي في الشكل(٢ – ٢) .

الحــل

تلاحظ من الشــكل (٢–٢) أن كل عنصــر مــن المجـال ارتبط بعنصر وحيد من المجال المقابــل يكبره بمقــدار ٥ ، أي أن س $\xrightarrow{\text{ت}}$ س + ٥ ، إذن تتحدد قاعدة التطبيق ت : س ← ص بالمعادلة ت (س) = س + ٥ .



شكل (٢ – ٢)

تذكر أن :	مدى التطبيق هو مجموعة صور عناصر مجال التطبيق ، وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل .

مثال (٢ – ٣)

ليكن ت تطبيقاً من س ← ص معرفاً بالقاعدة ت (س) = س + ١ حيث س = { ٢ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } حدّد عناصر المدى .

الحــل

∵ ت (س) = س + ١ ، ∴ ت (٢) = ٢ + ١ = ٣ ،

ت (٤) = ٤ + ١ = ٥ ، ت (٥) = ٥ + ١ = ٦ .

المدى = { ٣ ، ٥ ، ٦ } لاحظ أن المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل .

أي أن { ٣ ، ٥ ، ٦ } ⊂ ص .

أساليب التعبير (التمثيل) عن التطبيق :

هناك أساليب عديدة للتعبير عن التطبيق والتي تعين لكل س ∈ س صورة ص ∈ ص ، هذه الأساليب تحدد العلاقة بين العنصر وصورته وهي كالتالي :

أ) القاعدة (معادلة رياضية) .

ب) الأزواج المرتبة .

جـ) المخططات السهمية .

ء) التمثيل الجدولي .

هـ) الرسم البياني .

مثال (٢ – ٤)

ليكن التطبيق ت : س ← ص والمعرف بالقاعدة ت (س) = ١ – س ، حيث س = { ٣ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { –٢ ، –٤ ، –٧ ، –٨ } ، مثل التطبيق كأزواج مرتبة ، وكمخطط سهمي .

الحــل

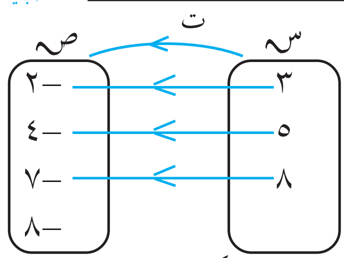
∵ ت (س) = ١ – س .

∴ ت (٣) = ١ – ٣ = –٢ ، ت (٥) = ١ – ٥ = –٤ ، ت (٨) = ١ – ٨ = –٧ .

وهذا يعتبر أسلوباً من أساليب التعبير عن التطبيق باستخدام قاعدة التطبيق مباشرة .

أما التعبير عن التطبيق كأزواج مرتبة فهو : { (٣ ، –٢) ، (٥ ، –٤)، (٨ ، –٧) } .

والتعبير عن التطبيق كمخطط سهمي موضح في الشكل (٢ – ٣)



شكل (٢ –٣)

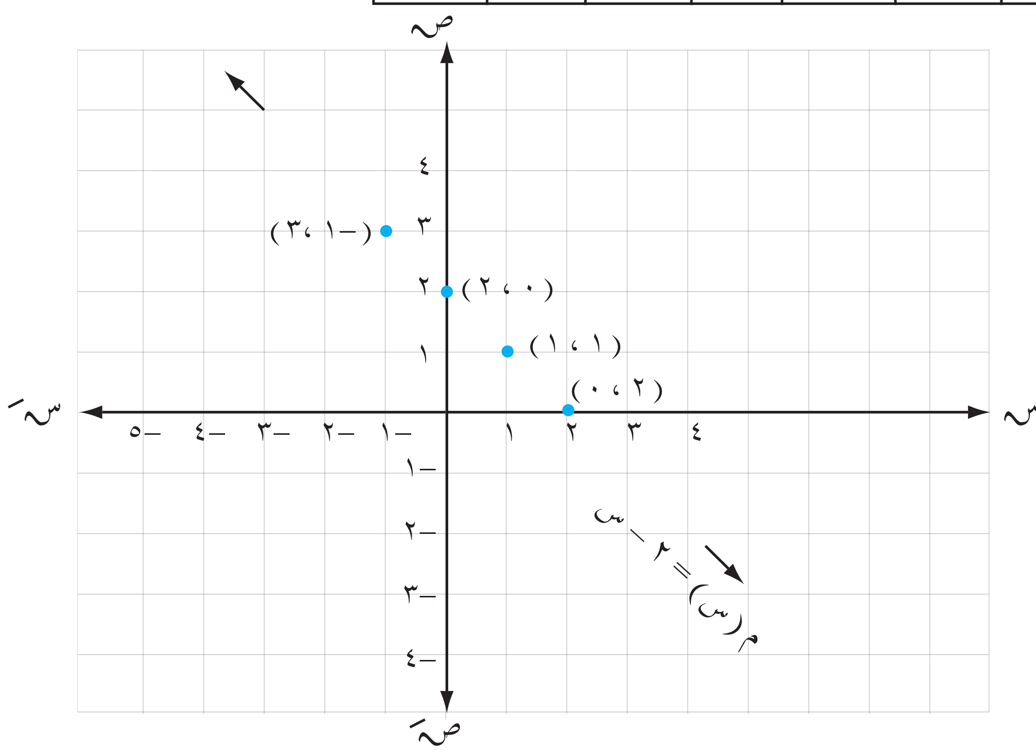
مثال (٢ – ٥) مثل بيانياً التطبيق م : ص ← ص

والمعرف بالقاعدة م (س) : ٢ – س ؛ حيث (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) .

الحل

التمثيل البياني لهذا التطبيق يتحقق بعدد لانهائي من الأزواج المرتبة (س ، م (س)) ، والجدول التالي يوضح بعض هذه الأزواج :

س	....	–١	٠	١	٢	....
م (س)	....	٣	٢	١	٠	....



شكل (٢ –٤)

لاحظ أن هذا التمثيل يتكون من مجموعة من النقاط على استقامة واحدة كما في الشكل (٢ – ٤) .

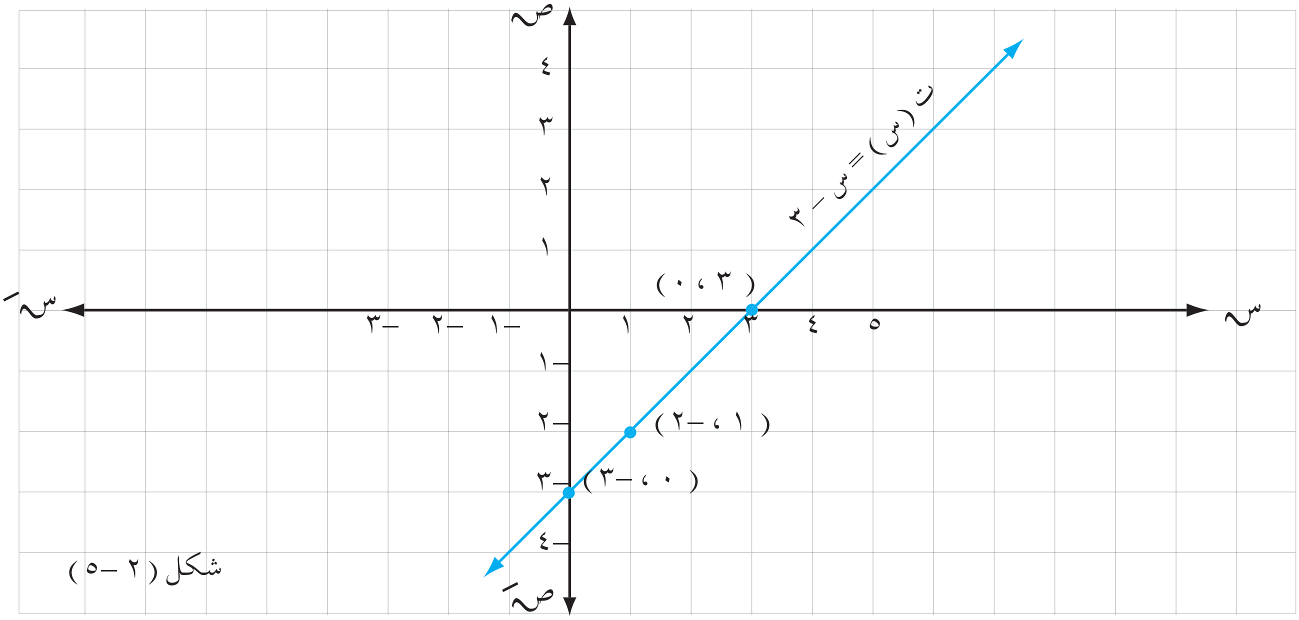
مثال (٢ – ٦) ليكن التطبيق ت : ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت(س) = س – ٣ ، مثّل هذا التطبيق بيانياً .

الحل

من الواضح أن ت(س) = س – ٣ يتحقق بعدد لانهائي من الأزواج المرتبة (س ، ت(س)) .

والجدول التالي يعطي بعض هذه الأزواج :

س	....	٠	١	٢	....
ت (س)	....	-٣	-٢	-١	....

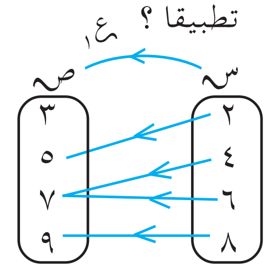


شكل (٢ -٥)

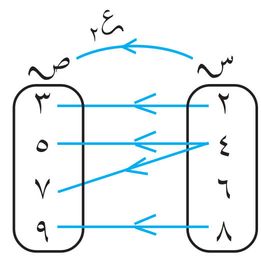
بحيث إن هذا التطبيق من ح ← ح يكون تمثيله البياني هو خط مستقيم كما هو موضح في الشكل (٢- ٥).

تمارين ومسائل (٢ - ١)

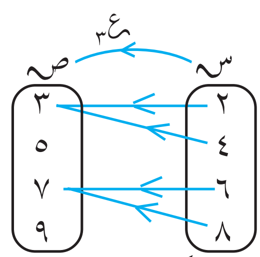
[١] لتكن س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ص = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، بيّن أيّاً من العلاقات الآتية تمثّل تطبيقاً ؟



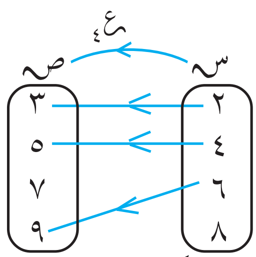
شكل (٢ -٦أ)



شكل (٢ -٦ب)



شكل (٢ -٦جـ)



شكل (٢ -٦د)

[٢] إذا كانت العلاقة ع = { (-٢ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، -١) ، (٣ ، ١) } تمثّل تطبيقاً، فحدّد مجال ومدى هذا التطبيق .

[٣] لتكن ت تطبيقاً من س إلى ص حيث س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { ٠ ، ٤ ، ٥ } ، ت (أ) = ٤ ، ت (ب) = ٠ ، ت (جـ) = ٥ :

أ) مثّل التطبيق كأزواج مرتبة .

ب) مثّله كمخطط سهمي .

جـ) حدّد مجاله ومداه .

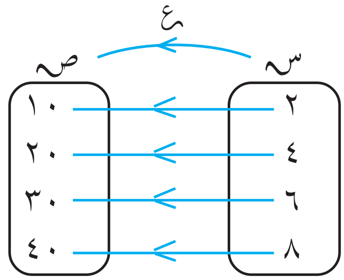
[٤] لتكن س = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ، ص = {١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠} وعرّفنا العلاقة ع ، من س إلى ص بالمخطط السهمي شكل (٢ –٧) .

أ) أثبت أن العلاقة ع تطبيقاً .

ب) حدّد قاعدة هذا التطبيق .

جـ) حدّد عناصر مداه .

ء) هل مدى هذا التطبيق يساوي مجاله المقابل ؟



شكل (٢ –٧)

[٥] ليكن ت : ط ← ط تطبيقاً قاعدته ت (س) = ٢ س + ٣

أ) أوجد ت (٢) ، ت (٤) ، ت (٦) ، ت (٨) . ب) حدّد مدى هذا التطبيق .

[٦] إذا كانت ع علاقة معرفة بالقاعدة ق (س) = س + ١ فبيّن أيّاً من العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً :

أ) ع : ط ← ط . ب) ع : ص ← ط .

جـ) ع : ط ← ص . ء) ع : ص ← ص .

[٧] ليكن التطبيق ق : س ← ص معرفاً بالقاعدة ق(س) = ٢ س ، حيث س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦} ، حدّد مدى التطبيق ثم مثّل هذا التطبيق كأزواج مرتبة .

[٨] إذا كان ت تطبيقاً من ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) = ٣ س – ١ ، مثّل هذا التطبيق بيانياً .

[٩] التطبيق ت : س ← ص معرّف بالقاعدة ت (س) = س – ٢ حيث س = {٥ ، ٦ ، ٤ ، ٧} ، ص = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، كوّن جدولاً لهذا التطبيق ، ثم ارسم مخططه السهمي .

[١٠] لتكن س = {–٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢} ، ص = {–١ ، ٠ ، ٢ ، ٣} ، التطبيق م : س ← ص معرفاً بالقاعدة م (س) = س^{٢} – ١ ، حدّد مدى التطبيق ، ثم مثله جدولياً .

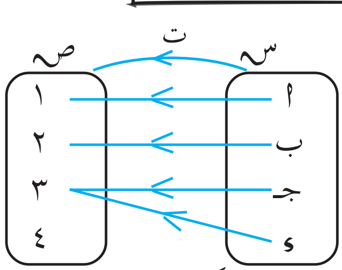
٢ : ٢ الصورة العكسية للتطبيق (معكوس التطبيق)

تدريب (٢–١)

من المخطط السهمي الموضح بالشكل (٢ – ٨) أوجد ما يلي :

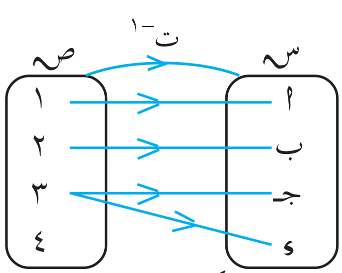
١) ت (أ) ، ت (ب) ، ت (جـ) .

٢) العناصر التي صورها ١ ، ٢ ، ٣ .



شكل (٢ – ٨)

لمعرفة العناصر التي صورها ١ ، ٢ ، ٣ نعكس اتجاه الأسهم باتجاه عناصر المجال ، أي نوجد الصور العكسية لعناصر المجال المقابل كما هو موضح بالشكل (٢–٩) .



شكل (٢ –٩)

فنجد أن :

الصورة العكسية للعنصر ١ هي أ ، ونعبر عن ذلك رمزياً :

ت$^{-١}$ (١) = أ .

(وتقرأ الصورة العكسية للعنصر ١ هي أ) ، وبالمثل الصورة العكسية للعنصر ٢ هي ب ، أي أن $ت^{-١}$ (٢) = ب ، أما الصورة العكسية $ت^{-١}$(٣) = {جـ ، ء}

والعنصر ٤ ليس له صورة عكسية ، والصورة العكسية للمجموعة { ١ ، ٢ } هي { أ ، ب } ، ونعبر عن ذلك رمزياً $ت^{-١}$({ ١ ، ٢ }) = { أ ، ب } وبالمثل $ت^{-١}$({ ١ ، ٢ ، ٣ }) = { أ ، ب ، جـ ، ء } ، والسؤال الذي نطرحه الآن :

هل الصورة العكسية للتطبيق (معكوس التطبيق ت) تمثل تطبيقاً ؟ من الشكل (٢–٩) نجد أن : الصورة العكسية للتطبيق ت ، أو معكوس التطبيق ليس بالضرورة أن تكون تطبيقاً ؛ لأن ٣ ∈ ص ارتبط بعنصرين من س ، أي أن $ت^{-١}$(٣) = {جـ ، ء} بالإضافة إلى أن العنصر ٤ ليس له صورة عكسية ، كما أن التمثيل بالأزواج المرتبة يوضح أن المسقط الأول (٣) تكرر مرتين كالتالي : { (١ ، أ) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، جـ) ، (٣ ، ء) } وبالتالي نقول أن :

١ – الصورة العكسية لأي عنصر من المجال المقابل لأي تطبيق إمّا أن تكون عنصراً واحداً أو أكثر من عنصر ، أو لا توجد له أي صورة عكسية .

٢ – الصورة العكسية لأية مجموعة جزئية من المجال المقابل هي مجموعة جزئية من المجال .

٣ – معكوس أي تطبيق هو علاقة وأنّ هذه العلاقة قد تكون تطبيقاً أو ليست تطبيقاً .

مثال (٢ – ٧) ليكن التطبيق ت : ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) = س + ٣ ، أوجد :

أ) $ت^{-١}$(٣) ، $ت^{-١}$(٤) ، $ت^{-١}$(٢)

ب) $ت^{-١}$ { د : د ∈ ح ، ٤ ≤ د ≤ ٧ }

الحل

أ) $ت^{-١}$(٣) هي الأعداد التي تحقق المعادلة ت (س) = ٣ ، أي أن س + ٣ = ٣ ⟸ س = ٠

∴ $ت^{-١}$(٣) = ٠

$ت^{-١}$(٤) هي الأعداد التي تحقق المعادلة ت (س) = ٤ ، أي أن س + ٣ = ٤ ⟸ س = ١

∴ $ت^{-١}$(٤) = ١

$ت^{-١}$(٢) هي الأعداد التي تحقق المعادلة ت(س) = ٢ ، أي أن س + ٣ = ٢ ⟸ س = –١

∴ $ت^{-١}$(٢) = –١

ب) $ت^{-١}$({ د : د ∈ ح ، ٤ ≤ د ≤ ٧ }) هي مجموعة الأعداد التي تحقق المتراجحة :

٤ ≤ س + ٣ ≤ ٧ ⟸ ١ ≤ س ≤ ٤

∴ $ت^{-١}$({ د : د ∈ ح ، ٤ ≤ د ≤ ٧ }) = { س : س ∈ ح ، ١ ≤ س ≤ ٤ }

مثال (٢ – ٨) إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، صـ = { ٧ ، ٨ ، ١٠ } ، وعرّفنا التطبيق
ف : سـ ← صـ على النحو التالي :

ف = { (١ ، ٨) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ١٠) ، (٤ ، ٨) } ، فأوجد معكوس التطبيق ف ، وهل يمثل تطبيقاً؟

الحل

معكوس التطبيق هو : $ف^{-١}$ = { (٨ ، ١) ، (٨ ، ٢) ، (١٠ ، ٣) ، (٨ ، ٤) } تلاحظ أن المسقط الأول في الأزواج المرتبة العنصر (٨) تكرر أكثر من مرة ، أي أن معكوس التطبيق ف ليس تطبيقاً .

مثال (٢ – ٩) إذا كانت سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، صـ = { ٤ ، ٥ ، ٦ } ، وعرفنا التطبيق
م : سـ ← صـ بالقاعدة م (س) = س + ٢

فبيّن أن معكوس التطبيق م تطبيق .

الحل

لكي نبين أن $م^{-١}$ تطبيق ، نوجد جميع الصور العكسية للمجال المقابل (صـ)

$م^{-١}$ (٤) هي العناصر التي تحقق المعادلة م (س) = ٤ ، أي أن س + ٢ = ٤ ⟸ س = ٢

∴ $م^{-١}$ (٤) = ٢ ،

وبالمثل $م^{-١}$ (٥) = ٣ ، $م^{-١}$ (٦) = ٤ ، وحيث أن صورة كل عنصر في المجال المقابل هي عنصر واحد فقط من المجال .

إذن معكوس التطبيق م تطبيقاً .

مثال (٢ – ١٠) ليكن التطبيق ك : ح ← ح معرفاً بالقاعدة ك (س) = $س^٢$ + ٢

أوجد $ك^{-١}$(٤) ، ثم بيّن أن معكوس التطبيق ك ليس تطبيقاً .

الحل

$ك^{-١}$(٤) هي الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة ك (س) = ٤

أي أن $س^٢$ + ٢ = ٤ ⟸ $س^٢$ = ٢ ⟸ س = $\pm\sqrt{٢}$

∴ $ك^{-١}$ (٤) = { $\sqrt{٢}$ ، – $\sqrt{٢}$ } ، وحيث إنّ الصورة العكسية للعنصر ٤ هما العنصرين $\sqrt{٢}$ ، – $\sqrt{٢}$

إذن معكوس التطبيق ك ليس تطبيقاً .

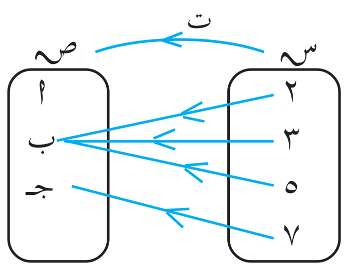
تمارين ومسائل (٢ – ٢)

[١] ليكن ت : سـ ← صـ تطبيقاً معرفاً بالمخطط السهمي الموضح بالشكل (٢ – ١٠)

أ) أوجد $ت^{-١}(أ)$ ، $ت^{-١}(ب)$ ، $ت^{-١}(جـ)$

ب) أوجد $ت^{-١}$({ ب ، جـ })

جـ) بيّن أن معكوس التطبيق ت ليس تطبيقاً .



شكل (٢ – ١٠)

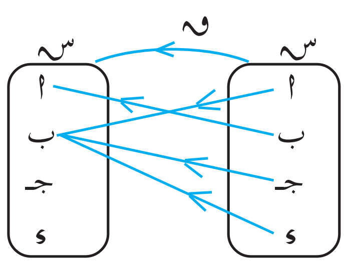
[٢] ليكن ق تطبيقاً ق : سـ ← سـ حيث سـ = { أ ، ب ، جـ ، ء } معرفاً بالمخطط السهمي الشكل (٢ – ١١) .

أ) أوجد $ق^{-١}$(ب) ، $ق^{-١}$(جـ)

ب) مثّل التطبيق ق كأزواج مرتبة

جـ) أوجد معكوس التطبيق ق

ء) هل معكوس التطبيق ق تطبيق؟ لماذا ؟



شكل (٢ – ١١)

[٣] إذا كان التطبيق هـ : سـ ← صـ معرفاً بالقاعدة هـ(س) = س + ١ ، حيث سـ = { ٤ ، ٢ ، ٩ } ، صـ = { ٥ ، ٣ ، ١٠ } ، فأثبت أن معكوس التطبيق هـ تطبيق.

[٤] ليكن التطبيق ت : ط / { ٠ } ← ط معرفاً بالقاعدة ت (س) = ٣ س – ١

أ) أوجد $ت^{-١}$(١) ، $ت^{-١}$(٥) ، $ت^{-١}$(٨) . ب) بيّن أن معكوس التطبيق ت ليس تطبيقاً .

[٥] ليكن التطبيق ت : ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) = س + ٣ ، أوجد :

أ) $ت^{-١}$(٧) ، $ت^{-١}$(٣) ، $ت^{-١}$(–٢)

ب) $ت^{-١}$({ ص : ص $\in$ ح ، –٥ $\leq$ ص $\leq$ ١٢ })

[٦] ليكن التطبيق د : ح ← ح معرفاً بالقاعدة د (س) = س٢ + ٤ س + ٧ ، أوجد $د^{-١}$(٢٨) ، ثم أثبت أن معكوس التطبيق د ليس تطبيقاً .

[٧] إذا كان التطبيق هـ : ط ← ط معرفاً بالقاعدة هـ(س) = ٢ س + ١ ، فأوجد :

أ) $هـ^{-١}$(٣) ، $هـ^{-١}$(٦) ، $هـ^{-١}$(٠) ب) $هـ^{-١}$({ ص : ص $\in$ ط ، ص $\leq$ ٥ })

جـ) $هـ^{-١}$({ ص : ص $\in$ ط ، ٣ $\leq$ ص $\leq$ ٩ }) ء) أثبت أن معكوس التطبيق هـ ليس تطبيقاً .

٢ : ٣ أنواع التطبيقات

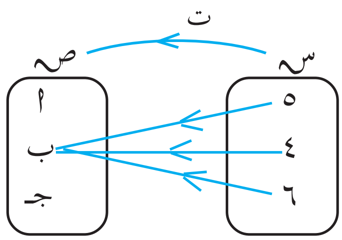
سبق أن تعرفت في المرحلة السابقة على التطبيق الخطي وفي هذا الدرس ستتعلم بعض أنواع التطبيقات مثل :

(١) التطبيق الثابت :

تأمل التطبيق المبين بالمخطط السهمي شكل (٢ – ١٢) ،

ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن :



شكل (٢ – ١٢)

ت (٥) = ب ، ت (٤) = ب ، ت (٦) = ب

أي أن جميع عناصر المجال (س) ارتبطت بعنصر واحد فقط من مجاله المقابل (ص) .

تعريف (٢ : ١)

يسمى التطبيق ت : س ← ص تطبيقاً ثابتاً إذا ارتبطت جميع عناصر مجال هذا التطبيق بعنصر واحد فقط من مجاله المقابل .

أي أن : ∀ س ∋ س ، ت (س) = ب ، ب ∋ ص.

مثال (٢ – ١١)

ليكن ت : س ← ص قاعدته « س يقسم ص » س ∋ س ، ص ∋ ص
حيث س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ١٠} ، ص = { ١٩ ، ٣٠ ، ٤٣ } .

أثبت أن هذا التطبيق ثابت .

الحل

ت (٢) = ٣٠ لماذا ؟ ، ت (٣) = ٣٠ ، ت (٥) = ٣٠ ، ت (١٠) = ٣٠ .

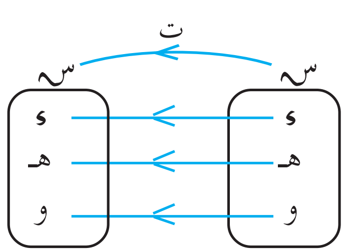
المدى = { ٣٠ } .

بما أن جميع عناصر المجال (س) ارتبطت بعنصر واحد فقط وهو (٣٠) من مجاله المقابل (ص) .

إذن التطبيق ثابت .

(٢) التطبيق المطابق (المحايد) :

تأمل التطبيق الذي يمثله المخطط السهمي شكل (٢ – ١٣) ،



شكل (٢ – ١٣)

تلاحظ أن : ت (ى) = ى ، ت (هـ) = هـ ، ت (و) = و .

أي أن كل عنصر في المجال (س) ارتبط بنفسه في المجال المقابل (س) .

تعريف (٢ : ٢)

يسمى التطبيق ت : س ← س تطبيقاً مطابقاً (محايداً) إذا ارتبط كل عنصر في المجال بنفسه في المجال المقابل .

أي أن : ∀ س ∈ س ، ت (س) = س .

مثال (٢ – ١٢) ليكن ت : س ← س تطبيقاً مطابقاً حيث س = { ٩ ، –١١ ، $\frac{١}{٢}$ } ،
أوجد مدى هذا التطبيق .

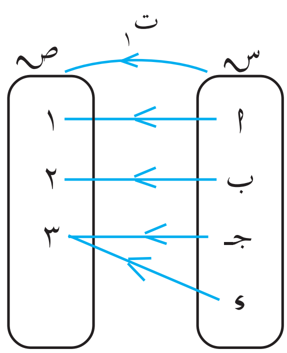
الحل بما أن ت تطبيقاً مطابقاً فإن ت (س) = س .

∴ ت(٩) = ٩ ، ت (–١١) = –١١ ، ت ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$.

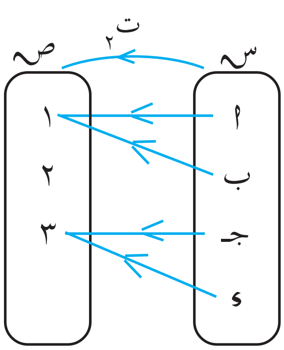
المدى = { ٩ ، –١١ ، $\frac{١}{٢}$ } .

(٣) التطبيق الغامر (الشامل) :

تلاحظ في التطبيقين ت١ ، ت٢ الممثلين في الشكلين (٢ – ١٤أ ، ب) أن التطبيق ت١ فيه كل عنصر من المجال المقابل وهو صورة لعنصر واحد على الأقل من عناصر المجال ، أي أن المدى = { ١ ، ٢ ، ٣ } = المجال المقابل .



شكل (٢ – ١٤أ)



شكل (٢ – ١٤ب)

بينما التطبيق ت٢ فيه عنصر في المجال المقابل وهو (٢) ليس صورة لأي عنصر من عناصر المجال أي أن المدى = { ١ ، ٣ } ≠ المجال المقابل .

يسمى التطبيق ت١ **تطبيقاً غامراً** ، بينما التطبيق ت٢ **ليس تطبيقاً غامراً** .

تعريف (٢ : ٣)

يسمى التطبيق ت : س ← ص تطبيقاً غامراً (أو شاملاً) إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل (ص) هو صورة لعنصر واحد على الأقل من عناصر المجال (س) ويكتب ذلك رمزياً :

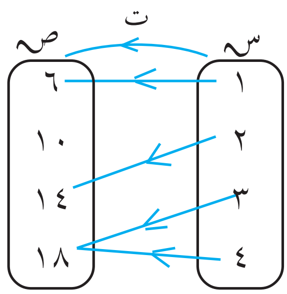
∀ ص ∈ ص ∃ س ∈ س بحيث ت (س) = ص .

من التعريف السابق :

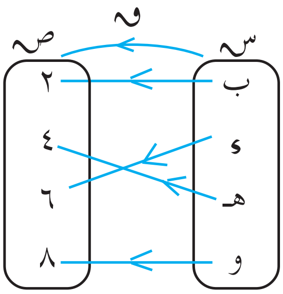
١) يكون التطبيق غامراً إذا كان كل عنصر في المجال المقابل له صورة عكسية . أي المدى = المجال المقابل .

٢) يكون التطبيق غير غامر إذا وجد عنصر واحد على الأقل في المجال المقابل ليس له صورة عكسية .
أي المدى ≠ المجال المقابل .

مثال (٢ – ١٣) أي التطبيقين ت ، و الممثلين بالشكل (٢– ١٥أ ، ب) غامر .



شكل (٢ – ١٥أ)



شكل (٢ – ١٥ب)

الحل

من الشكل (٢ – ١٥أ) التطبيق ت ليس غامراً لأن المدى = { ٦ ، ١٤ ، ١٨ } ≠ المجال المقابل

ومن الشكل (٢ – ١٥ب) التطبيق و غامر ، لأن المدى = المجال المقابل .

مثال (٢ – ١٤) ليكن ت : ط ← ط تطبيقاً معرفاً بالقاعدة ت(س) = س٢ ، بيّن أن هذا التطبيق غير غامر .

الحل

لإيجاد المدى نوجد : ت (٠) = (٠)٢ = ٠ ، ت (١) = (١)٢ = ١ ،

ت (٢) = (٢)٢ = ٤ ... وهكذا .

∴ المدى = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٩، ... } ، ∵ المدى ≠ المجال المقابل (ط) .

∴ التطبيق غير غامر .

حل آخر :

ط مجموعة غير منتهية يمكن اختيار أحد عناصر المجال المقابل وليكن ص ، ثم نحل المعادلة بإيجاد س بدلالة ص : س٢ = ص ، س = ± √ص .

وإذا كان ص = ٣ ∈ ط (المجال المقابل) .

∴ س = ± √٣ ∉ ط (المجال) . أي أن العنصر ٣ في المجال المقابل ليس له صورة عكسية .

∴ التطبيق غير غامر .

(٤) التطبيق المتباين (الاحادي) :

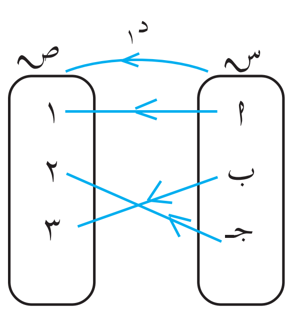
تأمل التطبيقين د١ ، د٢ التاليين [شكل (٢ – ١٦أ ، ب)] .. ماذا تلاحظ ؟

في التطبيق د١ تلاحظ أن أي عنصرين مختلفين من المجال (س) لهما صورتان مختلفتان من المجال المقابل (ص) ، (تحقق من ذلك) .

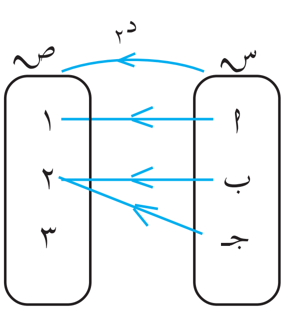
أما في التطبيق د٢ فإن ب ≠ جـ

بينما د٢(ب) = د٢ (جـ) = ٢ .

يقال للتطبيق د١ بأنه **متباينٌ** ، أما التطبيق د٢ **ليس متبايناً** .



شكل (٢ – ١٦أ)



شكل (٢ – ١٦ب)

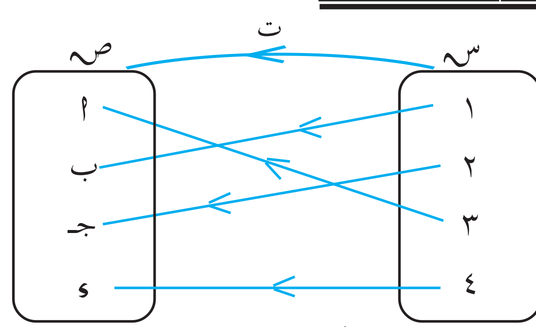
تعريف (٢ : ٤)

يسمى التطبيق ت : سـ ← صـ تطبيقاً متبايناً إذا كان كل عنصر من المجال المقابل صورة لعنصر واحد على الأكثر من المجال . أي أن :

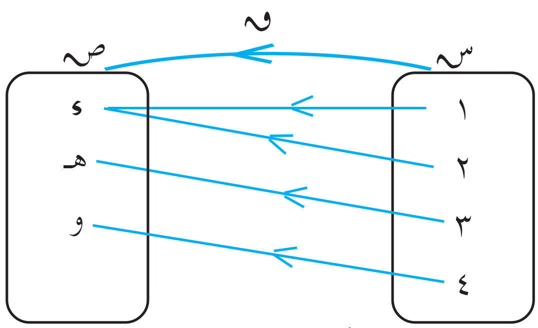
$\forall$ س$_١$ ، س$_٢$ $\in$ سـ ، إذا كان س$_١$ $\neq$ س$_٢$ $\Leftarrow$ ت (س$_١$) $\neq$ ت (س$_٢$) أو بعبارة مكافئة :

$\forall$ س$_١$ ، س$_٢$ $\in$ سـ ، إذا كان ت (س$_١$) = ت (س$_٢$) $\Leftarrow$ س$_١$ = س$_٢$

مثال (٢ – ١٥) أي التطبيقين التاليين متباين ؟ ولماذا ؟



شكل (٢ – ١٧ أ)



شكل (٢ – ١٧ ب)

الحل

في التطبيق ت : ت$^{-١}$(أ) = ٣ ، ت$^{-١}$(ب) = ١ ، ت$^{-١}$(جـ) = ٢ ، ت$^{-١}$(ء) = ٤

$\therefore$ التطبيق ت متباين لأن : $\forall$ س$_١$ ، س$_٢$ $\in$ سـ ، س$_١$ $\neq$ س$_٢$ $\Leftarrow$ د(س$_١$) $\neq$ د(س$_٢$)

وفي التطبيق ق نلاحظ أن : ١ $\neq$ ٢ بينما ق(١) = ق(٢) = ء . أي أن التطبيق ق غير متباين لأن ق$^{-١}$(ء) = { ١ ، ٢ }

مثال (٢ – ١٦) ليكن د : ح ← ح تطبيقاً حيث د(س) = ٢ س + ١ . أثبت أن د تطبيق متباين .

الحل

من شرط التباين د (س$_١$) = د (س$_٢$) $\Leftarrow$ س$_١$ = س$_٢$

د (س$_١$) = ٢ س$_١$ + ١ ، د (س$_٢$) = ٢ س$_٢$ + ١

$\therefore$ ٢ س$_١$ + ١ = ٢ س$_٢$ + ١ $\Leftarrow$ ٢ س$_١$ = ٢ س$_٢$ $\Leftarrow$ س$_١$ = س$_٢$

$\therefore$ التطبيق متباين .

حل آخر :

بتطبيق الشرط المكافئ للتباين :

نفرض س$_١$ $\neq$ س$_٢$ ، $\forall$ س$_١$ ، س$_٢$ $\in$ ح

$\Leftarrow$ ٢ س$_١$ $\neq$ ٢ س$_٢$ $\Leftarrow$ ٢ س$_١$ + ١ $\neq$ ٢ س$_٢$ + ١ $\Leftarrow$ د(س$_١$) $\neq$ د(س$_٢$)

∴ $س_١ \neq س_٢ \Leftarrow د(س_١) \neq د(س_٢)$

∴ التطبيق متباين .

(٥) التطبيق التقابل :

تعريف (٢ : ٥)

يسمى التطبيق ت : سٓ ← صٓ تقابلاً إذا كان غامراً ومتبايناً في آن واحد .

ملاحظة : لكي نبيّن أن التطبيق غير تقابل يكفي أن نبيّن أنه غير غامر أو غير متباين .

مثال (٢ –١٧) إذا كانت سٓ = { ا ، ب ، جـ ، ء } ، وكان د ، هـ تطبيقين معرفين على سٓ حيث :

د = { (ا ، ب) ، (ب ، جـ) ، (جـ ، ء) ، (ء ، ا) }

هـ = { (ا ، ب) ، (ب ، جـ) ، (جـ ، ب) ، (ء ، ا) } ، فبيّن نوع كل من د ، هـ

الحـــل

التطبيق د فيه : د(ا) = ب ، د(ب) = جـ ، د(جـ) = ء ، د(ء) = ا

∴ المدى = { ا ، ب ، جـ ، ء } = المجال المقابل .

التطبيق د غامر .

ويلاحظ أن كل عنصرين مختلفين في المجال (سٓ) لهما صورتان مختلفتان من المجال المقابل (سٓ)

∴ التطبيق د متباين .

د تطبيق تقابل لأنه غامر ومتباين .

أما التطبيق هـ غير غامر لأن المدى = { ا ، ب ، جـ } ≠ المجال المقابل ، وبالتالي فهو ليس تقابلاً .

مثال (٢ –١٨) ليكن ت : ط ← ط تطبيقاً حيث ت(س) = ٣ س + ٣ . هل هذا التطبيق تقابل؟ ولماذا؟

الحـــل

من شرط التباين : $ت(س_١) = ت(س_٢)$

$\Leftarrow ٣س_١ + ٣ = ٣س_٢ + ٣ \Leftarrow ٣س_١ = ٣س_٢ \Leftarrow س_١ = س_٢$

∴ $ت(س_١) = ت(س_٢) \Leftarrow س_١ = س_٢$ ، ∴ التطبيق متباين .

أمّا لمعرفة ما إذا كان التطبيق ت غامراً أم لا . يتم اختيار أحد عناصر المجال المقابل وليكن ص ثم نحل المعادلة :

٣ س + ٣ = ص

$\Leftarrow$ ٣ س = ص − ٣

$\Leftarrow$ س = $\frac{\text{ص} - ٣}{٣}$

فإذا كان ص = ٠

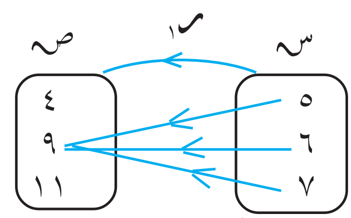
$\therefore$ س = $\frac{٠ - ٣}{٣}$ = $\frac{-٣}{٣}$ = −١ $\not\ni$ ط (المجال) .

أي أن العنصر ص = ٠ من المجال المقابل ليس له صورة عكسية .

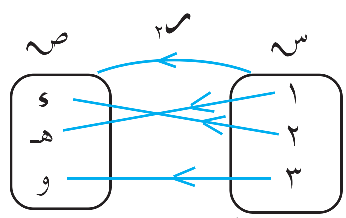
إذن التطبيق غير غامر ، وبالتالي التطبيق ت غير تقابل .

تمارين ومسائل (٢ – ٣)

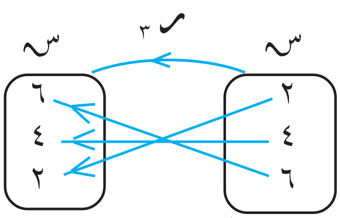
[١] بيّن نوع كل تطبيق من التطبيقات التالية :



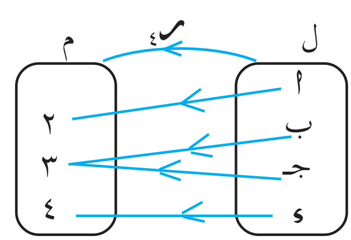
شكل (٢ – ١٨أ)



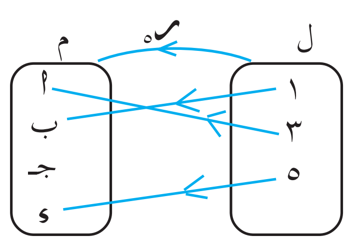
شكل (٢ – ١٨ب)



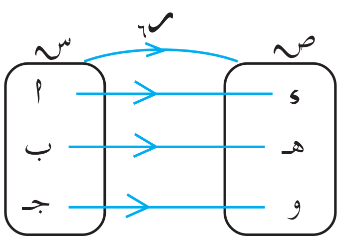
شكل (٢ – ١٨جـ)



شكل (٢ – ١٨ء)



شكل (٢ – ١٨هـ)



شكل (٢ – ١٨و)

[٢] ليكن ق : س ← ص تطبيقاً معرفاً بالقاعدة « س رقم من أرقام العدد ص : س ∈ س ، ص ∈ ص » ، س = { ٥ ، ٤ ، ٦ } ، ص = { ٢٩١ ، ٤٥٦ ، ٣٠٢ } ، أوجد مدى هذا التطبيق وبيّن نوعه .

[٣] الجدول التالي يمثل التطبيق ق (س) على س حيث س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

س	٢	٣	٤	٥	٦
ق(س)	٦	٥	٢	٤	٤

ارسم مخططاً سهمياً لهذا التطبيق وبيّن نوعه .

[٤] ليكن التطبيق ت : س ← ص معرفاً بالقاعدة ت (س) = ٣س حيث س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٠ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ } .

أ) اكتب التطبيق ت كأزواج مرتبة .
ب) بيّن نوعه .

[٥] لتكن سـ = { أ ، ب ، جـ ، ء } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } بيّن نوع كل من التطبيقين التاليين من سـ ← صـ .

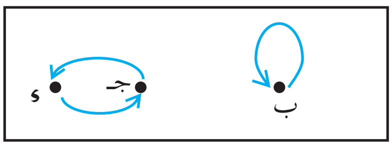
د$_{١}$ = { (ب ، ٣) ، (أ ، ١) ، (جـ ، ٥) ، (ء ، ٧) } .

د$_{٢}$ = { (أ ، ٥) ، (ب ، ٣) ، (جـ ، ٣) ، (ء ، ١) } .

[٦] المخطط السهمي شكل (٢ – ١٩) يمثل تطبيقاً من سـ ← سـ حيث سـ = { ب ، جـ ، ء } .

أ) اكتب بيان هذا التطبيق كأزواج مرتبة .

ب) بيّن نوعه .



شكل (٢ – ١٩)

[٧] لتكن ل = { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } ، م = { ء ، هـ ، و } .

أ) كوّن تطبيقاً من ل ← م بحيث يكون غامراً وغير متباين .

ب) كوّن تطبيقاً من م ← ل بحيث يكون متبايناً وغير غامر .

جـ) هل ممكن تكوين تطبيق من ل ← م تقابلاً ؟ ولماذا ؟

[٨] لتكن سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، والتطبيق د : سـ ← ط حيث د (س) = س^{٢} – ١ ، ما مدى هذا التطبيق ؟ وبيّن نوعه .

[٩] ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ تطبيقان معرفان كالتالي :

ق$_{١}$: ط ← ط ، ق$_{١}$(س) = ٢ س ، ق$_{٢}$: ط ← ط ، ق$_{٢}$(س) = ٣ س + ١

ما نوع كل منهما ؟

[١٠] إذا كان ق(س) = س^{٢} بين نوع هذا التطبيق عندما يكون :

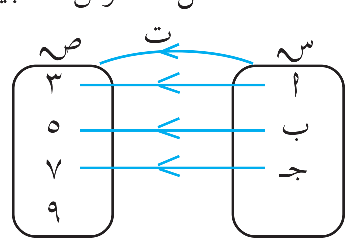
أ) ق : ط ← ط (ط مجموعة الأعداد الطبيعية) .

ب) ق : صـ ← صـ (صـ مجموعة الأعداد الصحيحة) .

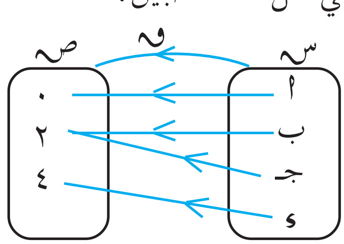
٢ : ٤ التطبيق العكسي

تعرفت على بعض أنواع التطبيقات . كما تعرفت سابقاً على معكوس التطبيق . استناداً إلى ذلك ستتعرف على التطبيق العكسي .

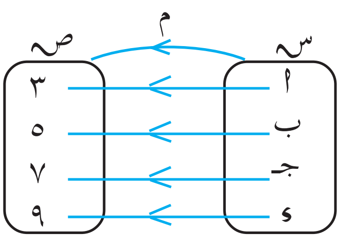
مثال (٢-١٩) بيّن نوع كل تطبيق في الأشكال (٢ – ٢٠ أ ، ب ، جـ) ، ثم أوجد معكوس كل منهم، هل معكوس التطبيق في كل حالة تطبيق؟



شكل (٢ – ٢٠ أ)



شكل (٢ – ٢٠ ب)



شكل (٢ – ٢٠ جـ)

الحل

– التطبيق ت : متباين ولكن غير غامر . لماذا ؟

إن معكوس هذا التطبيق ليس تطبيقاً ، لأن ٩ ∈ صـ ليس له صورة عكسية في سـ

– التطبيق هـ : غامر ولكن غير متباين . لماذا ؟

تلاحظ أن معكوس هذا التطبيق ليس تطبيقاً ، لأن ت$^{-1}$(٢) = {ب ، جـ}

– أمّا التطبيق م : تقابل لأنه غامر ومتباين ، فتلاحظ أن معكوس هذا التطبيق هو تطبيق من صـ إلى سـ يربط كل عنصر ص ∈ صـ بعنصر وحيد من سـ . مثل هذا التطبيق يسمى **«التطبيق العكسي»** ونرمز له كالتالي : م$^{-1}$: صـ ⟵ سـ ، قاعدته م$^{-1}$(ص) = س

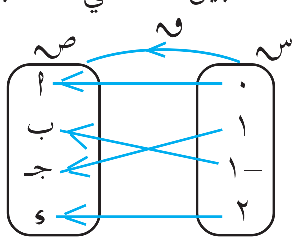
تعريف (٢ : ٦)

يكون للتطبيق ت : سـ ⟵ صـ تطبيق عكسي ت$^{-1}$: صـ ⟵ سـ إذا وفقط إذا كان التطبيق ت تقابلاً .

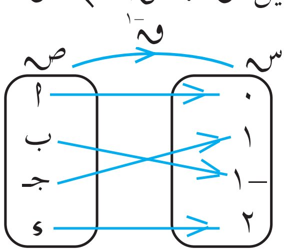
مثال (٢–٢٠)

استعن بالشكل (٢ – ٢١) لإيجاد التطبيق العكسي .للتطبيق هـ : سـ ⟵ صـ ، ثم ارسم مخططه السهمي .

الحل



شكل (٢ – ٢١)



شكل (٢ – ٢٢)

يتضح من المخطط السهمي هـ أنه تقابل .

إذن له تطبيق عكسي هو :

هـ$^{-1}$ = {(أ ، ٠)، (ب،–١)، (جـ ، ١)، (ء ، ٢)} ،

والمخطط السهمي في الشكل (٢ – ٢٢) يمثّل التطبيق العكسي هـ$^{-1}$

مثال (٢–٢١)

ليكن ت : ح ⟵ ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة ت (س) = ٢ س + ٥ ، هل للتطبيق ت تطبيق عكسي ؟ أوجد قاعدته – إن وجد – .

الحل

يجب أولاً أن نثبت أن ت تقابل ولذلك نتبع الخطوتين التاليتين :

١ – نثبت أن ت متباين .

لتكن ت (س$_{١}$) = ت (س$_{٢}$) .

∴ ٢ س$_{١}$ + ٥ = ٢ س$_{٢}$ + ٥ ⟸ ٢ س$_{١}$ = ٢ س$_{٢}$ ⟸ س$_{١}$ = س$_{٢}$

أي أن ت متباين .

٢ – نثبت أن ت غامر ، وذلك بحل المعادلة ص = ٢ س + ٥ ، وإيجاد س بدلالة ص

ص = ٢ س + ٥ ⟸ ٢ س = ص – ٥ ⟸ س = $\frac{ص – ٥}{٢}$ واضح أن المعادلة س = $\frac{ص – ٥}{٢}$ لها حل

مهما كانت قيمة ص $\in$ ح . إذن التطبيق غامر .

$\therefore$ ت تقابل وبالتالي له تطبيق عكسي ت^{-1} وقاعدته هي $\text{ت}^{-1}(\text{ص}) = \frac{\text{ص} - ٥}{٢}$ وحيث ص رمز لأي عدد حقيقي فيمكن أن نضع محله س .

$\therefore$ $\text{ت}^{-1} : \text{ص} \longleftarrow \text{س}$ حيث $\text{ت}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٥}{٢}$ ، $\forall$ س $\in$ ح .

مثال (٢-٢٢) ليكن التطبيق هـ : ح $\longleftarrow$ ح معرفاً بالقاعدة $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^٢$ ، هل لهذا التطبيق تطبيق عكسي ؟

الحل

نفرض أن $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢ \in$ ح (المجال) يكون هـ(س) متبايناً إذا كان $\text{هـ}(\text{س}_١) = \text{هـ}(\text{س}_٢) \Leftarrow \text{س}_١ = \text{س}_٢$

نفرض أن $\text{هـ}(\text{س}_١) = \text{هـ}(\text{س}_٢)$.

$\therefore$ $\text{س}_١^٢ = \text{س}_٢^٢ \Leftarrow \text{س}_١ = \pm \text{س}_٢$.

إذن توجد $\text{س}_١ = -\text{س}_٢ \Leftarrow \text{س}_١ \neq \text{س}_٢$.

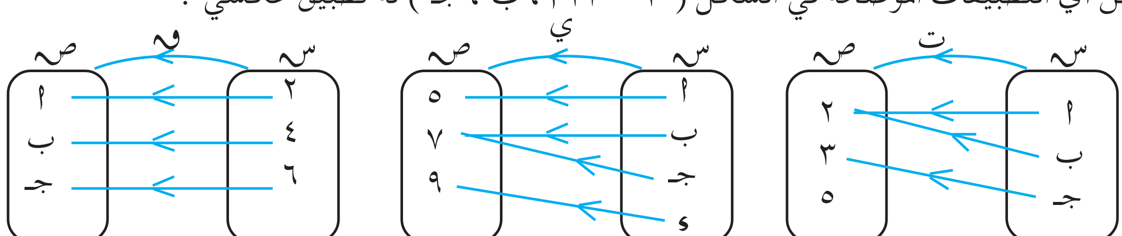
وهذا ما يوضح عدم تحقق الشرط .

$\therefore$ هـ ليس متبايناً .

$\therefore$ ليس له تطبيق عكسيّ .

تمارين ومسائل (٢ – ٤)

[١] بيّن أيّ التطبيقات الموضحة في الشكل (٢ – ٢٣ أ ، ب ، جـ) له تطبيق عكسي ؟



شكل (٢ – ٢٣ أ) شكل (٢ – ٢٣ ب) شكل (٢ – ٢٣ جـ)

[٢] ليكن د : س $\longleftarrow$ ص معرفاً بالقاعدة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٣$ ، $\forall$ س $\in$ س ، حيث س = { –٣ ، –٢ ، –١ ، ٠ } ، ص = { –٢٧ ، –٨ ، –١ ، ٠ } .

أ) أوجد $\text{د}^{-1}(٠)$ ، $\text{د}^{-1}(-١)$ ، $\text{د}^{-1}(-٨)$. ب) أثبت أن التطبيق د تقابل .

جـ) مثّل التطبيق العكسي بمخطط سهمي .

[٣] ليكن ر : ح $\longleftarrow$ ح تطبيقاً ومعرفاً بالقاعدة $\text{ر}(\text{س}) = \text{س} - ١$. أثبت أن ر تقابل ، ثم أوجد قاعدة ر^{-1} .

[٤] إذا كان م : ح $\longleftarrow$ ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $\text{م}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ١}{٢}$.

أ) أوجد $\text{م}^{-1}(٥)$ ، $\text{م}^{-1}(\frac{١}{٢})$ ، $\text{م}^{-1}(-٣)$.

ب) أوجد قاعدة التطبيق العكسي لهذا التطبيق .

[٥] إذا كان ت : ح ← ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة ت (س) = س^{٣} – ٨ ، فأثبت أن ت تقابل ، ثم أوجد قاعدة ت$^{-١}$.

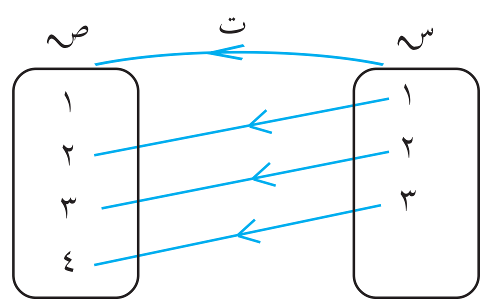
[٦] أوجد قاعدة التطبيق العكسي لكل من التطبيقين التاليين والمعرفة من ح ← ح :

أ) ت$_{١}$(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٨ . ب) ت$_{٢}$(س) = ٦ – ٥ س .

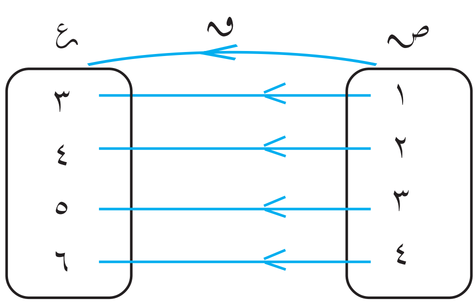
٢ : ٥ تركيب تطبيقين

لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ع = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

تأمل التطبيقين ت : س ← ص ، ق : ص ← ع التاليين شكل (٢ – ٢٤ أ ، ب) .



شكل (٢ – ٢٤أ)



شكل (٢ – ٢٤ ب)

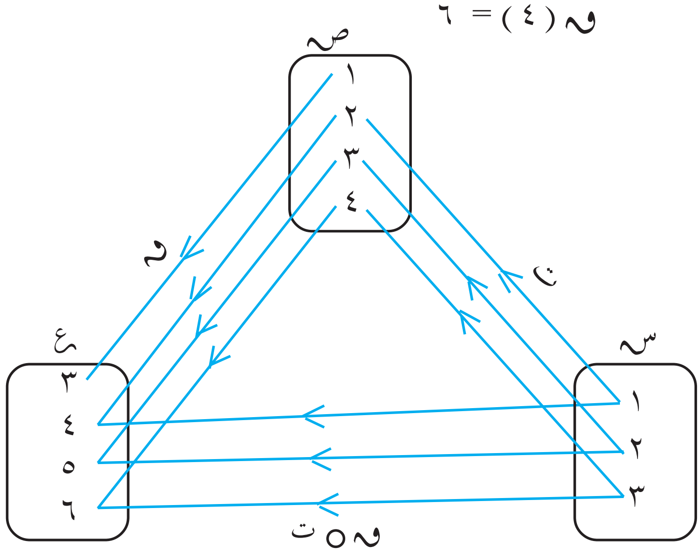
تلاحظ أن مدى التطبيق الأول (ت) مجموعة جزئية من مجال التطبيق الآخر (ق) .

كما نجد أن : ت (١) = ٢ ، ق (٢) = ٤

ت (٢) = ٣ ، ق (٣) = ٥

ت (٣) = ٤ ، ق (٤) = ٦

ويمكن من تركيب التطبيقين أن نحصل على المخطط التالي (شكل ٢ – ٢٥) .



شكل (٢ –٢٥)

فيكون لدينا تطبيق جديد مجاله س ، و مجاله المقابل ع معرفاً على النحو التالي :

١ ⟵ ٤ ، ٢ ⟵ ٥ ، ٣ ⟵ ٦ .

فالتطبيق الناتج من تركيب التطبيقين ت ، ه يسمى تركيب التطبيقين ، ويرمز له بالرمز : ه ○ ت ، ويُقرأ « التطبيق ه تركيب ت » يكتب بالشكل التالي :

(ه ○ ت) (س) = ه (ت (س)) .

فمثلاً : (ه ○ ت) (١) = ه (ت (١)) = ه (٢) = ٤ .

(ه ○ ت) (٢) = ه (ت (٢)) = ه (٣) = ٥ .

(ه ○ ت) (٣) = ه (ت (٣)) = ه (٤) = ٦ .

تعريف (٢ : ٧)

تركيب التطبيقين ت : س ⟵ ص ، ه : ص ⟵ ع هو التطبيق (ه ○ ت) : س ⟵ ع والمعرّف بالقاعدة : (ه ○ ت) (س) = ه(ت (س)) لكل س ∈ س .

وبهذا نتذكر دائماً أن ه ○ ت لايتم إلا إذا كان مدى التطبيق ت مجموعة جزئية من مجال ه .

مثال (٢-٢٣) لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } ، ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، والتطبيق د : س ⟵ ص حيث د (١) = ٥ ، د (٢) = ٦ ، د (٣) = ٧ ، والتطبيق ر : ص ⟵ ع حيث : ر (٥) = ١ ، ر (٦) = ٣ ، ر (٧) = ٢ ، ر (٨) = ٤ .

أ) أوجد (ر ○ د) (٢) .

ب) هل التركيب (ر ○ د) أو (د ○ ر) ممكناً؟

الحــل

أ) حسب التعريف : (ر ○ د) (٢) = ر (د (٢)) = ر (٦) = ٣ .

ب) لكي يتم تركيب (ر ○ د) لابد أن يكون مدى د ⊂ مجال التطبيق ر ، نجد أن مدى التطبيق د = { ٥ ، ٦ ، ٧ } ، مجال التطبيق ر = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } .

∵ مدى التطبيق د مجموعة جزئية من مجال التطبيق ر ، (ر ○ د) ممكنٌ .

ولكن (د ○ ر) غير ممكن لأن مدى التطبيق ر ({ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }) ليس مجموعة جزئية من مجال التطبيق د ({ ١ ، ٢ ، ٣ }) .

مثال (٢ - ٢٤) ليكن ت ، ه ، ر تطبيقات معرفة من ط ⟵ ط حيث ت (س) = ٣ س ، ه (س) = س + ٢ ، ر (س) = س . أوجد كلاً من ، (وماذا تستنتج؟) :

أ) (ه ○ ت) (س) ، (ت ○ ه) (س) .

ب) (ه ○ ر) (س) ، (ر ○ ه) (س) .

جـ) [ه ○ (ت ○ ر)] (س) ، [(ه ○ ت) ○ ر] (س) .

الحـــل

أ) بما أن ت (س) = ٣ س ، ق (س) = س + ٢

∴ (ق ○ ت) (س) = ق (ت (س)) = ق (٣ س) = ٣ س + ٢

بالمثل (ت ○ ق) (س) = ت (ق (س)) = ت (س + ٢) = ٣ (س + ٢) = ٣ س + ٦

يلاحظ أن تركيب التطبيقين غير تبديلي .

ب) (ق ○ ر) (س) = ق (ر (س)) = ق (س) = س + ٢

(ر ○ ق) (س) = ر (ق (س)) = ر (س + ٢) = س + ٢

يلاحظ أن تركيب التطبيقين تبديلي .

من (أ) ، (ب) نستنتج أن تركيب التطبيقين بصفة عامة غير تبديلي .

جـ) [ق ○ (ت ○ ر)] (س) = ق ○ [ت (ر (س))] = ق ○ [ت (س)]

= ق (ت (س)) = ق (٣ س) = ٣ س + ٢

[(ق ○ ت) ○ ر] (س) = (ق ○ ت) (ر (س)) = (ق ○ ت) (س)

= ق (ت (س)) = ق (٣س) = ٣س + ٢

مما سبق نستنتج أن : [ق ○ (ت ○ ر)] (س) = [(ق ○ ت) ○ ر] (س) .

أي أن تركيب التطبيقات تجميعي .

مثال (٢ – ٢٥) ليكن $ر_١$: ح ← ح حيث $ر_١$ (س) = ٢ س ،

$ر_٢$: ح ← ح حيث $ر_٢$ (س) = س – ١ ، أوجد ما يلي :

(١) ($ر_١$ ○ $ر_٢$) (٢س) (٢) ($ر_٢$ ○ $ر_١$) (٣)

الحـــل

(١) ($ر_١$ ○ $ر_٢$) (٢ س) = $ر_١$ ($ر_٢$ (٢س)) = $ر_١$ (٢س – ١) = ٢ (٢س – ١) = ٤ س – ٢

(٢) ($ر_٢$ ○ $ر_١$) (٣) = $ر_٢$ [$ر_١$ (٣)] = $ر_٢$ (٦) = ٦ – ١ = ٥

تمارين ومسائل (٢ – ٥)

[١] لتكن س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ص = { ١ ، ٨ ، ١٠ } ، ع = { ١١ ، ١٣ } ، $ق_١$ ، $ق_٢$

تطبيقين معرفين على النحو التالي :

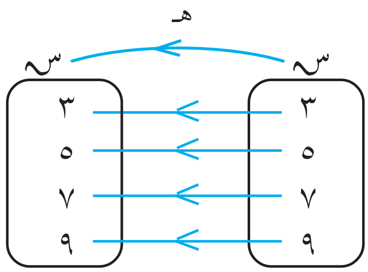
$ق_١$: س ← ص بحيث $ق_١$ (٢) = ٨ ، $ق_١$ (٤) = ١٠ ، $ق_١$ (٦) = ١

$ق_٢$: ص ← ع بحيث $ق_٢$ (١) = ١١ ، $ق_٢$ (٨) = ١٣ ، $ق_٢$ (١٠) = ١١

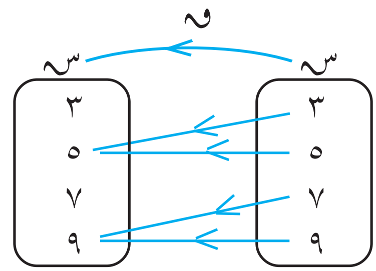
أ) هل ممكن تركيب $ق_٢$ ○ $ق_١$ أم $ق_١$ ○ $ق_٢$ ؟ ب) اكتب مجال $ق_٢$ ○ $ق_١$ ، ثم أوجد مداه .

جـ) ارسم مخططه السهمي .

[٢] لتكن س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} و و ، هـ تطبيقين من س ← س معرفين بالمخططين السهمين:



شكل (٢ – ٢٦ ب)



شكل (٢ – ٢٦ أ)

أ) أوجد (و ∘ هـ) (٣) ، (هـ ∘ و) (٧) .

ب) ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق (و ∘ هـ).

جـ) هل (و ∘ هـ) (٩) = (هـ ∘ و) (٩) ؟ بيّن ذلك .

[٣] لتكن ر ، و ، ت ثلاثة تطبيقات من ح ← ح معرفه على النحو التالي :

ر (س) = ٣ س ، و (س) = س + ١ ، ت (س) = ٣ س + ١

أوجد أ) (ر ∘ و) (٥) ب) (و ∘ ر) (–٣) جـ) (ر ∘ ر) (٦)

ء) (ت ∘ و) (٢س) هـ) (ر ∘ ت) (م + ١) و) [ر ∘ و ∘ ت] (٢) .

[٤] إذا كان $ت_{١}$: ط ← ط حيث $ت_{١}$ (س) = ٢ س ، $ت_{٢}$: ص ← ص ؛ حيث $ت_{٢}$ (س) = $\text{س}^{٢}$.

أ) أوجد صور العناصر ٢ ، ٥ ، س + ٣ في التطبيق ($ت_{١}$ ∘ $ت_{٢}$) ، ($ت_{٢}$ ∘ $ت_{١}$) .

ب) هل تركيب $ت_{١}$ ، $ت_{٢}$ غير تبديلي؟ بيِّن ذلك .

[٥] إذا كان و : ح ← ح ، هـ : ح ← ح حيث و(س) = ٥ س + ١ ، هـ(س) = $\text{س}^{٢}$. استنتج قواعد (و ∘ هـ) (س) ، (هـ ∘ و) (س).

[٦] لتكن د : ح ← ح حيث د (س) = ٢ س + ١ ، هـ : ح ← ح حيث هـ(س) = ٥ س + ٧ ،

أوجد أ) (هـ^{-1} ∘ د^{-1}) (س) . ب) (د ∘ هـ) (س + ١) .

الوحدة الثالثة   القوى والجذور

٣ : ١   القوى الصحيحة

أولاً – القوى الصحيحة الموجبة :

تعلم أنه $\forall$ ﺍ $\in$ ح ، ﻥ $\in$ ص$^+$ فإن الرمز ﺍ^{ن} يعني ضرب العدد ﺍ في نفسه ﻥ مرة .

أي أن : ﺍ^{ن} = ﺍ × ﺍ × ﺍ × . . . × ﺍ ، وتُقرأ ﺍ أس ﻥ ، ويُطلق على العدد ﺍ (الأساس) والعدد ﻥ (الأس) والرمز ﺍ^{ن} مكررة ﻥ مرة (القوة ﻥ للعدد ﺍ) أو باختصار القوة .

فالقوة الرابعة للعدد ٣ هي : ٣^{٤} = ٣ × ٣ × ٣ × ٣ = ٨١ .

وسبق لك دراسة قوانين الأسس الصحيحة الموجبة ، نلخصها فيما يلي :

$\forall$ ﺍ ، ب $\in$ ح ، م ، ﻥ $\in$ ص يكون :

١) ﺍ^{م} × ﺍ^{ن} = ﺍ$^{م+ن}$

٢) $\frac{ﺍ^{م}}{ﺍ^{ن}}$ = ﺍ$^{م-ن}$ حيث ﺍ ≠ ٠ ، م > ﻥ

٣) (ﺍ^{م})^{ن} = ﺍ^{مﻥ}

٤) (ﺍ × ب)^{ن} = ﺍ^{ن} × ب^{ن}

٥) $\left(\frac{ﺍ}{ب}\right)^{ن}$ = $\frac{ﺍ^{ن}}{ب^{ن}}$ حيث ب ≠ ٠

نتائج : من القانون أعلاه يمكننا استنتاج الحالات الخاصة التالية :

١) إذا كان ﺍ ≠ ٠ ، م < ﻥ فإن $\frac{ﺍ^{م}}{ﺍ^{ن}}$ = $\frac{١}{ﺍ^{ن-م}}$

٢) إذا كان م = ﻥ فإن $\frac{ﺍ^{ن}}{ﺍ^{ن}}$ = ﺍ^{٠} = ١ $\forall$ ﺍ $\in$ ح*

وذلك لأن: $\frac{أ^{د}}{أ^{د}} = أ^{د-د} = أ^{٠}$ (بتطبيق (٢)) .

ولكن: $\frac{أ^{د}}{أ^{د}} = ١$ (لأن البسط يساوي المقام) .

لذا فإن: $\boxed{\forall\ أ \in ح^{*} \text{ فإن } أ^{٠} = ١ .}$

أي إذا رفعنا أي عدد غير الصفر إلى الأس صفر فإن الناتج يساوي الواحد الصحيح .

فمثلاً : $٩^{٠} = ١$ ، $(٢س)^{٠} = ١$ ، $(٣س - ٤)^{٠} = ١$

مثال (٣ - ١) ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

١) $٣^{٢} \times ٣^{٤}$

٢) $\frac{٥ب^{١٢}}{٥ب^{٤}}$ ، $ب \neq ٠$

٣) $(س^{٣})^{٥}$

٤) $(٢أب)^{٤}$

٥) $\frac{١٢٥ \times (٢٥^{٢})^{٣}}{٥^{٤} \times (٢٥)^{٤}}$

الحل

١) $٣^{٢} \times ٣^{٤} = ٣^{٢+٤} = ٣^{٦}$

٢) $\frac{٥ب^{١٢}}{٥ب^{٤}} = ٥^{١-١}ب^{١٢-٤} = ٥^{٠}ب^{٨} = ب^{٨}$

٣) $(س^{٣})^{٥} = س^{٥\times٣} = س^{١٥}$

٤) $(٢أب)^{٤} = ٢^{٤} \times أ^{٤} \times ب^{٤} = ١٦أ^{٤}ب^{٤}$

٥) $\frac{١٢٥ \times (٢٥^{٢})^{٣}}{٥^{٤} \times (٢٥)^{٤}} = \frac{٥^{٣} \times (٥^{٤})^{٣}}{٥^{٤} \times (٥^{٢})^{٤}} = \frac{٥^{٣} \times ٥^{١٢}}{٥^{٤} \times ٥^{٨}} = \frac{٥^{٣+١٢}}{٥^{٤+٨}} = \frac{٥^{١٥}}{٥^{١٢}} = ٥^{١٥-١٢} = ٥^{٣}$

مثال (٣ - ٢) ضع المقدار الآتي في أبسط صورة :

$$\frac{٨^{٢م+١}}{(٤^{م})^{م+١}} \div \frac{٤^{م+٢}}{(٤)^{م^{٢}}}$$

الحل

$$\frac{٨^{٢م+١}}{(٤^{م})^{م+١}} \div \frac{٤^{م+٢}}{(٤)^{م^{٢}}} = \frac{(٢^{٣})^{٢م+١}}{(٢^{٢م})^{م+١}} \times \frac{(٢^{٢})^{م^{٢}}}{(٢^{٢})^{م+٢}} = \frac{٢^{٦م+٣} \times ٢^{٢م^{٢}}}{٢^{٢م^{٢}+٢م} \times ٢^{٢م+٤}}$$

$$= ٢^{٦م+٣+٢م^{٢}-٢م^{٢}-٢م-٢م-٤} = ٢^{٢م-١}$$

تأمل ما يأتي :

$$\frac{أ^{٣}}{أ^{٥}} = \frac{\cancel{أ} \times \cancel{أ} \times \cancel{أ}}{\cancel{أ} \times \cancel{أ} \times \cancel{أ} \times أ \times أ} = \frac{١}{أ \times أ} = \frac{١}{أ^{٢}}$$

ولو طبقنا قانون قسمة القوى المتحدة الأساسات نجد أن : $\frac{أ^{٣}}{أ^{٥}} = أ^{٣-٥} = أ^{-٢}$

مما سبق نستنتج أن : $أ^{-٢} = \frac{١}{أ^{٢}}$ ، وهذا يوضح لنا معنى القوة ذات الأس السالب .

وبصورة عامة :

$\forall$ أ $\in$ ح* ، د $\in$ ص$^{+}$ ، فإن $أ^{-د} = \frac{١}{أ^{د}}$

نتائج :

١) $أ^{د} = \frac{١}{أ^{-د}}$ ، $\forall$ أ $\in$ ح*

٢) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-د} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{د}$ $\forall$ أ ، ب $\in$ ح* ، د $\in$ ص$^{+}$

أي أن : إذا انتقلت قوة العدد من البسط إلى المقام أو العكس فإن إشارة الأس تتغير .

مثال (٣ – ٣) اكتب ما يأتي بأس موجب :

١) $أ^{-٤}$ ٢) $(\sqrt{٢})^{-١}$ ٣) $-ب^{-٣}$ ، ب $\neq$ صفراً

الحـــل

١) $أ^{-٤} = \frac{١}{أ^{٤}}$ ٢) $(\sqrt{٢})^{-١} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) $-ب^{-٣} = -\frac{١}{ب^{٣}}$

مثال (٣ – ٤) ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

١) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٣} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٢}$ ٢) $\frac{س^{٢} \times ص^{-٤} \times ل^{-٤}}{ل \times (س ص)^{-٤}}$ ؛ ل ، س ، ص $\neq$ صفراً

الحــل

١) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٣} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣-٢} = \frac{٣}{٢}$.

٢) $\frac{س^{٢} \times ص^{-٤} \times ل^{-٤}}{ل \times (س\,ص)^{-٤}} = \frac{س^{٢}\,(س\,ص)^{٤}}{ل \times ص^{٤} \times ل^{٤}} = \frac{س^{٢} \times س^{٤} \times ص^{٤}}{ل^{٥} \times ص^{٤}} = \frac{س^{٦}}{ل^{٥}}$.

مثال (٣ – ٥) بسِّط ما يأتي :

١) $\left[\,(-٣)^{-٢} \times (-٣)^{-١}\,\right]^{٢}$.

٢) $\left(\frac{٥^{-١} \times ٥^{-١}}{٢^{٤} \times ٣^{٣}}\right)\left(\frac{٢^{-٢} \times ٣^{-١}}{٥^{٢} \times ٥^{٢}}\right)^{-١}$.

الحــل

١) $\left[(-٣)^{-٢} \times (-٣)^{-١}\right]^{٢} = (-٣)^{-٤} \times (-٣)^{-٢} = (-٣)^{-٤-٢} = (-٣)^{-٦} = \frac{١}{(-٣)^{٦}} = \frac{١}{٣^{٦}} = \frac{١}{٧٢٩}$.

٢) $\left(\frac{٥^{-١} \times ٥^{-١}}{٢^{٤} \times ٣^{٣}}\right) \times \left(\frac{٢^{-٢} \times ٣^{-١}}{٥^{٢} \times ٥^{٢}}\right)^{-١} = \frac{٥^{-٢}}{٢^{٤} \times ٣^{٣}} \times \frac{(٢^{-٢} \times ٣^{-١})^{-١}}{(٥^{٤})^{-١}}$

$= \frac{٥^{-٢} \times ٢^{٢} \times ٣^{١}}{٢^{٤} \times ٣^{٣} \times ٥^{-٤}} = ٥^{-٢+٤} \times ٢^{٢-٤} \times ٣^{١-٣} = ٥^{٢} \times ٢^{-٢} \times ٣^{-٢} = \frac{٢٥}{٢^{٢} \times ٣^{٢}} = \frac{٢٥}{٣٦}$.

مثال (٣ – ٦) اختصر لأبسط صورة :

$$\frac{٢^{ن+٣} + ١٢ \times ٢^{ن}}{٣ \times ٢^{ن+٣} - ٦٤ \times ٢^{ن-٤}} \,.$$

الحــل

$$\frac{٢^{ن+٣} + ١٢ \times ٢^{ن}}{٣ \times ٢^{ن+٣} - ٦٤ \times ٢^{ن-٤}} = \frac{٢^{ن+٣} + ٢^{٢} \times ٣ \times ٢^{ن}}{٣ \times ٢^{ن+٣} - ٢^{٦} \times ٢^{ن-٤}}$$

$$= \frac{٢^{ن+٣} + ٣ \times ٢^{ن+٢}}{٣ \times ٢^{ن+٣} - ٢^{ن+٢}} = \frac{٢^{ن+٢}\,(٢+٣)}{٢^{ن+٢}\,(٣ \times ٢ - ١)} = \frac{٥}{٥} = ١$$

تمارين ومسائل (٣ – ١)

[١] صوّب الأخطاء في إجابة كل مما يلي، (حيث المقامات لاتساوى صفراً) :

أ) $\text{س}^{٢} \times \text{س}^{٤} = \text{س}^{٨}$

ب) $(\text{ص}^{٢})^{٥} = \text{ص}^{٧}$

جـ) $\dfrac{\text{ب}^{٦}}{\text{ب}^{٢}} = \text{ب}^{٣}$

ء) $\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}} = \text{س}^{٤}$

هـ) $(٢\,\text{س})^{٤} = ٢\,\text{س}^{٤}$

و) $\left(\dfrac{٤}{٣}\right)^{٤} = \dfrac{٤}{٣^{٤}}$

[٢] بسِّط ما يلي : (حيث المقامات لاتساوى صفراً) :

أ) $\left(-\dfrac{١}{٢}\right)^{٤} \left(-\dfrac{١}{٢}\right)^{٣}$

ب) $(\text{ص}^{٤})^{٢\text{ن}}$

جـ) $-\left(\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٣}$

ء) $(\text{س}^{٣})^{٥} \times \text{س}^{٤}$

هـ) $(-٢\,\text{س}^{٢})^{٥}$

و) $\dfrac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}}$

ز) $(-٥\,\text{س}^{٣})\,(-٦\,\text{س}^{٥})$

ح) $\left(\dfrac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٣}\right)^{\text{ن}}$

ط) $(٢\text{أ}+١)^{٣}\,(٢\text{أ}+١)^{٧}$

ى) $\dfrac{٢\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{-٢}}{\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{-٣}}$

[٣] ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة ، (حيث المقامات لاتساوى صفراً):

أ) $\left(-\dfrac{١}{٢}\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{-٤}\right)^{-٣}$

ب) $\left(\dfrac{٢\,\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{-٤}}{\text{أ}^{-٣}\,\text{جـ}^{-٣}}\right)^{٢}$

جـ) $(١٢\,\text{ل}^{٣})^{٤} \div (٤\,\text{ل}^{٢})^{٥}$

ء) $\text{س}^{١٤}\,\text{ص}^{١٢} \div \text{س}^{٥}\,\text{ص}^{٥}$

هـ) $(\text{جـ}^{٣})^{٢} \times (\text{ب}\,\text{جـ}^{-١})^{٥} \times \left(\dfrac{\text{جـ}}{\text{ب}}\right)^{٤}$

و) $\left(\dfrac{\text{ب}^{-٢}}{\text{جـ}^{-٢}}\right)^{-٣} \times \text{جـ}^{١٢}$

ز) $(\sqrt{٢})^{-٢} \times (\sqrt{٢})^{-٥} \times (\sqrt{٢})^{٩}$

ح) $(٢\,\text{أ}\,\text{ب})^{٣} \div ٢\,\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٢}$

ط) $\left(\dfrac{٤\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٣}\,\text{ع}^{-٢}}{١٢\,\text{س}^{٥}\,\text{ص}^{-٢}\,\text{ع}^{٠}}\right)^{-٣}\,\text{س}$

[٤] بسِّط ما يأتي ، علماً بأن المقامات لاتساوى صفراً :

أ) $\frac{٢^{٤} \times ١٥^{٣} \times (-٥٤)}{(-٣)^{٢} \times ٢٥ \times ٦^{٣}}$ ب) $\frac{(-٢)^{٤} \times (-٥)^{٣} \times (-٣)^{٢}}{(-٦)^{٢} \times (-١٥)^{٣}}$

جـ) $\frac{٣^{-١}}{(-٢س + ١)^{٠}}$ ء) $(س ص)^{٠} - ٢^{-١}$ ، $س ص \neq ٠$

هـ) $(س^{٢} ص^{-٤})^{-٣} \times (س ص^{٣} ع^{٤})^{-٢}$ و) $\frac{س^{د} \times ص^{٢د+١}}{س^{د-٣} \; ص^{د-٤}}$

[٥] اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

أ) $\frac{٥^{د+٢} + ٥^{د+١}}{٥^{د} - ٥^{د+٢}}$ ب) $\frac{٦^{٤م-١} \times ٢٧^{٢م}}{٢^{م+١} \times ٨^{م-١} \times ٩^{م+٢}}$

جـ) $\frac{٢^{د+١} \times ٣^{س-٥} + ٢^{د-٢} \times ٣^{س-٤}}{٢^{د} \times ٣^{س-٣} + ٢^{د-٢} \times ٣^{س-٤}}$ ء) $\frac{٤^{٢د} + ٢^{٤د+٣}}{٥ \times ٢^{٤د} - ٤^{٢د+١}}$

[٦] ضع المقدار الآتي في أبسط صورة ، ثم أوجد قيمته عندما $م = ٢$

$$\frac{٩^{٢م+١}}{(٣^{م})^{م+١}} \div \frac{٣^{م+٤}}{(٣)^{م^{٢}}}$$

[٧] بسِّط ما يأتي ، ثم أوجد قيمة المقدار عندما $س = ١$

$$\frac{(٤^{س})^{٢} \times (٤)^{س+٢}}{(١٦)^{٢} \times (٢)^{٢س}}$$

[٨] أثبت أن :

$$\frac{٥^{م+٢} + ٥٠ \times ٥^{م}}{٢ \times ٥^{م+٢} - ٦٢٥ \times ٥^{م-٣}} = \frac{٥}{٣}$$

[٩] اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

أ) $\frac{أ^{-٢}}{ب^{-٢}} + \left(\frac{أ}{ب}\right)^{-٢}$ ، أ ، ب $\neq$ صفراً .

(١) $\frac{٢أ^{٢}}{ب^{٢}}$ (٢) صفراً

(٣) $\frac{٢ب^{٢}}{أ^{٢}}$ (٤) $\frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}$

ب) المقدار : $٢ (٢)^{س-١} + ٥ (٢)^{س} + ٢^{س+١} =$

١) $٢^{س}$ ٢) $٢^{س+١}$

٣) $٢^{س+٣}$ ٤) $٢^{س+٢}$

جـ) $\forall$ ا $\in$ ح* فإن $(ا^{٠})^{-١}$ يساوى :

١) كمية غير معرفة ٢) ١−

٣) صفراً ٤) ١

٣ : ٢ الجذور والأسس النسبية

الجذور النونية :

نعلم أنه للحصول على القوة الرابعة للعدد ٣ مثلاً نضرب العدد ٣ في نفسه ٤ مرات فنجد أن : $٣^{٤} = ٨١$ وإن العملية العكسية لذلك أي البحث عن عدد إذا ضرب في نفسه ٤ مرات يعطي ٨١ تسمى عملية «إيجاد الجذر» ونقول إن الجذر الرابع الموجب للعدد ٨١ هو ٣

وبصورة عامة :

تعريف (٣ : ١)

$\forall$ ا ، ب $\in$ ح و ن $\in$ ط ، ن >١ إذا كان $ب^{ن} = ا$ ، فإن ب = $\sqrt[ن]{ا}$

وتقرأ الجذر النوني للعدد ا

وسبق أن عرفت أن الجذر التربيعي للعدد ٤٩ هو ٧ ؛ حيث $(٧)^{٢} = ٤٩$

$\therefore$ العدد ٧ هو الجذر التربيعي للعدد ٤٩ ، ويرمز له بالرمز $\sqrt{٤٩}$

كما يدل الرمز $\sqrt[٣]{٢٧}$ على الجذر التكعيبي للعدد ٢٧ ، وقيمته ٣ ؛ حيث إن : $(٣)^{٣} = ٢٧$ ، وبذلك فإن $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ لأن $(-٣)^{٣} = -٢٧$ والرمز $\sqrt[٤]{١٦}$ يدل على الجذر الرابع للعدد ١٦ ، وقيمته ٢ ؛ حيث إن $(٢)^{٤} = ١٦$

أما $\sqrt[٤]{-١٦}$ فليس عدداً حقيقياً حيث لايوجد عدد حقيقي س بحيث $س^{٤} = -١٦$

تعريف (٣ : ٢)

١- ∀ ﺍ ∋ ح$^+$ ، ﻫ ∋ ط ، ﻫ عدداً زوجياً ﻫ ≤ ٢ فإن الجذر النوني الموجب للعدد ﺍ يرمز له بالرمز $\sqrt[ﻫ]{ﺍ}$ ، وهو عدد حقيقي غير سالب يساوي ب حيث : ب^{ﻫ} = ﺍ .

٢- ∀ ﺍ ∋ ح ، ﻫ ∋ ط ، ﻫ عدداً فردياً ﻫ > ٢ فإن الجذر النوني للعدد ﺍ يرمز له بالرمز $\sqrt[ﻫ]{ﺍ}$ وهو عدد حقيقي ب ؛ حيث : ب^{ﻫ} = ﺍ .

في التعبير $\sqrt[ﻫ]{ﺍ}$ نسمي ﺍ « المجذور » ، ﻫ « دليل الجذر » .

ملاحظة : في حالة الجذر التربيعي فقط يستغنى عن كتابة دليل الجذر فنكتب : $\sqrt[٢]{٤٩} = \sqrt{٤٩} = ٧$

مثال (٣ - ٧) أوجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\sqrt{١٦}$ ٢) $\sqrt{-٨١}$ ٣) $\sqrt[٣]{١٢٥}$

٤) $\sqrt[٤]{٦٢٥}$ ٥) $\sqrt[٤]{-٢٤٣}$ ٦) $\sqrt[٥]{-٢٤٣}$

الحـــل

١) العدد ١٦ > ٠ ، وحيث إن $(٤)^٢ = ١٦$ فإن $\sqrt{١٦} = ٤$

٢) العدد -٨١ < ٠ ، وعليه فإن $\sqrt{-٨١} \notin$ ح . (لايوجد عدد حقيقي مربعه سالب) .

٣) $\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$ ؛ لأن $٥^٣ = ١٢٥$

٤) $\sqrt[٤]{٦٢٥} = ٥$ ؛ لأن $٥^٤ = ٦٢٥$

٥) $\sqrt[٤]{-٢٤٣} \notin$ ح (لايوجد عدد حقيقي مرفوع لأس زوجي يساوى قيمة سالبة) .

٦) $\sqrt[٥]{-٢٤٣} = -٣$ ؛ لأن $(-٣)^٥ = -٢٤٣$

الجذور الصماء : هي الجذور التي لايمكن كتابتها بصورة عدد نسبي ، فمثلاً :

$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt[٤]{٧}$ ، $\sqrt[٣]{-٤}$

الأسس النسبية :

تأمل المعادلة : $أ^{\frac{١}{٣}} = ب$ .... (١)

عند رفع طرفي المعادلة (١) إلى القوة الثالثة نحصل على : $\left(أ^{\frac{١}{٣}}\right)^{٣} = ب^{٣}$

وباستخدام خواص القوى نجد أن : $أ^{\frac{١}{٣} \times ٣} = ب^{٣}$ $\therefore$ $أ = ب^{٣}$

وحيث إن $ب^{٣} = أ$ ، فإن الجذر التكعيبي هو $ب = \sqrt[٣]{أ}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) نحصل على $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$

تعريف (٣ : ٣)

$\forall$ أ $\in$ ح ، ن $\in$ ط ، ن > ١ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$. حيث $\sqrt[ن]{أ} \in$ ح .

مثال (٣ – ٨) احسب كلاً مما يأتي :

١) $٣٦^{\frac{١}{٢}}$ ٢) $١٦^{\frac{١}{٤}}$ ٣) $٨^{\frac{١}{٣}}$

٤) $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ ٥) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

الحـــل

١) $٣٦^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٣٦} = ٦$ ٢) $١٦^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$

٣) $٨^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$ ٤) $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

٥) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

والآن كيف يمكننا أن نعبر عن العدد $أ^{\frac{م}{ن}}$ ؛ حيث م ، ن أعداد صحيحة موجبة ، أ عدد حقيقي والجذر النوني للعدد أ أيضاً عدد حقيقي .

قبل أن نعبر عن العدد $أ^{\frac{م}{ن}}$ سوف نضع شرطاً على الكسر $\frac{م}{ن}$ هو $\frac{م}{ن}$ يكتب في أبسط صورة .

أي أن م ، ن عددان (العامل المشترك الوحيد بينهما هو الواحد) كذلك نستطيع أن نكتب الكسر $\frac{م}{ن}$ كالآتي : $\frac{م}{ن} = \frac{١}{ن} \cdot م$.

تعريف (٣ : ٤)

$\forall$ ا $\in$ ح ، م ، ن $\in$ ص$^+$ ، وكان $\sqrt[ن]{ا} \in$ ح فإن :

$ا^{\frac{م}{ن}} = (ا^{\frac{١}{ن}})^م$ أو $ا^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{ا^م}$

أي أن كل قوة أسها كسر يمكن النظر إليها على أنها جذراً للعدد المجذور حيث بسط الأس الكسري هو أس العدد المجذور ومقام الأس الكسري هو دليل الجذر .

ملاحظة : لاحظ أنه يمكن كتابة الكسر :

$\frac{م}{ن} = \frac{١}{ن} \cdot م = م \cdot \frac{١}{ن}$. فإن $(ا^{\frac{١}{ن}})^م = (ا^م)^{\frac{١}{ن}}$ ويمكن كتابة العدد $ا^{\frac{م}{ن}}$ بالصورة $(\sqrt[ن]{ا})^م = \sqrt[ن]{ا^م}$.

مثال (٣ – ٩) عبّر عما يلي بصورة جذرية ، حيث المتغيرات أعداد حقيقية غير سالبة :

١) $ص^{\frac{٣}{٤}}$ ٢) $ا^{\frac{٢}{٣}}$ ٣) $ب^{\frac{٤}{٥}}$

الحـــل

١) $ص^{\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{ص})^٣$ أو $\sqrt[٤]{ص^٣}$

٢) $ا^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{ا})^٢$ أو $\sqrt[٣]{ا^٢}$

٣) $ب^{\frac{٤}{٥}} = (\sqrt[٥]{ب})^٤$ أو $\sqrt[٥]{ب^٤}$

مثال (٣ – ١٠) عبّر عما يلي بصورة جذرية ، وبسّط ذلك – إن أمكن – :

١) $٢٧^{\frac{٢}{٣}}$ ٢) $(-٨)^{\frac{٢}{٣}}$ ٣) $-٨^{\frac{٢}{٣}}$ ٤) $(٢٥)^{\frac{٣}{٢}}$

الحـــل

١) $٢٧^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٢٧})^٢ = (٣)^٢ = ٩$ أو $٢٧^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧^٢} = \sqrt[٣]{٧٢٩} = ٩$

٢) $(-٨)^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{-٨})^٢ = (-٢)^٢ = ٤$

٣) $-٨^{\frac{٢}{٣}} = -(\sqrt[٣]{٨})^٢ = -(٢)^٢ = -٤$

٤) $٢٥^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{٢٥})^٣ = ٥^٣ = ١٢٥$

لاحظ أنه باستخدام القوى الصحيحة ومفهوم $\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ يمكن التوصل إلى النتيجة التالية .

نتيجة : $\forall\ \text{أ} \in \text{ح}^*$ ، م ، $\text{ن} \in \text{ص}^+$ إذا كان $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} \in \text{ح}$ فإن : $\text{أ}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \dfrac{1}{\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}$.

فمثلاً : $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{16})^{3}} = \dfrac{1}{2^{3}} = \dfrac{1}{8}$.

في تعريفنا السابق الخاص بالأسس النسبية اشترطنا أن يكون م ، ن عددين أوليين فيما بينهما . المثال الآتي يوضّح ماذا يحدث إذا كان م ، ن لهما عامل مشترك ٢ والمجذور عدد سالب .

لنأخذ التعبير $((-4)^{2})^{\frac{1}{4}}$: فإن $[(-4)^{2}]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

كذلك $((-4)^{2})^{\frac{1}{4}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \text{ح}$

إذن اعتماداً على الطريقة التي نستخدمها، هناك إمكانية الحصول على نتيجتين مختلفتين ،ولهذا السبب نعطي التعريف التالي :

تعريف (٣ : ٥)

إذا كان $\text{أ} < 0$ ، م ، $\text{ن} \in \text{ص}^+$ **زوجيين فإن** $(\text{أ}^{\text{م}})^{\frac{1}{\text{ن}}} = |\text{أ}|^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$.

وعلى هذا فإن $((-4)^{2})^{\frac{1}{4}} = |-4|^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

فإذا كانت م = ن (زوجي) فإن التعريف يصبح $(\text{أ}^{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}} = |\text{أ}|^{\frac{\text{ن}}{\text{ن}}} = |\text{أ}|^{1} = |\text{أ}|$

أو $(\text{أ}^{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{ن}}} = |\text{أ}|$ ، فإذا كانت $\text{ن} = 2$ فإن $(\text{أ}^{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{أ}^{2}} = |\text{أ}|$ ، وبصورة عامة نعطي التعريف التالي :

تعريف (٣ : ٦)

$\forall\ \text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}$ **؛حيث** $\text{ن} \geq 2$ **فإن :**

$$(\text{أ}^{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{ن}}} = \begin{cases} |\text{أ}| & \text{إذا كانت ن عدداً زوجياً} \\ \text{أ} & \text{إذا كانت ن عدداً فردياً} \end{cases}$$

مثال (٣ – ١١) بسّط ما يأتي :

١) $\text{ب}^{\frac{٥}{٥}}$ ٢) $\left((-٢)^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}$ ٣) $\sqrt[٣]{-٨}$

٤) $\sqrt{(\text{أ}+\text{ب})^{٢}}$ ٥) $\sqrt[٤]{٦٢٥\,\text{ص}^{٤}}$

الحل

١) $\text{ب}^{\frac{٥}{٥}} = \sqrt[٥]{\text{ب}^{٥}} = \text{ب}$ ٢) $\left((-٢)^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{(-٢)^{٢}} = |-٢| = ٢$

٣) $\sqrt[٣]{-٨} = \sqrt[٣]{(-٢)^{٣}} = -٢$ ٤) $\sqrt{(\text{أ}+\text{ب})^{٢}} = |\text{أ}+\text{ب}|$

٥) $\sqrt[٤]{٦٢٥\,\text{ص}^{٤}} = \sqrt[٤]{٥^{٤}\text{ص}^{٤}} = ٥\,|\text{ص}|$

خلاصة :

إذا كان أ ، ب $\in$ ح ، ك ، ل $\in$ د ، (د مجموعة الأعداد النسبية) فإن :

١) $\text{أ}^{\text{ك}} \times \text{أ}^{\text{ل}} = \text{أ}^{\text{ك}+\text{ل}}$ ٢) $\dfrac{\text{أ}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ل}}} = \text{أ}^{\text{ك}-\text{ل}}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

٣) $(\text{أ}^{\text{ك}})^{\text{ل}} = \text{أ}^{\text{ك}\,\text{ل}}$ ٤) $(\text{أ}\,\text{ب})^{\text{ك}} = \text{أ}^{\text{ك}} \times \text{ب}^{\text{ك}}$

٥) $\left(\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ك}} = \dfrac{\text{أ}^{\text{ك}}}{\text{ب}^{\text{ك}}}$ ، $\text{ب} \neq ٠$

مثال (٣ – ١٢) اختصر كلاً مما يأتي : « علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة » :

١) $٤\,\text{س}^{\frac{٣}{٤}} \times ٣\,\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} \times \text{س} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ ٢) $(\text{أ}^{٦}\text{ب}^{١٠})^{\frac{١}{٢}}\,(\text{أ}^{-٣}\text{ب}^{-٦})^{\frac{١}{٣}}$

٣) $\sqrt[٥]{(٢\,\text{س}+\text{ص})^{٥}}\,(٢\,\text{س}+\text{ص})^{\frac{١}{٢}}$ ٤) $\dfrac{\sqrt[٥]{(٣٢)^{٣}} \times (١٦)^{-\frac{٣}{٤}}}{(٦٤)^{\frac{١}{٦}}}$

٥) $\dfrac{\text{ص}^{\frac{١}{٣}}}{\text{ص}^{\frac{١}{٤}}}$

الحل

١) $٤\,\text{س}^{\frac{٣}{٤}} \times ٣\,\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} \times \text{س} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}} = ١٢\,\text{س}^{\frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٤} + ١ + \frac{١}{٢}} = ١٢\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

٢) $(\text{أ}^{٦}\,\text{ب}^{١٠})^{\frac{١}{٢}} \times (\text{أ}^{-٣}\,\text{ب}^{-٦})^{\frac{١}{٣}} = (\text{أ}^{٦})^{\frac{١}{٢}} \times (\text{ب}^{١٠})^{\frac{١}{٢}} \times (\text{أ}^{-٣})^{\frac{١}{٣}} \times (\text{ب}^{-٦})^{\frac{١}{٣}}$

$= \text{أ}^{٣} \times \text{ب}^{٥} \times \text{أ}^{-١} \times \text{ب}^{-٢} = \text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٣}$.

٣) $\sqrt{(٢\text{س}+\text{ص})^{٥}}\ (٢\text{س}+\text{ص})^{\frac{١}{٢}} = (٢\text{س}+\text{ص})^{\frac{٥}{٢}}\ (٢\text{س}+\text{ص})^{\frac{١}{٢}}$

$= (٢\text{س}+\text{ص})^{\frac{٥}{٢}+\frac{١}{٢}} = (٢\text{س}+\text{ص})^{٣}$.

٤) $\dfrac{\sqrt[٥]{(٣٢)^{٣}} \times (١٦)^{-\frac{٣}{٤}}}{(٦٤)^{\frac{١}{٦}}} = \dfrac{(٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} \times (٢^{٤})^{-\frac{٣}{٤}}}{(٢^{٦})^{\frac{١}{٦}}} = \dfrac{٢^{٣} \times ٢^{-٣}}{٢} = \dfrac{٢^{٠}}{٢} = \dfrac{١}{٢}$.

٥) $\dfrac{\text{ص}^{\frac{١}{٣}}}{\text{ص}^{\frac{١}{٤}}} = \text{ص}^{\frac{١}{٣}-\frac{١}{٤}} = \text{ص}^{\frac{٤-٣}{١٢}} = \text{ص}^{\frac{١}{١٢}}$.

تمارين ومسائل (٣ – ٢)

[١] أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي (إن أمكن):

أ) $\sqrt[٣]{٢١٦}$.　　ب) $\sqrt[٤]{٢٥٦}$.

جـ) $\sqrt{٠{,}٠١٦٩}$.　　ء) $\sqrt[٣]{-٢١٦}$.

هـ) $\sqrt{-٢١٦}$.　　و) $\sqrt[٦]{-٦٤}$.

[٢] اكتب الجذور التربيعية في ح للأعداد : ٤٠٠ ، ١٤٤ .

[٣] اكتب الجذر الرابع في ح للأعداد : ٢٥٦ ، ١٠٠٠٠ ، ٤٠٩٦ ، ١٢٩٦ .

[٤] اكتب ما يأتي على الصورة الجذرية ، وبسّط ذلك – إن أمكن – علماً بأن المتغيرات جميعها أعداد حقيقية موجبة والمقامات لاتساوى صفراً :

أ) $٦^{\frac{١}{٣}}$.　　ب) $٢^{\frac{١}{٢}}$.　　جـ) $\text{س}^{\frac{١}{٣}}$.

ء) $١٦^{\frac{٣}{٤}}$.　　هـ) $(٤٩)^{-\frac{١}{٢}}$.　　و) $(-٢٧)^{-\frac{١}{٣}}$.

ز) $(-٣٢)^{-\frac{٣}{٥}}$.　　ح) $(٨١)^{\frac{٣}{٤}}$.　　ط) $(٦٤)^{\frac{١}{٣}}$.

[٥] أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ) $(٣٢)^{\frac{٤}{٣}}$ ب) $(٦٤)^{-\frac{١}{٢}}$

جـ) $(٠,٠٢٧)^{\frac{١}{٤}}$ ء) $\sqrt{\sqrt[٣]{٨}}$

هـ) $\left((-٢)^{٤}\right)$ و) $١٦^{-\frac{٣}{٤}}$

[٦] بسِّط كلاً مما يلي : (علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة)

أ) $\left(س^{\frac{٤}{٣}}\right)^{\frac{١}{٢}}$ ب) $\frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{ص^{\frac{١}{٣}}}$

جـ) $\left(٢^{٣} أ^{١٥} ب^{٢١}\right)^{\frac{١}{٣}}$ ء) $\frac{س^{-\frac{١}{٤}} ص^{\frac{٢}{٥}}}{س^{\frac{٣}{٤}} ص^{-\frac{٤}{٥}}}$

هـ) $\sqrt{س^{٦}}$ و) $\sqrt{(أ - ب)^{٢}}$

ز) $\left(١٦ ب^{٤}\right)^{\frac{٣}{٤}}$ ح) $\frac{أ^{-\frac{٢}{٣}} ب^{\frac{١}{٢}}}{أ^{-\frac{١}{٣}} ب^{\frac{٣}{٤}}}$

ط) $\frac{س^{-\frac{١}{٢}} ص^{\frac{٥}{٤}}}{س^{-\frac{٢}{٣}} ص^{\frac{٣}{٤}}}$ ى) $\frac{أ^{٢} أ^{\frac{١}{٣}}}{أ^{\frac{١}{٢}}}$

[٧] اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

أ) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٤} \times \left(\frac{-٢٧}{٦٤}\right)^{٣} \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{-\frac{١}{٢}}$

ب) $\frac{٩^{\frac{١}{٤}} \times (٨١)^{\frac{٣}{٤}}}{(٢٧)^{\frac{١}{٢}} \times (٣)^{\frac{١}{٤}}}$ جـ) $\frac{\left(\frac{٩}{١٦}\right)^{\frac{٣}{٢}} \times \left(\frac{٢٧}{٦٤}\right)^{-\frac{١}{٣}}}{\frac{٣}{٤}}$.

ء) $\frac{(٢١٦)^{-\frac{١}{٣}}}{(٩)^{-\frac{١}{٢}}}$ هـ) $\sqrt{\sqrt[٣]{٦٤}}$.

[٨] أثبت ما يأتي :

أ) $\left(\frac{\text{أ}^{\text{م}^{٢}}}{\text{أ}^{\text{ن}^{٢}}}\right)^{\frac{١}{\text{م}-\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$ حيث م ، ن ∈ ن ، م ≠ ن ، أ ≠ صفر .

ب) $\frac{٦ \times (٣^{\text{م}})^{٢} - ٣^{٢\text{م}}}{٩ \times (٣^{٢})^{\text{م}+١}} = \frac{٥}{٣^{٤}} = \frac{٥}{٨١}$ م ∈ ن .

جـ) $\frac{٤ \times ٢^{\text{م}+١} - ٢^{\text{م}}}{٢^{\text{م}+٢} \times ٢} = \frac{٧}{٨}$ ، .

٣ : ٣ تبسيط الجذور

القوانين الأساسية للجذور :

إذا كان $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}} \in$ ح ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ن ≥ ٢ **فإن :**

١) $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ} \times \text{ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \times \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$.

٢) $\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}}$ ، ب ≠ ٠ .

٣) $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} = \sqrt[\text{ن}\text{هـ}]{\text{أ}^{\text{م}\text{هـ}}}$ حيث أ ∈ ح$^{+}$ ، م ∈ ص ، هـ ، ن ∈ ص$^{+}$.

تكون الجذور في أبسط صورة إذا حققت الشروط الآتية :

١) جميع عوامل المجذور ذات أس أقل من دليل الجذر . ٢) لاتوجد جذور في المقام .

٣) دليل الجذر هو أصغر عدد صحيح موجب ممكن .

ولتبسيط الجذر نحلّل المجذور إلى عوامل تتناسب مع دليل الجذر ، ثم نحقّق الشروط السابقة من خلال استخدام القوانين الأساسية للجذور .

مثال (٣ – ١٣) بسّط ما يأتي ، علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية غير سالبة :

١) $\sqrt{١٨}$. ٢) $\sqrt[٣]{٣٢}$. ٣) $\sqrt[٣]{\text{أ}^{٥}}$. ٤) $\sqrt[٥]{\text{ب}^{١٠}}$.

الحل

١) $\sqrt{١٨} = \sqrt{٩ \times ٢} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$.

٢) $\sqrt[٣]{٣٢} = \sqrt[٣]{٨ \times ٤} = \sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{٤} = ٢\sqrt[٣]{٤}$.

٣) $\sqrt[٣]{\text{أ}^{٥}} = (\text{أ}^{٥})^{\frac{١}{٣}} = \text{أ}^{\frac{٥}{٣}}$

٤) $\sqrt[٥]{\text{ب}^{١٠}} = (\text{ب}^{١٠})^{\frac{١}{٥}} = \text{ب}^{٢}$.

مثال (٣ – ١٤) بسّط ما يأتي باعتبار أن المتغيرات لاتساوي الصفر :

١) $\sqrt{٢}\ \sqrt{١٠}$.

٢) $\sqrt[٣]{٩\text{أ}^{٢}\text{ب}}\ \sqrt[٣]{٩\text{أب}}$.

٣) $\sqrt{\frac{١٦}{٥٠}}$.

٤) $\dfrac{\sqrt[٤]{١٦\text{ل}^{٣}\text{م}^{٣}} \times \sqrt[٤]{٢\text{ل}^{٣}}}{\sqrt[٤]{٦٤\text{ل}^{٥}\text{م}^{٤}}}$.

الحل

١) $\sqrt{٢}\ \sqrt{١٠} = \sqrt{٢ \times ١٠} = \sqrt{٢٠} = \sqrt{٤ \times ٥} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$.

٢) $\sqrt[٣]{٩\text{أ}^{٢}\text{ب}}\ \sqrt[٣]{٩\text{أب}} = \sqrt[٣]{٩\text{أ}^{٢}\text{ب} \times ٩\text{أب}} = \sqrt[٣]{٨١\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٢}} = \sqrt[٣]{٢٧ \times ٣\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٢}}$

$= \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{\text{أ}^{٣}} \times \sqrt[٣]{\text{ب}^{٢}} = ٣\sqrt[٣]{٣} \times \text{أ} \times \sqrt[٣]{\text{ب}^{٢}} = ٣\text{أ}\sqrt[٣]{٣\text{ب}^{٢}}$.

٣) $\sqrt{\frac{١٦}{٥٠}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٥٠}} = \frac{\sqrt{٤^{٢}}}{\sqrt{٢٥ \times ٢}} = \frac{٤}{\sqrt{٥^{٢}} \times \sqrt{٢}} = \frac{٤}{٥\sqrt{٢}}$.

ولكي نتخلص من الجذر في المقام نضرب كلا من البسط والمقام في $\sqrt{٢}$.

$\therefore \sqrt{\frac{١٦}{٥٠}} = \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{٥ \times ٢} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٥}$.

٤) $\dfrac{\sqrt[٤]{١٦\text{ل}^{٣}\text{م}^{٣}} \times \sqrt[٤]{٢\text{ل}^{٣}}}{\sqrt[٤]{٦٤\text{ل}^{٥}\text{م}^{٤}}} = \sqrt[٤]{\dfrac{١٦\text{ل}^{٣}\text{م}^{٣} \times ٢\text{ل}^{٣}}{٦٤\text{ل}^{٥}\text{م}^{٤}}} = \sqrt[٤]{\dfrac{٣٢\text{ل}^{٦}\text{م}^{٣}}{٦٤\text{ل}^{٥}\text{م}^{٤}}} = \sqrt[٤]{\dfrac{\text{ل}}{٢\text{م}}}$

$= \dfrac{\sqrt[٤]{\text{ل}}}{\sqrt[٤]{٢\text{م}}} \times \dfrac{\sqrt[٤]{٢^{٣}\text{م}^{٣}}}{\sqrt[٤]{٢^{٣}\text{م}^{٣}}} = \dfrac{\sqrt[٤]{٢^{٣}\text{ل}\,\text{م}^{٣}}}{\sqrt[٤]{٢^{٤}\text{م}^{٤}}} = \dfrac{\sqrt[٤]{٢^{٣}\text{ل}\,\text{م}^{٣}}}{٢\text{م}}$.

تمارين ومسائل (٣-٣)

[١] بسّط كلاً مما يلي : حيث المتغيرات جميعها أعداد حقيقية موجبة :

أ) $\sqrt[٣]{\frac{٨}{٢٧}}$.　　　　ب) $\sqrt{\frac{\text{أ}^{٦}}{٩}}$.

جـ) $\sqrt{٢٥\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٩}}$.　　　　ء) $\sqrt{٥٠\,\text{أ}^{٦}\,\text{ب جـ}^{٩}}$.

هـ) $\sqrt[٥]{٣٢\,\text{أ}^{١٠}\,\text{ب}^{٤}\,\text{جـ}^{١٢}}$.　　　　و) $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} + ٩}$.

ز) $\sqrt[٥]{\frac{٣٢\,\text{أ}^{٣}}{\text{ب}^{٢٠}}}$.　　　　ح) $\sqrt[٧]{\frac{\text{أ}^{٢١}}{\text{ب}^{٧}\,\text{جـ}^{١٤}}}$

[٢] ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة باعتبار أن المتغيرات لاتساوي الصفر :

أ) $\sqrt{١٢}\,\sqrt{١٢}$.　　　　ب) $\sqrt[٣]{٦}\,\sqrt[٣]{١٢}$.

جـ) $\sqrt[٥]{٨\,\text{س}^{٤}}\,\sqrt[٥]{٤\,\text{س}^{٣}}$.　　　　ء) $\sqrt[٣]{٥\,\text{أ}^{٢}\,\text{ب}}\,\sqrt[٣]{٧٥\,\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٢}}$.

هـ) $\sqrt[٨]{\text{ص}^{١٤}}$.　　　　و) $\sqrt[٣]{١٠}\,\sqrt[٣]{٤}$.

ز) $\sqrt[٦]{٨\,\text{أ}^{٣}}$.　　　　ح) $\sqrt[٩]{\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٦}}$.

[٣] بسّط ما يأتي : حيث المتغيرات أعداد حقيقية غير سالبة لاتساوي صفراً :

أ) $\frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}}$.　　　　ب) $\frac{١}{\sqrt[٥]{\text{أ}^{٢}\,\text{ب}}}$.　　　　جـ) $\frac{\text{س ص}}{\sqrt[٣]{\text{س ص}^{٢}}}$.

ء) $\sqrt[٧]{\frac{١}{١٦\,\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٣}}}$　　　　هـ) $\sqrt{\frac{٢\,\text{أ}}{\text{ب جـ}}}$.　　　　و) $\sqrt[٣]{\frac{٣\,\text{س}}{\text{أ}^{٧}}} \times \sqrt[٣]{\frac{\text{أ}}{٨١\,\text{س}^{٤}}}$.

٣ : ٤ جمع وطرح الجذور

تجمع الجذور المتشابهة وتطرح بالطريقة المتبعة في جمع وطرح الحدود الجبرية المتشابهة .
والجذور المتشابهة هي التي تتساوى في الأدلة والمقدار المجذور بعد تبسيطه؛ فمثلاً :

١) $٢\sqrt{٧}$ ، $٣\sqrt{٧}$ ، $٦\sqrt{٧}$.   ٢) $\sqrt[٤]{٣}$ ، $-٥\sqrt[٤]{٣}$ ، $٢\sqrt[٤]{٣}$

٣) $\sqrt[٣]{٧}$ ، $\sqrt[٣]{٥٦}$

فجميعها جذور متشابهة . لماذا ؟

أما :

١) $\sqrt[٣]{١١}$ ، $\sqrt[٣]{١٥}$ ، $\sqrt[٣]{٧}$ ٢) $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٤]{١٥}$ ، $\sqrt[٥]{١٢٥}$

٣) $\sqrt[٤]{٢}$ ، $\sqrt[٧]{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٢}$ ، فجميعها جذور غير متشابهة . لماذا ؟

مثال (٣ – ١٥) احسب كلاً مما يأتي :

١) $٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$ ٢) $\sqrt{٥٠} - \sqrt{٤٥} + \sqrt{٥٠٠} - \sqrt{٣٢}$

الحــل

١) $٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} = ٥\sqrt{٥}$

٢) $\sqrt{٥٠} - \sqrt{٤٥} + \sqrt{٥٠٠} - \sqrt{٣٢} = ٥\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٥} + ١٠\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٢} = \sqrt{٢} + ٧\sqrt{٥}$

مثال (٣ – ١٦) اختصر ما يلي : بافتراض أن المتغيرات أعداد حقيقية غير سالبة :

١) $\text{ب}\sqrt[٣]{\text{جـ}^{٣}\text{ء}^{٤}} + \text{جـ}\sqrt[٣]{\text{ب}^{٣}\text{ء}^{٤}} - \text{ء}\sqrt[٣]{\text{ب}^{٣}\text{جـ}^{٣}\text{ء}}$

٢) $٨\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+\text{ص}} - ٢\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+\text{ص}} + ٣\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+\text{ص}}$

الحــل

١) $\text{ب}\sqrt[٣]{\text{جـ}^{٣}\text{ء}^{٤}} + \text{جـ}\sqrt[٣]{\text{ب}^{٣}\text{ء}^{٤}} - \text{ء}\sqrt[٣]{\text{ب}^{٣}\text{جـ}^{٣}\text{ء}}$

$= \text{ب جـ ء}\sqrt[٣]{\text{ء}} + \text{جـ ب ء}\sqrt[٣]{\text{ء}} - \text{ب جـ ء}\sqrt[٣]{\text{ء}} = \text{ب جـ ء}\sqrt[٣]{\text{ء}}$

ملحوظة : $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ} \pm \text{ب}} \neq \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \pm \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$

٢ – $8\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^2+\text{ص}} - 2\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^2+\text{ص}} + 3\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^2+\text{ص}} = 9\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^2+\text{ص}}$.

مثال (٣ – ١٧) اختصر ما يأتي :

أ) $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{27}$ ب) $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}}$

الحل

أ) $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{27} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 3\right)\sqrt{3} = \frac{1+2-9}{3}\sqrt{3}$

$= -\frac{6}{3}\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

ب) $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}}{10}$

تمارين ومسائل (٣-٤)

[١] أوجد نواتج كلٍّ مما يأتي ، حيث المتغيرات أعداد حقيقية موجبة :

ا) $٣\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣}$.

ب) $٥\sqrt{٥} + ٧\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٥}$.

جـ) $\sqrt{١٠} + ٤\sqrt{١٠} - ٦\sqrt{١٠}$.

د) $٥\sqrt[٣]{٤} + ٢\sqrt[٣]{٤}$.

هـ) $١٠\sqrt[٤]{٣} + \sqrt[٤]{٣} - ٥\sqrt[٤]{٣}$.

و) $\sqrt[٥]{١٢} - \sqrt[٥]{١٦} + ٤\sqrt[٥]{١٢}$.

ز) $٢\sqrt{٣\text{س}} - ٤\sqrt{٣\text{س}} + ٢\sqrt{٣\text{س}}$.

ح) $\sqrt[٣]{٨١} + ٢\sqrt[٣]{٢٥٠}$.

ط) $\sqrt{٣٢\text{س}} - \sqrt{١٨\text{س}}$.

ي) $٦\sqrt{٤\text{ا}^٢\text{ب}} + ٥\sqrt{٢٥\text{ا}^٢\text{ب}}$.

[٢] ضع المقادير الآتية في أبسط صورة على اعتبار أن المتغيرات أعداد حقيقية غير سالبة :

ا) $٧\sqrt{٣٦\text{ا}^٢\text{ب}} + ٤\sqrt{٤٩\text{ا}^٢\text{ب}} - ١١\sqrt{٢\text{ب}}$.

ب) $-٥\sqrt[٣]{٢٧\text{ا}^٢} - ٤\sqrt[٣]{٨\text{ا}^٢}$.

جـ) $٣\text{ا}^٢\sqrt{\text{اب}} - \text{ا}\sqrt{\text{ا}^٣\text{ب}}$.

د) $٣\text{ا}^٢\text{ب}\sqrt{\text{اب}^٣} - \text{اب}^٢\sqrt{\text{اب}}$.

هـ) $\frac{١}{٥} + \frac{٢}{\sqrt{٥}}$.

و) $\frac{٤}{٩} - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$.

ز) $\frac{٢}{\sqrt{٥}} + \frac{٣}{\sqrt{٦}}$.

ح) $\frac{٦}{\sqrt{٥}} + \frac{٢}{\sqrt{١٠}}$.

[٣] بسّط ما يأتي : حيث المتغيرات أعداد حقيقية موجبة لاتساوي الصفر :

ا) $\frac{٤}{\sqrt{١٢}} - \frac{١}{\sqrt{٤٨}}$.

ب) $\frac{٧}{\sqrt{٤\text{س}}} - \frac{٣}{\sqrt{\text{س}}}$.

جـ) $\frac{٥}{\sqrt{\text{س ص}}} - \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}$.

د) $\frac{٢}{\sqrt{\text{ا}}} + \frac{٣}{\sqrt{\text{اب}}}$.

هـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٨}} - \frac{٤}{\sqrt{٥٠}}$.

و) $\frac{٥}{\sqrt{٣}} + \frac{٢}{\sqrt{٦}}$.

٣ : ٥ ضرب وقسمة الجذور

أولاً – ضرب الجذور :

عند ضرب الجذور المتحدة الدليل نستخدم القانون : $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \times \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ ب}}$.

فمثلاً : $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{42}$ ، وعند ضرب الجذور المختلفة الدليل نوحد أدلتها أولاً

باستخدام القانون : $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} = \sqrt[\text{ن هـ}]{\text{أ}^{\text{م هـ}}}$ ، م $\in$ ص ، هـ ، ن $\in$ ص$^{+}$.

فمثلاً : $\sqrt[3]{5} \times \sqrt{3} = \sqrt[3\times2]{5^{2}} \times \sqrt[2\times3]{3^{3}} = \sqrt[6]{25} \times \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{675}$.

ضرب المقادير الجذرية : كل كمية تحوي جذرين غير متشابهين أو أكثر تسمى مقداراً جذرياً ، وطريقة ضرب المقادير الجذرية تشبه طريقة ضرب المقادير الجبرية .

مثال (٣ – ١٨) أوجد ما يلي ، علماً بأن المتغيرات تمثل أعداداً حقيقية غير سالبة :

١) $3\sqrt{5}\,(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

٢) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$.

٣) $\sqrt[3]{\text{أ}}\,(\sqrt[3]{3\text{أ}} + \sqrt[3]{9\text{أ}})$.

٤) $(\sqrt{2\text{س}} + \sqrt{\text{س ص}})(\sqrt{2\text{س}} - 1)$.

الحـــل

١) $3\sqrt{5}\,(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 3\times2\sqrt{5\times5} - 3\sqrt{5\times2} = 6\sqrt{25} - 3\sqrt{10}$

$= 30 - 3\sqrt{10}$.

٢) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$= 3\sqrt{5}\times\sqrt{2} - \sqrt{5}\sqrt{5} + 2\times3\sqrt{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 3\sqrt{10} - 5 + 6\sqrt{6} - 2\sqrt{15}$.

٣) $\sqrt[3]{\text{أ}}\,(\sqrt[3]{3\text{أ}} + \sqrt[3]{9\text{أ}}) = \sqrt[3]{\text{أ}} \times \sqrt[3]{3\text{أ}} + \sqrt[3]{\text{أ}} \times \sqrt[3]{9\text{أ}} = \sqrt[3]{3\text{أ}^{2}} + \sqrt[3]{9\text{أ}^{2}}$.

٤) $(\sqrt{2\text{س}} + \sqrt{\text{س ص}})(\sqrt{2\text{س}} - 1)$

$= \sqrt{2\text{س}} \times \sqrt{2\text{س}} - \sqrt{2\text{س}} + \sqrt{\text{س ص}}\,\sqrt{2\text{س}} - \sqrt{\text{س ص}}$

$= 2\text{س} - \sqrt{2\text{س}} + \sqrt{2\text{س}^{2}\text{ص}} - \sqrt{\text{س ص}} = 2\text{س} - \sqrt{2\text{س}} + \text{س}\sqrt{2\text{ص}} - \sqrt{\text{س ص}}$.

ثانياً : قسمة الجذور :

عند تقسيم جذر عدد على جذر عدد آخر نطبق القانون: $\frac{\sqrt[د]{أ}}{\sqrt[د]{ب}} = \sqrt[د]{\frac{أ}{ب}}$.

لاحظ أنه إذا لم تكن أدلة الجذور موحدة نوحدها قبل تطبيق القانون .

مثال (٣ – ١٩) بسّط ما يأتي :

١) $\frac{\sqrt{١٣٥}}{\sqrt{٥}}$.　　٢) $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt[٣]{٥}}$.　　٣) $\frac{\sqrt[٣]{١٢}}{\sqrt[٣]{٤}}$.

٤) $\frac{\sqrt{ب - جـ}}{\sqrt[٣]{(ب - جـ)^٢}}$ ، حيث ب – جـ > ٠ ، ب ≠ جـ .

الحــل

١) $\frac{\sqrt{١٣٥}}{\sqrt{٥}} = \sqrt{\frac{١٣٥}{٥}} = \sqrt{٢٧} = ٣\sqrt{٣}$.

٢) $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt[٣]{٥}} = \frac{\sqrt[٣ \times ٢]{٢^٣}}{\sqrt[٣ \times ٢]{٥^٢}} = \frac{\sqrt[٦]{٨}}{\sqrt[٦]{٢٥}} = \sqrt[٦]{\frac{٨}{٢٥}}$.

٣) $\frac{\sqrt[٣]{١٢}}{\sqrt[٣]{٤}} = \sqrt[٣]{\frac{١٢}{٤}} = \sqrt[٣]{٣}$.

٤) $\frac{\sqrt{ب - جـ}}{\sqrt[٣]{(ب - جـ)^٢}} = \frac{\sqrt[٦]{(ب - جـ)^٣}}{\sqrt[٦]{(ب - جـ)^٤}} = \sqrt[٦]{\frac{(ب - جـ)^٣}{(ب - جـ)^٤}} = \sqrt[٦]{\frac{١}{ب - جـ}} = \frac{١}{\sqrt[٦]{ب - جـ}}$.

ضرب المقادير المترافقة :

لاحظ أنه عند إيجاد ناتج الضرب الآتي : $(\sqrt{س} + \sqrt{ص})(\sqrt{س} - \sqrt{ص})$.

فالناتج هو (س – ص) بفرض أن س ، ص ≥ ٠ ، وكما نلاحظ أن الناتج خالٍ من الجذر ، وفي هذه الحالة نقول إن : $(\sqrt{س} + \sqrt{ص})$ ، $(\sqrt{س} - \sqrt{ص})$ مقداران مترافقان .

فمثلاً المقادير التالية مترافقة : $(\sqrt{٣} + \sqrt{٥})$ ، $(\sqrt{٣} - \sqrt{٥})$

$(\sqrt{٧} - \sqrt{١٩})$ ، $(\sqrt{٧} + \sqrt{١٩})$

$(٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٣})$ ، $(٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣})$.

كما نلاحظ أن :

حاصل ضرب مقدارين مترافقين = مربع الحد الأول − مربع الحد الآخر .

مثال (٣ − ٢٠) اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

١) $\frac{٣}{٣- \sqrt{٢}}$. ٢) $\frac{٢}{٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٥}}$.

الحـــل

للتخلص من الجذر في المقام نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام فيكون :

١) $\frac{٣}{٣- \sqrt{٢}} = \frac{٣}{٣- \sqrt{٢}} \times \frac{٣+\sqrt{٢}}{٣+\sqrt{٢}} = \frac{٣(٣ + \sqrt{٢})}{٣^٢ - (\sqrt{٢})^٢} = \frac{٣(٣ + \sqrt{٢})}{٧}$.

٢) $\frac{٢}{٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٥}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٥}} \times \frac{٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥}}{٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥}} = \frac{٤\sqrt{٣} - ٦\sqrt{٥}}{(٢\sqrt{٣})^٢ - (٣\sqrt{٥})^٢}$

$= \frac{٤\sqrt{٣} - ٦\sqrt{٥}}{١٢ - ٤٥} = \frac{-٢}{٣٣}(٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥})$.

مثال (٣ − ٢١) اختصر ما يأتي .علماً بأن كل مجذور هو عدد حقيقي موجب والمقامات لاتساوي صفراً:

١) $\frac{\sqrt{أب}}{\sqrt{أ} + \sqrt{ب}}$. ٢) $\frac{س\sqrt{ص} - ص\sqrt{س}}{\sqrt{س} - \sqrt{ص}}$ . .

الحـــل

للتخلص من الجذر في المقام نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام فيكون :

١) $\frac{\sqrt{أب}}{\sqrt{أ} + \sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أب}}{\sqrt{أ} + \sqrt{ب}} . \frac{\sqrt{أ} - \sqrt{ب}}{\sqrt{أ} - \sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أب}(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})}{(\sqrt{أ})^٢ - (\sqrt{ب})^٢}$

$= \frac{\sqrt{أ^٢ب} - \sqrt{أب^٢}}{أ - ب} = \frac{أ\sqrt{ب} - ب\sqrt{أ}}{أ - ب}$.

٢) $\frac{س\sqrt{س} - ص\sqrt{ص}}{\sqrt{س} - \sqrt{ص}} = \frac{س\sqrt{س} - ص\sqrt{ص}}{\sqrt{س} - \sqrt{ص}} \cdot \frac{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}$

$$= \frac{س\sqrt{س ص} + س\sqrt{ص} \cdot \sqrt{ص} - ص\sqrt{س} \cdot \sqrt{س} - ص\sqrt{س ص}}{(\sqrt{س})^{٢} - (\sqrt{ص})^{٢}}$$

$$= \frac{س\sqrt{س ص} + س ص - س ص - ص\sqrt{س ص}}{س - ص} = \frac{س\sqrt{س ص} - ص\sqrt{س ص}}{س - ص}$$

$$= \frac{\sqrt{س ص}\,\cancel{(س - ص)}}{\cancel{(س - ص)}} = \sqrt{س ص}$$

تمارين ومسائل (٣ – ٥)

[١] أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي . علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية موجبة :

أ) $\sqrt{٢}\,(٥ + \sqrt{٢})$

ب) $\sqrt{٣}\,(\sqrt{١٥} - \sqrt{٢١})$

جـ) $\sqrt{س}\,(\sqrt{س} + \sqrt{ص})$

ء) $٥\sqrt{٥}\,(٧\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٣})$

هـ) $(٥ + \sqrt{٢})(٣ - \sqrt{٢})$

و) $(٣\sqrt{س} - ٤\sqrt{ص})(٣\sqrt{س} + ٤\sqrt{ص})$

ز) $(٢ - \sqrt{٧})^{٢}$

[٢] أوجد حاصل الضرب لكل مما يأتي . علماً بأن الجذور أعداد حقيقية :

أ) $(٤\sqrt{٣} + ٢)^{٢}$

ب) $(\sqrt{أ} - ب)(\sqrt{أ} + ب)$

جـ) $(٤\sqrt{س} - \sqrt{ص})(٥\sqrt{س} + \sqrt{ص})$

ء) $(٣\sqrt{أ} + ٢\sqrt{ب})(\sqrt{أ} - ٣\sqrt{ب})$

هـ) $(\sqrt{أ} + \sqrt{أب})(\sqrt{أ} - ١)$

و) $\sqrt[٣]{ب}\,(\sqrt[٣]{٥ب} + \sqrt[٣]{٧ب})$

ز) $\sqrt[٤]{١٢أ}\,(\sqrt[٤]{١٢أ} + \sqrt[٤]{١٨أ})$

ح) $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})(\sqrt[٣]{أ} + \sqrt[٣]{ب})$

[٣] بسّط كلاً مما يأتي ، علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية موجبة والمقام لايساوي صفراً :

أ) $\frac{١}{\sqrt{٥} - ٢}$

ب) $\frac{٦}{٣ - \sqrt{٦}}$

جـ) $\frac{٤}{\sqrt{١٠} - \sqrt{٦}}$

د) $\frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٣}}$

هـ) $\frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}}$

و) $\frac{\sqrt{\text{أب}}}{\sqrt{\text{أب}} + \sqrt{\text{ب}}}$

ز) $\frac{\text{أ} + \sqrt{\text{ب}}}{\text{أ} - \sqrt{\text{ب}}}$

ح) $\frac{٣\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س ص}}}$

ط) $\frac{\text{س}^{٢}\,\text{ص}}{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س ص}}}$

ي) $\frac{٢\sqrt{\text{س}}}{٣\sqrt{\text{س}} - ٢\sqrt{\text{ص}}}$

ك) $\frac{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣\,\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{٣\,\text{ص}}}$

ل) $\frac{١٦\,\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{٢\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}}}$

[٤] بسّط كلاً مما يأتي (حيث المقامات لا تساوي صفراً):

أ) $\sqrt{\text{أ} + \text{ب}}\left(\sqrt{\text{أ} + \text{ب}} - \sqrt{\frac{٤}{\text{أ} + \text{ب}}}\right)$ ، $\text{أ} + \text{ب} > ٠$

ب) $\frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}}{\sqrt{\text{ب} + \text{جـ}}} \div \frac{\sqrt{(\text{ب} - \text{جـ})^{٢}}}{(\text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢})}$ ، $\forall$ ب ، جـ $\in \text{ح}^{*}_{+}$ ، ب > جـ

جـ) $\frac{\sqrt{\text{س}} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}} - ٩\,\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq \frac{١}{٨١}$ ، $\text{س} > ٠$

٣ : ٦ حل المعادلات الأسية والجذرية

لقد عرفنا المعادلات الجبرية والتي يظهر المتغير في أساسات حدودها ، والآن نتعرف على نوعين آخرين من المعادلات ، وهي المعادلات الأسية والجذرية .

أولاً : المعادلات الأسية :

تعريف (٣ : ٧)

المعادلة الأسية هي المعادلة التي يحوي أسها على متغير أو أكثر .

فمثلاً : $٣^{س-١} = ٣^{٤}$ ، $٢^{س^{٢}} = ٤$ ، $(\frac{١}{٢})^{ن} = ٠,٠٥$ جميعها معادلات أسية .

ولحل المعادلات الأسية نستخدم إحدى الخاصيتين التاليتين :

١) $\forall$ ب > ٠ ، م ، ن $\in$ ح . إذا كان $ب^{م} = ب^{ن}$ فإن م $=$ ن .

٢) $\forall$ ا ، ب > ٠ ، ا $\neq$ ب إذا كان $ا^{ن} = ب^{ن}$ فإن ن $= ٠$.

مثال (٣ – ٢٢) حل المعادلات الآتية :

١) $٣^{س} = ٨١$.
٢) $٣^{٣س} = ٩^{س-١}$.
٣) $(\frac{٢}{٣})^{٢ص-٣} = (\frac{١}{٤}٢)^{-٣}$.
٤) $٣^{٢س} \times ٣ - ٤ \times ٣^{س+٢} = -٨١$.

الحـــل

١) $٣^{س} = ٨١$ نوحد أولاً الأساسين في طرفي المعادلة فنجد أن $٣^{س} = ٣^{٤}$.

وبما أن أساس قوتين متساو ، إذن تتساوي الأسس .

$\therefore$ س $= ٤$.

٢) $٣^{٣س} = ٩^{س-١}$ نكتب الطرف الأيسر على صورة قوة للعدد ٣ .

$\Leftarrow$ $٣^{٣س} = ٣^{٢(س-١)} = ٣^{٢س-٢}$ (بمساواة الأسس لتساوى الأساسين) .

$\therefore$ ٣ س $=$ ٢ س $-$ ٢

$\therefore$ س $= -٢$

٣) $(\frac{٢}{٣})^{٢ص-٣} = (\frac{١}{٤}٢)^{-٣}$ نكتب العدد الكسري في الطرف الأيسر من المعادلة على الصورة :

$\frac{م}{ن}$ فيكون $(\frac{٢}{٣})^{٢ص-٣} = (\frac{٩}{٤})^{-٣} = (\frac{٣^{٢}}{٢^{٢}})^{-٣} = (\frac{٣}{٢})^{-٦} = (\frac{٢}{٣})^{٦}$.

$\therefore$ ٢ ص − ٣ = ٦

$\Leftarrow$ ٢ ص = ٦ + ٣ = ٩

$\therefore$ ص = $\frac{٩}{٢}$ = ٤ $\frac{١}{٢}$

٤) بقسمة طرفي المعادلة على ٣ وبفرض ٣^{س} = ص نحصل على ص^{٢} − ١٢ ص + ٢٧ = ٠

$\Leftarrow$ (ص − ٩) (ص − ٣) = ٠

إما ص − ٩ = ٠ أو ص − ٣ = ٠

نعوض عن قيمة ص = ٣^{س} .

$\therefore$ ص − ٩ = ٠ $\Leftarrow$ ٣^{س} − ٩ = ٠ $\Leftarrow$ ٣^{س} = ٩ = ٣^{٢} $\Leftarrow$ س = ٢

أو ص − ٣ = ٠ $\Leftarrow$ ٣^{س} − ٣ = ٠ $\Leftarrow$ ٣^{س} = ٣ = ٣^{١} $\Leftarrow$ س = ١

وهناك حل آخر للمعادلة :

٣^{٢س} × ٣ − ٤ × ٣$^{س+٢}$ = −٨١ نكتب المعادلة على الصورة التالية :

٣^{٢س} × ٣ − ٤ × ٣^{س} × ٣^{٢} = −٢٧ × ٣ ، وبقسمة الطرفين على ٣ وإضافة ٢٧ للطرفين

نحصل على ٣^{٢س} − ٤ × ٣^{س} × ٣ + ٢٧ = ٠ ،

أو (٣^{س})^{٢} − ١٢ × (٣^{س}) + ٢٧ = ٠ (مقدار ثلاثي) .

(٣^{س} − ٩) (٣^{س} − ٣) = ٠

إما ٣^{س} − ٩ = ٠ $\Leftarrow$ ٣^{س} = ٩ = ٣^{٢} $\Leftarrow$ س = ٢

أو ٣^{س} − ٣ = ٠ $\Leftarrow$ ٣^{س} = ٣ = ٣^{١} $\Leftarrow$ س = ١

التحقيق :

الطرف الأيمن = ٣^{٢س} × ٣ − ٤ × ٣$^{س+٢}$

عندما س = ٢

الطرف الأيمن = ٣$^{٢×٢}$ × ٣ − ٤ × ٣$^{٢+٢}$ = ٣^{٤} × ٣ − ٤ × ٣^{٤} = − ٨١ = الطرف الأيسر .

وعندما س = ١

الطرف الأيمن = ٣$^{٢×١}$ × ٣ − ٤ × ٣$^{١+٢}$ = ٣^{٢} × ٣ − ٤ × ٣^{٣} = ٣^{٣} − ٤ × ٣^{٣}

= ٣^{٣} (١ − ٤) = ٣^{٣} × (−٣) = − ٨١ = الطرف الأيسر .

مثال (٣ − ٢٣) حل المعادلات الآتية ، وتحقق من الحل :

١) ٧$^{٢س+١}$ = ٥$^{٢س+١}$ ٢) ٢^{س} = ٩$^{\frac{س}{٢}}$

الحـــل

١) $٧^{٢س+١} = ٥^{٢س+١}$ نلاحظ أنّ الأساسين موجبان وغير متساويين ($٧ \neq ٥$) .

وبما أن الأسس متساوية .

إذن $٢س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -\frac{١}{٢}$.

التحقيق :

الطرف الأيمن $= ٧^{٢س+١} = ٧^{٢(-\frac{١}{٢})+١} = ٧^{-١+١} = ٧^{٠} = ١$.

الطرف الأيسر $= ٥^{٢س+١} = ٥^{٢(-\frac{١}{٢})+١} = ٥^{-١+١} = ٥^{٠} = ١$.

∴ الطرفان متساويان .

٢) $٢^{س} = ٩^{\frac{س}{٢}} = ٣^{٢(\frac{س}{٢})} = ٣^{س}$.

∴ س = صفر (الأساسان غير متساويين والأسان متساويان) ، ويترك للطالب التحقّق من الحل .

ثانياً : المعادلات الجذرية :

تعريف (٣ : ٨)

المعادلة التي تحوي متغيراً أو أكثر في مجذورها تسمى معادلة جذرية .

فمثلاً : $\sqrt{س} = ٩$ ، $\sqrt{س^{٢} - ١} = ٠$ ، $\sqrt{س} - \sqrt{ص} = ٣س$ جميعها معادلات جذريـة ،

ولكن $\sqrt{٣} + س = ٤$ ليست معادلة جذرية (لماذا ؟) .

حل المعادلة الجذرية :

عند حل المعادلة الجذرية نحدد أولاً الشرط الذي يجعل الجذر ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية أي أن يكون المجذور أكبر من أو يساوي الصفر ، مما يسمح لنا برفع الطرفين لقوة الجذر في حالة ما يكون الدليل عدداً زوجياً ، وعندما يكون الدليل فردياً لاتحتاج لوضع شرط للحل كما سنرى في الأمثلة التالية .

مثال (٣ – ٢٤) حل المعادلة الآتية : $\sqrt{٢س + ٣} = س$

الحـــل

$\sqrt{٢س + ٣} = س$ نربع طرفي المعادلة .

∴ $٢س + ٣ = س^{٢}$.

أو $س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠$.

أما (س – ٣) = ٠ ⟸ س = ٣

أو (س + ١) = ٠ ⟸ س = –١

وللتأكد من أنهما يحققان المعادلة نعوّض عن قيمتي س في المعادلة :

عندما س = ٣ الطرف الأيمن = $\sqrt{٢ س + ٣}$ = $\sqrt{٢ \times ٣ + ٣}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ = الطرف الأيسر .

س = ٣ تمثل حل للمعادلة .

عندما س = –١ الطرف الأيمن = $\sqrt{٢ س + ٣}$ = $\sqrt{٢ \times (–١) + ٣}$ = $\sqrt{١}$ = ١ ≠ الطرف الأيسر .

∴ س = –١ ليس حل للمعادلة .

مما سبق نرى أن شرط الحل عند وضعه في بداية الحل يحدّد لنا الحل الذي يحقق المعادلة كما سوف نرى في الأمثلة الآتية .

مثال (٣ – ٢٥) حل المعادلات الآتية :

١) $\sqrt{س}$ – ٤ = ٥ ٢) $\sqrt{٢ س – ٦}$ = $\sqrt{س + ١}$

الحل

١) شرط الحل س ≥ ٠ ، وبإضافة ٤ لطرفي المعادلة نحصل على : $\sqrt{س}$ = ٩ نربع طرفي المعادلة .

∴ $(\sqrt{س})^٢ = ٩^٢$ ⟸ س = ٨١ ≥ ٠ (تحقق شرط الحل) .

٢) $\sqrt{٢ س – ٦}$ = $\sqrt{س + ١}$ شرط الحل : ٢ س – ٦ ≥ ٠ أي س ≥ ٣

و س + ١ ≥ ٠ أي س ≥ –١

إذن س ≥ ٣

نربّع طرفي المعادلة لنحصل على ٢ س – ٦ = س + ١ ⟸ س = ٧ ≥ ٣ (تحقق شرط الحل) .

مثال (٣ – ٢٦) حل المعادلات الآتية : $\sqrt[٣]{٢ س – ٣}$ = ٢

الحل

نكعب طرفي المعادلة : $(\sqrt[٣]{٢ س – ٣})^٣ = ٢^٣$

⟸ ٢ س – ٣ = ٨ ⟸ ٢ س = ٨ + ٣ ∴ س = $\frac{١١}{٢}$

التحقق :

الطرف الأيمن = $\sqrt[٣]{٢ س – ٣}$ = $\sqrt[٣]{٢ \times \frac{١١}{٢} – ٣}$ = $\sqrt[٣]{١١ – ٣}$ = $\sqrt[٣]{٨}$

= ٢ = الطرف الأيسر .

تمارين ومسائل (٣-٦)

[١] حل المعادلات الآتية وتحقّق من صحة الحل:

ا) $٥^{٤س+١} = ٢٥^{٣س}$. ب) $٢^{ص} = \frac{١}{١٦}$. جـ) $٥^{-م} = ٢٥$.

ء) $(٣٢)^{هـ-١} = ٨$. هـ) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢س-١} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^{-٣}$. و) $١٠^{س} = ٠{,}٠٠١$.

ز) $١٠^{(س-٤)(س-٥)} = ١$. ح) $٢^{س} \times ٨ = ٦٤$.

[٢] حل المعادلات الآتية : وتحقق من صحة الحل :

ا) $٣^{س-٥} = ٢^{س-٥}$. ب) $٧^{س^٢-٦س+٥} = ٢^{س^٢-٦س+٥}$.

جـ) $٥^{س^٢-٥س} = ٣^{س^٢-٥س}$. ء) $\sqrt[س]{٣^{س^٢}} = ٩$.

هـ) $٣^{٢س} = ٣^{س+\sqrt{٢}}$. و) $٧^{ص+٢} - ٧^{٢ص+١} = ٠$.

[٣] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

ا) $٣^{٢س} - ٤ \times ٣^{س} + ٣ = ٠$. ب) $[(٢٥)^{٣}]^{٢} \times ١٢٥ = ٥^{س}$.

جـ) $٢٥^{س-١} - ٦ \times ٥^{س-١} + ٥ = ٠$. ء) $٢٥ \times ٥^{س-١} = ١$.

[٤] حل المعادلات الآتية :

ا) $\sqrt{٢س - ٥} = ٣$. ب) $\sqrt{س} = س - ١٢$.

جـ) $\sqrt{س + ٤} - \sqrt{س - ٣} = ١$. ء) $\sqrt{س} - ٦ = ٣$.

هـ) $\sqrt{ا^٢ + ١٠ا} = ٣$. و) $\sqrt{٢ب + ٥} = \sqrt{٣ب + ٤}$.

[٥] أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

ا) $٢\sqrt{٣س} = \sqrt{٥س + ٧}$. ب) $٢\ \sqrt{٢ص - ١} = \sqrt{٤ص}$.

جـ) $\sqrt{ا}\ \ \sqrt{ا - ٥} = ٦$. ء) $\sqrt{٢د + ٣} - \sqrt{د - ٢} = ٢$.

هـ) $\sqrt[٣]{س - ٧} = ٣$. و) $\sqrt[٥]{٢ا - ٥} = -١$.

ز) $\sqrt[٤]{٢س^٢ - ٣س - ٨} = -١$.

ح) $(٢س^٢ + ٣س - ٥)^{\frac{١}{٢}} = (٢س^٢ - س - ٢)^{\frac{١}{٢}}$. ط) $\sqrt{٥س + ١} - ١ = \sqrt{٣س}$.

الوحدة الرابعة

الحـــدوديـــات (كثيرات الحدود)

٤ : ١ الصورة العامة للحدودية في متغير واحد

سبق أن تعرفت على المقادير الجبرية ، وفيما يلي بعض الأمثله عليها :

١) $٢ س + ٩$ مقدار جبري من الدرجة الأولى لأن أعلى أس فيها ١

٢) $٢ س^{٢} - ٧ س + \frac{١}{٤}$ مقدار جبري من الدرجة الثانية لأن أعلى أس فيها ٢

٣) $س^{٢} + \frac{١}{س} + ٩$

٤) $س + ٥^{س} + ٣$

٥) $\sqrt{س + ٣} + ٥$

وإذا تأملنا المقادير السابقة نلاحظ أنها من صنفين : الصنف الأول لا تحتوي على متغير في المقام ، أو تحت الجذر أو في الأس وهي الواردة في المثالين ١ ، ٢ ، وتسمى هذه حدوديات (أو كثيرات الحدود) ومفردها حدودية .

أما الصنف الثاني في الأمثلة من ٣ إلى ٥ فتحتوي على متغير في المقام (أي أس سالب) كما في ٣ أو يحتوي على متغير في الأس كما في ٤ أو يحتوي على متغير تحت الجذر كما في ٥

تعريف (٤ : ١)

الصورة العامة للحدودية في المتغير س من الدرجة ن هي : $أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ_{١} س + أ_{٠}$

حيث ن ∈ ط ، والمعاملات $أ_{ن}$ ، $أ_{ن-١}$ ، .... ، $أ_{٠}$ ∈ ح ، $أ_{ن} \neq$ صفراً ، ويسمى $أ_{ن}$ المعامل الرئيسي ، $أ_{٠}$ بالحد المطلق ، ويرمز للحدودية بالرمز حـ (س) ، ويمكن اختصاره بالرمز حـ

مثال (٤ – ١) بيّن درجة كل حدودية مما يلي ومعاملها الرئيس وحدها المطلق :

أ) $حـ_{١} = ٧ س^{٥} - ٤ س^{٤} + س^{٢} - ٢ س + ١$

ب) $حـ_{٢} = ٥ - ٢ س^{٣} - س^{٤} - س^{٦} + س$

جـ) $حـ_{٣} = ٤٥$

الحل

أ) $ح_١$ حدودية من الدرجة الخامسة ، معاملها الرئيس ٧ ، وحدها المطلق = ١

ب) $ح_٢$ حدودية من الدرجة السادسة ، معاملها الرئيس −١ ، حدها المطلق = ٥

جـ) $ح_٣$ حدودية من الدرجة صفر ، معاملها الرئيس ٤٥ وهو الحد المطلق، وتسمى مثل هذه الحدودية بالحدودية الثابتة .

مثال (٤ − ٢) كون الحدودية من الدرجة الرابعة في المتغير س ، والتي معاملاتها $أ_٤ = ٢$ ، $أ_٣ = −١$ ، $أ_٢ = أ_١ =$ صفراً ، $أ_٠ = ٤$

الحل

الصورة العامة للحدودية من الدرجة الرابعة في المتغير س هي :

$ح = أ_٤ س^٤ + أ_٣ س^٣ + أ_٢ س^٢ + أ_١ س + أ_٠$ ، $أ_٤ \neq ٠$ وبالتعويض عن المعاملات بالقيم المعطاة فإننا نحصل على الحدودية $ح = ٢ س^٤ − س^٣ + ٤$

تدريب (٤ − ١)

تأمل الحدودية $س^٢ − ٥ س + ٦$ ، فعندما س = ٠ ، فإن قيمة الحدودية = $(٠)^٢ − ٥(٠) + ٦ = ٦$

احسب قيمة الحدودية عندما س = ٢ ، س = $\frac{١}{٥}$

تمارين ومسائل (٤ − ١)

[١] بين درجة وعدد حدود كل حدودية مما يأتي :

أ) $س^٦ − س^٥ + ٢ س^٣ − ٥$

ب) $\frac{١}{٢} س^٣ + \frac{٣}{٥} س^٦ + ٧ س + ٣ س^٧ + ٩$

جـ) $− س + ٥$

ء) ٩

[٢] اكتب الحدوديات التالية وفق المعطيات :

أ) $أ_٤ = ٧$ ، $أ_٣ = ٤$ ، $أ_٢ = ١$ ، $أ_١ =$ صفراً ، $أ_٠ = −٢$

ب) $أ_٠ = ٣$ ، $أ_٦ = ٢$ ، $أ_١ = −٤$ ، $أ_٥ = أ_٣ = أ_٤ =$ صفراً ، $أ_٢ = −\frac{١}{٢}$

جـ) $أ_١ = أ_٢ = أ_٤ = ٠$ ، $أ_٧ = ٢$ ، $أ_٦ = −١$ ، $أ_٥ = أ_٠ = ١$ ، $أ_٣ = \frac{١}{٤}$

ء) $أ_٣ = ٢$ ، $أ_٢ = أ_١ =$ صفراً ، $أ_٠ = ١$

[٣] أوجد درجة كل حدودية مما يلي والمعامل الرئيس والحد المطلق فيها :

أ) حـ = س^{٤} – ٥ س^{٢} + ٥ . ب) حـ = س^{٣} + ٣ س^{٧} – ٢ س^{٤} .

جـ) د = س^{٢} – ٧ س + ٩ . ء) حـ = س + ٢ .

[٤] أوجد القيمة العددية للحدوديات التالية :

أ) حـ (س) = ٣س^{٢} + ٢ س + ٣ عندما س = – $\frac{١}{٢}$.

ب) حـ (ص) = ٢ص^{٣} – ص^{٢} + ٣ عندما ص = ٠ .

جـ) حـ (أ) = ٣ أ^{٢} + ٧ عندما أ = – ٣ .

ء) حـ (ع) = ٦ ع^{٤} – ع^{٣} + ٣ عندما ع = – ١ .

٤ : ٢ العمليات الأربع على الحدوديات

أولاً – جمع وطرح الحدوديات :

لقد سبق لك دراسة العمليات على المقادير الجبرية مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة، وبما أن الحدودية ما هي إلا مقدار جبري فإنه يمكننا إجراء تلك العمليات على الحدوديات بنفس الطريقة التي اتبعت مع المقادير الجبرية .

تعريف (٤ : ٢)

عند جمع أو طرح حدوديتين فإننا نحصل على حدودية جديدة تكون درجتها ليست أعلى من درجة الحدودية الأعلى درجة .

ملاحظة : (١) يمكن جمع أو طرح حدوديتين من أي درجتين .

(٢) درجة [حـ$_{١}$ ± حـ$_{٢}$] ≤ درجة حـ$_{١}$ أو حـ$_{٢}$

مثال (٤ – ٣) ليكن لدينا الحدوديتان التاليتان :

حـ$_{١}$ = س^{٣} + ٣ س^{٢} – ٢ س + ٥ ، حـ$_{٢}$ = ٤س^{٢} + ٥ س – ٢ .

فأوجد :

حـ$_{١}$ + حـ$_{٢}$ ، حـ$_{١}$ – حـ$_{٢}$ ، حـ$_{٢}$ + حـ$_{١}$ ، حـ$_{٢}$ – حـ$_{١}$.

الحـــل

$$ح_{١} + ح_{٢} = (س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢س + ٥) + (٤س^{٢} + ٥س - ٢)$$

$$= س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢س + ٥ + ٤س^{٢} + ٥س - ٢$$

$$= س^{٣} + ٧س^{٢} + ٣س + ٣ \ .$$

$$ح_{١} - ح_{٢} = (س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢س + ٥) - (٤س^{٢} + ٥س - ٢)$$

$$= س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢س + ٥ - ٤س^{٢} - ٥س + ٢$$

$$= س^{٣} - س^{٢} - ٧س + ٧ \ .$$

$$ح_{٢} + ح_{١} = (٤س^{٢} + ٥س - ٢) + (س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢س + ٥)$$

$$= س^{٣} + ٧س^{٢} + ٣س + ٣ \ .$$

$$ح_{٢} - ح_{١} = (٤س^{٢} + ٥س - ٢) - (س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢س + ٥)$$

$$= ٤س^{٢} + ٥س - ٢ - س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س - ٥ = -س^{٣} + س^{٢} + ٧س - ٧$$

مما سبق نجد أن :

$ح_{١} + ح_{٢} = ح_{٢} + ح_{١}$ ∴ عملية جمع الحدوديات إبدالية .

$ح_{١} - ح_{٢} \neq ح_{٢} - ح_{١}$ ∴ عملية طرح الحدوديات غير إبدالية .

تدريب (٤–٢) ماذا تلاحظ على درجة كل من $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{١} + ح_{٢}$ ، $ح_{١} - ح_{٢}$

ثانياً – ضرب الحدوديات :

كما هو عليه الحال في ضرب المقادير الجبرية فإننا نجري عملية ضرب الحدوديات :

تعريف (٤ : ٣)

١ – عند ضرب حدودية في عدد غير صفري ؛ فإننا نضرب جميع حدود الحدودية في ذلك العدد، ونحصل على حدودية جديدة درجتها تساوي درجة الحدودية .

٢ – عند ضرب حدودية في أخرى فإننا نضرب حدودهما باستخدام قانون التوزيع ، ثم نجمع الحدود المتشابهة فيكون الناتج حدودية جديدة درجتها تساوي مجموع درجتي الحدوديتين المضروبتين في بعض.

ملاحظة : درجة $[ح_{١} \cdot ح_{٢}]$ = درجة $ح_{١}$ + درجة $ح_{٢}$ ، حيث $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ حدوديتان من أي درجة.

مثال (٤ − ٤) لتكن $ح_١ = س + ٢$ ، $ح_٢ = س^٢ − س + ٢$ ،

$ح_٣ = س^٣ + ٢ س^٢ + ٩ س − ٣$ فأوجد :

أ) $٥ ح_١$ وحدّد درجتها . ب) $ح_١ \bullet ح_٣$ وحدّد درجتها .

جـ) $٢ ح_٢ \bullet ح_١$ وحدّد درجتها . ء) $−٢ ح_١ \bullet \frac{٣}{٤} ح_٢$.

الحل

أ) $٥ ح_١ = ٥ (س + ٢) = ٥ س + ١٠$ حدودية من الدرجة الأولى .

ب) $ح_١ \bullet ح_٣ = (س + ٢) \bullet (س^٣ + ٢ س^٢ + ٩ س − ٣)$

$= س (س^٣ + ٢ س^٢ + ٩ س − ٣) + ٢ (س^٣ + ٢ س^٢ + ٩ س − ٣)$

$= س^٤ + ٢ س^٣ + ٩ س^٢ − ٣ س + ٢ س^٣ + ٤ س^٢ + ١٨ س − ٦$

$= س^٤ + ٤ س^٣ + ١٣ س^٢ + ١٥ س − ٦$ حدودية من الدرجة الرابعة .

جـ) $٢ ح_٢ \bullet ح_١ = ٢(س^٢ − س + ٢) \bullet (س + ٢) = (٢ س^٢ − ٢ س + ٤) \bullet (س + ٢)$

$= ٢ س^٢ (س + ٢) − ٢ س (س + ٢) + ٤ (س + ٢)$

$= ٢ س^٣ + ٤ س^٢ − ٢ س^٢ − ٤ س + ٤ س + ٨$

$= ٢ س^٣ + ٢ س^٢ + ٨$ حدودية من الدرجة الثالثة .

ء) $−٢ ح_١ \bullet \frac{٣}{٤} ح_٢ = −٢(س + ٢) \bullet \frac{٣}{٤} (س^٢ − س + ٢)$

$= (−٢ س − ٤) \bullet (\frac{٣}{٤} س^٢ − \frac{٣}{٤} س + \frac{٣}{٢})$.

$= −٢ س (\frac{٣}{٤} س^٢ − \frac{٣}{٤} س + \frac{٣}{٢}) − ٤ (\frac{٣}{٤} س^٢ − \frac{٣}{٤} س + \frac{٣}{٢})$

$= −\frac{٣}{٢} س^٣ + \frac{٣}{٢} س^٢ − ٣ س − ٣ س^٢ + ٣ س − ٦$

$= −\frac{٣}{٢} س^٣ − \frac{٣}{٢} س^٢ − ٦$.

مثال (٤ - ٥) لتكن $ح_١ = س^٥ + ٣ س^٢ - ٢$ ، $ح_٢ = س^٣ - ٨$

فأوجد :

أ) $ح_١ \bullet ح_٢$ وحدّد درجتها . ب) $ح_٢ \bullet ح_١$ وحدّد درجتها .

قارن حاصلي الضرب . ماذا نستنتج ؟

الحــــل

أ) $ح_١ \bullet ح_٢ = (س^٥ + ٣س^٢ - ٢) . (س^٣ - ٨)$

$= س^٥ (س^٣ - ٨) + ٣س^٢ (س^٣ - ٨) - ٢ (س^٣ - ٨)$

$= س^٨ - ٨ س^٥ + ٣ س^٥ - ٢٤ س^٢ - ٢ س^٣ + ١٦$

$= س^٨ - ٥ س^٥ - ٢ س^٣ - ٢٤ س^٢ + ١٦$ حدودية من الدرجة الثامنة .

ب) $ح_٢ \bullet ح_١ = (س^٣ - ٨) . (س^٥ + ٣ س^٢ - ٢)$

$= س^٣ (س^٥ + ٣ س^٢ - ٢) - ٨ (س^٥ + ٣س^٢ - ٢)$

$= س^٨ + ٣ س^٥ - ٢س^٣ - ٨س^٥ - ٢٤ س^٢ + ١٦$

$= س^٨ - ٥ س^٥ - ٢س^٣ - ٢٤ س^٢ + ١٦$

من (أ) ، (ب) نجد أن :

$ح_١ \bullet ح_٢ = ح_٢ \bullet ح_١$ وهذا يوضح أن عملية ضرب الحدوديات عملية إبدالية .

مثال (٤ - ٦) لتكن $ح_١ = س + ٤$ ، $ح_٢ = س^٢ - ٢س + ٤$ ، $ح_٣ = س^٣ + ٨$

فأوجد :

أ) $ح_١ \bullet (ح_٢ + ح_٣)$ ب) $ح_١ \bullet ح_٢ + ح_١ \bullet ح_٣$

قارن بين ناتج العمليتين في (أ) ، (ب) ماذا نستنتج ؟

الحــــل

أ) $ح_١ \bullet (ح_٢ + ح_٣) = (س + ٤) [(س^٢ - ٢ س + ٤) + (س^٣ + ٨)]$

$= (س + ٤) [س^٢ - ٢ س + ٤ + س^٣ + ٨]$

$= (س + ٤) (س^٣ + س^٢ - ٢س + ١٢)$

$= س\,(\,س^{٣} + س^{٢} - ٢س + ١٢\,) + ٤\,(\,س^{٣} + س^{٢} - ٢س + ١٢\,)$

$= س^{٤} + س^{٣} - ٢س^{٢} + ١٢س + ٤س^{٣} + ٤س^{٢} - ٨س + ٤٨$

$= س^{٤} + ٥س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س + ٤٨$.

ب) $ح_{١} \bullet ح_{٢} + ح_{١} \bullet ح_{٣} = (س + ٤)\,(\,س^{٢} - ٢س + ٤\,) + (س + ٤)\,(\,س^{٣} + ٨\,)$

$= س\,(\,س^{٢} - ٢س + ٤\,) + ٤\,(\,س^{٢} - ٢س + ٤\,) + س\,(\,س^{٣} + ٨\,) + ٤\,(\,س^{٣} + ٨\,)$

$= س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤س + ٤س^{٢} - ٨س + ١٦ + س^{٤} + ٨س + ٤س^{٣} + ٣٢$

$= س^{٤} + ٥س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س + ٤٨$.

من (أ) ، (ب) نجد أن :

$ح_{١} \bullet (\,ح_{٢} + ح_{٣}\,) = ح_{١} \bullet ح_{٢} + ح_{١} \bullet ح_{٣}$ ، وهذا يوضح بأن عملية ضرب الحدوديات تتوزع على عملية جمع الحدوديات .

تدريب (٤–٣) من المثال السابق (٤–٦) أوجد الآتي :

أ) $(\,ح_{١} \bullet ح_{٢}\,) \bullet ح_{٣}$ ، $ح_{١} \bullet (\,ح_{٢} \bullet ح_{٣}\,)$ قارن بين حاصل الضرب . ماذا تستنتج ؟

ب) $ح_{١} + (\,ح_{٢} + ح_{٣}\,)$ ، $(\,ح_{١} + ح_{٢}\,) + ح_{٣}$ قارن المجموعين . ماذا تستنتج ؟

ثالثاً – قسمة الحدوديات :

تذكر إذا كان : أ ، ب عددان صحيحان وكان أ $\neq$ ٠ نقول إن ب تقبل القسمة على أ إذا وجد عدد صحيح جـ (قد يساوي الصفر) يحقق العلاقة : ب = أ . جـ .
نسمي أ عامل من عوامل ب ، ونكتب ب ÷ أ = جـ ، وإذا كان جـ $\neq$ ٠ ، فإن جـ أيضاً عامل من عوامل ب ويكون ب ÷ جـ = أ .

فمثلاً نقول إن -٢٤ تقبل القسمة على ٣ لأن : $-٢٤ = ٣ \times -٨$ ، ويكون $\frac{-٢٤}{٣} = -٨$ ، ويكون كلٌ من ٣ ، -٨ عاملاً من عوامل -٢٤ ، وبطريقة مشابهة يمكن أن نعرّف عملية قسمة الحدوديات واستناداً إلى قسمة المقادير الجبرية على النحو التالي :

تعريف (٤ : ٤)

إذا كان $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ حدوديتين ، وكانت $ح_{٢} \neq ٠$ ودرجة $ح_{١} \geq$ درجة $ح_{٢}$ فإننا نقول إن $ح_{١}$ تقبل القسمة على $ح_{٢}$ إذا وجدت حدودية $ح_{٣}$ بحيث : $ح_{١} = ح_{٢} \times ح_{٣}$.
وفي هذه الحالة نسمي $ح_{٢}$ عاملاً من عوامل $ح_{١}$ ويكون $ح_{١} \div ح_{٢} = ح_{٣}$ ، وإذا كان $ح_{٣} \neq ٠$ فإن $ح_{٣}$ أيضاً عامل من عوامل $ح_{١}$ ويكون $ح_{١} \div ح_{٣} = ح_{٢}$.

مثال (٤ − ٧) لتكن $ح_١ = س^٢ - ٩$ ، $ح_٢ = س - ٣$ بين أن $ح_١$ تقبل القسمة على $ح_٢$.

الحل

لبيان قابلية القسمة نبحث عن $ح_٣$ بحيث $ح_١ = ح_٢ \bullet ح_٣$ ؛ وحيث إن :
$ح_١ = س^٢ - ٩ = (س - ٣)(س + ٣) = ح_٢ (س + ٣)$ ، وبأخذ $ح_٣ = س + ٣$ نجد أن :
$ح_١ = ح_٢ \bullet ح_٣$.
$\therefore$ $ح_٢$ تقسم $ح_١$ أي أن $ح_١ \div ح_٢ = ح_٣$.

مثال (٤ − ٨) إذا كانت $ح_١ = ٣س^٣ - ٢٤$ ، $ح_٢ = س^٢ + ٢س + ٤$ ، فأوجد : $ح_٣$ بحيث : $ح_١ = ح_٢ \bullet ح_٣$.

الحل

لإيجاد $ح_٣$ نجري عملية قسمة $ح_١$ على $ح_٢$ باتباع نفس خطوات عملية قسمة المقادير الجبرية التي تم دراستها في الصف الثامن الأساسي وتتم هذه الخطوات على النحو التالي :

$(٣س^٣ - ٢٤) \div (س^٢ + ٢س + ٤) = ٣س - ٦$

$\therefore$ $ح_٣ = ٣س - ٦$

$$\begin{array}{r|l} ٣س - ٦ & \\ \hline ٣س^٣ \qquad -٢٤ & س^٢ + ٢س + ٤ \\ -\ ٣س^٣ \mp ٦س^٢ \mp ١٢س & \\ \hline -٦س^٢ - ١٢س - ٢٤ & \\ \pm ٦س^٢ \pm ١٢س \pm ٢٤ & \\ \hline ٠ \quad ٠ \quad ٠ & \end{array}$$

وللتحقق من صحة الحل :
نضرب خارج القسمة × المقسوم عليه فنحصل على المقسوم $(٣س - ٦) \bullet (س^٢ + ٢س + ٤)$
$= ٣س(س^٢ + ٢س + ٤) - ٦(س^٢ + ٢س + ٤)$
$= ٣س^٣ + ٦س^٢ + ١٢س - ٦س^٢ - ١٢س - ٢٤$
$= ٣س^٣ - ٢٤$.

مثال (٤ − ٩) لتكن $ح_١ = (٢س^٢ - ٤س^٥ - ٢٠س^٣ + ١٠)$ ، $ح_٢ = ٥ + س^٢$ فأوجد $ح_١ \div ح_٢$.

الحل

نرتب حدود كل من $ح_١$ ، $ح_٢$ تنازلياً ثم نجري عملية القسمة على النحو التالي :
$(-٤س^٥ - ٢٠س^٣ + ٢س^٢ + ١٠) \div (س^٢ + ٥)$
$= -٤س^٣ + ٢$

$$\begin{array}{r|l} -٤س^٣ + ٢ & \\ \hline -٤س^٥ - ٢٠س^٣ + ٢س^٢ + ١٠ & س^٢ + ٥ \\ \pm ٤س^٥ \pm ٢٠س^٣ & \\ \hline ٢س^٢ + ١٠ & \\ ٢س^٢ \overset{-}{+} ١٠ & \\ \hline ٠ \quad ٠ & \end{array}$$

ملاحظة : نلاحظ من المثالين السابقين ما يلي :

١) ناتج قسمة حدودية على حدودية أخرى هي حدودية .

٢) درجة حدودية المقسوم = درجة حدودية المقسوم عليه + درجة حدودية حاصل ناتج القسمة .

٣) باقي القسمة يساوي صفراً وهذا يعني أن باقي القسمة هي حدودية صفرية .

ولكن بوجه عام عند قسمة حدودية على حدودية أخرى قد يكون هناك باقٍ للقسمة، ونوضح ذلك في المثال التالي :

مثال (٤ – ١٠) لتكن ح$_١$ = ٣س^٤ – س^٣ + ٢س + ١٢ ، ح$_٢$ = ١ + س^٢ ، فأوجد ح$_١$ ÷ ح$_٢$ ، ثم قارن بين درجة المقسوم ودرجتي كلٍّ من المقسوم عليه وناتج القسمة، ماذا تستنتج ؟

الحـــل

ح$_١$ ÷ ح$_٢$ = (٣ س^٤ – س^٣ + ٢ س + ١٢) ÷(س^٢ +١)

٣ س^٢ – س – ٣

س^٢ + ١) ٣س^٤ – س^٣ + ٢س + ١٢

∓ ٣س^٤ ∓ ٣س^٢

٠ – س^٣ – ٣س^٢ +٢س + ١٢

± س^٣ ± س

٠ – ٣س^٢ + ٣س + ١٢

± ٣س^٢ ± ٣

٠ + ٣س + ١٥

عند إجراء عملية القسمـــة نلاحظ أننا أوقفنا عملية القسمة عندما أصبحت درجة باقي القسمة أقل من المقسوم عليه، وتكون مخرجات القسمة على الصورة:

المقسوم = المقسوم عليه × ناتج القسمة + الباقي .

أي أن : (٣س^٤ – س^٣ + ٢س + ١٢) = (س^٢ + ١) • (٣س^٢ – س + ٣) + (٣س + ١٥) .

ونلاحظ أن : درجة المقسوم = ٤ ، ودرجة المقسوم عليه = ٢ ، ودرجة ناتج القسمة = ٢

∴ درجة المقسوم = درجة المقسوم عليه + درجة ناتج القسمة .

وبوجه عام : إذا كانت ح$_١$ ، ح$_٢$ حدوديتين وكانت ح$_٢$ ≠ ٠ ، ح$_٢$ درجتها أقل من درجة ح$_١$ ؛ فإنه توجد حدوديتان ح$_٣$ ، ح$_٤$ بحيث تكون :

ح$_١$ = ح$_٢$ • ح$_٣$ + ح$_٤$ ، وتكون درجة ح$_٤$ أقل من درجة ح$_٢$ أو تكون ح$_٤$ حدودية صفرية، ونسمي ح$_١$: المقسوم ، ح$_٢$: المقسوم عليه ، ح$_٣$: خارج (ناتج) القسمة ، ح$_٤$: باقي القسمة .

تمارين ومسائل (٤ – ٢)

[١] لتكن $ح_١ = ٢س^٣ + ٤س - ٦$ ، $ح_٢ = س^٢ - س + ٤$ ، $ح_٣ = ٤س^٣ - س^٢ + س$. فأوجد :

أ) $ح_١ + ح_٢$ ، ب) $-٥ (ح_١ + ح_٢)$ ،

جـ) $(ح_١ - ح_٢)$ ، ء) $ح_٢ \bullet ح_٣$ ،

هـ) $ح_١ (ح_٢ + ح_٣)$ ، و) $(\frac{١}{٢} ح_١ + ٢ ح_٢ + ح_٣)$

[٢] إذا كانت $ح_١$ ، $ح_٢$ حدوديتين ، فأوجد $ح_١ \bullet ح_٢$ في كل مما يأتي ، وقارن درجة الناتج مع درجة $ح_١$، $ح_٢$:

أ) $ح_١ = ٣ س^٣$ ، $ح_٢ = ٢ س + ٣$.

ب) $ح_١ = \sqrt{٣} س^٤$ ، $ح_٢ = \sqrt{٣} س^٣ + \sqrt{٢٧} س + ٣ \sqrt{١٥}$.

جـ) $ح_١ = (٢ س - ١)$ ، $ح_٢ = ٢ س (٢ س^٢ - ١)$.

ء) $ح_١ = س^٢ + ٢ س + ١$ ، $ح_٢ = (٢ س - ٢) (س^٣ + س)$.

[٣] إذا كانت $ح_٢$ عاملاً من عوامل $ح_١$ في كل مما يأتي فأوجد العامل الآخر :

أ) $ح_١ = س^٣ + ١$ ، $ح_٢ = س + ١$.

ب) $ح_١ = ٣س^٣ - ٧س^٢ - ١١ س + ١٥$ ، $ح_٢ = س - ١$.

جـ) $ح_١ = ٢س^٥ - ٨س^٣ + س^٢ - ٤$ ، $ح_٢ = س^٢ - ٤$.

ء) $ح_١ = ٢س^٤ - ٣س^٣ - ٨$ ، $ح_٢ = ٢س^٣ + س^٢ + ٢ س + ٤$.

هـ) $ح_١ = - ٣س^٤ - ١١س^٢ + ٩ س^٣ + ٢٠ - ١٢س$ ، $ح_٢ = ٥ - ٣ س + س^٢$.

[٤] أوجد في كل مما يأتي خارج وباقي قسمة $ح_١$ على $ح_٢$:

أ) $ح_١ = س^٢ + ١$ ، $ح_٢ = س + ١$.

ب) $ح_١ = ٣س^٤ - س^٣ + س^٢ + ١$ ، $ح_٢ = س + ٢$.

جـ) $ح_١ = ٢س^٣ + ٥س^٤ - ٨$ ، $ح_٢ = س^٢ - ١$.

ء) $ح_١ = ٣س^٥ - ٣س^٢ + ٧$ ، $ح_٢ = س^٢ + ٣ س + ١$.

[٥] ليكن خارج قسمة $ح_١$ على $ح_٢$ هو $ح_٣ = (س^٢ - س + ١)$ والباقي $ح_٤ = س + ١$ فإذا كان $ح_٢ (٢) = ٥$ ، فأوجد $ح_١ (٢)$.

[٦] لتكن $ح_١ = ح_٢ \bullet ح_٣ + ح_٤$ حيث $ح_١ = ٥س^٣ + ١٠ س^٢ - ٢ س + ٧$ ، $ح_٢ = ٣ س^٢ + س - ٥$ فأوجد كلاً من : $ح_٣$ ، $ح_٤$.

٤ : ٣ مبرهنتا الباقي والعامل

كما سبق أن عرفت أنّ عملية القسمة قد يكون لها باقٍ ، وفي هذا البند سندرس مبرهنتين الأولى تتعلق بالباقي والأخرى تتعلق بعوامل الحدودية .

أولاً – مبرهنة الباقي :

لتكن حـ$_١$ = س^٢ – ٥ س + ٩ ، حـ$_٢$ = س – ٣ فأن عملية قسمة حـ$_١$ على حـ$_٢$ تكون على النحو التالي :

$$\frac{\text{ح}_١}{\text{ح}_٢} = \text{ح}_٣ + \frac{\text{ح}_٤}{\text{ح}_٢}$$

أي أن : $\boxed{\text{ح}_١ = \text{ح}_٢ \bullet \text{ح}_٣ + \text{ح}_٤}$.

$$\therefore \frac{\text{س}^٢ - \text{س} + ٩}{\text{س} - ٣} = (\text{س} - ٢) + \frac{٣}{\text{س} - ٣}$$

$$\Leftarrow \text{س}^٢ - ٥\,\text{س} + ٩ = (\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢) + ٣$$

	س – ٢
س – ٣	س^٢ – ٥س + ٩
	∓ س^٢ ± ٣س
	٠ – ٢س + ٩
	± ٢س ∓ ٦
	٠ + ٣

ونستطيع إجراء عملية القسمة هذه بطريقة أخرى وهي الطريقة التركيبية كالآتي :

٣	١	–٥	٩
		٣	–٦
	١	–٢	$\boxed{٣}$

التفسير :

١) اكتب المعاملات بعد ترتيب حدودها تنازلياً حسب قوى س .

٢) اكتب ٣ على اليسار (صفر المقسوم عليه (س – ٣)) .

٣) أنزل أول معامل في حـ$_١$ وهو ١ .

٤) اضرب ١ × ٣ واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني .

٥) اجمع لتحصل على –٢ .

٦) اضرب –٢ × ٣ واكتب الناتج –٦ أسفل المعامل الثالث .

٧) اجمع لتحصل على ٣ .

فيكون خارج القسمة حـ$_٣$ = (س – ٢) وباقي القسمة حـ$_٤$ = ٣ .

وإذا حسبنا حـ$_١$ عندما س = ٣ نجد أن حـ$_١$ (٣) = (٣)^٢ – ٥ × ٣ + ٩ = $\boxed{٣}$ ، وهذا يعني أن باقي القسمة حـ$_٤$ = حـ$_١$ (٣) ، حيث حـ$_١$ (٣) هو رمز للقيمة العددية حـ$_١$ عند ما س = ٣ . أي أن باقي قسمة حـ$_١$ على حـ$_٢$ يساوي حـ$_٤$ = ٣ .

وكذلك إذا قسمنا الحدودية حـ$_1$ = (٣ س^3 – ٥س + ١) علـى حـ$_2$ = (س – ٢) يكـون خــارج القسمــة حـ$_3$ = (٣ س^2 + ٦س + ٧) ، وباقي القسمة حـ$_4$ = ١٥ .

وعند إجراء عملية القسمة التركيبية نحصل على النموذج إلى اليسار :

٢	١	٥–	٠	٣
	١٤	١٢	٦	
	$\boxed{١٥}$	٧	٦	٣

أي أن خارج قسمة حـ$_1$ على حـ$_2$ = حـ$_3$ = (٣ س^2 + ٦ س + ٧)

وباقي القسمة حـ$_4$ = ١٥ ، وعند حساب القيمة العددية للحدودية

حـ$_1$ عندما س = ٢ تحصل على حـ$_1$ (٢) = ٣ (٢)^3 – ٥ (٢) + ١ = ٢٤ – ١٠ + ١ = $\boxed{١٥}$

تدريب (٤–٥) اقسم حـ$_1$ على حـ$_2$ إذا كانت حـ$_1$ = ٨ س^4 – س^2 + ١٢ ، حـ$_2$ = ٢س – ١

(٨ س^4 – س^2 + ١٢) ÷ (٢ س – ١) = ٤ س^3 + ... + $\frac{١}{٢}$ س + ... وباقي القسمة يساوي $١٢\frac{١}{٤}$

ولحساب القيمة العددية لـ حـ$_1$ عندما س = $\frac{١}{٢}$

حـ$_1$ ($\frac{١}{٢}$) = ٨ ($\frac{١}{٢}$)^4 – ... + ١٢ = ...

تلاحظ أن الطريقة الثانية أقصر وأسهل بكثير من طريقة القسمة (المطولة أو التركيبية) لإيجاد الباقي ٥ ومما سبق يمكن تقديم المبرهنة التالية :

أولاً : مبرهنة الباقي :

باقي قسمة أي حدودية حـ$_1$ على حدودية من الدرجة الأولى حـ$_2$ = (ا س+ب) ، ا ، ب ∈ ح ، ا ≠ صفراً يساوى حـ$_4$ حيث حـ$_4$ = القيمة العددية للحدودية حـ$_1$ عندما س = $\frac{-ب}{ا}$

مثال (٤ – ١١) أوجد باقي قسمة الحدودية حـ = ٣ س^4 – ٢س^3 + ١ على :

ا) حـ$_1$ = س + ٢

ب) حـ$_2$ = ٣ س – ١

جـ) حـ$_3$ = ٢ س + ١

الحـــل

ا) باقي قسمة ٣ س^4 – ٢ س^3 + ١ على س + ٢ هو القيمة العددية لـ حـ عندما س = –٢

فيكون جـ (–٢) = ٣ (–٢)^4 – ٢ (–٢)^3 + ١ = ٤٨ + ١٦ + ١ = ٦٥

ب) باقي قسمة حـ على حـ$_2$ هو حـ ($\frac{١}{٣}$) = ٣ ($\frac{١}{٣}$)^4 – ٢ ($\frac{١}{٣}$)^3 + ١ = $\frac{٢٦}{٢٧}$

جـ) باقي قسمة حـ على حـ$_٢$ هو حـ$(-\frac{١}{٢}) = ٣ (-\frac{١}{٢})^{٤} - ٢ (-\frac{١}{٢})^{٣} + ١$

$= ٣ \times \frac{١}{١٦} + \frac{٢}{٨} + ١ = \frac{٢٣}{١٦}$

مثال (٤ - ١٢) إذا كان باقي قسمة حـ$_١$ = س^٥ - ب س^٣ + ٨ س^٢ + ١٧ على حـ$_٢$ = ٢ س + ٢ يساوي ٣٣، فأوجد قيمة ب .

الحل

من مبرهنة الباقي يكون باقي قسمة حـ$_١$ على حـ$_٢$ يساوي حـ$_١$ (-١) = ٣٣

جـ(-١) = (-١)^٥ - ب (-١)^٣ + ٨ (-١)^٢ + ١٧ = ٣٣

-١ + ب + ٨ + ١٧ = ٣٣

ب + ٢٤ = ٣٣

ب = ٣٣ - ٢٤ = ٩

$\boxed{∴ \text{ ب } = ٩}$

∴ حـ$_١$ = س^٥ - ٩ س^٣ + ٨ س^٢ + ١٧

ثانياً : مبرهنة العامل :

يكون (أ س + ب) عاملاً من عوامل الحدودية حـ(س) إذا وفقط إذا كان حـ $\left(\frac{-ب}{أ}\right)$ = صفراً ∀أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفراً .

ملاحظـــة : عكس المبرهنة صحيح، أي أن إذا كان حـ $\left(\frac{-ب}{أ}\right)$ = ٠ فإن (أ س + ب) عامل من عوامل الحدودية حـ(س) .

مثال (٤ - ١٣) بيِّن ما إذا كانت حـ$_٢$ عاملاً من عوامل حـ = س^٣ - ٥ س + ٢ ، حيث

أ) حـ$_٢$ = س - ٢ ب) حـ$_٢$ = س + ٣

الحل

أ) يكون (س - ٢) عاملاً من عوامل الحدودية حـ = س^٣ - ٥ س + ٢ إذا كانت حـ (٢) = ٠

∵ حـ (٢) = (٢)^٣ - ٥ (٢) + ٢ = صفراً

∴ (س - ٢) عامل من عوامل حـ

ب) يكون (س + ٣) عاملاً من عوامل حـ إذا كانت حـ (−٣) = ٠
لكن حـ (−٣) = (−٣)^٣ − ٥ (−٣) + ٢ = −١٠ ≠ صفراً .
∴ (س + ٣) ليس عاملاً من عوامل حـ .

مثال (٤ − ١٥) لتكن حـ = −٣ س^٢ + ب س + ٥ ، ب ∈ ح ، أوجد قيمة ب التي تجعل (س − ١) عاملاً من عوامل حـ .

الحـــل يكون (س − ١) عاملاً من عوامل حـ إذا وفقط إذا كان حـ (١) = صفراً .
∵ حـ (١) = −٣ (١)^٢ + ب (١) + ٥ = ٠ ،
−٣ + ب + ٥ = ٠
ب = −٢
∴ حـ$_د$ = −٣ س^٢ − ٢ س + ٥

مثال (٤ − ١٦) لتكن حـ = س^د − ا^د حيث د ∈ ط ، ا ∈ ح* أثبت أنه :

١ − عندما تكون د عدداً زوجياً فإن حـ تقبل القسمة على كل من (س − ا) ، (س + ا) .

٢ − عندما تكون د عدداً فردياً فإن حـ تقبل القسمة على (س − ا) ولاتقبل القسمة على (س + ا) .

الحـــل

حـ (ا) = ا^د − ا^د = ٠ ، ينتج من مبرهنة العامل أن حـ تقبل القسمة على (س − ا) في كلتا الحالتين ١ ، ٢ (سواء كان د عدداً زوجياً أو فردياً) ، وحيث أن :
حـ (−ا) = (−ا)^د − ا^د لايكون هذا المقدار صفراً إلا إذا كان (−ا)^د موجباً ، وهذا ينتج عندما تكون د عدداً زوجياً . لذا حـ تقبل القسمة على (س + ا) عندما تكون د عدداً زوجياً .

تمارين ومسائل (٤ : ٣)

[١] أوجد باقي قسمة حـ$_١$ على حـ$_٢$ لكل مما يأتي :

ا) حـ$_١$ = س^٢ + ٥ س − ٣ ، حـ$_٢$ = س − ٣ .

ب) حـ$_١$ = ٢ س^٣ − ٦ س^٢ + ٣ ، حـ$_٢$ = س + ٥ .

جـ) حـ$_١$ = س^٣ − ٢ س + ٥ ، حـ$_٢$ = ٢س + ١ .

ء) حـ$_١$ = ٦ س^٣ + س^٢ − ١ ، حـ$_٢$ = ٢ س − ٢ .

هـ) حـ$_١$ = − ٥ س^٣ + ٢س + ٧ ، حـ$_٢$ = ٢ س + ٢ .

و) حـ$_١$ = ٢ س^٥ − ٤س^٣ + س −٤ ، حـ$_٢$ = ٢ س − ٦ .

[٢] بيّن أن ح$_{٢}$ عامل من عوامل ح$_{١}$ في كل مما يأتي :

أ) ح$_{١}$ = س^{٣} − ٤س + ٤ ، ح$_{٢}$ = س − ٢ .

ب) ح$_{١}$ = ٢ س^{٣} + ٧س^{٢} − ٩ ، ح$_{٢}$ = س + ٣ .

جـ) ح$_{١}$ = ٣س^{٣} − ٤س^{٢} − س + ٢ ، ح$_{٢}$ = ٣س + ٢ .

[٣] أوجد قيمة أ التي تجعل باقي قسمة الحدودية :

أ) أ س^{٢} − ٤(أ + ١) س + ٣ على (س − ٢) هو ٩ .

ب) (أ + ٣) س^{٣} + ٥ أ س^{٢} + ١ على (س + ١) هو ٦ .

جـ) س^{٣} + ٤ س^{٢} − أ س + ١ على (س + ١) هو ٣ .

[٤] أوجد قيمة ب التي تجعل :

أ) (س + ٢) عاملاً من عوامل الحدودية س^{٣} + ٨ س^{٢} + ب س + ٤ ، ثم أوجد العامل الآخر .

ب) الحدودية ٤ س^{٢} + ٨ س − ٥ تقبل القسمة على (٢ س + ب) .

[٥] برهن أن :

أ) س^{٣} − (٢ ب + جـ) س^{٢} + ب (ب + ٢ جـ) س − ب^{٢} جـ تقبل القسمة على (س − جـ) .

ب) (س^{د} − ١) (س$^{د + ٢}$ − ١) ، د $\in$ ط* تقبل القسمة على (س^{٣} − س^{٢} − س + ١) .

٤ : ٤ أصفار الحدودية

عند التعويض عن س بعدد حقيقي في أي حدودية ح نحصل على قيمة عددية مناظرة ، فإذا كانت تلك القيمة تساوي صفراً ، فإن ذلك العدد يسمى صفراً للحدودية .

لتكن ح = س^{٢} − ٤ س + ٣ لإيجاد أصفار الحدودية نوجد أولاً عوامل الحد المطلق ٣ فتكون عوامل العدد ٣ هي ١ ، ٣ .

لذا نوجد ح(١) = (١)^{٢} − ٤ × ١ + ٣ = صفر .

∴ ١ صفراً للحدودية .

ح (٣) = (٣)^{٢} − ٤ × ٣ + ٣ = صفراً .

∴ ٣ صفراً آخر للحدودية .

∵ الحدودية من الدرجة الثانية لذا فلها صفران هما ١ ، ٣ ،

ومن مبرهنة العامل فإن :

(س − ١) عامل من عوامل الحدودية ح . (س − ٣) عامل من عوامل الحدودية ح .

تعريف (٤ : ٥)

إذا كانت حـ حدودية في المتغير س من الدرجة ﻫ ، ﻫ ∋ ط ، فإن قيم س التي تجعل حـ = ٠ تسمى أصفار الحدودية حـ .

مثال (٤ – ١٧) لتكن حـ = س^٣ – ٢ س^٢ – ٩س + ١٨ وكان العدد ٢ أحد أصفارها . فأوجد بقية اصفار الحدودية ، ثم اكتب تحليل الحدودية .

الحـــل

∵ العدد ٢ صفراً من أصفار الحدودية ، ∴ حـ (٢) = صفر .

أي أن (س – ٢) عامل من عوامل حـ ولإيجاد العاملين الآخرين نقسم حـ على (س – ٢) .

(س^٣ – ٢ س^٢ – ٩ س + ١٨) ÷ (س – ٢) = س^٢ – ٩ = (س – ٣) (س + ٣) .

أي أن (س – ٣) ، (س + ٣) من عوامل الحدودية حـ ومن مبرهنة العامل نستنتج أن :

حـ (٣) = حـ (–٣) = صفر .

∴ ٣ ، –٣ صفران آخران للحدودية حـ .

∴ حـ = (س^٣ – ٢ س^٢ – ٩ س + ١٨) = (س – ٢)(س + ٣) (س – ٣) .

مثال (٤ – ١٨) لتكن حـ = س^٤ – ٧س^٣ + ٥س^٢ + ٣١س – ٣٠ بيّن أن العددين ١ ، –٢ صفران للحدودية .

أ) أوجد بقية أصفار الحدودية . ب) اكتب تحليل الحدودية .

الحـــل

نعوض عن س = ١ ، س = –٢ في الحدودية فنحصل على :

حـ (١) = صفر ∴ (س – ١) عامل من عوامل الحدودية حـ .

حـ (–٢) = صفر ∴ (س + ٢) عامل من عوامل الحدودية حـ .

ولتعين بقية أصفار الحدودية حـ نقسم الحدودية حـ أولاً على العامل (س – ١) ، ثم نقسم خارج القسمة على العامل (س + ٢) على النحو التالي :

(س^٤ – ٧ س^٣ + ٥ س^٢ + ٣١ س – ٣٠) ÷ (س – ١) = س^٣ – ٦ س^٢ – س + ٣٠

(س^٣ – ٦ س^٢ – س + ٣٠) ÷ (س + ٢) = س^٢ – ٨ س + ١٥ = (س – ٣) (س – ٥) .

أي أن (س – ٣) ، (س – ٥) من عوامل الحدودية حـ وفق نظرية العامل فإن ٣ ، ٥ صفران آخران للحدودية حـ .

ونكتب الحدودية على الشكل التالي :

$س^٤ - ٧ س^٣ + ٥ س^٢ + ٣١ س - ٣٠ = (س - ١)(س + ٢) (س - ٣) (س - ٥)$.

حـل آخـر :

لإيجاد بقية أصفار الحدودية $س^٤ - ٧ س^٣ + ٥ س^٢ + ٣١ س - ٣٠$ نقسم الحدودية على حاصل ضرب $(س - ١) (س + ٢)$ ، وبالتالي نحصل على العاملين الآخرين .

ملاحظة :

إذا كانت الحدودية $حـ = ا_ن س^ن + ا_{ن-١} س^{ن-١} + \ldots + ا_٠$ ، فإن كل صفر من أصفارها الصحيحة هو عامل من عوامل حدها المطلق $ا_٠$.

مثال (٤ - ١٩) لتكن حـ هي $س^٣ + ٢س^٢ - ٢٥ س - ٥٠$.

فأوجد: ا) أصفار الحدودية حـ .

ب) مجموعة عواملها .

الحـــل

ا) لإيجاد أصفار الحدودية نحلل الحد المطلق -٥٠ .

عوامل العدد $-٥٠ = (-) (١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٥ ، ٥٠)$ ، أي أن بعضها ممكن يأخذ إشارة السالب .

نأخذ س تساوي أحد عوامل الحد المطلق ، ولتكن $س = ١$

$\therefore حـ(١) = (١)^٣ + ٢ (١)^٢ - ٢٥ (١) - ٥٠ \neq$ صفر .

$\therefore$ ١ ليس صفراً للحدودية حـ .

نأخذ $س = ٥$

$\therefore حـ (٥) = (٥)^٣ + ٢ (٥)^٢ - ٢٥ (٥) - ٥٠ =$ صفراً .

$\therefore$ ٥ صفر من أصفار الحدودية حـ .

$\therefore$ (س - ٥) عامل من عوامل الحدودية حـ .

ولإيجاد بقية الأصفار نقسم الحدودية على العامل (س - ٥)

$(س^٣ + ٢س^٢ - ٢٥ س - ٥٠) \div (س - ٥) = س^٢ + ٧ س + ١٠ = (س + ٢) (س + ٥)$.

$\therefore -٥$ ، -٢ صفران آخران للحدودية حـ .

لاحظ أن أصفار الحدودية -٢ ، ٥ ، -٥ من عوامل الحد المطلق -٥٠ .

ب) مجموعة عوامل الحدودية $س^٣ + ٢س^٢ - ٢٥ س - ٥٠ = (س - ٥) (س + ٥) (س + ٢)$.

تمارين ومسائل (٤ : ٤)

[١] أوجد أصفار كل من الحدوديات التالية :

١ – $\frac{٣}{٢}$ س + ٦ ، ٢ – س^{٢} + ٥ س + ٦ ،

٣ – س^{٢} – ٣س – ٤ ، ٤ – ٢س^{٢} + ٥ س – ٦ ،

٥ – ٣ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س – ١ ، ٦ – س^{٣} – ٢ س^{٢} – س + ٢ ،

٧ – س^{٣} – ٥س^{٢} – ٨س + ١٢ ، ٨ – س^{٤} – س^{٣} – ٣١ س^{٢} + ٢٥ س + ١٥٠ .

[٢] معطى في كل مما يأتي حدودية وأحد أصفارها ، فأوجد بقية اصفارها :

أ) س^{٢} + ٧ س + ٦ ، س = –١ .

ب) س^{٣} – ٦ س^{٢} – ١٣ س + ٤٢ ، س = ٧ .

جـ) س^{٣} + ١٠ س^{٢} + ٢٩ س + ٢٠ ، س = – ٤ .

د) س^{٤} – ٣ س^{٢} + ٢ ، س = ١ ، س = – ١ .

هـ) س^{٣} + س^{٢} – ٨ س – ١٢ ، س = – ٢ .

و) س^{٤} – ٣ س^{٣} – ١٩ س^{٢} + ٢٧ س + ٩٠ ، س = – ٢ .

[٣] اكتب كلا من الحدوديات التالية على شكل حاصل ضرب عواملها :

أ) س^{٢} – ٣ س – ١٠ ، ب) س^{٣} – ٥ س^{٢} – ٩ س + ٤٥ ،

جـ) س^{٤} + س^{٣} – ١٣ س^{٢} – ٢٥س – ١٢ .

الوحدة الخامسة

البنى الجبرية

٥ : ١ العملية الثنائية

تذكر أن عملية الجمع مغلقة على ط ، أي أنه $\forall$ أ ، ب $\in$ ط نجد أن : أ + ب $\in$ ط ، فمثلاً:

٢ + ٧ = ٩ ، ١٥ + ١١ = ٢٦ . أي أن : (٢ ، ٧) $\xleftarrow{+}$ ٩ ، (١٥ ، ١١) $\xleftarrow{+}$ ٢٦ ،

ومعنى ذلك أن عملية الجمع على مجموعة الأعداد الطبيعية تقرن « أو تربط » كل عددين طبيعيين على صورة زوج مرتب (أ ، ب) بعدد وحيد من ط . أي أن عملية الجمع على ط تمثل تطبيقاً مجاله ط × ط ، ومجاله المقابل المجموعة ط نفسها أي أن :

+ : ط × ط $\leftarrow$ ط .

أن عملية الجمع (+) عملية ثنائية على ط ، أما عملية الطرح (−) ليست عملية ثنائية على ط ، فمثلاً العددان ٢ ، ٥ $\in$ ط ولكن ٢ − ٥ = −٣ $\notin$ ط

تعريف (٥ : ١)

العملية الثنائية ○ على مجموعة غير خالية سـ هي تطبيق مجاله سـ × سـ ومجاله المقابل المجموعة سـ نفسها .

ملاحظات :

– تسمى العملية الثنائية أحياناً بالعملية الداخلية أو بقانون التشكيل الداخلي .

– تتعين العملية الثنائية بربط كل زوج مرتب (س ، ص) من سـ × سـ بعنصر وحيد من سـ .

– العملية الثنائية قد لاتكون جمعاً أو ضرباً ولكنها نوع من أنواع التطبيقات يُعرف تعريفاً تاماً ، هو ما يعرف بقاعدة التطبيق .

– يرمز للعملية الثنائية برمز مثل : ○ أو $*$ أو $\oplus$ أو $\odot$ أو T أو Δ ... .

تدريب (٥ – ١) عين أياً من العمليات الأربع الاساسية عملية ثنائية على كل من المجموعات :

ط ، صـ ، ن ، ح .

مثال (٥ – ١) لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } والعملية « + » معرفة بالجدول(٥ – ١) التالي :

هل العملية « + » ثنائية ؟

+	١	٢	٣	٤
١	٢	٣	٤	٥
٢	٣	٤	٥	٦
٣	٤	٥	٦	٧
٤	٥	٦	٧	٨

جدول (٥ – ١)

الحل

تلاحظ من الجدول أن العملية « + » ليست ثنائية

لأن (١ ، ٤) ⟵ ٥ ، ٥ ∌ سـ .

مثال (٥ – ٢) لتكن العمليتان $\oplus$ ، $\odot$ معرفتين على سـ= { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } على النحو التالي :

ا $\oplus$ ب = باقي قسمة ا + ب على ١٠ ، ا $\odot$ ب = باقي قسمة ا ب على ١٠ ، بين ايّاً من العملتين ثنائية على سـ .

الحل نكوّن جدولاً لكل عملية على النحو التالي :

$\oplus$	٢	٤	٦	٨
٢	٤	٦	٨	٠
٤	٦	٨	٠	٢
٦	٨	٠	٢	٤
٨	٠	٢	٤	٦

جدول (٥ –٢)

$\odot$	٢	٤	٦	٨
٢	٤	٨	٢	٦
٤	٨	٦	٤	٢
٦	٢	٤	٦	٨
٨	٦	٢	٨	٤

جدول (٥ –٣)

تلاحظ من الجدول (٥ – ٢) أن العملية $\oplus$ ليست ثنائية لأن الصفر ∌ سـ .

وتلاحظ من الجدول (٥ – ٣) أن العملية $\odot$ ثنائية لأن كل عناصر الجدول تنتمي إلى سـ .

ملاحظات :

١) عند تكوين جدول عملية ما على مجموعة سـ وكانت جميع عناصر الجدول تنتمي إلى سـ تكون العملية ثنائية.

٢) صـن = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، (ن – ١) } .

صـ*ن = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، (ن – ١) } .

فمثلاً صـ٧ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، صـ*٥ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } .

كل من عملية الجمع $\oplus$ ، عملية الضرب $\odot$ على صـن تعرف كما يلي :

ا $\oplus$ ب = باقي قسمة ا + ب على ن $\forall$ ا ، ب ∋ صـن .

ا $\odot$ ب = باقي قسمة ا ب على ن $\forall$ ا ، ب ∋ صـن .

٣) إذا كانت سـ مجموعة مكونة من عنصرين فإن :

١ – عدد عناصر $س \times س = ٢ \times ٢ = ٤$.

٢ – عدد العمليات الثنائية « التطبيقات » من $س \times س$ إلى $س = ٢^{٤} = ١٦$.

وبصورة عامة : إذا كانت $س$ مجموعة مكونة من $د$ عنصر فإن عدد العمليات الثنائية التي يمكن تعريفها من $س \times س$ إلى $س$ يساوي $(د)^{د^{٢}}$.

مثال (٥ – ٣) إذا كانت العملية * ثنائية على $ص$ معرفة بالقاعدة :

أ * ب = أ + ٢ ب ∀ أ ، ب ∈ ص . فأوجد ما يلي :

١) ٢ * ٧ ، ٢) ٣ * –٥ ،

٣) –٥ * –٦ ، ٤) س حيث س * ٥ = ٣

الحـــل

١) ٢ * ٧ = ٢ + ١٤ = ١٦ ، ٢) ٣ * –٥ = ٣ – ١٠ = –٧ ،

٣) –٥ * –٦ = –٥ – ١٢ = –١٧ ،

٤) س * ٥ = س + ١٠ = ٣

∴ س = ٣ – ١٠

∴ س = –٧

تمارين ومسائل (٥–١)

[١] أكمل الفراغات في الجدول (٥ – ٤) .
بنعم إذا كانت العملية ثنائية ، بـ لا إذاكانت العملية ليست ثنائية .

المجموعة \ العملية	+	–	×	÷
ط	نعم	لا		
ص				لا
ن			نعم	
ح				

جدول (٥ – ٤)

[٢] لتكن $س = \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$ ، ولنعرف على $س$ العمليتين ⊕ ، ⊙ بالجدولين التاليين :

⊕	٠	١	٢	٣	٤	٥
٠			٢	٣		
١			٣	٤		
٢	٢	٣	٤	٥	٠	١
٣			٥	٠		
٤			٠	١		
٥		٠	١			

جدول (٥ – ٥)

⊙	٠	١	٢	٣	٤	٥
٠					٠	
١					٤	
٢	٠	٢	٤	٠	٢	٤
٣					٠	
٤					٤	
٥					٢	

جدول (٥ – ٦)

١ – أكمل الجدولين .

٢ – هل كل عملية ثنائية على سه ؟ اذكر السبب .

٣ – عيّن قاعدة كل عملية من جدولها .

[٣] إذا كانت العملية * ثنائية على صه معرفة بالقاعدة : ا * ب = ا + ب – ٥ ∀ ا ، ب ∈ صه ،
فأوجد ما يلي :

١) ٣ * ٥ ، –٥ * ٢ ، –٧ * –٢ . ٢) س حيث س *٩ = ٧ .

[٤] لتكن ع : ط × ط ⟵ ط معرفة بالقاعدة :

ع (س ، ص) = { س إذا كان س ≥ ص ، ص إذا كان س < ص

هل ع عملية ثنائية ؟

[٥] لتكن صه٥ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، وعرّفنا عليها العمليتين ⊕ ، ⊙ كما يلي :

ا ⊕ ب = باقي قسمة ا + ب على ٥ ، ا ⊙ ب = باقي قسمة ا ب على ٥ .

بيّن أياً من العمليتين ثنائية على صه٥ ، واذكر السبب .

[٦] إذا عرفنا العملية ⊙ على صه١٠ بالقاعدة :

ا ⊙ ب = باقي قسمة ا ب على ١٠ ∀ ا ، ب ∈ صه١٠ .

١ – مثل العملية ⊙ في جدول .

٢ – أوجد مجموعة الحل للآتي :

٢ ⊙ س = ٠ ، س ⊙ ٣ = ١ ، ٤ ⊙ س = ٣ .

[٧] إذا عرفنا العملية * على ط بالقاعدة :

ا * ب = $\frac{١}{٢}$ (ا + ب) ∀ ا ، ب ∈ ط . بيّن أن العملية * ليست ثنائية على ط .

[٨] هل عملية الطرح على مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على ٣ ثنائية ؟

٥ : ٢ خواص العملية الثنائية

١) خاصية الابدال :

تعريف (٥ : ٢)

العملية الثنائية ○ على مجموعة س تكون تبديلية إذا كان ا ○ ب = ب ○ ا
∀ ا ، ب ∈ س .

مثال (٥ – ٤) إذا عرفنا على ط* العمليتين ∗ ، ∆ كما يلي :

١ – ا ∗ ب = ا٢ + ب٢ .   ٢ – ا ∆ ب = ا^ب بيّن أي من العمليتين تبديلية .

الحل

١ – ا ∗ ب = ا٢ + ب٢ ، ب ∗ ا = ب٢ + ا٢ ، حيث ا٢ + ب٢ = ب٢ + ا٢ .

∴ ا ∗ ب = ب ∗ ا   ∴ العملية ∗ تبديلية على ط* .

٢ – ا ∆ ب = ا^ب ، ب ∆ ا = ب^ا .

فمثلاً ٣ ∆ ٢ = ٣٢ = ٩ ، ٢ ∆ ٣ = ٢٣ = ٨ .

∴ ا ∆ ب ≠ ب ∆ ا   ∴ العملية ∆ ليست تبديلية .

مثال (٥ – ٥) لتكن ص*٥ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، وعرفنا عليها العملية ⊙ كما يلي :

ا ⊙ ب = باقي قسمة ا ب على ٥ ، هل العملية ⊙ تبديلية ؟

الحل

نكوّن جدولاً للعملية ⊙ كما يلي :

⊙	١	٢	٣	٤
١	١	٢	٣	٤
٢	٢	٤	١	٣
٣	٣	١	٤	٢
٤	٤	٣	٢	١

جدول (٥ – ٧)

القطر الرئيس

ومنه تلاحظ أن :

∀ ا ، ب ∈ ص*٥ ، ا ⊙ ب = ب ⊙ ا .

∴ العملية ⊙ تبديلية .

ملاحظة

– في الأنظمة الرياضية التي تمثل عملياتها بجدول ؛ لكي تكون العملية تبديلية يكفي أن تكون العناصر المتناظرة بالنسبة لعناصر القطر الرئيسي متطابقة .

– القطر الرئيسي :هو القطر الهابط من الزاوية اليمنى أعلى الجدول إلى الزاوية اليسرى أسفل الجدول . (الجدول٥–٧)

٢) خاصية التجميع « الدمج » :

تعريف (٥ : ٣)

العملية الثنائية ○ على مجموعة س غير خالية تكون تجميعية إذا كان أ ○ (ب ○ جـ) = (أ ○ ب) ○ جـ ∀ أ ، ب ، جـ ∈ س .

مثال (٥ – ٦) لتكن س = { أ ، ب } ، وعرفنا عليها العملية ∇ بالجدول التالي . هل ∇ تجميعية؟

الحل

أ ∇ (أ ∇ أ) = أ ∇ أ = أ ، (أ ∇ أ) ∇ أ = أ ∇ أ = أ .

أ ∇ (أ ∇ ب) = أ ∇ ب = ب ، (أ ∇ أ) ∇ ب = أ ∇ ب = ب .

أ ∇ (ب ∇ أ) = أ ∇ ب = ب ، (أ ∇ ب) ∇ أ = ب ∇ أ = ب .

أ ∇ (ب ∇ ب) = أ ∇ ب = ب ، (أ ∇ ب) ∇ ب = ب ∇ ب = ب .

ب ∇ (أ ∇ أ) = ب ∇ أ = ب ، (ب ∇ أ) ∇ أ = ب ∇ أ = ب .

ب ∇ (ب ∇ ب) = ب ∇ ب = ب ، (ب ∇ ب) ∇ ب = ب ∇ ب = ب .

ب ∇ (ب ∇ أ) = ب ∇ ب = ب ، (ب ∇ ب) ∇ أ = ب ∇ أ = ب .

ب ∇ (أ ∇ ب) = ب ∇ ب = ب ، (ب ∇ أ) ∇ ب = ب ∇ ب = ب .

∇	أ	ب
أ	أ	ب
ب	ب	ب

جدول (٥ – ٨)

لاحظ أن عدد جميع الحالات الممكنة = ٨ وجميعها تحقق خاصية التجميع .

مثال (٥ – ٧) إذا عرّفنا العملية ✻ على ص بالقاعدة :

س ✻ ص = س + ص – ٥ ∀ س ، ص ∈ ص .

١ – هل العملية ✻ تبديلية ؟ ٢ – هل العملية ✻ تجميعية ؟

الحل

١ – س ✻ ص = س + ص – ٥ ، ص ✻ س = ص + س – ٥ ،

∵ الجمع على ص ابدالي .

∴ س ✻ ص = ص ✻ س . ∴ العملية ✻ تبديلية .

٢ – لكي تكون العملية ✻ تجميعية يجب أن يكون :

س ✻ (ص ✻ ع) = (س ✻ ص) ✻ ع ∀ س ، ص ، ع ∈ ص .

الطرف الأيمن = س ✻ (ص ✻ ع) = س ✻ (ص + ع – ٥) = س + ص + ع – ٥ – ٥

= س + ص + ع – ١٠ .

الطرف الأيسر = (س * ص) * ع = (س + ص − ٥) * ع = س + ص − ٥ + ع − ٥

= س + ص + ع − ١٠ .

∵ الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر .

∴ العملية * تجميعية .

مثال (٥ − ٨) لتكن العملية ⊥ معرّفة على مجموعة الأعداد النسبية ن بالقاعدة :

ا ⊥ ب = ا^{٢} + ٢ ب ، هل العملية ⊥ تجميعية ؟

الحل

لكي تكون العملية ⊥ تجميعية يجب أن يكون :

ا ⊥ (ب ⊥ جـ) = (ا ⊥ ب) ⊥ جـ ، ∀ ا ، ب ، جـ ∈ ن .

الأيمن = ا ⊥ (ب ⊥ جـ) = ا ⊥ (ب^{٢} + ٢ جـ) = ا^{٢} + ٢ (ب^{٢} + ٢ جـ) = ا^{٢} + ٢ب^{٢} + ٤ جـ .

الأيسر = (ا ⊥ ب) ⊥ جـ = (ا^{٢} + ٢ب) ⊥ جـ = (ا^{٢} + ٢ب)^{٢} + ٢ جـ

= ا^{٤} + ٤ ا^{٢} ب + ٤ ب^{٢} + ٢ جـ .

∴ ا ⊥ (ب ⊥ جـ) ≠ (ا ⊥ ب) ⊥ جـ

∴ العملية ⊥ ليست تجميعية .

٣) العنصر المحايد :

تعريف (٥ : ٤)

إذا كانت العملية ○ ثنائية على مجموعة س غير خالية وأمكن إيجاد عنصر و ∈ س بحيث يكون :

و ○ س = س ○ و = س ∀ س ∈ س فإن : و عنصراً محايداً للعملية ○ .

مثال (٥ − ٩) لنعرّف على ص العملية الثنائية * بالقاعدة : ا * ب = ا + ب − ٣ .

أوجد العنصر المحايد للعملية * .

الحل لكي يكون للعملية * عنصر محايد (و) يجب أن يكون :

و * س = س * و = س ∀ س ∈ ص .

و * س = و + س − ٣ = س ، س * و = س + و − ٣ = س

و − ٣ = ٠ ⟸ و = ٣ .

∴ العنصر المحايد هو ٣ .

مثال (٥ – ١٠) لتكن س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، وعرفنا عليها العمليتين ⊕، ⊙ باقي قسمة العمليتين على ١٠ كالتالي

{ ا ⊕ ب = باقي (ا+ب) على ١٠
{ ا ⊙ ب = باقي اب على ١٠ عين أياً من العمليتين لها عنصر محايد .

الحـــل نكوّن جدولاً لكل عملية على حدة كما يلي .

⊕	٢	٤	٦	٨
٢	٤	٦	٨	٠
٤	٦	٨	٠	٢
٦	٨	٠	٢	٤
٨	٠	٢	٤	٦

جدول (٥ – ٩)

⊙	٢	٤	٦	٨
٢	٤	٨	٢	٦
٤	٨	٦	٤	٢
٦	٢	٤	٦	٨
٨	٦	٢	٨	٤

جدول (٥ – ١٠)

من الجدول (٥ – ٩) تلاحظ أن العملية ⊕ ليست ثنائية لأن ٠ ∌ س .

∴ العملية ⊕ ليس لها عنصر محايد .

من الجدول (٥ – ١٠) نلاحظ أن العملية ⊙ ثنائية ، وحسب تعريف العنصر المحايد نجد أن العنصر المحايد ٦ ، لأن ٦ ⊙ س = س .

فمثلاً ٦ ⊙ ٢ = ٢ ، ٦ ⊙ ٤ = ٤ ، . . .

مما سبق نجد أن : العنصر المحايد هو العنصر الناتج من تقاطع صف يطابق الصف الرئيس في الجدول مع عمود يطابق العمود الرئيس .

مثال (٥ – ١١) إذا عرفنا على س = { جـ ، ء } العمليات * ، ⊙ ، Δ بالجداول التالية :

*	جـ	ء
جـ	جـ	ء
ء	ء	ء

جدول (٥ – ١١)

⊙	جـ	ء
جـ	جـ	ء
ء	جـ	جـ

جدول (٥ – ١٢)

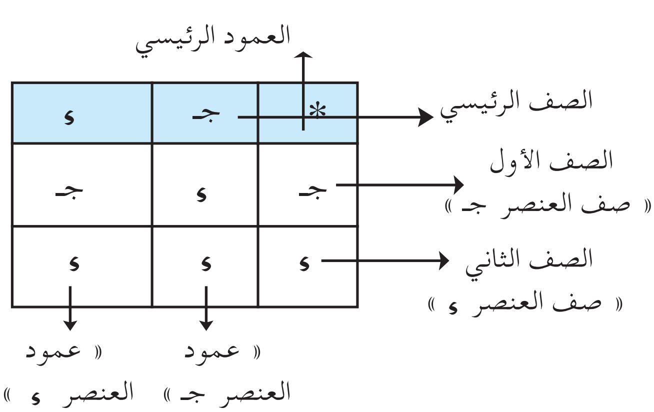
Δ	جـ	ء
جـ	ء	جـ
ء	جـ	ء

جدول (٥ – ١٣)

نلاحظ في الجدول (٥ – ١١) لا توجد عناصر تطابق الصف الرئيس بالترتيب رغم أنه يوجد عناصر تطابق العمود الرئيسي .

∴ لايوجد عنصر محايد للعملية * .

في الجدول (٥ –١٢) تلاحظ عناصر الصـــف جـ تطابق عناصـــر الصف الرئيسـي ولكن عناصـــر العمود جـ لا تطابق عناصر العمود الرئيسي .



∴ لايوجد للعملية ⊙ عنصر محايد .

في الجدول (٥ – ١٣) تلاحظ أن عناصر الصف ء تطابق عناصر الصف الرئيسي وعناصر عموده تطابق عناصر العمود الرئيسي .

∴ العنصر المحايد للعملية Δ هو ء . (ء هو عنصر تقاطع الصف الثاني والعمود الثاني) .

٤) نظير « أو معكوس » العنصر :

تعريف (٥ : ٥)

إذا كانت العملية ○ ثنائية على مجموعة غير خالية سـ ، لها عنصر محايد « و » ، وكان ∀ س ∈ سـ يوجد س̄ ∈ سـ بحيث يكون : س ○ س̄ = س̄ ○ س = و
نسمي س̄ نظير (أو معكوس) العنصر س بالنسبة للعملية الثنائية ○ في سـ .

مثال (٥ – ١٢) إذا عرّفنا العملية الثنائية ∗ على ح* بالقاعدة :

ا ∗ ب = ٢ ا ب ∀ ا ، ب ∈ ح* ، عيّن العنصر المحايد ونظير كل عنصر (إن أمكن) .

الحل

– لكي يكون للعملية الثنائية ∗ عنصر محايد (و) يجب أن يكون :

ا ∗ و = و ∗ ا = ا ∀ ا ∈ ح* ، أي أن : ا ∗ و = ٢ ا و = ا « عملية الضرب على ح ابدالية » .

∴ و = $\frac{١}{٢}$

– لكي يكون ∀ س ∈ ح* نظير س̄ ∈ ح* يجب أن يكون :

س ∗ س̄ = س̄ ∗ س = و .

أي أن س ∗ س̄ = ٢ س س̄ = $\frac{١}{٢}$ ، س̄ ∗ س = ٢ س̄ س = $\frac{١}{٢}$.

∴ س̄ = $\frac{١}{٤\ س}$.

أي أن نظير أيّ عنصر يساوى مقلوب أربعة أمثال العنصر .

فمثلاً نظير العنصر ٥ يساوى $\frac{١}{٤ \times ٥}$ = $\frac{١}{٢٠}$ ، نظير العنصر (–٣) يساوى $\frac{١}{٤ \times -٣}$ = $\frac{-١}{١٢}$.

مثال (٥ – ١٣) لتكن سـ = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } ، وعرّ فنا عليها العمليتين ⊕ ⊙ باقي قسمة العمليتين على ١٥ ،

أي
ا ⊕ ب = باقي (ا+ب) على ١٥
ا ⊙ ب = باقي اب على ١٥

عيِّن أيّاً من العمليتين لها عنصر محايد ، هل لكل عنصر نظير ؟

الحل

نكوّن جدولاً لكل عملية .

⊕	٣	٦	٩	١٢
٣	٦	٩	١٢	٠
٦	٩	١٢	٠	٣
٩	١٢	٠	٣	٦
١٢	٠	٣	٦	٩

جدول (٥ – ١٤)

⊙	٣	٦	٩	١٢
٣	٩	٣	١٢	٦
٦	٣	٦	٩	١٢
٩	١٢	٩	٦	٣
١٢	٦	١٢	٣	٩

جدول (٥ – ١٥)

من الجدول (٥ – ١٤) نلاحظ أن العملية ⊕ ليست عملية ثنائية لأن ٠ $\notin$ س .

∴ ليس للعملية ⊕ عنصر محايد ، لايمكن البحث عن نظير كل عنصر .

من الجدول (٥ – ١٥) نلاحظ أن العملية ⊙ ثنائية .

∴ العنصر المحايد هو ٦ . هو العنصر الناتج من تقاطع الصف الثاني (الذي يطابق الصف الرئيسي) والعمود الثاني (الذي يطابق العمود الرئيسي) .

النظير ٣ ⊙ ١٢ = ١٢ ⊙ ٣ = ٦ ، العنصران ٣ ، ١٢ متناظران .

٦ ⊙ ٦ = ٦ العنصر المحايد نظير نفسه .

٩ ⊙ ٩ = ٦ العنصر ٩ نظير نفسه .

مثال (٥ – ١٤) إذا عرّفنا على س = { أ ، ب ، جـ } العمليات ∗ ، ○ ، ∇ ، ∆ في الجداول التالية :

∗	أ	ب	جـ
أ	أ	ب	جـ
ب	ب	جـ	أ
جـ	جـ	أ	أ

جدول (٥ – ١٦ – أ)

○	أ	ب	جـ
أ	جـ	أ	ب
ب	أ	ب	جـ
جـ	أ	جـ	ب

جدول (٥ – ١٦ – ب)

∇	أ	ب	جـ
أ	ب	أ	أ
ب	أ	ب	جـ
جـ	أ	جـ	ب

جدول (٥ – ١٦ – جـ)

∆	أ	ب	جـ
أ	جـ	أ	ب
ب	أ	ب	جـ
جـ	ب	جـ	أ

جدول (٥ – ١٦ – ء)

بيّن الخواص « الإبدال ، التجميع ، العنصر المحايد ، النظير » في كل من الأنظمة التالية :

(س ، ∗) ، (س ، ○) ، (س ، ∇) ، (س ، ∆) .

الحل

النظام (س ، ∗) إبدالي ، ليس تجميعي لأن :

ب ∗ (ب ∗ جـ) = ب ∗ أ = ب $\neq$ (ب ∗ ب) ∗ جـ = جـ ∗ جـ = أ .

العنصر المحايد أ . أ نظيره أ ، ب نظيره جـ ، جـ له نظيران ب ، جـ .

النظام (س ، ○) : غير إبدالي لأن العناصر المتناظر بالنسبة لعناصر القطر الرئيسي غير متطابقة، تجميعي لجميع الحالات « ٢٧ حاله » تأكد من ذلك .

العنصر المحايد ب .

النظير أ ○ جـ = ب ، جـ ○ أ = أ ، ∴ أ ○ جـ ≠ جـ ○ أ .

∴ أ ليس له نظير .

ب نظيره ب « عنصر محايد » ، جـ ○ جـ = ب ∴ جـ نظير نفسه .

النظام (س ، ∇) : إبدالي . لماذا ؟

ليس تجميعي لأن أ ∇ (أ ∇ جـ) = أ ∇ أ = ب ، (أ ∇ أ) ∇ جـ = ب ∇ جـ = جـ .

∴ أ ∇ (أ ∇ جـ) ≠ (أ ∇ أ) ∇ جـ .

العنصر المحايد ب

النظير كما في الجدول المقابل.

العنصر	أ	ب	جـ
النظير	أ	ب	جـ

النظام (س ، ∆) : ابدالي . تجميعي « تأكد من ذلك »

العنصر المحايد ب

النظير كما في الجدول المقابل.

العنصر	أ	ب	جـ
النظير	جـ	ب	أ

ملاحظات :

– إذا كان ليس للعملية الثنائية عنصر محايد فلا معنى للبحث عن نظير أي عنصر .

– يتم البحث عن نظير العنصر كما يلي :

■ إذا كان أ عنصراً من عناصر العمود الرئيسي فإن نظيره هو العنصر ب من عناصر الصف الرئيسي تقاطعهما العنصر المحايد والعكس صحيح .

– إذا كانت عناصر القطر الرئيسي هي العنصر المحايد فإن نظير كل عنصر نفسه .

تمارين ومسائل (٥ – ٢)

[١] إذا عرّفنا على س = { أ ، ب ، جـ ، و } العمليات ∇ ، * ، ○ في الجداول التالية عيّن الخواص « الإبدال ، العنصر المحايد ، النظير » لكل عملية.

∇	أ	ب	جـ	و
أ	أ	ب	جـ	و
ب	جـ	جـ	ب	أ
جـ	و	أ	جـ	ب
و	ب	و	أ	جـ

جدول (٥ – ١٧– أ)

*	أ	ب	جـ	و
أ	جـ	و	ب	أ
ب	و	ب	أ	ب
جـ	ب	أ	و	جـ
و	أ	ب	جـ	و

جدول (٥ – ١٧– ب)

○	أ	ب	جـ	و
أ	و	جـ	ب	أ
ب	أ	و	جـ	ب
جـ	ب	أ	و	جـ
و	أ	ب	جـ	و

جدول (٥ – ١٧– جـ)

[٢] لتكن سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ، وعرّفنا عليها العمليات ∇ ، ∗ ، ○ ، بالجداول التالية عيِّن العملية الثنائية ومنها . أوجد ما يلي :

١ – العنصر المحايد – إن وجد – .   ٢ – نظير كل عنصر – إن أمكن – لكل عملية .

٣ – قاعدة كل عملية .

∇	١	٣	٥	٧
١	١	٢	٣	٤
٣	٢	٣	٤	٥
٥	٣	٤	٥	٦
٧	٤	٥	٦	٧

جدول (٥ – ١٨– أ)

∗	١	٣	٥	٧
١	١	٣	٥	٧
٣	٣	٣	٥	٧
٥	٥	٥	٥	٧
٧	٧	٧	٧	٧

جدول (٥ – ١٨– ب)

○	١	٣	٥	٧
١	١	٣	٥	٧
٣	٣	١	٧	٥
٥	٥	٧	١	٣
٧	٧	٥	٣	١

جدول (٥ – ١٨– جـ)

[٣] العملية الثنائية ∗ معرفة على صـ بالقاعدة : س ∗ ص = ٣س + ٢ ص ∀ س، ص ∈ صـ ، أجب عما يأتي :

١ – هل ∗ تبديلية ؟   ٢ – هل ∗ تجميعية ؟

٣ – هل للعملية ∗ عنصر محايد ؟   ٤ – هل لكل عنصر نظير ؟ وضح السبب .

[٤] إذا عرّفنا على ح* العملية الثنائية Δ بالقاعدة أ Δ ب = أ ب – ٥ ∀ أ ، ب ∈ ح* :

أ) هل العملية Δ تجميعية ؟

ب) هل للعملية الثنائية Δ عنصر محايد ؟ وإذا كانت الإجابة بنعم ، فأوجد قاعدة النظير .

[٥] لنعرّف العمليتين ⊕ ، ⊙ على صـ$_٥$:

١ – كوّن جدولاً لكل عملية .   ٢ – بيّن خاصية التجميع لكل عملية .

٣ – عيّن العنصر المحايد لكل عملية .   ٤ – عيّن نظير كل عنصر لكل عملية – إن أمكن – .

[٦] لنعرّف العمليتين ∗ ، ○ على صـ على النحو التالي :

أ ∗ ب = أ + ب – ١ ، أ ○ ب = أ ب ∀ أ ، ب ∈ صـ* المطلوب

١ – أثبت أن كلاً من العمليتين ∗ ، ○ تجميعية .   ٢ – عيّن العنصر المحايد لكل عملية – إن وجد – .

٣ – أوجد نظير كلٍّ من العنصرين ٣ ، ٥ في كلٍ من العمليتين .

[٧] لنعرّف العملية ∇ على ح / { ١ } بالقاعدة :

س ∇ ص = س + ص – س ص ∀ س ، ص ∈ ح / { ١ } .

١ – هل العملية تجميعية ؟   ٢ – هل للعملية عنصر محايد ؟

٣ – هل لكل عنصر نظير ؟ وإن كان ذلك . فأوجد قاعدة النظير .

٥ : ٣ النظام الرياضي

تعريف (٥ : ٦)

الزوج المرتب (س ، *) الذي مسقطه الأول مجموعة غير خالية س ومسقطه الثاني العملية الثنائية * على س يسمى نظاماً رياضياً « أو بنية جبرية » ذا عملية واحدة .

مثال (٥ – ١٥) – كلٌّ من الأزواج (ط ، ×) ، (ن ، +) ، (ص ، –) ، (ح ، ×) أنظمة رياضية بعملية واحدة .

– كلٌّ من الأزواج (ط ، –) ، (ص ، ÷) ليست أنظمة رياضية .

مثال (٥ – ١٦) إذا كانت ف = مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية ، عيّن أيّا من الأزواج الآتية يمثل نظاماً رياضياً (ف ، +) ، (ف ، ×) .

الحل

∵ مجموع أيّ عددين طبيعين فرديين يساوى عدداً طبيعياً زوجياً .

∴ العملية + ليست ثنائية على ف .

∴ (ف ، +) لايمثل نظاماً رياضياً .

∵ حاصل ضرب عددين طبيعين فرديين يساوى عدداً طبيعياً فردياً .

∴ العملية × عملية ثنائية على ف .

∴ (ف ، ×) يمثل نظاماً رياضياً .

مثال (٥ – ١٧) إذا عرفنا العملية * على ط بالقاعدة : س *ص = $\frac{س + ص}{٢}$ ∀س ، ص ∈ ط ، هل (ط ، *) نظام رياضي ؟

الحل

نميز ثلاث حالات :

١ – إذا كان س ، ص عددين زوجيين فإن : س *ص = عدد طبيعي .

٢ – إذا كان س ، ص عددين فرديين فإن : س *ص = عدد طبيعي .

٣ – إذا كان س أو ص فردياً والآخر زوجياً فإن : س *ص ∌ ط .

مثل ٥ * ٦ = $\frac{٥ + ٦}{٢}$ = $\frac{١١}{٢}$ ∌ ط .

∴ العملية * ليست عملية ثنائية على ط .

∴ (ط ، *) لايمثل نظاماً رياضياً .

مثال (٥ – ١٨) لتكن $س = \{$ ﺃ ، ب ، جـ ، ء $\}$ ، وعرفنا عليها العملية ◊ بالجدول (٥–١٩) التالي . هل (سـ ، ◊) نظام رياضي ؟

◊	ﺃ	ب	جـ	ء
ﺃ	ب	ﺃ	ء	جـ
ب	ﺃ	ب	جـ	ء
جـ	ء	جـ	ب	ﺃ
ء	جـ	ء	ﺃ	ب

جدول (٥ –١٩)

الحــل

$\forall$ س ، ص $\in$ سـ نجد أن :

س ◊ ص $\in$ سـ .

$\therefore$ ◊ عملية ثنائية على سـ .

$\therefore$ (سـ ، ◊) نظام رياضي .

تمارين ومسائل (٥ – ٣)

[١] بيّن أيّا من الأزواج الآتية يمثل نظاماً رياضياً : (ط* ، ÷) ، (صـ ، ×) ، (ن ، ×) ، (ن ، ÷) ، (ح* ، ×) .

[٢] لتكن العمليتان ○ ، * معرفتين على سـ $= \{$ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ $\}$ ، في الجدولين التاليين :
١ – بيّن أيا من العمليتين تمثل نظاماً رياضياً . ٢ – أوجد قاعدة لكل عملية .

○	١	٣	٥	٧
١	١	٢	٣	٤
٣	٢	٣	٤	٥
٥	٣	٤	٥	٦
٧	٤	٥	٦	٧

جدول (٥ – ٢٠ –ﺃ)

*	١	٣	٥	٧
١	١	٣	٥	٧
٣	٣	٣	٥	٧
٥	٥	٥	٥	٧
٧	٧	٧	٧	٧

جدول (٥ – ٢٠ –ب)

[٣] لتكن سـ $= \{$ ٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢١ $\}$ ، والعمليتا ن Δ ، ○ معرفتان على سـ ، كما يلي :

١) ﺃ Δ ب $= \frac{\text{ﺃ} + \text{ب}}{٣}$. ٢) ﺃ○ب $= \frac{\text{ﺃ} \times \text{ب}}{٣}$.

هل الزوجان (سـ ، Δ) ، (سـ ، ○) يمثلان نظامين رياضيين ؟ واذكر السبب .

[٤] لتكن سـ $= \{$ ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ $\}$ ، والعملية ▭ معرفة على سـ بالقاعدة :
ﺃ ▭ ب = ب كوّن جدولاً للعملية ، وهل (سـ ، ▭) نظام رياضي ؟

[٥] لتكن العملية * معرفة على ط بالقاعدة س * ص = س^{٢} + ص^{٢} . هل (ط ، *) نظام رياضي ؟

[٦] لتكن $ص_٤ = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ \}$ ، والعمليتان ⊕ ، ⊙ معرفتين كما يلي :

ا ⊕ ب = باقي قسمة ا + ب على ٤ ∀ ا ، ب ∈ $ص_٤$ ،

ا ⊙ ب = باقي قسمة ا ب على ٤ ∀ ا ، ب ∈ $ص^*_٤$

١ – كوّن جدولاً لكل عملية .

٢ – بين أيّا من ($ص_٤$ ، ⊕) ، ($ص^*_٤$ ، ⊙) يمثل نظاماً رياضياً .

[٧] إذا عرّفنا العملية ○ على ح بالقاعدة : س ○ ص = ٣ س + ٢ ص . هل (ح ، ○) نظام رياضي؟

[٨] إذا عرّفنا العملية ◊ على ح بالقاعدة : ا ◊ ب = ا + ب – ا ب ، هل (ح ، ◊) نظام رياضي؟

٥ : ٤ الزمرة

تعريف (٥ : ٧)

يسمى النظام الرياضي (س ، *) زمرة إذا تحققت فيه الشروط التالية :

١ – العملية * تجميعية . **٢ – يوجد عنصر محايد .**

٣ – يوجد لكل عنصر س ∈ س نظير $\bar{س}$ ∈ س ،

وإذا كانت * عملية إبدالية « يسمى النظام زمرة إبدالية » .

لاحظ أن : ا) الأنظمة (ص ، +) ، ($ح^*$ ، ×) (ن ، +) يمثل كلٌ منها زمرة إبدالية :

ب) النظام (ط ، +) لايمثل زمرة لأن الشرط الثالث لم يتوفر أي لايوجد لكل عنصر من ط نظير جمعي عدا العنصر المحايد .

مثال (٥ – ١٩) لتكن $ص^*_٥ = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$ ، والعملية ⊙

حيث ا ⊙ ب باقي قسمة ا ب على ٥

أثبت أن النظام ($ص^*_٥$ ، ⊙) زمرة تبديلية .

الحـــل نكون جدولاً للعملية ⊙ ومنه نجد أن :

⊙	١	٢	٣	٤
١	١	٢	٣	٤
٢	٢	٤	١	٣
٣	٣	١	٤	٢
٤	٤	٣	٢	١

جدول (٥ – ٢١)

١ – ∀ ا ، ب ، جـ ∈ $ص^*_٥$ ،

ا ⊙ (ب ⊙ جـ) = (ا ⊙ ب) ⊙ جـ

لجميع الحالات « ٦٤ حالة » تأكد من ذلك .

∴ العملية ⊙ تجميعية .

٢ – العنصر المحايد ١ وذلك من تقاطع الصف الأول والعمود الأول المطابقين لنظائرهما الرئيسيين .

٣ – النظير .

أي تقاطع العنصر مع نظيره يعطى العنصر المحايد

العنصر	١	٢	٣	٤
النظير	١	٣	٢	٤

∵ ∀ ا ب ∋ $ص_{ه}^{*}$ ا ⊙ ب = ب ⊙ ا .

∴ النظام ($ص_{ه}^{*}$ ، ⊙) زمرة تبديلية .

مثال (٥ – ٢٠) لتكن $ص_{٦}$ ={ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، والعمليتان ⊕ ، ⊙ معرّفتان كما في الجدولين التاليين ، عيّن اياً من النظامين ($ص_{٦}$ ، ⊕) ، ($ص_{٦}$ ، ⊙) يمثل زمرة .

⊕	٠	١	٢	٣	٤	٥
٠	٠	١	٢	٣	٤	٥
١	١	٢	٣	٤	٥	٠
٢	٢	٣	٤	٥	٠	١
٣	٣	٤	٥	٠	١	٢
٤	٤	٥	٠	١	٢	٣
٥	٥	٠	١	٢	٣	٤

جدول (٥ – ٢٢)

⊙	٠	١	٢	٣	٤	٥
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٢	٣	٤	٥
٢	٠	٢	٤	٠	٢	٤
٣	٠	٣	٠	٣	٠	٣
٤	٠	٤	٢	٠	٤	٢
٥	٠	٥	٤	٣	٢	١

جدول (٥ – ٢٣)

أولاً – النظام ($ص_{٦}$ ، ⊕) : من الجدول (٥ – ٢٢) نجد أن :

١ – ∀ ا ، ب ، جـ ∋ $ص_{٦}$ ، (ا ⊕ ب) ⊕ جـ = ا ⊕ (ب ⊕ جـ) .

أي أن العملية ⊕ تجميعية .

٢ – العنصر المحايد هو الصفر الناتج من تقاطع الصف الأول مع العمود الأول .

٣ – النظير لكل عنصر كما في الجدول :

العنصر	٠	١	٢	٣	٤	٥
نظيره	٠	٥	٤	٣	٢	١

∴ ($ص_{٦}$ ، ⊕) زمرة .

∵ ∀ ا ، ب ∋ $ص_{٦}$ ، ا ⊕ ب = ب ⊕ ا ، ∴ ($ص_{٦}$ ، ⊕) زمرة تبديلية .

ثانياً – النظام (ص٦ ، ⊙) :

من الجدول (٥ – ٢٣) نجد أن :

١ – ∀ ا ، ب ، جـ ∈ ص٦ ، (ا ⊙ ب) ⊙ جـ = ا ⊙ (ب ⊙ جـ) .

∴ العملية ⊙ تجميعية .

٢ – العنصر المحايد هو ١ .

٣ – النظير : ١ نظيره ١ « عنصر محايد » ، ٥ نظيره ٥ بقية العناصر ليس لها نظائر .

∴ (ص٦ ، ⊙) لايمثل زمرة .

مثال (٥ – ٢١) لنعرف العملية * على مجموعة الأعداد الحقيقية ح بالقاعدة :

ا * ب = ا + ب – $\frac{١}{٢}$ ، أثبت أن النظام (ح ، *) زمرة تبديلية .

الحـــل

١ – لكي تكون العملية * تجميعية يجب أن يكون : ∀ ا ، ب ، جـ ∈ ح

ا * (ب * جـ) = (ا * ب) * جـ .

الطرف الأيمن = ا * (ب * جـ) = ا * (ب + جـ – $\frac{١}{٢}$) = ا + ب + جـ – $\frac{١}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$

= ا + ب + جـ – ١ .

الطرف الأيسر = (ا * ب) * جـ = (ا + ب – $\frac{١}{٢}$) * جـ = ا + ب – $\frac{١}{٢}$ + جـ – $\frac{١}{٢}$.

= ا + ب + جـ – ١ .

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر ، ∴ العملية * تجميعية .

٢ – لكي يكون للعملية * عنصر محايد (و) يجب أن يكون ∀ ا ∈ ح .

ا * و = و * ا = ا .

أي أن : ا * و = ا + و – $\frac{١}{٢}$ = ا .

∴ و – $\frac{١}{٢}$ = ا – ا ، ∵ « الجمع إبدالي »

∴ و – $\frac{١}{٢}$ = ٠ ، ∴ و = $\frac{١}{٢}$.

٣ – لكي يكون لكل عنصر س ∈ ح نظير $\bar{س}$ ∈ ح يجب أن يكون :

$س * \bar{س} = \bar{س} * س = و$

أي أن : $س * \bar{س} = س + \bar{س} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \bar{س} = ١ - س$.

$\bar{س} * س = س + \bar{س} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$.

$\bar{س} = ١ - س$ أي أن : « نظير أي عنصر يساوى واحد ناقص نفس العنصر » .

$\because \forall$ أ ، ب $\in$ ح أ $*$ ب = ب $*$ أ « الجمع إبدالي على ح » .

النظام (ح ، $*$) زمرة تبديلية .

مبرهنة (٥ : ١)

إذا كان (سہ ، $*$) زمرة فإن : ١ – يوجد عنصر محايد وحيد . ٢– لكل عنصر من سہ نظير وحيد .

البرهان :

١) نفرض أن للزمرة (سہ ، $*$) عنصرين محايدين $و_١$ ، $و_٢$.

$\because$ $و_١$ عنصر محايد $\therefore$ $و_١ * و_٢ = و_٢ * و_١ = و_٢$ .... (١)

$\because$ $و_٢$ عنصر محايد $\therefore$ $و_٢ * و_١ = و_١ * و_٢ = و_١$ .... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $و_١ = و_٢$ $\therefore$ العنصر المحايد وحيد .

٢) نفرض أن للعنصر س نظيرين $\bar{س}$ ، $\bar{\bar{س}}$ فيكون :

$(\bar{س} * س) * \bar{\bar{س}} = و * \bar{\bar{س}} = \bar{\bar{س}}$ ، $\bar{س} * (س * \bar{\bar{س}}) = \bar{س} * و = \bar{س}$

من خاصية التجميع : $(\bar{س} * س) * \bar{\bar{س}} = \bar{س} * (س * \bar{\bar{س}})$

$\therefore$ $\bar{س} = \bar{\bar{س}}$ « النظير وحيد » .

مبرهنة (٥ : ٢)

إذا كانت (سہ ، $*$) زمرة وكان : ١) أ $*$ ب = أ $*$ جـ فإن ب = جـ

٢) ب $*$ أ = جـ $*$ أ فإن ب = جـ

البرهان :

١) أ $*$ ب = أ $*$ جـ أرفق نظير أ ($\bar{أ}$) للطرفين من اليمين .

$\bar{أ} * (أ * ب) = \bar{أ} * (أ * جـ)$ من خاصية التجميع .

$(\bar{أ} * أ) * ب = (\bar{أ} * أ) * جـ \Leftarrow و * ب = و * جـ$. ، $\therefore$ ب = جـ .

٢) ب * ا = جـ * ا   أرفق نظير ا (اَ) للطرفين من اليسار

(ب * ا) * اَ = (جـ * ا) * اَ ⟸ ب * (ا * اَ) = جـ * (ا * اَ) ⟸

ب * و = جـ * و .   ∴ ب = جـ .

مبرهنة (٥ : ٣)

إذا كانت (س ، *) زمرة فإن للمعادلة : ب * س = جـ   حلاً وحيداً هو س = بَ * جـ ،
وكذلك للمعادلة : س * ب = جـ   حل وحيد هو   س = جـ * بَ .

البرهان :

١) ب * س = جـ   بإرفاق بَ (نظير ب) من اليمين للطرفين .

بَ * (ب * س) = بَ * جـ ⟸ (بَ * ب) * س = بَ * جـ ⟸

و * س = بَ * جـ ،   ∴ س = ب * جـ   هو حلاً للمعادلة .

لنفرض أن للمعادلة حل آخر هو س = ء ،   أي أن : بَ * ء = جـ

وبنفس الاسلوب السابق نجد أن : ء = ب * جـ .   ،   ∴ الحل وحيد .

٢) يترك برهان الجزء الثاني كتمرين للطالب .

تعريف (٥ : ٨)

العناصر المنتظمة إذا كانت * عملية ثنائية معرفة على س وكان ا ∈ س فإن ا عنصر منتظم
إذا تحقق ما يلي : ∀ ب ، جـ ∈ س فإن : ا * ب = ا * جـ ، ب * ا = جـ * ا ⟸ ب = جـ .

مثال (٥ – ٢٢) إذا عرّفنا على ط العملية * بالقاعدة : س * ص = س + ٢ص ∀ س ، ص ∈ ط .

١ – هل العنصران ٠ ، ١ منتظمان ؟   ٢ – هل توجد عناصر في ط غير منتظمة ؟

الحـــل

١ – ∀ ب ، جـ ∈ ط ، صفر * ب = صفر * جـ ⟸ صفر + ٢ب = صفر + ٢جـ ⟸ ب = جـ

كما أن : ب * ٠ = جـ * ٠ ⟸ ب = جـ .   ،   ∴ الصفر عنصر منتظم .

وبالمثل ١ * ب = ١ * جـ ⟸ ١ + ٢ ب = ١ + ٢ جـ ⟸ ب = جـ .

كما أن : ب * ١ = جـ * ١ ⟸ ب + ٢ = جـ + ٢ ⟸ ب = جـ .

∴ العنصر « ١ » منتظم .

٢ – بفرض أن س ∈ ط فإن :

س * ب = س * جـ ⟸ س + ٢ ب = س + ٢ جـ ⟸ ب = جـ .

ب * س = جـ * س ⟸ ب + ٢ س = جـ + ٢ س ⟸ ب = جـ .

∴ ∀ س ∈ ط نجد أن س عنصر منتظم .

مثال (٥ – ٢٣) إذا كان النظام (صه* ، ⊗) يمثل زمرة :

١ – عيّن العناصر المنتظمة في صه* .   ٢ – حل المعادلتين ، س ⊗ ٤ = ٣ ، ٣ ⊗ س = ٤ .

الحـــل

١ – بفرض س ∈ صه* ∀ ب ، جـ ∈ صه* ، فإن : س ⊗ ب = س ⊗ جـ .

∵ (صه* ، ⊗) زمرة .   ∴ $\bar{س}$ ∈ صه* .

∴ ($\bar{س}$ ⊗ س) ⊗ ب = ($\bar{س}$ ⊗ س) ⊗ جـ

و ⊗ ب = و ⊗ جـ ⟸ ب = جـ —— (١)

ب ⊗ س = جـ ⊗ س ⟸ ب ⊗ (س ⊗ $\bar{س}$) = جـ ⊗ (س ⊗ $\bar{س}$)

ب ⊗ و = جـ ⊗ و ⟸ ب = جـ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : جميع عناصر صه* منتظمة .

٢– س ⊗ ٤ = ٣ ⟸ س ⊗ (٤ ⊗ $\bar{٤}$) = ٣ ⊗ $\bar{٤}$.

∴ س ⊗ ١ = ٣ ⊗ ٤ ⟸ س = ٢

، ٣ ⊗ س = ٤ ⟸ ($\bar{٣}$ ⊗ ٣) ⊗ س = $\bar{٣}$ ⊗ ٤

∴ س = ٢ ⊗ ٤ . ، ∴ س = ٣ .

تمارين ومسائل (٥–٤)

[١] لتكن سه = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، وعرّفنا عليها العمليات ▽ ، Δ ، * ، ○ بالجداول التالية :

▽	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٢	٢	٣
٣	٣	٣	٣

جدول (٥ – ٢٤–أ)

Δ	١	٢	٣
١	١	١	١
٢	١	٢	٢
٣	١	٢	٣

جدول (٥ – ٢٤– ب)

*	١	٢	٣
١	٢	٣	١
٢	٣	١	١
٣	١	١	٢

جدول (٥ – ٢٤– جـ)

○	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٢	١	٢
٣	٣	٢	١

جدول (٥ – ٢٤ – ء)

بيّن أيّاً من الأنظمة (سه ، ▽) ، (سه ، Δ) ، (سه ، *) ، (سه ، ○) يمثل زمرة تبديلية .

[٢] العمليتان $\oplus$ ، $\odot$ معرّفتان على صـ$_{٧}$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } قياس العدد ٧ ، بيّن اياً من الأنظمة التالية يمثل زمرة (صـ$_{٧}$ ، $\oplus$) ، (صـ$_{٧}$ ، $\otimes$) ، (صـ$_{٧}$ ، $\odot$) .

[٣] بيّن أيّاً من الأنظمة التالية تمثل زمرة : (ط ، ×) ، (ن ، +) ، (ن ، ×) ، (ن* ، ×) .

[٤] لتكن سـ = { –١ ، ١ } هل (سـ ، *) زمرة ؟ حيث * عملية الضرب العادي .

[٥] لتكن سـ = { –١ ، ٠ ، ١ } هل (سـ ، ○) زمرة ؟ حيث ○ عملية الجمع العادي .

[٦] لتكن سـ = { س : س = ٧ د ، د ∈ صـ } ، برهن أن (سـ ، +) زمرة ابدالية .

[٧] أيٌّ من الأنظمة التالية تشكل زمرة وأيّها لاتشكل زمرة ، مع ذكر السبب :

١ – (صـ ، *) حيث ا * ب = ا – ٢ ب ∀ ا ، ب ∈ صـ .

٢ – (صـ$^{*}_{+}$ ، ○) حيث ا ○ ب = ا ب ∀ ا ، ب ∈ صـ$^{*}_{+}$.

٢ – (صـ$^{*}_{٥}$ ، $\otimes$) حيث $\otimes$ عملية الضرب قياس العدد ٥ .

[٨] في النظام (ح* ، ○) العملية ○ معرّفة بالقاعدة : ا ○ ب = ٢ ا ب

١ – أثبت أن (ح* ، ○) زمرة تبديلية .

٢ – حل المعادلتين : س ○ ٧ = ٤٢ ، ٣ ○ س = –٣٠ .

[٩] إذا عرّفنا العملية * على صـ بالقاعدة : س * ص = س + ص – ٥ ∀ س ، ص ∈ صـ .

هل (صـ ، *) يمثل زمرة ؟ وضّح السبب .

[١٠] إذا عرّفنا العملية ○ على ح بالقاعدة : س ○ ص = س + س ص ∀ س ، ص ∈ ح .

١ – بيّن أيّاً من العناصر –١ ، ٠ ، ١ منتظمة .

٢ – ما هي العناصر غير المنتظمة في ح ؟

[١١] إذا عرّفنا العملية * على ح/{ –١ } بالقاعدة :

س * ص = س + ص + س ص ∀ س ، ص ∈ (ح/{ –١ }) بيّن إن كان (ح/{ –١ } ، *) يمثل زمرة .

تمت بحمد الله

استبانة تقويم الكتاب

بيانات المستجيب:

الاسم/..	المؤهل وتاريخه/..	التخصص/..
العمل الحالي /..	المحافظة/..	

بيانات الكتاب:

المادة /..	الصف /..	اسم الكتاب /..
الجزء /..	الطبعة..	السنة الدراسية /..
تاريخ تعبئة الاستبانة..		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبعات القادمة.
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

البـنـد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
أولاً- الأهداف: - وضوح الصياغة .				
- تقيس فكرة محددة .				
- يمكن قياسها .				
- شاملة (معرفية - مهارية - وجدانية) .				
ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها: - ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم .				
- سلامة ووضوح لغة الكتاب .				
- ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية .				
- مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة .				
- ملامسة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته .				
- مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات .				
- مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية .				
- خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات .				
- يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي .				
- مراعاة مادة الكتاب للحداثة والدقة العلمية .				
- عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير .				
- تحقيق المحتوى لأهداف المادة .				

البـنـد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
ثالثاً - الوسائل التعليمية: - وضوحها ودقتها .				
- ارتباطها بموضوعات الدرس .				
- مدى ارتباطها بالأهداف .				
رابعاً -التقويم: - الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة .				
- بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع .				
- الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف .				
- مناسبة لمستوى المتعلم .				
- دقة ووضوح الصياغة .				
- تراعي الفروق الفردية .				
- متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية .				
- تساعد المتعلم في تطبيق ما تعمله في مواقف الحياة المختلفة .				
- كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب .				
خامساً - الشكل والإخراج الفني: - ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب .				
- متانة تجليد الكتاب .				
- وضوح الألوان ومناسبتها .				
- وضوح ودقة الطباعة .				
- نوعية ورق الكتاب .				

أسئلة عامة، أجب بـ (نعم) أو (لا):

البـنـد	نعم	لا	
- ينسجم محتوى الكتاب مع نظام الفصلين الدراسيين .			
- عدد الحصص المقررة تكفي لا ستيعاب مادة الكتاب .			
- هل الوسائل التعليمية متنوعة وكافية ؟			
- هل هناك ضرورة لوجود قائمة بالمراجع ومصادر المعلومات ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة حذفها (اذكرها) ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة إضافتها (اذكرها) ؟			

إذا كان لديك ملاحظات أخرى اكتبها ....

....

....

....

....

قائمة الأخطاء العلمية واللغوية والمطبعية:

الخطأ	الصفحة	السطر	الصواب

نرجو التكرم بإرسال الاستبانة إلى

الإدارة العامة للمناهج

تيلفكس: ٠١/٥٧٥٥٤٩

ص. ب: (٣٥٢٨) صنعاء - الجمهورية اليمنية

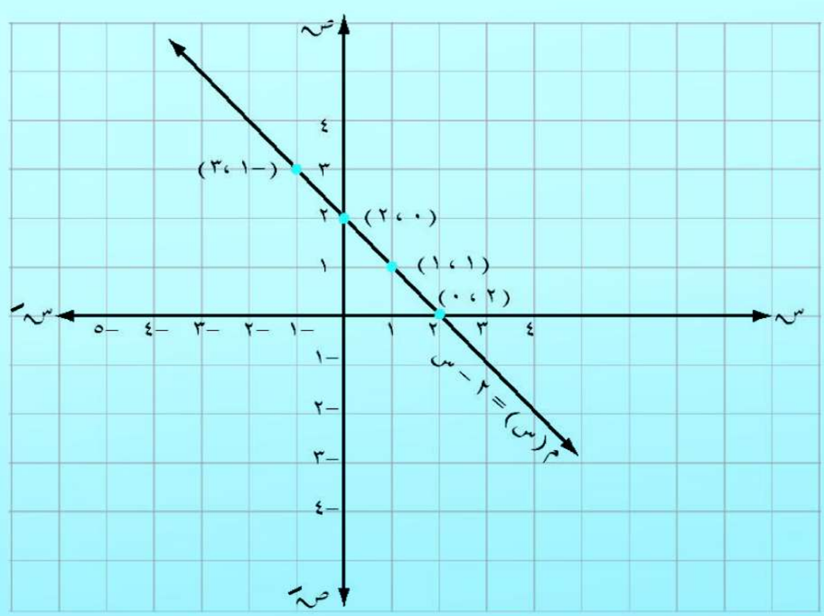
البريد الإلكتروني: manhg2013@hotmail.com

أو إدارة المناهج بمكتب التربية بالمحافظة

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

el-online.net


وجعلنا من الماء كل شيء حي أفلا يؤمنون
[الأنبياء]
٣٠


ص
س
س\
ص\
(−١، ٣)
(٠، ٢)
(١، ١)
(٢، ٠)
ق(س) = ٢ − س
١ ٢ ٣ ٤
−١ −٢ −٣ −٤ −٥
−١ −٢ −٣ −٤