اللقاء الأول: مقدمة في علم الإدارة

البرمجة الخطية

د. إيمان محمد أم الزين

بحوث في العمليات

بحوث في العمليات (علم الادارة) هو العلم الذي يبحث في حلول المشاكل الاستراتجية اوالتكتيكية المختلفة بهدف التوصل الى حل امثل.

١. إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي و عملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة و التنبؤ و مقارنة النتائج لمساعدة الادارة في قياس دقة النظام المستخدم و من ثم إتخاذ القرارت المناسبة و السليمة.

٢. تعريف بحوث العمليات يرتكز على النواحي الأساسية الآتية:

- **استخدام الطريقة العلمية**
- **بناء نموذج و الاعتماد عليه**
- **الهدف من بحوث العمليات هو مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية الصعبة و المعقدة.**

بحوث في العمليات

٢. مجال تطبيق علم بحوث في العمليات

١. المجال العسكري، وهنا يأتي دوره المهم في مجال الخطط الاستراتيجية واتخاذ القرارات والتوزيع الأمثل للإمكانات العسكرية المتاحة من عسكريين وأسلحة وطائرات ... الخ.

٢. يستخدم في النواحي المالية، كالمصاريف وميزانية الدول وتوزيع الميزانية الأمثل في الأغراض المختلفة.

٣. يستخدم في الصناعة، لذا تحتاج المصانع إلى هذا العلم لتقليل التكاليف وتحقيق أعظم ربح ضمن الإمكانات المتاحة.

٤. في مجال الإنشاءات، لبناء الجسور والمشاريع الضخمة، لتقييم الوقت المستغرق لكل مشروع وتقليل هذا الوقت.

٥. في الأسواق المالية والأسهم والتنبؤ عن الأوضاع الاقتصادية.

٦. في إدارة المستشفيات وضبط عملية التغذية والأدوية ضمن الإمكانات.

.....

بحوث في العمليات

٣. مراحل اتخاذ القرار

١. تحديد المشكلة أو الهدف ضمن افتراضات معينة تتناسب مع طبيعة المشكلة أو مع رغبة متخذ القرار .

٢. وضع نموذج فكري أو تصور لأبعاد المشكلة كلها . أي أن الدراسة هنا تعتمد على الخبرة والقدرة على التفكير العلمي المنظم الذي يسهل علينا إعداد النموذج المناسب لتحقيق الهدف الذي نريد .

٣. إيجاد النموذج العلمي باستخدام الأساليب العلمية المناسبة.

النمذجة في شكل برنامج رياضي

بحوث في العمليات

٤. حل النموذج العلمي باستخدام الطرق الرياضية الموافقة ، والبحث عن أفضل الحلول وتطبيقها على المشكلة الحقيقية .

بحوث في العمليات

من المواضيع المهمة التي يمكن استخدامها لحل المشاكل الادارية و الاجتماعية وغيرها هي:

- البرمجة الرياضية
- مشكلة النقل
- مشكلة التخصيص
- جدولة المشروع
- نملذج الصفوف
- .....

البرمجة الرياضية

تنقسم البرمجة الرياضية الى عدة اقسام:

- البرمجة الخطية
- البرمجة الصحيحة
- البرمجة الصحيحة الثنائية ٠-١
- البرمجة الصحيحة العامة
- برمجة الاهداف
- البرمجة الغير خطية
- البرمجة التربيعية
- .....

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

- ✓ مفهوم البرنامج الخطي
- ✓ خواص البرمجة الخطية (تعريف دالة الهدف،القيود،شرط عدم السالبية)
- ✓ حل المشكلة في شكل برنامج الخطي

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

أولا : مفهوم البرنامج الخطي: البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين ، هدفها البحث عن أمثلية الإستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى ، تسمى **بدالة الهدف أو الدالة الإقتصادية**، في وجود مجموعة من القيود تكون في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا من الدرجة الأولى أيضا.

و المقصود من كلمة **أمثلية** هو الوصول الى **أعظم** قيمة للدالة الإقتصادية أو**أدنى** قيمة لها حسب الحالة ، في وجود تلك المجموعة من القيود، وألحقت كلمة "**خطي** " بكلمة البرنامج لأن متغيرات كل من الدالة و القيود هي من الدرجة الأولى ، أما اذا كانت من الدرجة الثانية أو الثالثة أو غير ذلك فإن البرنامج لايكون خطيا ، وحينئذ نتكلم عن البرمجة غير الخطية وهو غير موضوعنا.

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

- **تعريف :**

يقال أن الدالة $f(x_1, \ldots, x_n)$ دالة خطية إذا كنت على الصورة

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

لأي قيم حقيقية للثوابت $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$

- **تعريف :**

لأي دالة خطية $f(x_1, \ldots, x_n)$ وثابت b فإن المتراجحة

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq b \quad \text{أو} \quad f(x_1, \ldots, x_n) \geq b$$

تسمى متراجحة خطية

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

- **تعريف :**

يسمى أي نظام خطي **برنامجا خطيا** إذا احتوى على الآتي :

1. دالة هدف خطية في متغيرات القرار $(x_1, \ldots, x_n)$ و يراد تعظيم أو تقليل قيمتها (Max) أو (Min)
2. مجموعة من القيود في متغيرات القرار في صورة دوال أو متراجحات خطية
3. قيود اللاسالبية على جميع متغيرات القرار

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

١. مكونات البرنامج الخطي

أ- **دالة الهدف:** تسمى أيضا بالدالة الإقتصادية و هي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه كتعظيم الإنتاج أو تعظيم الأرباح، أو تدنئة التكاليف ..الخ، و تكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.

ب- **القيود:** هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا، تريد المؤسسة أن توجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الإعتبار. يتألف شقها الأيسر من مجموعة من المعاملات مضروبة في مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أما شقها الأيمن فهو عبارة عن أعداد ثابتة موجبة.

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

١. مكونات البرنامج الخطي

ج- **شرط عدم السالبية**: و يعني أن قيم كل المتغيرات يجب أن تكون أكبر أوتساوي الصفر، لكونها تتعلق بكميات مادية، و الكميات المادية لايمكن أن تساوي قيم سالبة. و في حالات إستثنائية أين لايشترط هذا القيد، فإن هناك معالجة خاصة أثناء سيرورة الحل.

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

مسألة: **الإنتاج**

جدول المسألة

منتوجات / ورشات	الوقت المستغرق في كل ورشة بالساعات: المنتوج1: x_1	المنتوج2: x_2	المنتوج3: x_3	الطاقة القصوى للورشات سا/ع
الورشة1	4	4	5	32
الورشة2	2	4	3	24
الورشة3	2	2	1	16
ربح الوحدة الواحدة(دج)	200	150	120	

جدول1-1

حل مسألة:

X1: عدد المنتجات من المنتوج ١ X2: عدد المنتجات من المنتوج ٢ X3: عدد المنتجات من المنتوج ٣

$$\text{Max } Z = 200X1+150X2+120X3$$

$$4X1+4X2+5X3<=32$$

$$2X1+4X2+3X3<=24$$

$$2X1+2X2+X3<=16$$

$$X1>=0 \quad X2>=0 \quad X3>=0$$

شرط عدم السالبية

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

مسألة : التسويق

مصنع ينتج السيارات الفاخرة ، وتعتقد الإدارة أن غالبية الزبائن إما من رجال الأعمال أو من الموظفين ذوي الدخل العالي. وللوصول إلى أكبر شريحة من الزبائن قررت الإدارة طرح إعلانات تجارية تتخلل إما البرامج الكوميدية أو البرامج الرياضية. ومن خلال دراسة أجرتها وزارة الإعلام وجد أن البرامج الكوميدية يتابعها 7 مليون من رجال الأعمال و 2 مليون من موظفي الدخل العالي. في حين أن البرامج الرياضية يتابعها 2 مليون من رجال الأعمال و 12 مليون من موظفي الدخل العالي. وترغب الإدارة في إيجاد سياسة إعلانية مثلى تضمن لها كحد أدنى 28 مليون مشاهد من رجال الأعمال و 24 مليون مشاهد من موظفي الدخل العالي. فإذا كان الإعلان يكلف 50,000 ريال للدقيقة الواحدة خلال البرامج الكوميدية ويكلف 100,000 ريال للدقيقة خلال البرامج الرياضية فما هي سياسة الإعلان المناسبة.

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

الحل: **دالة الهدف:** **Min Z= 50X1+100X2**

- متغيرات القرار : ما الذي تملك الشركة التصرف فيه؟؟
  - عدد الدقائق للإعلان خلال البرامج الكوميدية
  - عدد الدقائق للإعلان خلال البرامج الرياضية

- دالة الهدف :
  - لتكن Z التكلفة الإجمالية بالريال للإعلانات خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية

$$Z = 50{,}000\,x_1 + 100{,}000\,x_2$$

  - يمكن إعادة تعريف Z التكلفة الإجمالية بـالـ 1000 ريال للإعلان خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية. وبالتالي :

$$Z = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

  - Z تكاليف $\Leftarrow$ Min.

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

- القيود :
  - قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من رجال الأعمال علماً بأن 7 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 2 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية

$$7mil\,x_1 + 2mil\,x_2 \geq 28mil$$
$$\Leftrightarrow \; 7\,x_1 + 2\,x_2 \geq 28$$

  - قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من موظفي الدخل العالي علماً بأن 2 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 12 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية

$$2mil\,x_1 + 12mil\,x_2 \geq 24mil$$
$$\Leftrightarrow \; 2\,x_1 + 12\,x_2 \geq 24$$

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

- البرنامج الخطي :

دالة الهدف + القيود + اللاسالبية

$$\text{Min} \quad Z = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

Subject to

$$7\,x_1 + 2\,x_2 \geq 28$$
$$2\,x_1 + 12\,x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

تمرين ٤:

تنظم وكالة أسفار نقل ٤٥٠٠ مسافر و ١٤٠ طن من المعدات. توجد لديها اثنين من أنواع الطائرات:

- الطائرة A ، يمكن أن تحمل 200 شخص و ٤ أطنان من المعدات.
- الطائرة B، يمكن أن تحمل ١٥٠ شخصا و ٨ أطنان من المعدات.

اوجد صياغة المشكلة في شكل برنامج الخطي مع العلم ان وكالة أسفار تسعي إلي تقليل عدد الطائرات.

المتغيرات

X1=عدد الطائرات من نوع A

X2=عدد الطائرات من نوع B

دالة الهدف **MIN Z=X1+X2**

القيود

200X1+150X2=>4500

4X1+8X2=>140

X1>=0

X2>=0

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

1- حالة التعظيم:

$$\text{Max: } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_n$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. x_3 \ge 0, \ldots x_n \ge 0 \end{cases}$$

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

الشكل المصفوفي

دالة الهدف

$$\text{Max}: Z = [c_1\ c_2\ c_3 \ldots c_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

القيود

$$s/c \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

شرط عدم السالبية

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

2- حالـــة التدنئـــة:

في حالة التدنئة يكتب البرنامج الخطـــي بصفـــة عامـــة كمـــا يلـــي:

$$\text{Min} : Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots\ldots + c_n x_n$$

$$s/c \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots\ldots + a_{3n} x_n \geq b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots\ldots\ldots x_n \geq 0 \end{cases}$$

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

مثال1-1: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$\text{Max: } Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 400 \\ 2x_1 + 9x_2 \le 1080 \\ 8x_1 + 6x_2 \le 960 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = \begin{pmatrix} 100 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} \ge 0$$

مصفوفة القيود

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 400 \\ 1080 \\ 960 \end{pmatrix}$$

البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها

الشكل المصفوفي

دالة الهدف

$$\text{Min}: Z = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & c_3 & \ldots c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

القيود

$$s/c \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} a_{m3} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

شرط عدم السالبية

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

الوحدة الثانية

الحل البياني

د. إيمان محمد أم الزين

الحل البياني للبرمجة الخطية

- ✓ خطوات الحل البياني
- ✓ طريقة المستقيم
- ✓ طريقة النقاط الطرفية
- ✓ الحالات الخاصة للرسم البياني(تعدد الحلول,عدم وجود حل مقبول, البرمجة الخطية الغير محدودة)

الفصل الثاني : الحل البياني للبرمجة الخطية

I. خطوات الحل البياني

1. تحويل متباينات القيود الى معادلات, و عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية
2. نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات.
3. نشطب المناطق التي لا تحقق القيود
4. نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في الغالب مضلع متعدد الرؤوس
5. تحديد نقاط التقاطع وتحديد منطقة الحل الممكن.
6. تحديد الحل الأمثل (الحلول المثلى) والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع (نقطة ركنية) من خلال طريقتين :

- ✓ طريقة المستقيم Δ
- ✓ طريقة النقاط الركنية

الفصل الثاني : الحل البياني للبرمجة الخطية

✓ **طريقة المستقيم Δ:**

- ❖ نرسم دالة الهدف بتساويها لصفر
- ❖ نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إلي اعلي في اتجاه رؤوس المضلع:
  - تكون أخر نقطة يصل إليها المستقيم هي الحل الأمثل إذا كانت دالة الهدف تعظيم،
  - تكون أول نقطة يصل إليها المستقيم هي الحل الأمثل إذا كانت دالة الهدف تخفيض

✓ **طريقة النقاط الركنية**

احسب قيمة دالة الهدف في كل النقاط الركنية (الرؤوس), واختر الحل الامثل

مثال1:تعظيم

اوجد حل للبرنامج الرياضي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max \quad Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$S/C$$

$$8x_1 + 2x_2 \le 40$$

$$6x_1 + 9x_2 \le 108$$

$$8x_1 + 6x_2 \le 96$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

القيد الأول

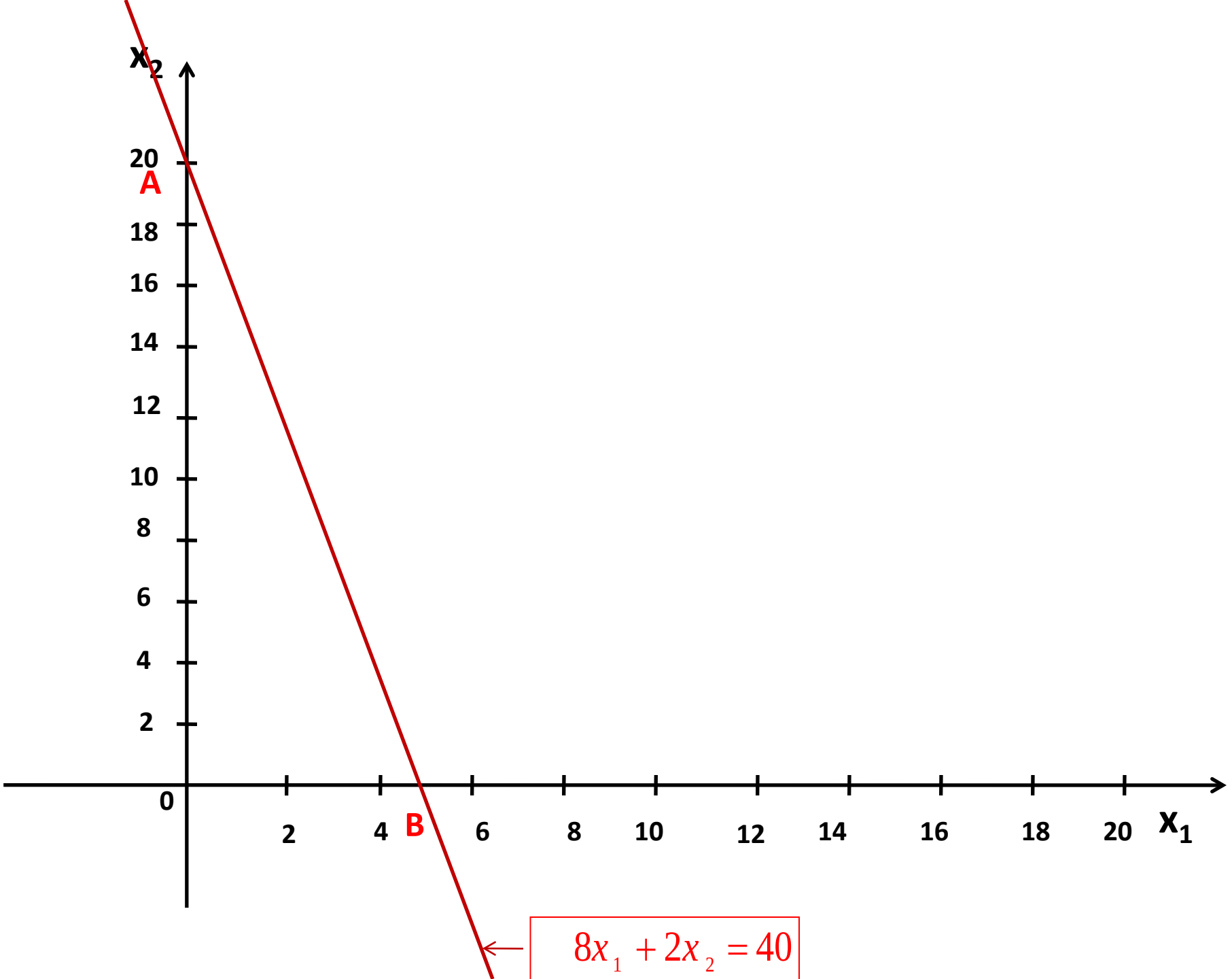
الخطوة الأولي: تحويل متباينات القيود إلى معادلات, وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية

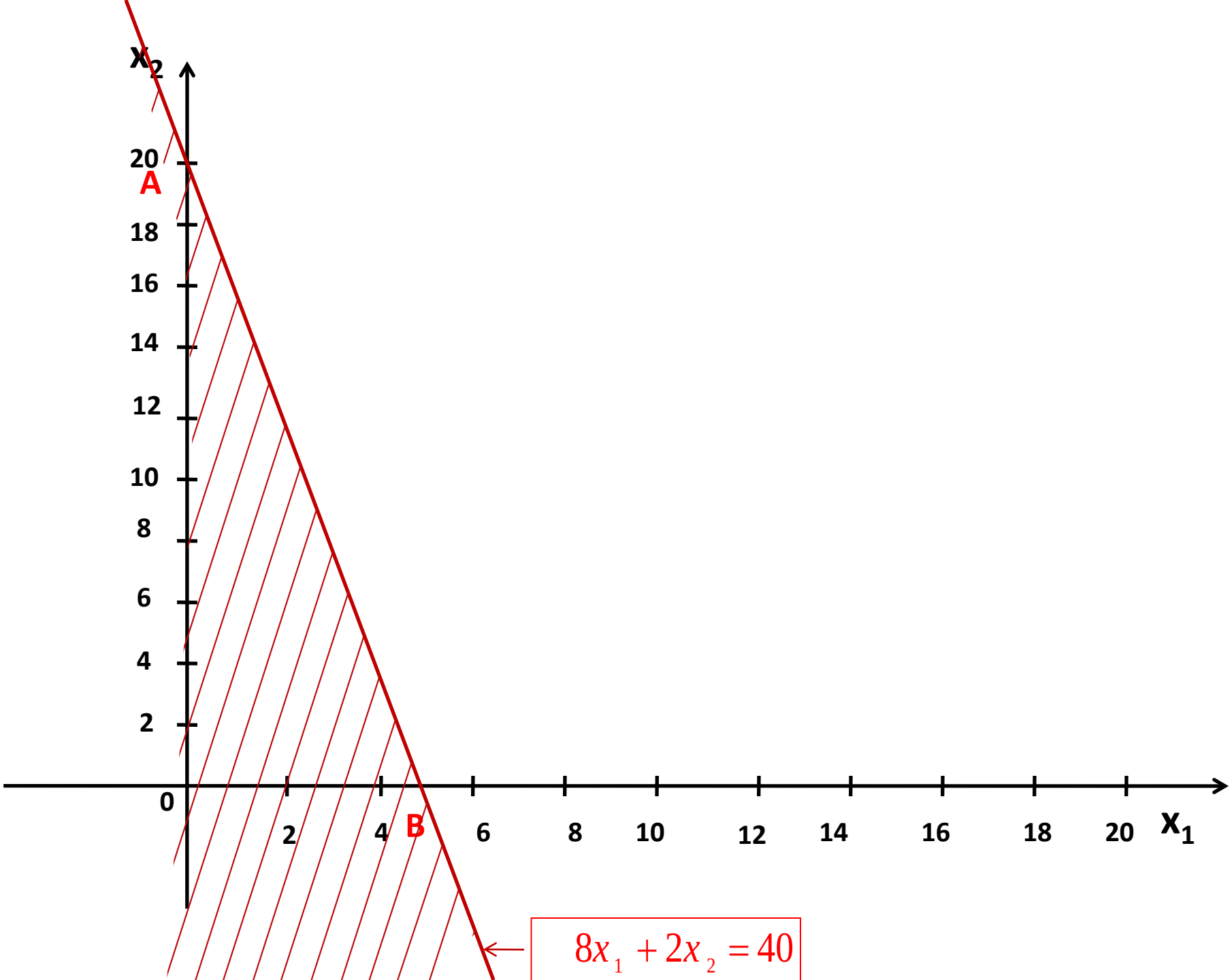
$$8x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$8x_1 + 2x_2 = 40$$

الخطوة الثانية : نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات.

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$


X2
20
A
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
B
6
8
10
12
14
16
18
20
X1
8x1 + 2x2 = 40


X2
20
A
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
B
6
8
10
12
14
16
18
20
X1
8x1 + 2x2 = 40

القيد الثاني

الخطوة الأولي: تحويل متباينات القيود إلى معادلات, وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية

$$6x_1 + 9x_2 \leq 108$$

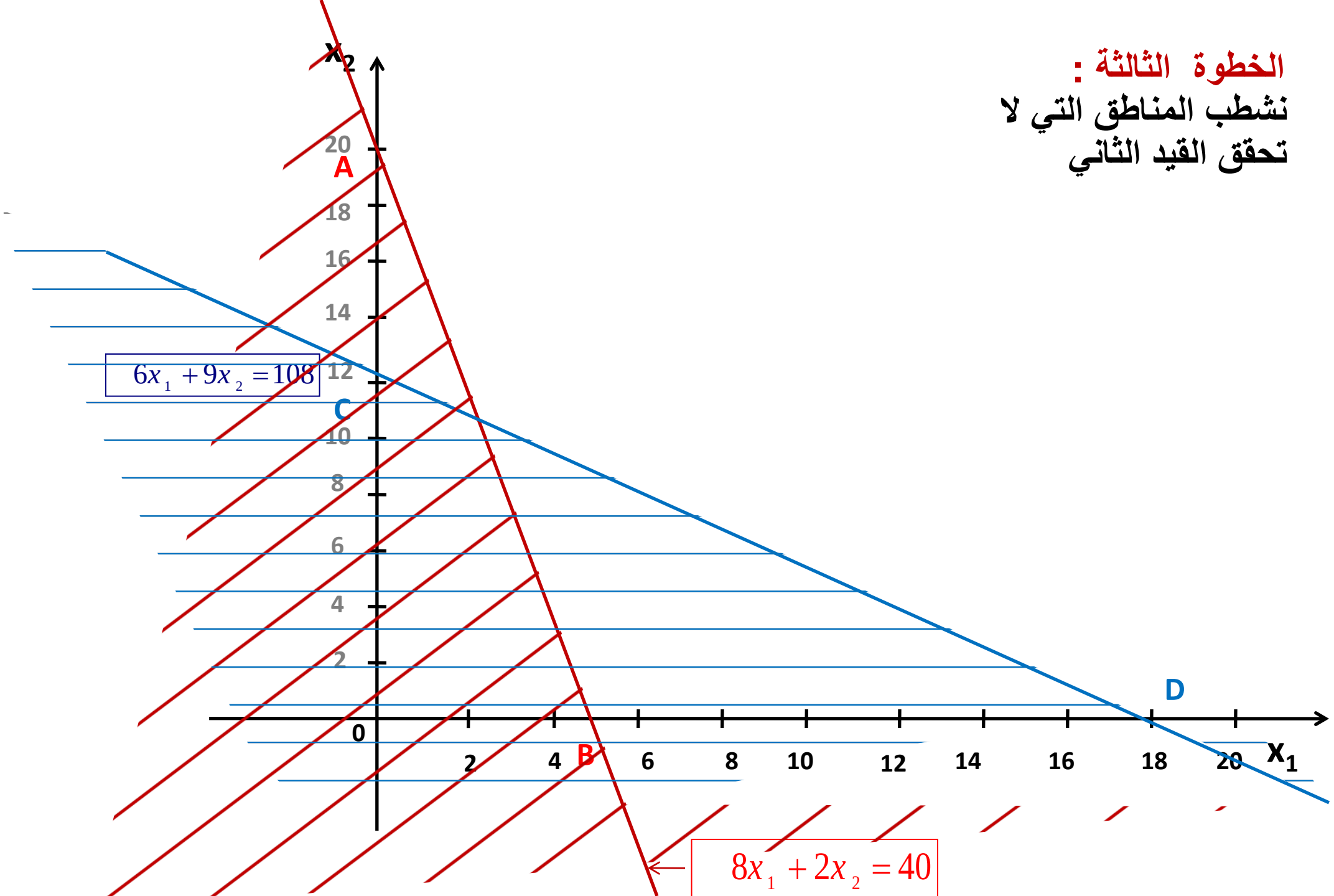
$$6x_1 + 9x_2 = 108$$

الخطوة الثانية : نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات.

$$C\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix} \qquad D\begin{pmatrix}18\\0\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة :

نشطب المناطق التي لا تحقق القيد الثاني



القيد الثالث

الخطوة الأولي: تحويل متباينات القيود إلى معادلات, وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية

$$8x_1 + 6x_2 \leq 96$$

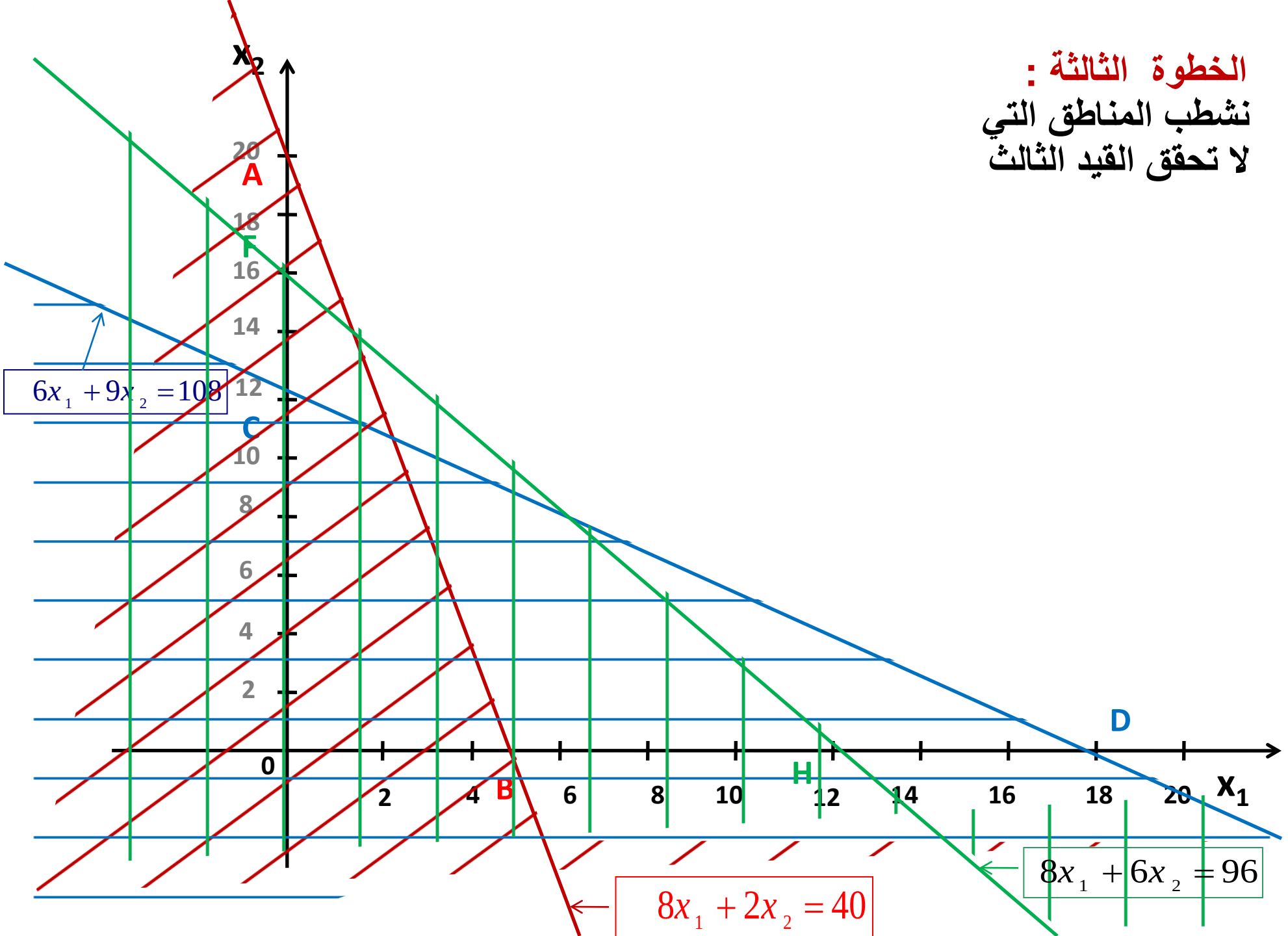
$$8x_1 + 6x_2 = 96$$

الخطوة الثانية : نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات.

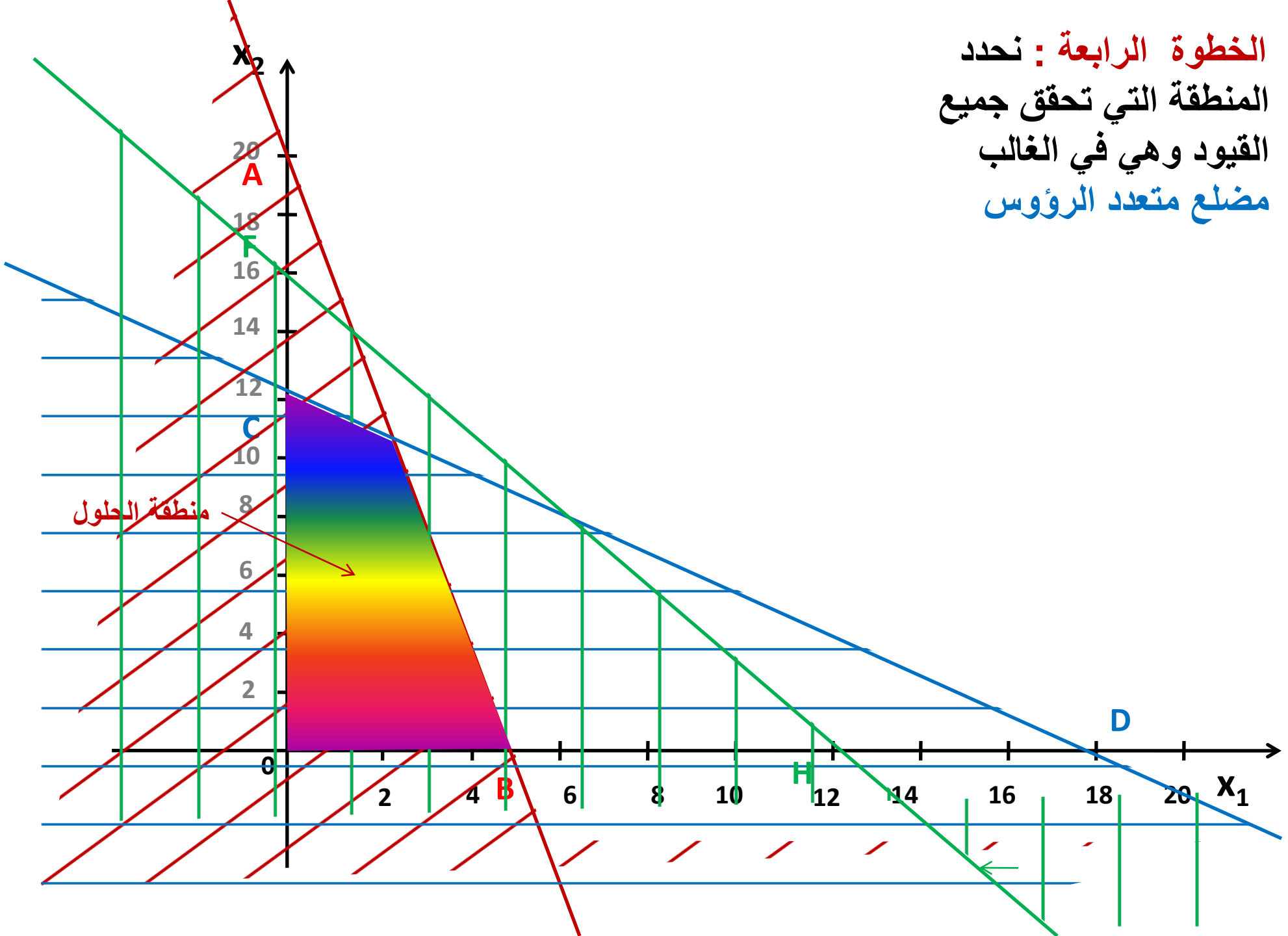
$$F\begin{pmatrix}0\\16\end{pmatrix} \qquad H\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة :

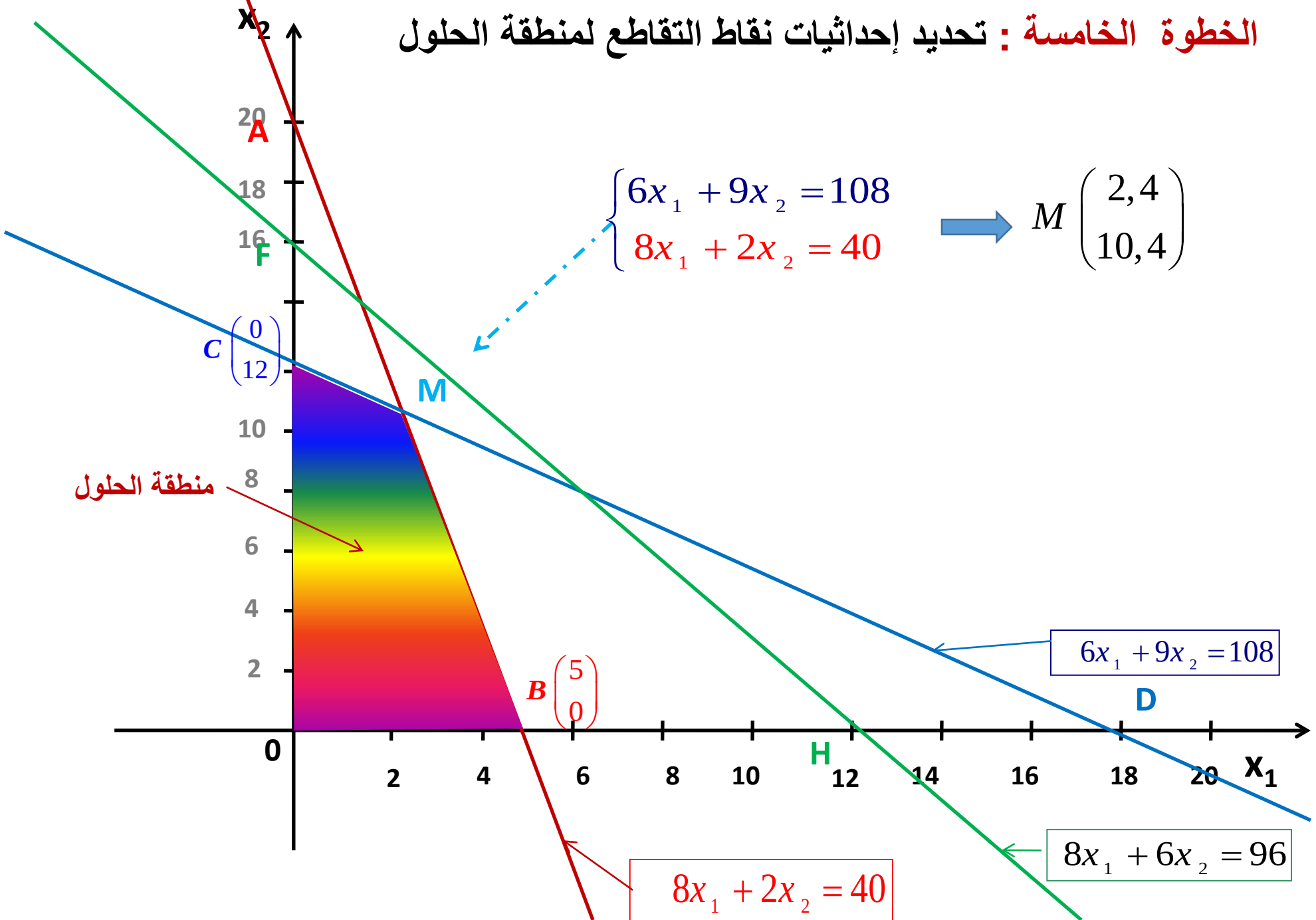
نشطب المناطق التي
لا تحقق القيد الثالث



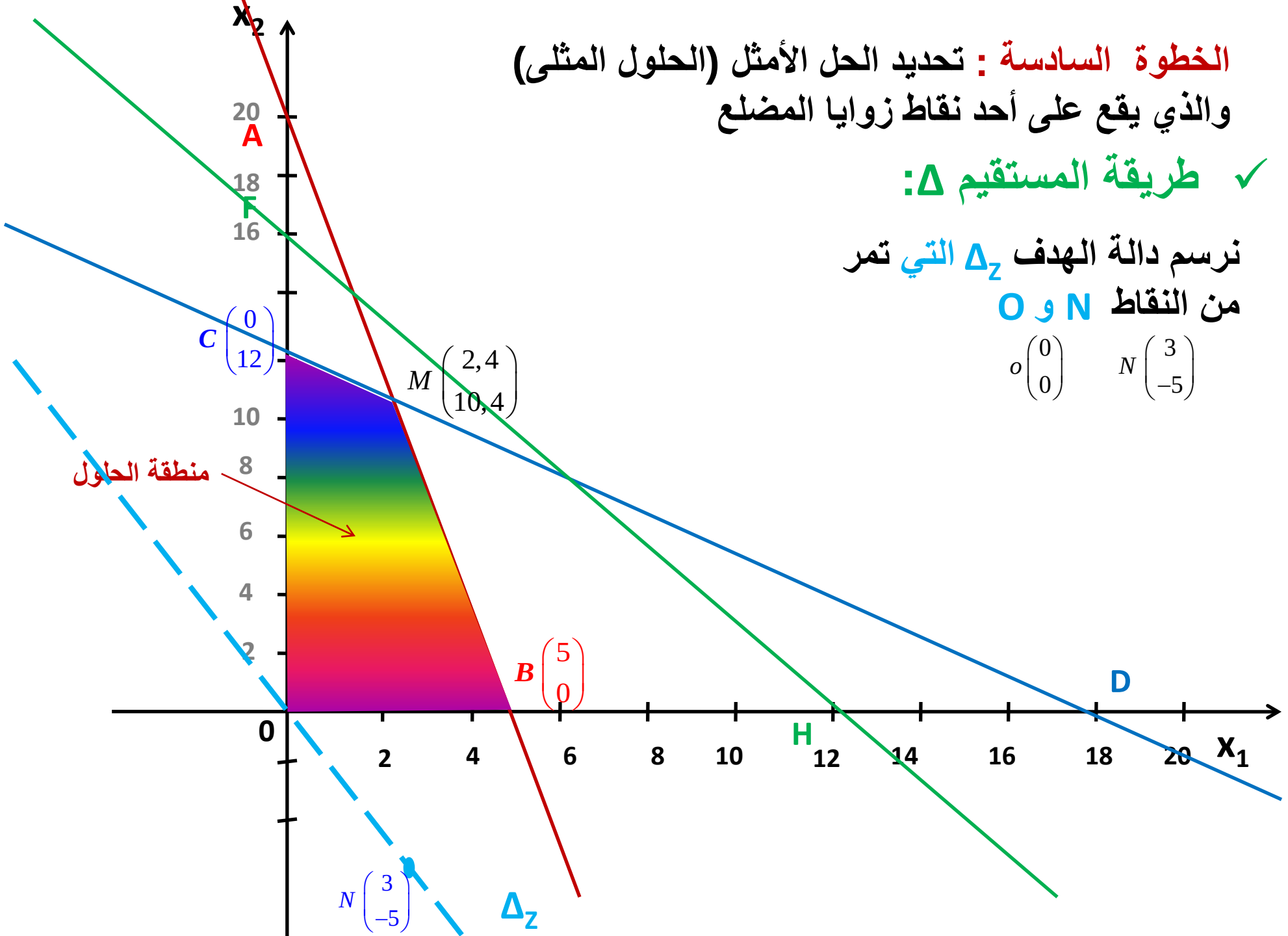
الخطوة الرابعة : نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في الغالب مضلع متعدد الرؤوس



الخطوة الخامسة : تحديد إحداثيات نقاط التقاطع لمنطقة الحلول



$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 = 108 \\ 8x_1 + 2x_2 = 40 \end{cases} \Rightarrow M \begin{pmatrix} 2,4 \\ 10,4 \end{pmatrix}$$


الخطوة السادسة : تحديد الحل الأمثل (الحلول المثلى)
والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع
✓ طريقة المستقيم Δ:
نرسم دالة الهدف Δ_z التي تمر
من النقاط N و O
$o\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$
x_2
x_1
A
F
H
D
$C\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$
$M\begin{pmatrix}2,4\\10,4\end{pmatrix}$
$B\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$
منطقة الحلول
$N\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$
Δ_z
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

$$\begin{cases} x_1^* = 2,4 \\ x_2^* = 10,4 \end{cases}$$

الحل الأمثل هو النقطة $M\begin{pmatrix} 2,4 \\ 10,4 \end{pmatrix}$

تعويض إحداثيات النقطة M في دالة الهدف Z

$$\begin{aligned} Z^* &= 100x_1^* + 60x_2^* \\ &= 100 * 2,4 + 60 * 10,4 \\ &= 864 \end{aligned}$$

دالة الهدف العظمي تساوي

✓ طريقة النقاط الركنية

احسب قيمة دالة الهدف في كل النقاط الركنية (الرؤوس), واختر الحل الأمثل

نقاط رؤوس فئة الحلول: O ; C ; M ; B

$$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow Z = 100*0+60*0=0$$

$$C\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix} \Rightarrow Z = 100*0+60*12=720$$

$$M\begin{pmatrix}2,4\\10,4\end{pmatrix} \Rightarrow Z = 100*2,4+60*10,4=864$$

$$B\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \Rightarrow Z = 100*5+60*0=500$$

الحل الأمثل

$$Z^* = 864$$

$$x_1^* = 2,4$$

$$x_2^* = 10,4$$

مثال2:تخفيض

اوجد حل للبرنامج الرياضي باستخدام الطريقة البيانية:

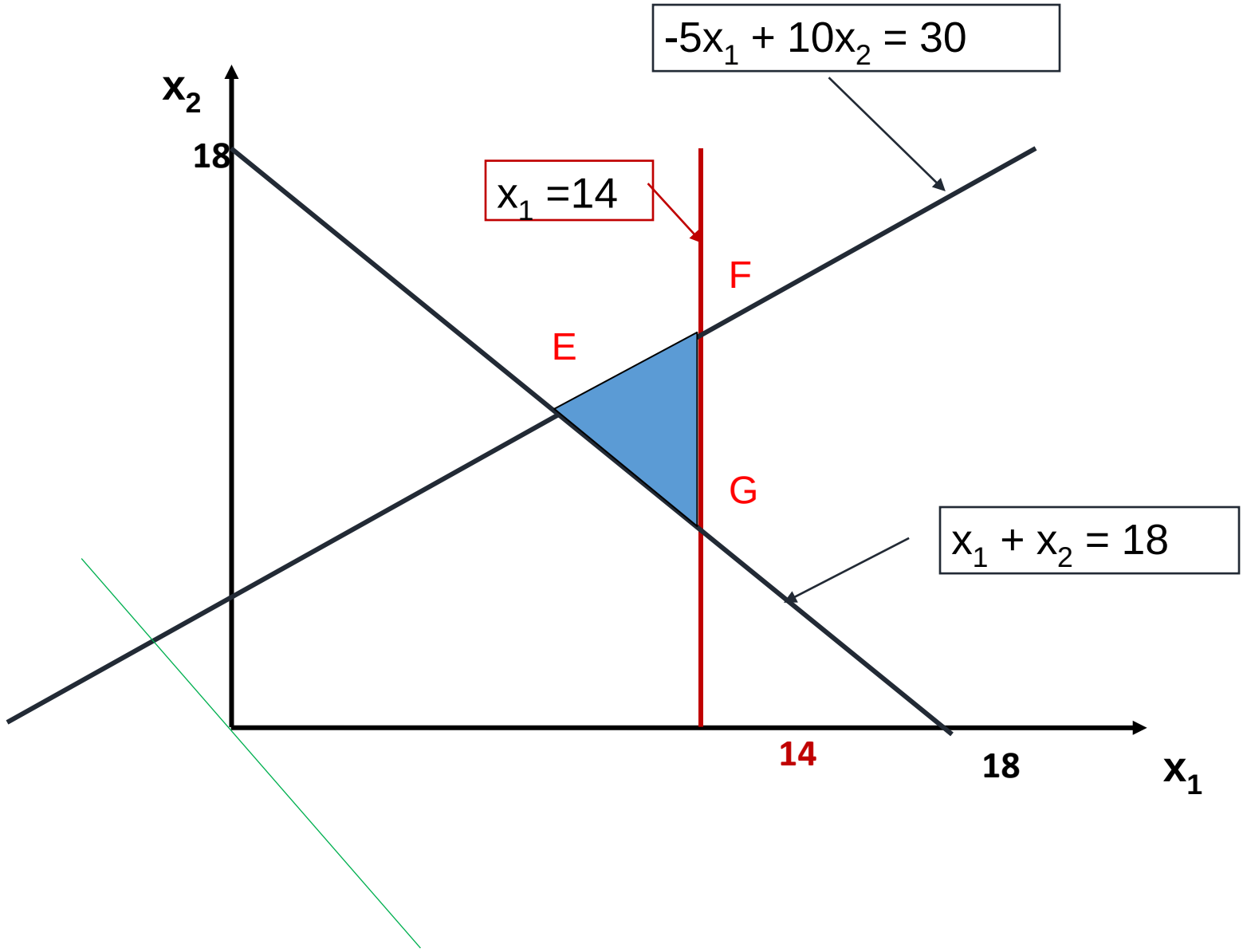
$$Min\ Z = 12x_1 + 18x_2$$

$$s/c \quad x_1 + x_2 \geq 18 \quad ❶$$

$$-5x_1 + 10x_2 \leq 30 \quad ❷$$

$$x_1 \leq 14 \quad ❸$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$


-5x1 + 10x2 = 30
x2
18
x1 =14
F
E
G
x1 + x2 = 18
14
18
x1

أوجد الحل البياني للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max}: Z=6X_1+8X_2$$

$$2X1 + 4X2 \le 12$$

$$4X1+ 2X2 \le 12$$

$$X1 , X2 \ge 0$$

الخطوة الأولي: تحويل متباينات القيود إلى معادلات, وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية

$$2X1 + 4X2 \le 12$$

$$2X1 + 4X2 = 12$$

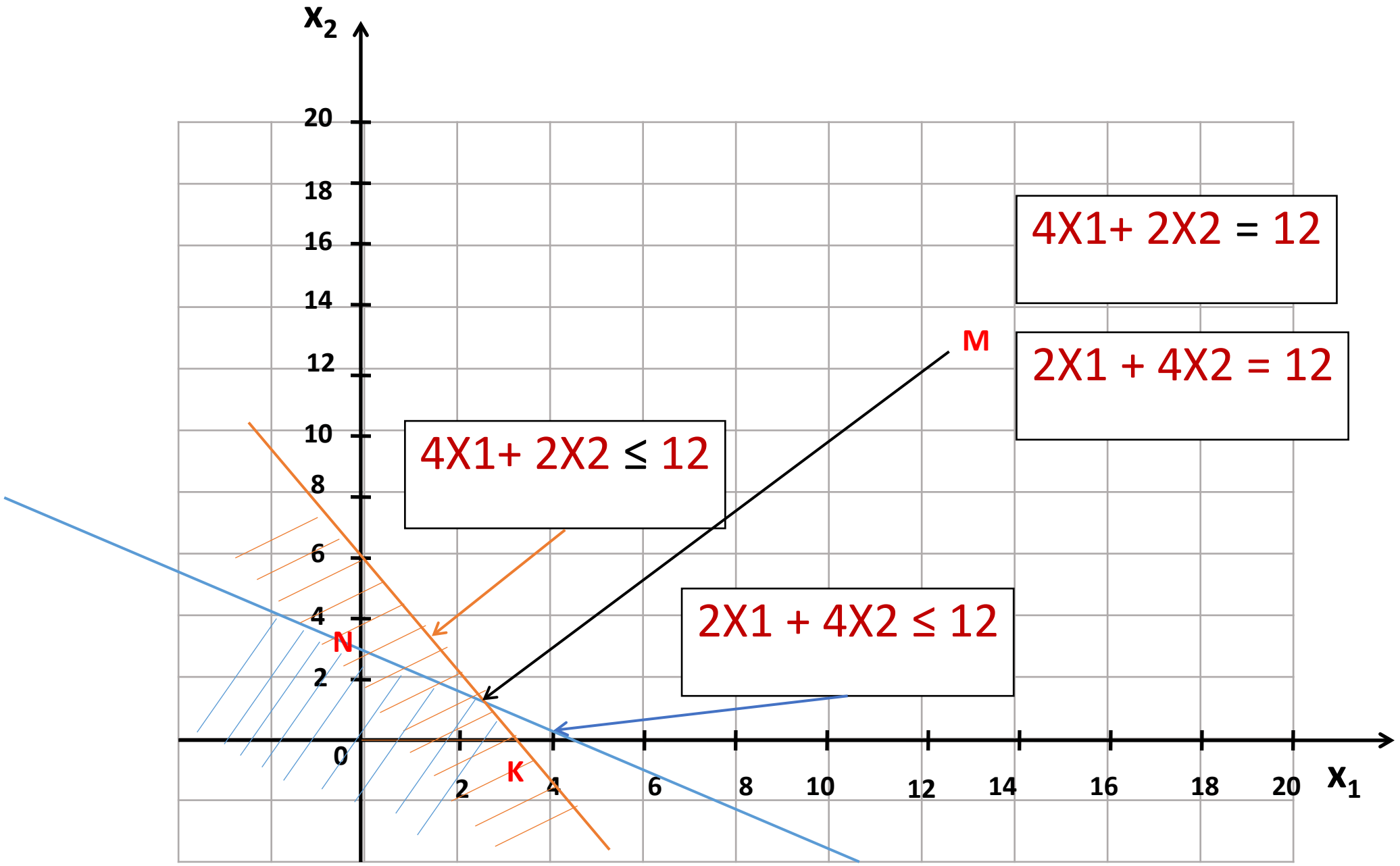
الخطوة الثانية : نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات.

A(0,3) B(6,0)

$$4X1+ 2X2 \le 12$$

$$4X1+ 2X2 = 12$$

C(0,6) D(3,0)


X2
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
X1
4X1+ 2X2 = 12
2X1 + 4X2 = 12
4X1+ 2X2 ≤ 12
2X1 + 4X2 ≤ 12
M
N
K

احداثيات النقطة **N** هي: X1=0 X2=3

احداثيات النقطة **K** هي: X1=3 X2=0

احداثيات النقطة **M** هي تقاطع المعادلتين

$Z=6\times 0+8\times 3=24$

$Z=6\times 3+8\times 0=18$

$\times(-2)$ $2X1 + 4X2 = 12$

$4X1 + 2X2 = 12$

$=-4X_1-8X_2+4X_1+2X_2$=-24+12

$-6X_2=-12$

X_2=2

X_1=2

$Z=6\times 2+8\times 2=28$

طريقة السمبلكس (مشكلة التعظيم)

الفصل الثالث :

طريقة السمبلكس

- ✓ الصيغة القانونية
- ✓ الصيغة النموذجية
- ✓ طريقة السمبلكس تعظيم

طريقة السمبلكس (مشكلة التعظيم)

1. الصيغة القانونية

- كل المتغييرات موجبة
- كل القيود اصغر من او تساوي (≤) اذا كانت دالة الهدف تعظيم, و كل القيود اكبر من او تساوي (≥) اذا كانت دالة الهدف تخفيض

$$Max \quad Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$S/C$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \quad \forall j=1,\ldots,m$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i=1,\ldots,n$$

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$S/C$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad \forall j=1,\ldots,m$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i=1,\ldots,n$$

طريقة السمبلكس (مشكلة التعظيم)

1. الصيغة النموذجية (القياسية)

الهدف هو تحويل المتباينات الى معادلات باظافة متغير جديد غير سالب للطرف الايسر للمتباينة يسمي بالمتغيير الراكد (او الفجوة).

-الحالة الاولي: القيد في شكل اصغر او يساوي $\left(a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+....+a_{n1}x_{n1}\le b_1\right)$

اضافة متغيير راكد في الطرف الايسر للقيد و معامل المتغيير الراكد في دالة الهدف يساوي صفر.

البرنامج الخطي

$$Max \quad Z=\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$$

$$S/C$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j \quad \forall j=1,...,m$$

$$x_i \ge 0 \quad \forall i=1,...,n$$

الصيغة النموذجية (القياسية)

$$Max \quad Z=\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i + 0\sum_{j=1}^{m} S_j$$

$$S/C$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + S_j = b_j \quad \forall j=1,...,m$$

$$x_i \ge 0 \quad \forall i=1,...,n$$

$$S_j \ge 0 \quad \forall j=1,...,m$$

الصيغة النموذجية (القياسية)

مثال:

البرنامج الخطي

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\
S/C \quad & \\
& 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \le 42 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 17 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 24 \\
& x_1;\ x_2; x_3; x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

الصيغة النموذجية (القياسية)

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
S/C \quad & \\
& 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + S_1 = 42 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + S_2 = 17 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + S_3 = 24 \\
& x_1;\ x_2; x_3; x_4; S_1; S_2; S_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الصيغة النموذجية (القياسية)

-الحالة الثانية: القيد في شكل اكبر او يساوي $\left(a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+....+a_{n1}x_{n1}\geq b_1\right)$

*حذف متغيير راكد (Sj) في الطرف الايسر للقيد و اضافة متغير اصطناعي (Aj).

*معامل المتغيير الراكد في دالة الهدف يساوي صفر.

*معامل المتغير الاصطناعي في دالة الهدف

-دالة الهدف تخفيض :معامل المتغير الاصطناعي يساوي M, (Mعدد كبير جدا)

-دالة الهدف تعظيم :معامل المتغير الاصطناعي يساوي (-M), (M- عدد سالب صغير جدا)

مثال1:

الصيغة النموذجية (القياسية)

$$Min\ \ Z=3x_1+2x_2+x_3+0S_1+0S_2+MA_1+MA_2$$

$$S/C$$

$$x_1+x_2+x_3-S_1+A_1=9$$

$$5x_1-x_2+2x_3-S_2+A_2=22$$

$$x_1;\ x_2;x_3;S_1;S_2;a_1;a_2\geq 0$$

البرنامج الخطي

$$Min\ \ Z=3x_1+2x_2+x_3$$

$$S/C$$

$$x_1+x_2+x_3\geq 9$$

$$5x_1-x_2+2x_3\geq 22$$

$$x_1;\ x_2;x_3\geq 0$$

الصيغة النموذجية (القياسية)

مثال 2:

$$Max \quad Z = 7x_1 + 9x_2$$
$$S/C$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 32$$
$$4x_1 + x_2 \ge 14$$
$$x_1;\ x_2 \ge 0$$

$$Max \quad Z = 7x_1 + 9x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1$$
$$S/C$$
$$2x_1 + 4x_2 + S_1 = 32$$
$$4x_1 + x_2 - S_2 + A_1 = 22$$
$$x_1;\ x_2 \ge 0$$

الصيغة النموذجية (القياسية)

-الحالة الثالثة: القيد في شكل يساوي

* اضافة متغير اصطناعي فقط . (Aj)

*معامل المتغير الاصطناعي في دالة الهدف

-دالة الهدف تخفيض :معامل المتغير الاصطناعي يساوي M,

-دالة الهدف تعظيم :معامل المتغير الاصطناعي يساوي (-M)

$$Max \quad Z = 60x_1 + 80x_2$$
$$S/C$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 20$$
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1;\ x_2 \ge 0$$

$$Max \quad Z = 60x_1 + 80x_2 + 0S_1 - MA_1$$
$$S/C$$
$$2x_1 + 4x_2 + S_1 = 20$$
$$x_1 + x_2 + A_1 = 10$$
$$x_1;\ x_2; S_1; a_1 \ge 0$$

طريقة السمبلكس

1-مشكلة التعظيم

الخطوة الاولي :كتابة البرنامج الخطي في الصغة القياسية

$$\text{Max} : Z=30X_1 +18X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 200$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 300$$
$$X_1 \leq 150$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الصيغة القياسية

Max : Z=30X1 +18X2+0S1+0S2+0S3

X1 +2X2 +S1 =200 (1)

3X1+ 2X2 +S2 =300 (2)

X1 +S3 =150 (3)

X1,X2,S1,S2,S3≥0 حيث:

الخطوة الثانية: تحويل دالة الهدف الى دالة صفرية

Max : Z=30X1 +18X2+0S1+0S2+0S3

$$Z - 30X_1 - 18X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

$$X1 + 2X2 + S1 = 200 \quad (1)$$
$$3X1 + 2X2 + S2 = 300 \quad (2)$$
$$X1 + S3 = 150 \quad (3)$$
$$X1, X2, S1, S2, S3 \geq 0 \quad \text{حيث:}$$

الخطوة الثالثة: تكوين جدول السمبلكس

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت
z	-30	-18	0	0	0	0
0 S_1	1	2	1	0	0	200
0 S_2	3	2	0	1	0	300
0 S_3	1	0	0	0	1	150

الخطوة الرابعة: تحديد المتغيير الداخل: اقل قيمة سالبة في صفz

المتغير الداخل هو X_1

$$-30-[0*1+0*3+0*1]$$

طريقة السمبلكس

الخطوة الخامسة: تحديد المتغيير الخارج: اقل قيمة موجبة في عمود النسبة

(عمود النسبة هو عمود الثوابت مقسوم على عمود المتغيير الداخل)

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت	النسبة
Z	-30	-18	0	0	0	0	
0 S_1	1	2	1	0	0	200	$\frac{200}{1}=200$
0 S_2	3	2	0	1	0	300	$\frac{300}{3}=100$
0 S_3	1	0	0	0	1	150	$\frac{150}{1}=150$

المتغير الخارج هو S_2

المتغير الداخل هو X_1

عنصر المحوري

طريقة السمبلكس

الخطوة السادسة:

1-العنصر المحوري يساوي 1

2-القيم الموجودة تحت و فوق العنصر المحوري تساوي صفر

3-اقسم الصف الحوري على العنصر المحوري

4-باقي القيم تحسب بطريقة المستطيل

العنصر المحوري	b
c	a

$$a' = a - \frac{cb}{\text{العنصر المحوري}}$$

الجديد القديم

طريقة السمبلكس

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت	النسبة
Z	-30	-18	0	0	0	0	
0 S_1	1	2	1	0	0	200	200
0 S_2	3	2	0	1	0	300	100
0 S_3	1	0	0	0	1	150	150

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت
Z						
0 S_1						
-30 X_1						
0 S_3						

طريقة السمبلكس

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت	النسبة
Z	-30	-18	0	0	0	0	
0 S_1	1	2	1	0	0	200	200
0 S_2	3	2	0	1	0	300	100
0 S_3	1	0	0	0	1	150	150

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت
Z	0					
0 S_1	0					
-30 X_1	1					
0 S_3	0					

1-العنصر المحوري يساوي 1

2-القيم الموجودة تحت و فوق العنصر المحوري تساوي صفر

طريقة السمبلكس

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت	النسبة
Z	-30	-18	0	0	0	0	
0 S_1	1	2	1	0	0	200	200
0 S_2	3	2	0	1	0	300	100
0 S_3	1	0	0	0	1	150	150

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت
Z	0					
0 S_1	0					
-30 X_1	1	2/3	0	1/3	0	100
0 S_3	0					

3-اقسم الصف الحوري على العنصر المحوري

طريقة السمبلكس

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت	النسبة
Z	-30	-18	0	0	0	0	
0 S_1	1	2	1	0	0	200	200
0 S_2	3	2	0	1	0	300	100
0 S_3	1	0	0	0	1	150	150

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت
Z						
0 S_1	0	4/3	1	-1/3	0	100
-30 X_1	1	2/3	0	1/3	0	100
0 S_3	0	-2/3	0	-1/3	1	50

4-باقي القيم تحسب بطريقة المستطيل

طريقة السمبلكس

$$-18-\left[0\times\frac{4}{3}+(-30)\times\frac{2}{3}+0\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=2$$

$$0-\left[0\times\frac{-1}{3}+(-30)\times\frac{1}{3}+0\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=10$$

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت
Z	0	2	0	10	0	3000
0 S_1	0	4/3	1	-1/3	0	100
-30 X_1	1	2/3	0	1/3	0	100
0 S_3	0	-2/3	0	-1/3	1	50

طريقة السمبلكس

المتغيرات الاساسية	-30 x_1	-18 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	الثوابت
z	0	2	0	10	0	
0 S_1	0	4/3	1	-1/3	0	100
-30 X_1	1	2/3	0	1/3	0	100
0 S_3	0	-2/3	0	-1/3	1	50

اكبر او يساوي صفر

الحل ا نستنتج ان صف

متغيرات اساسية

$$\begin{cases} S_1 = 100 \\ X_1 = 100 \\ S_3 = 50 \end{cases}$$

متغيرات غير اساسية

$$\begin{cases} X_2 = 0 \\ S_2 = 0 \end{cases}$$

$$Z = 30*100 + 18*0 = 3000$$

طريقة السمبلكس (تخفيض)

الفصل الرابع :

طريقة السمبلكس (تخفيض)

- ✓ الصيغة النموذجية
- ✓ طريقة السمبلكس
- ✓ الحالات الخاصة (تعدد الحلول,عدم وجود حل مقبول, البرمجة الخطية الغير محدودة)

طريقة السمبلكس (تخفيض)

2-مشكلة التخفيض

الخطوة الاولي :كتابة البرنامج الخطي في الصغة القياسية

$$Min \quad Z = 2x_1 + x_2$$
$$S/C$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 30$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 40$$
$$x_1;\ x_2 \geq 0$$

الصيغة القياسية

$$Min \quad Z = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$
$$S/C$$
$$x_1 + 3x_2 - S_1 + A_1 = 30$$
$$4x_1 + 2x_2 - S_2 + A_2 = 40$$
$$x_1;\ x_2; S_1; S_2; A_1; A_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية: تحويل دالة الهدف الى دالة صفرية

$$Z = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$Z - 2x_1 - x_2 - 0S_1 - 0S_2 - MA_1 - MA_2 = 0$$

طريقة السمبلكس (تخفيض)

الخطوة الثالثة: تكوين جدول السمبلكس

	الثوابت	-M A_2	-M A_1	0 S_2	0 S_1	-1 X_2	-2 X_1	المتغيرات الاساسية
								Z
	30	0	1	0	-1	3	1	M A_1
	40	1	0	-1	0	2	4	M A_2

طريقة السمبلكس (تخفيض)

الخطوة الثالثة: تكوين جدول السمبلكس

$$-2-\left[1\times(-M)+4\times(-M)\right]=(-2+5M)$$

$$-1-\left[3\times(-M)+2\times(-M)\right]=(-1+5M)$$

المتغيرات الاساسية	-2 X_1	-1 X_2	0 S_1	0 S_2	-M A_1	-M A_2	الثوابت	
Z	$(-2+5M)$	$(-1+5M)$	-M	-M	0	0	$(70M)$	
-M A_1	1	3	-1	0	1	0	30	
-M A_2	4	2	0	-1	0	1	40	

طريقة السمبلكس (تخفيض)

المتغيرات الاساسية	-2 X_1	-1 X_2	0 S_1	0 S_2	-M A_1	-M A_2	الثوابت	
Z	$(-2+5M)$	$(-1+5M)$	-M	-M	0	0	$(70M)$	
-M A_1	1	3	-1	0	1	0	30	30/3=10
-M A_2	4	2	0	-1	0	1	40	40/2=20

عنصر المحوري

X_2المتغير الداخل هو

A_1المتغير الخارج هو

طريقة السمبلكس (تخفيض)

المتغيرات الاساسية	-2 X_1	-1 X_2	0 S_1	0 S_2	-M A_1	-M A_2	الثوابت	
Z	$\left(-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M\right)$	0	$\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M\right)$	-M	$\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M\right)$	0	$(10+20M)$	
-1 X_2	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10	30
-M A_2	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20	6

عنصر المحور

المتغير الداخل هو X_1

المتغير الخارج هو A_2

طريقة السمبلكس (تخفيض)

المتغيرات الاساسية	-2 X_1	-1 X_2	0 S_1	0 S_2	-M A_1	-M A_2	الثوابت
Z	0	0	0	-1/2	-M	½-M	20
-1 X_2	0	0	-2/5	1/10	2/5	-1/10	8
-2 X_1	1	1	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6

$\forall Z \leq 0$ الحل الامثل

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

$$Z = 2X_1 + X_2 = 2*6+8 = 20$$

طريقة السمبلكس (تخفيض)

ملاحظة:

متغيرات اساسية

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

متغيرات غير اساسية

$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

طريقة السمبلكس (تخفيض)

3.حالات خاصة:

- **عدم و جود حل ممكن:** عند وصول الى الحل الامثل نجد المتغييرالاصطناعي كمتغير اساسي

$Coef$	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	الثوابت	$Ratio$
3	S_1	0.5	1	0.5	0	***0***	1	
-M	A_2	-2	0	-1	-1	1	2	
	Z	$-\frac{1}{2}-2M$	0	$-\frac{3}{2}-M$	M	0	Z_{M1}	3-2M

- **ما لانهاية الدالة الاقتصادية:** عدم وجود متغير خارج

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	الثوابت	النسبة
Z	0	-2	9	0	-12	-4	Z=100	
x_4	0	1	-6	1	6	-1	20	-
x_1	1	1	-1	0	1	0	5	-

لا يوجد متغير خارج

المتغير الداخل هو X_3

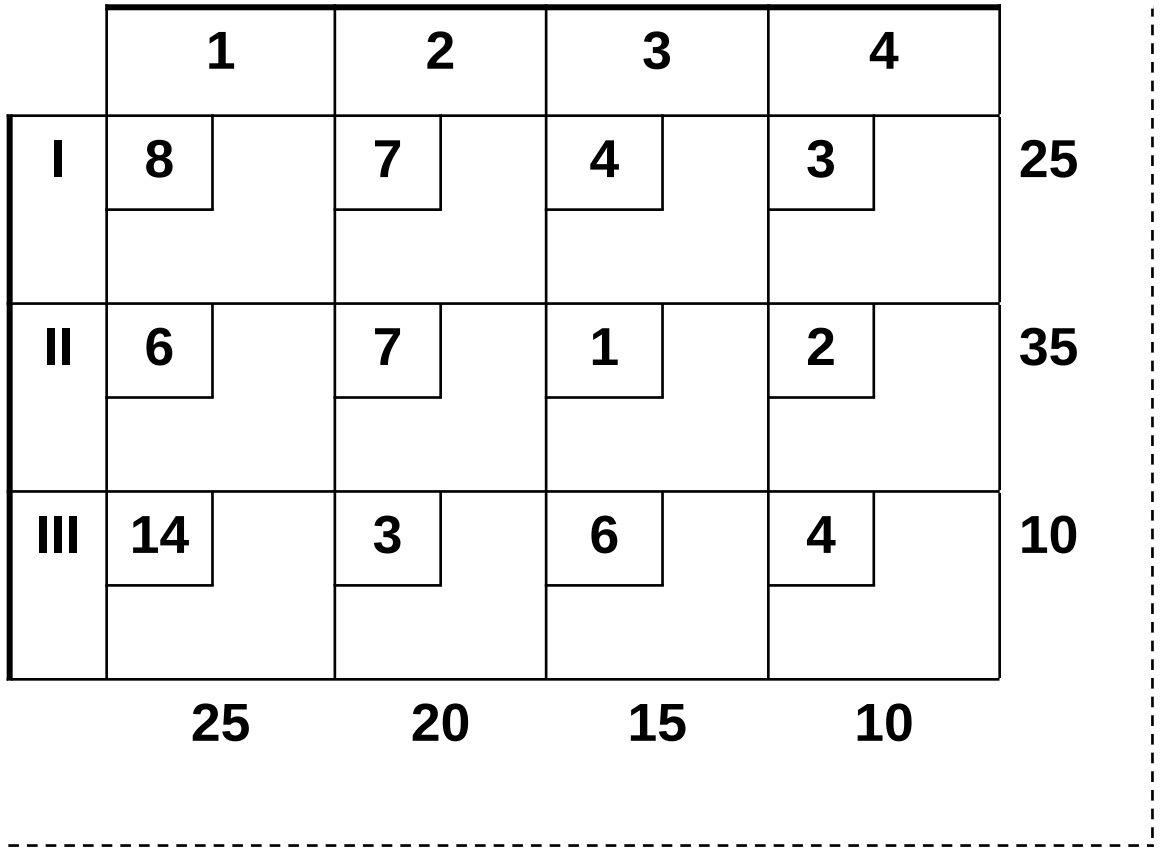
مشكلة النقل

مثال 1

شركة لديها 3 مصانع, يوجد في مخزن المصنع I, 25 صندوق , في المخزن الثاني 35 صندوق اما مخزن المصنع III فيوجد به 10 صناديق.
تلقي صاحب الشركة طلبات انتاج من قبل 4 حرفاء. طلبات الحريف الاول 25 صندوق , الحريف الثاني 20, الحريف الثالث 15 صندوق اما الحريف الرابع قد طلب 10 صناديق.
تكلفة نقل الصندوق الواحد من المصانع الى الحرفاء (بالريال) مبينة في الجدول التالي:

	1	2	3	4
I	8	7	4	3
II	6	7	1	2
III	14	3	6	4

الحريف / المصنع	1	2	3	4	العرض
I	8	7	4	3	25
II	6	7	1	2	35
III	14	3	6	4	10
الطلب	25	20	15	10	70


1
2
3
4
I
8
7
4
3
25
II
6
7
1
2
35
III
14
3
6
4
10
25
20
15
10

طريقة اقل كلفة:

الخطوة الاولي :

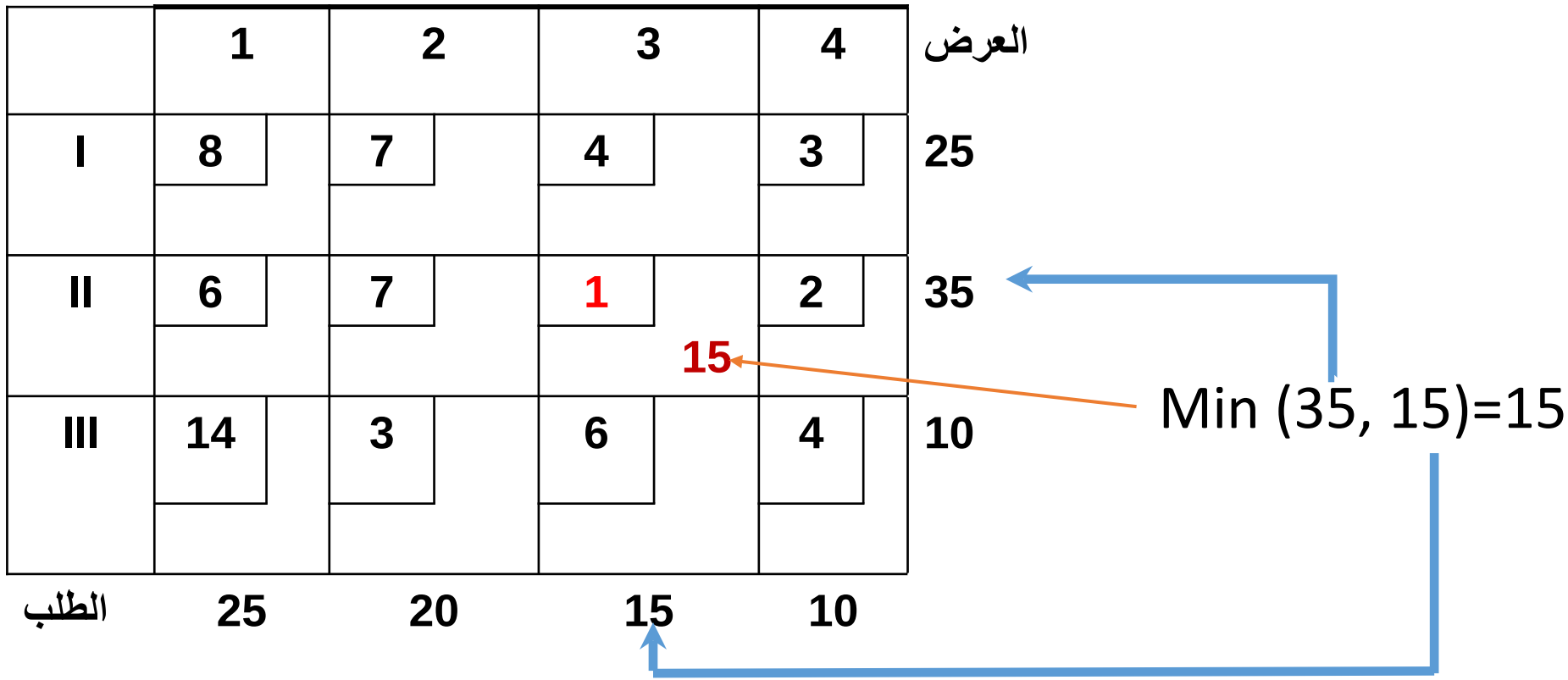
البحث عن الخلية التي لها أقل تكلفة في جدول النقل، وإذا ما وجدت أكثرمن خلية لها نفس التكلفة (أقل تكلفة)، في هذه الحالة يمكن اختيار أي خلية منهم عشوائياً ولكن للوصول إلي الحل الأمثل بصورة أسرع ولتقليل عدد المحاولات والجداول لتحسين الحل فإنه يمكن البدء باختيار الخلية التي تستوعب أكبر عدد من الوحدات من بين هذه الخلايا.

	1	2	3	4	العرض
I	8	7	4	3	25
II	6	7	1	2	35
III	14	3	6	4	10
الطلب	25	20	15	10	

اقل تكلفة

- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.



- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.

	1	2	3	4	العرض
I	8	7	4	3	25
II	6	7	1	2	~~35~~ 20
III	14	3	6	4	10
الطلب	25	20	15	10	
			15		
			0		

الكمية المتبقية في المصنع الثاني

- الخطوة الثانية:

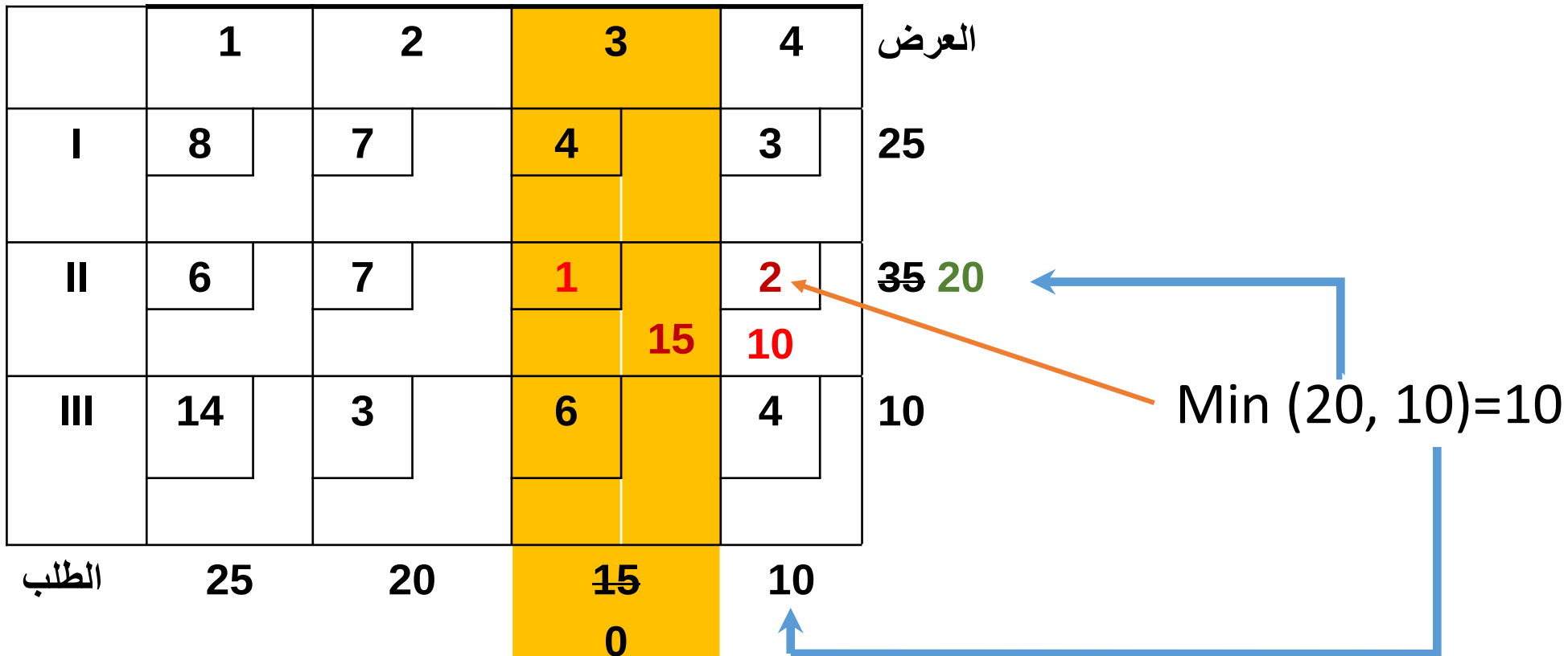
ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.

	1	2	3	4	العرض
I	8	7	4	3	25
II	6	7	1	2	~~35~~ 20
III	14	3	6	4	10
الطلب	25	20	~~15~~ 0	10	

استبعاد العمود الثالث

- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.



- الخطوة الثانية:

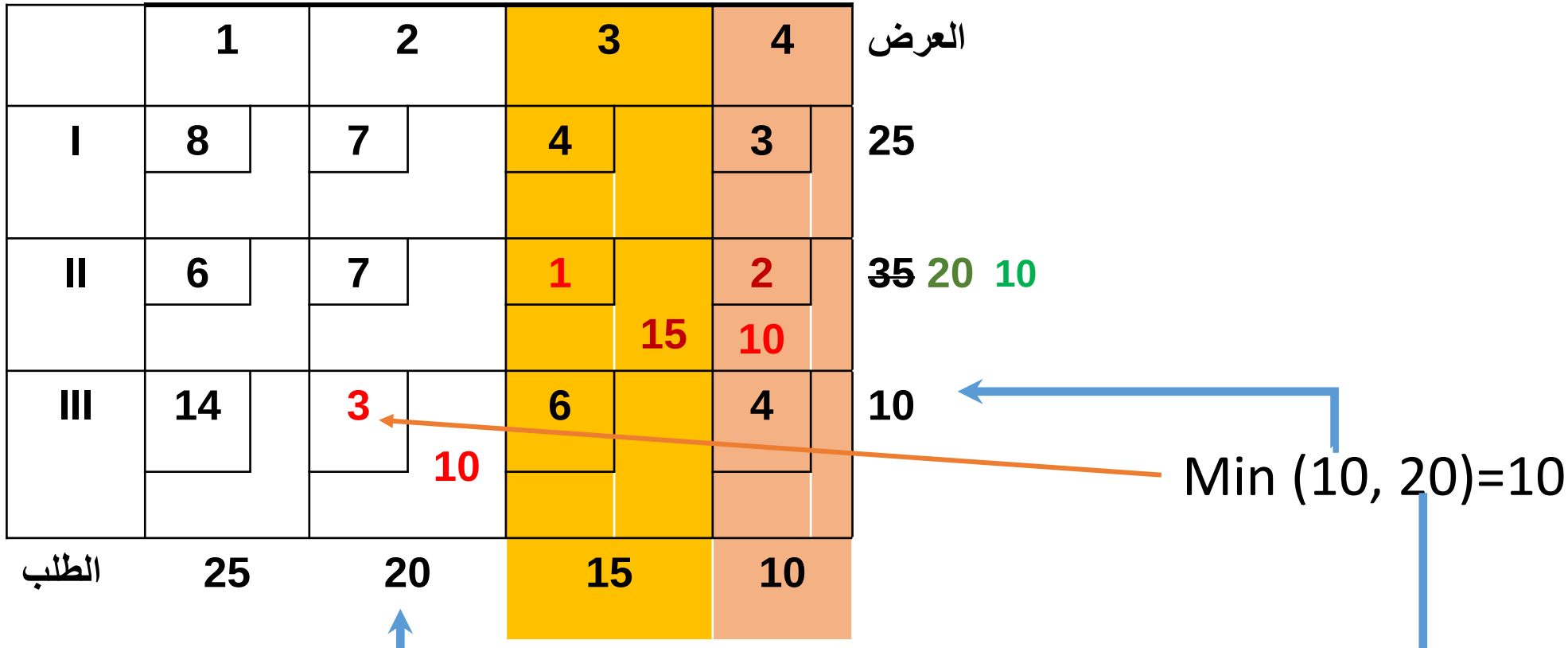
ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.

	1	2	3	4	العرض
I	8	7	4	3	25
II	6	7	1	2	~~35~~ ~~20~~ 10
			15	10	
III	14	3	6	4	10
الطلب	25	20	~~15~~ 0	~~10~~ 0	

استبعاد العمود الرابع

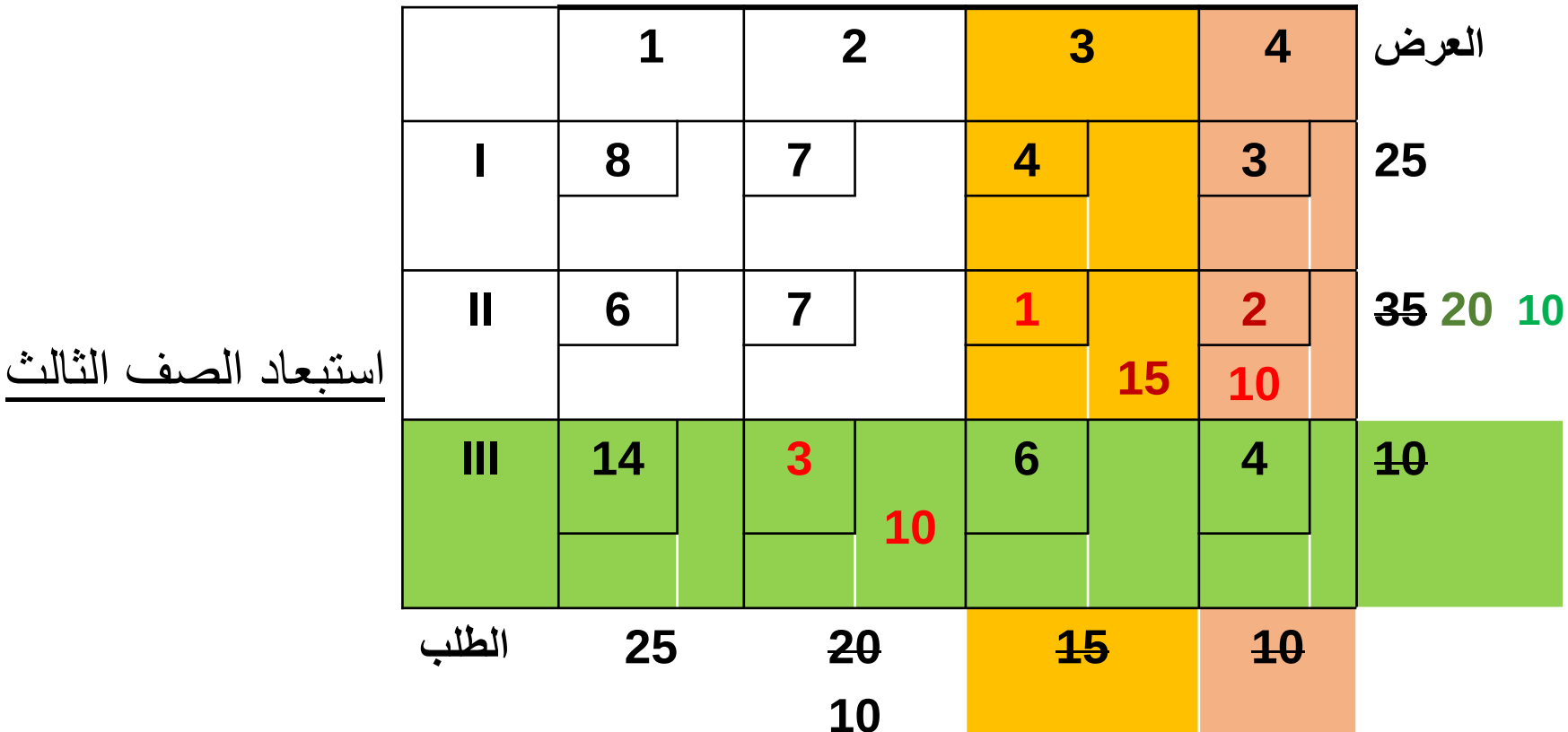
- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.



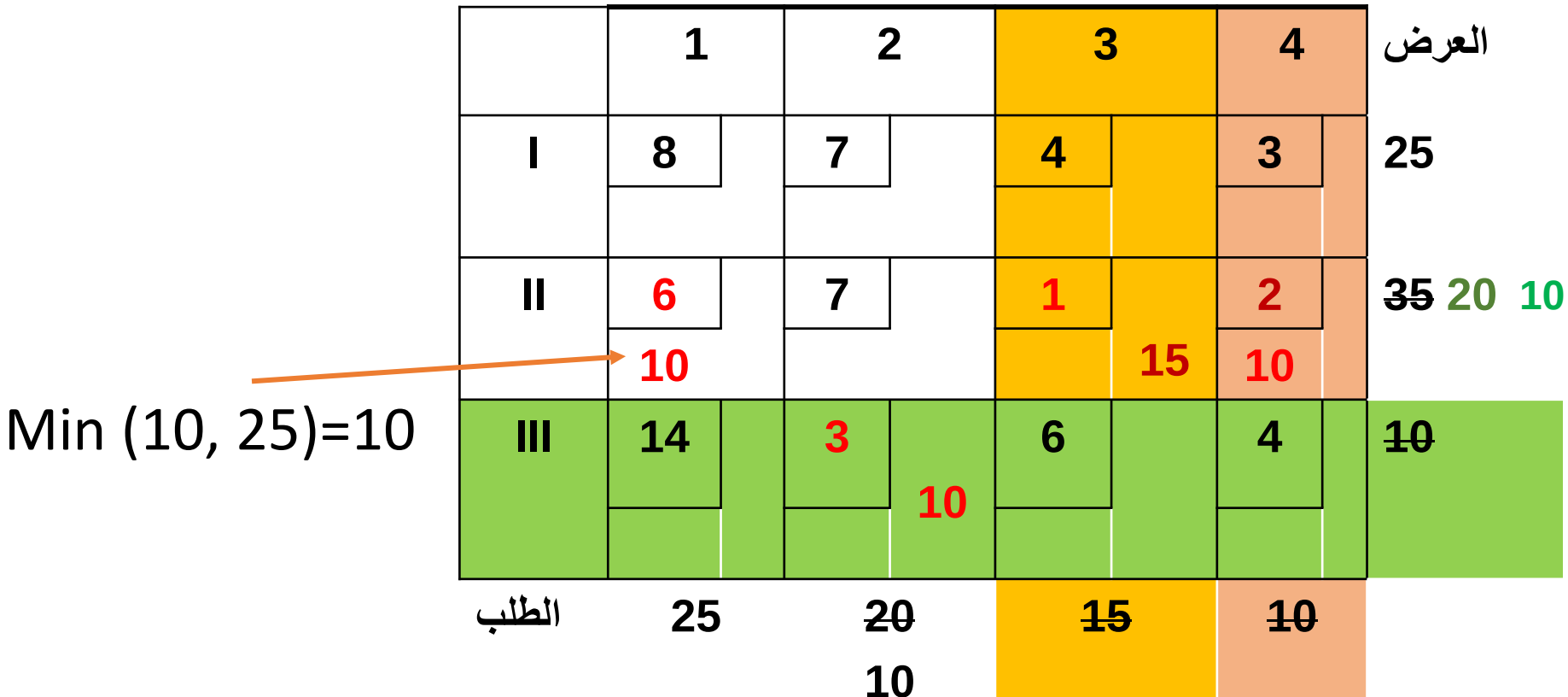
- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.



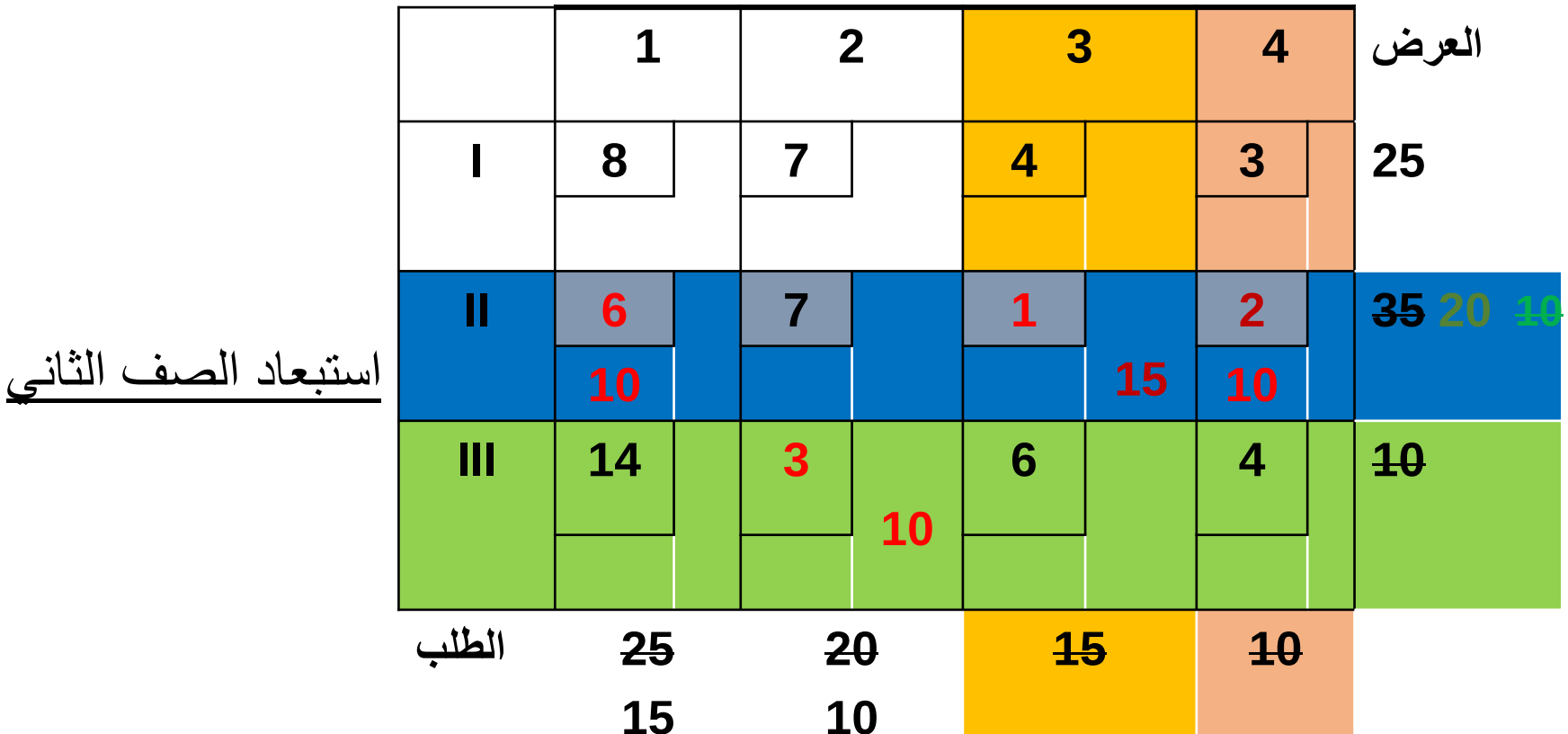
- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.



- الخطوة الثانية:

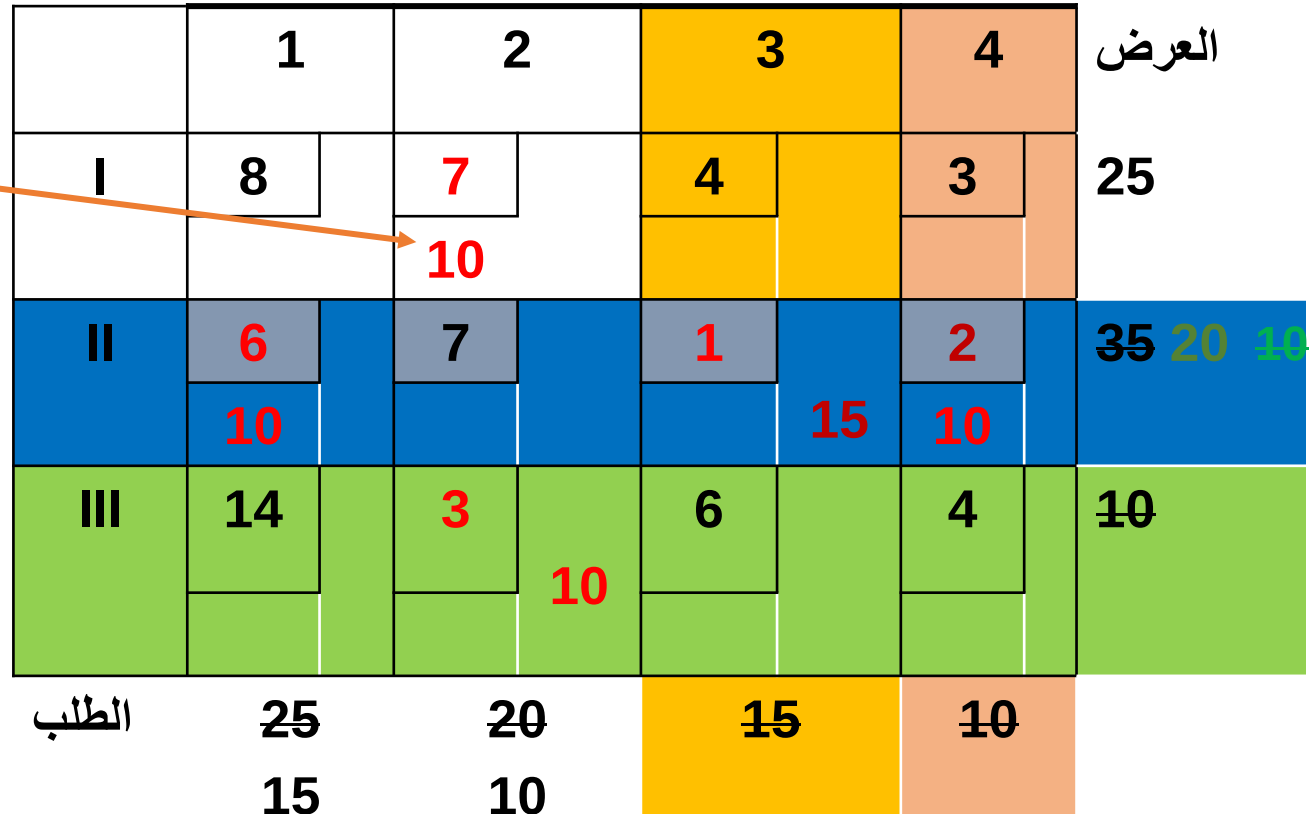
ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.



- الخطوة الثانية:

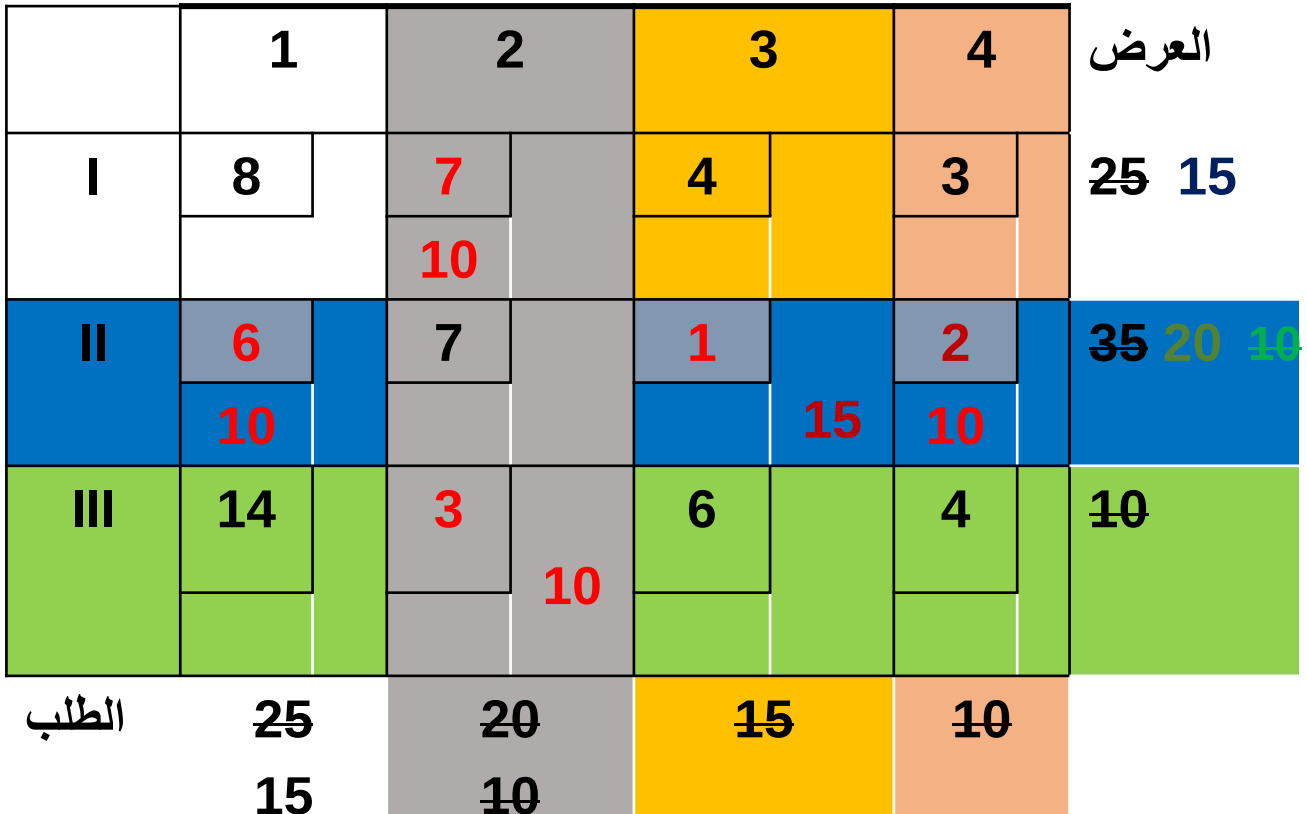
ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.

Min (10, 25)=10



- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.

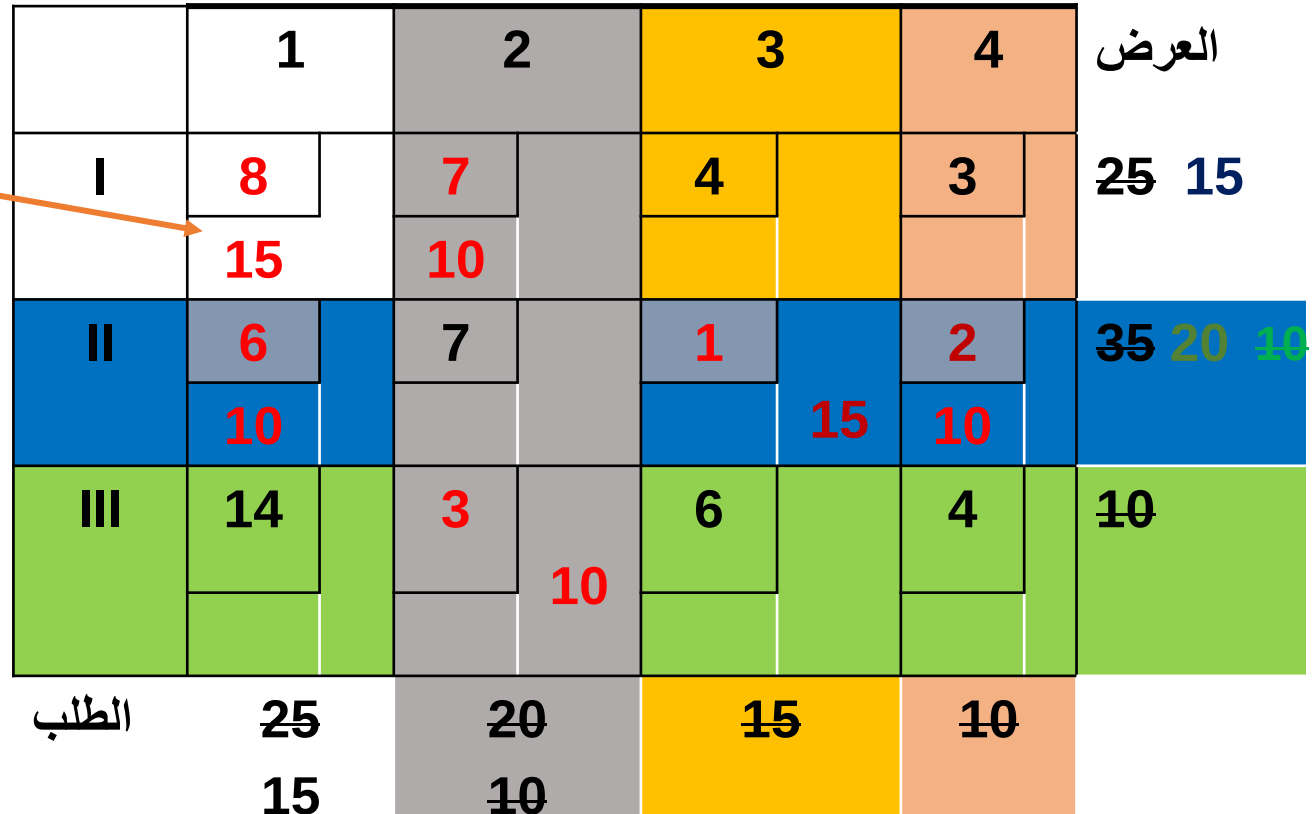


استبعاد العمود الثاني

- الخطوة الثانية:

ملء الخلية المختارة بأقصى كمية ممكنة وذلك في ضوء طاقة المصادر(المصانع) واحتياجات نقاط الطلب (المخازن أو المناطق البيعية) أيهما أقل. ثم استبعاد الخلايا الأخرى في الصف أو العمود المستنفد أو الذي تم تلبية احتياجاته بالكامل. ونود الإشارة إلي أننا عندما نقول باستبعاد صف أو عمود فإنما نعني أنه لا يجب في أي خطوة تالية اختيار خلية من هذا الصف أو ذاك العمود لتدخل هذا الحل الذي نحن بصدده.

Min (15, 15)=15



- الخطوة الثالثة:

احتساب تكلفة النقل الكلية المترتبة علي هذا الحل المبدئي كما يلي:

التكلفةالكلية = (8*15)+(7*10)+(6*10)+(1*15)+(2*10)+(3*10)=315

	1	2	3	4	العرض
I	8	7	4	3	
	15	10			25
II	6	7	1	2	
	10		15	10	35
III	14	3	6	4	
		10			10
الطلب	25	20	15	10	

X11=15
X12=10
X21=10
X23=15
X24=10
X32=10

- اختبار الامثلية
  - الشرط الاساسي

m عدد الصفوف

n عدد الاعمدة

m+n-1 = عدد المربعات المشغولة

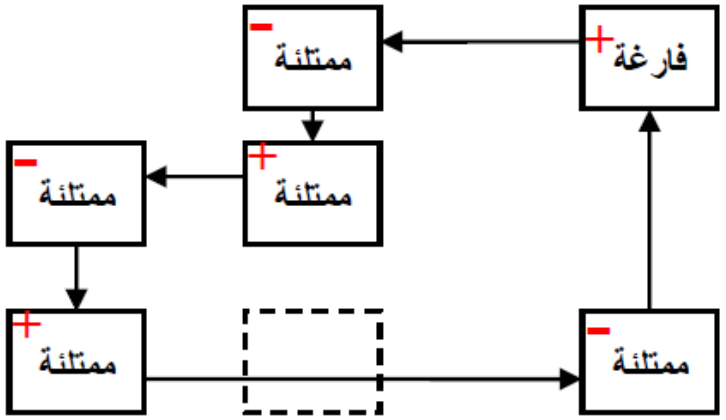
فاذا كان عدد المربعات المشغولة في الجدول اقل من m+n-1 فانه غير ممكن نجد حل امثل

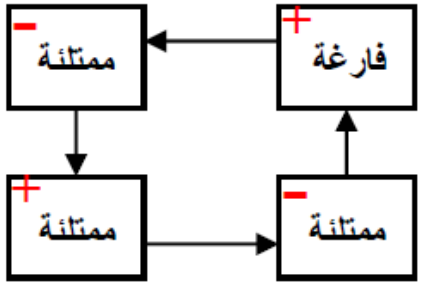
  - اختبار الامثلية بطريقة المسار المتعرج

- **الخطوة الاولي:** نحدد المتغيرات غير الأساسية والتي تمثل الخلايا الفارغة ونبدأ من أول خلية فارغة في الجدول، ثم التي تليها وهكذا...

- **الخطوة الثانية:** يتم تحديد المسارات بالانتقال من الخلية الفارغة (فتأخذ إشارة موجب +) المراد اختبارها إلى خلية ممتلئة (فتأخذ إشارة سالب -)، علمًا بأن المسار المغلق يبدأ بالخلية الفارغة وينتهي عندها،

- **الخطوة الثالثة:** بذلك يظهر لنا الشكل المربع أو المستطيل أو شكل الدرج، كما في الشكل التالي:





- **الخطوة الرابعة:** نحسب الكلفة المقدرة لكل خانة فارغة للمسار المحدد مع اعتماد الاشارة (-,+)
- Cij= (الفارغة)Cij + (المملوئة)Cik - (المملوئة)Clk + (المملوئة)Clj -

- **الخطوة الخامسة:** إذا كانت نواتج المؤشرات للخانات الفارغة(المتغيرات الغير اساسية) موجبة أو صفر فالحل الموجود هو الحل الامثل(أي أنها لا تحتاج إلى تحسين)، وإذا كان هناك مؤشر سالب فمعنى ذلك أنه يمكن إجراءعملية تحسين لهذه الخانة(الحل الموجود ليس بالحل الامثل) فتصبح الخانة الفارغة مملوؤة والخانة المملوؤة فارغة,
- بحيث الكمية المنقولة من الخانة المملوؤة الي الخانة الفارغة تساوي اقل قيمة (θ) للكمية الموجودة في الخانات التي لها اشارة سالبة. اما الخانة التي لها اقل كمية ولها اشارة سالبة معا, تصبح خانة فارغة.

$$\theta = min\{x_{kl} \quad / \quad x_{kl} \text{متغير اساسي له اشارة سالبة}\}$$

متغير له اشارة (+) $x_{kl} = x_{kl} + \theta$

متغير له اشارة (-) $x_{kl} = x_{kl} - \theta$

- الخانات التي لها اشارة موجبة تضاف لها الكمية المنقولة و اما الخانات التي لها اشارة سالبة تحذف منها هذه الكمية
- بقية الخانات (التي ليس لها اشارات (+)و(-)) تبقي بدون تغيير

مثال2 صفحة 89

لنفرض انه يوجد لدينا حل اولي موضح في الجدول التالي. اختبر الامثلية

	1	2	العرض
S1	4 **60**	2	60
S2	7 **40**	5	40
S3	3 **15**	10 **65**	80
الطلب	115	65	

مثال2 صفحة 89

الشرط الاساسي

m عدد الصفوف=3

n عدد الاعمدة=2

m+n-1 = عدد المربعات المشغولة=4

اختبار الامثلية ← طريقة المسار المتعرج

نحسب الكلفة المقدرة لكل خانة فارغة للمسار المحدد مع اعتماد الاشارة (+,-)

C_{12}=+2-4+3-10=-9<0

	1	2	العرض
S1	4 **60** -	2 **-9** +	60
S2	7 **40**	5	40
S3	3 **15** +	10 **65** -	80
الطلب	115	65	

مثال2 صفحة 89

$C_{22}=+5-7+3-10=-9<0$

	1	2	العرض
S1	4 **60**	2 **-9**	60
S2	7 **40** -	5 **-9** +	40
S3	3 **15** +	10 **65** -	80
الطلب	115	65	

نختار الخانة الفارغة التي لها اقل كلفة مقدرة. بما انهم متساويين فنختار خانة عشوائية

مثال2 صفحة 89

لنفرض اننا اخترنا الخانة X_{12}

	1	2	العرض
S1	4 — 60 (-)	2 — -9 (+)	60
S2	7 — 40	5 — -9	40
S3	3 — 15 (+)	10 — 65 (-)	80
الطلب	115	65	

Min(65,60)=60

	1	2	العرض
S1	4	2 — 60	60
S2	7 — 40	5	40
S3	3 — 75	10 — 5	80
الطلب	115	65	

15+60=75

65-60=5

اختبار الامثلية

نقوم باحتساب الكلفة المقدرة للخانات الفارغة

	1	2	العرض
S1	4 **9**	2 **60**	60
S2	7 **40**	5 **-9**	40
S3	3 **75**	10 **5**	80
الطلب	115	65	

مثال2 صفحة 89

Min(40, 5)=5

	1	2	العرض
S1	4	2 60	60
S2	7 40 -	5 +	40
S3	3 75 +	10 5 -	80
الطلب	115	65	

	1	2	العرض
S1	4	2 60	60
S2	7 35 -	5 5 +	40
S3	3 80 +	10 -	80
الطلب	115	65	

مثال2 صفحة 89

نحسب من جديد الكلفة المقدرة للخانات الفارغة

	1	2	العرض
S1	4 **0** +	2 **60** -	60
S2	7 **35** -	5 **5** +	40
S3	3 **80**	10	80
الطلب	115	65	

X21=35
X12=60
X22=5
X31=80

	1	2	العرض
S1	4 **0**	2 **60**	60
S2	7 **35** +	5 - **5**	40
S3	3 **80** -	10 + **9**	80
الطلب	115	65	

الكلفة المقدرة للخانات الفارغة موجبة او تساوي صفر

الحل الامثل

تمرين

الشرط الاساسي

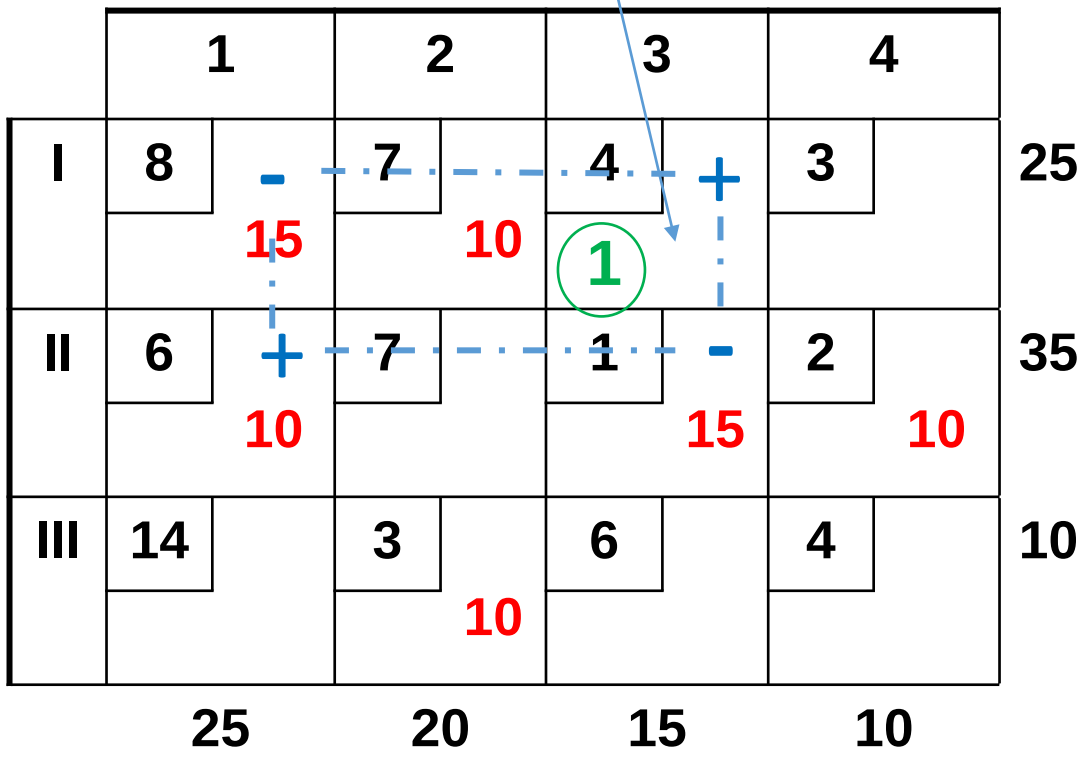
m عدد الصفوف=3

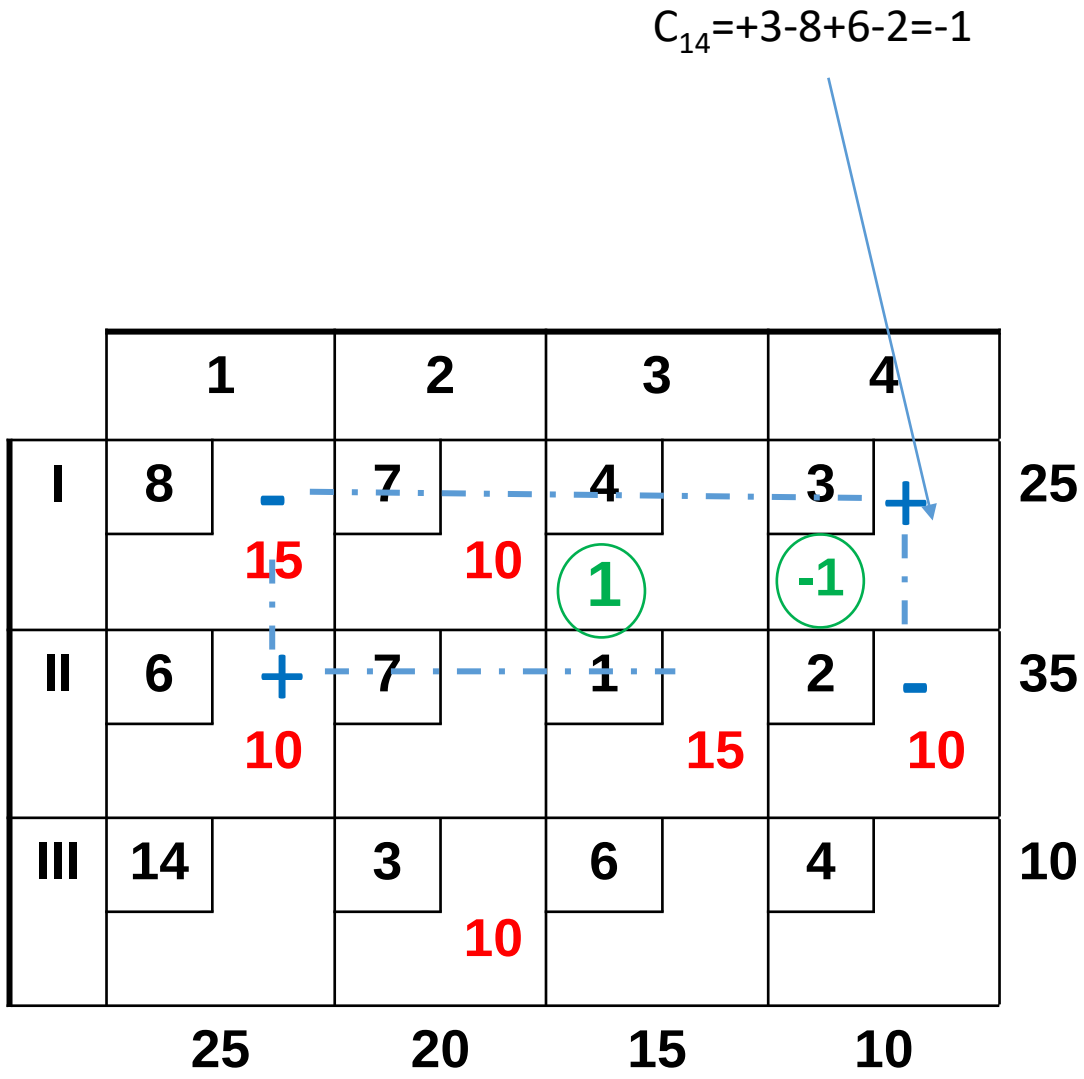
n عدد الاعمدة=4

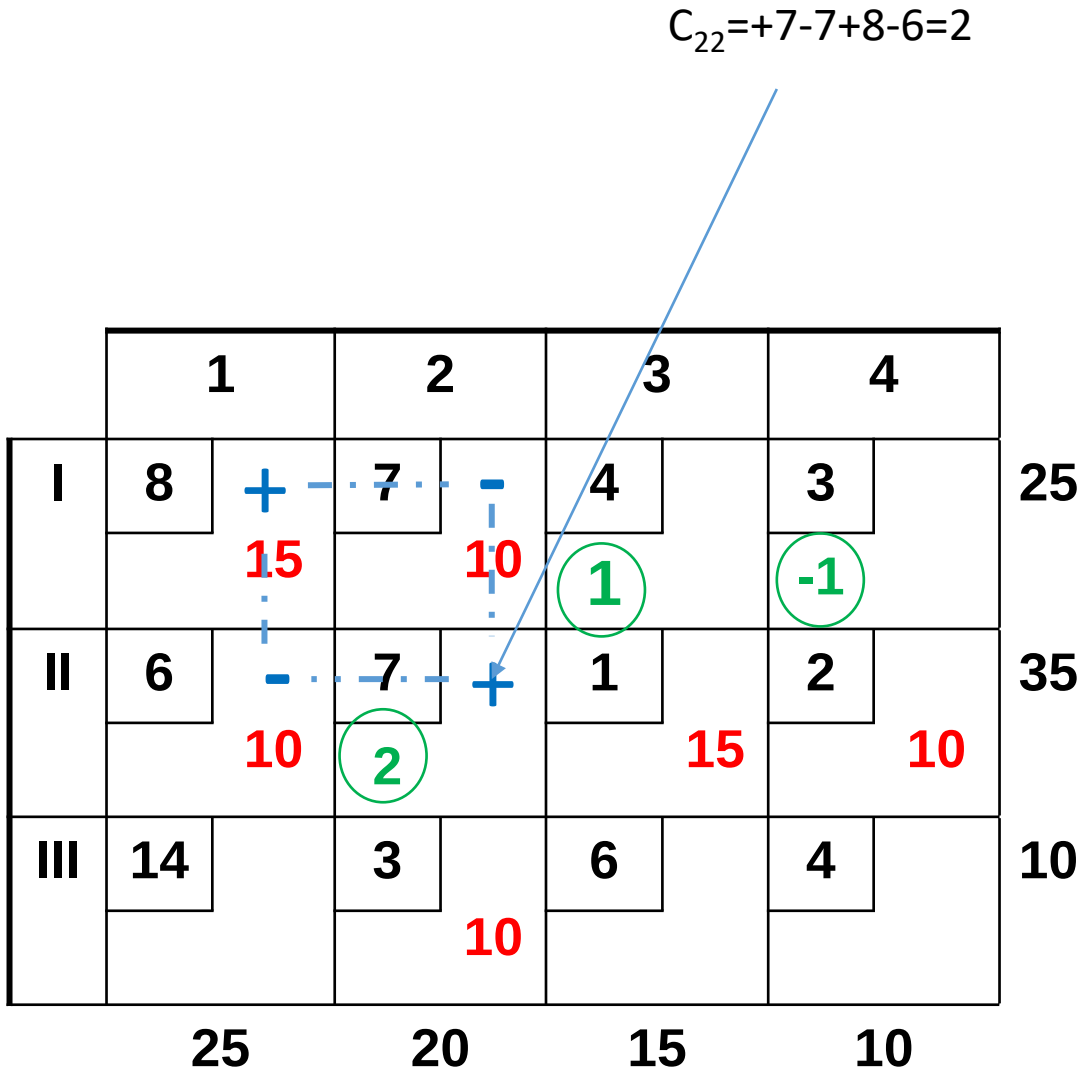
m+n-1 = عدد المربعات المشغولة=6

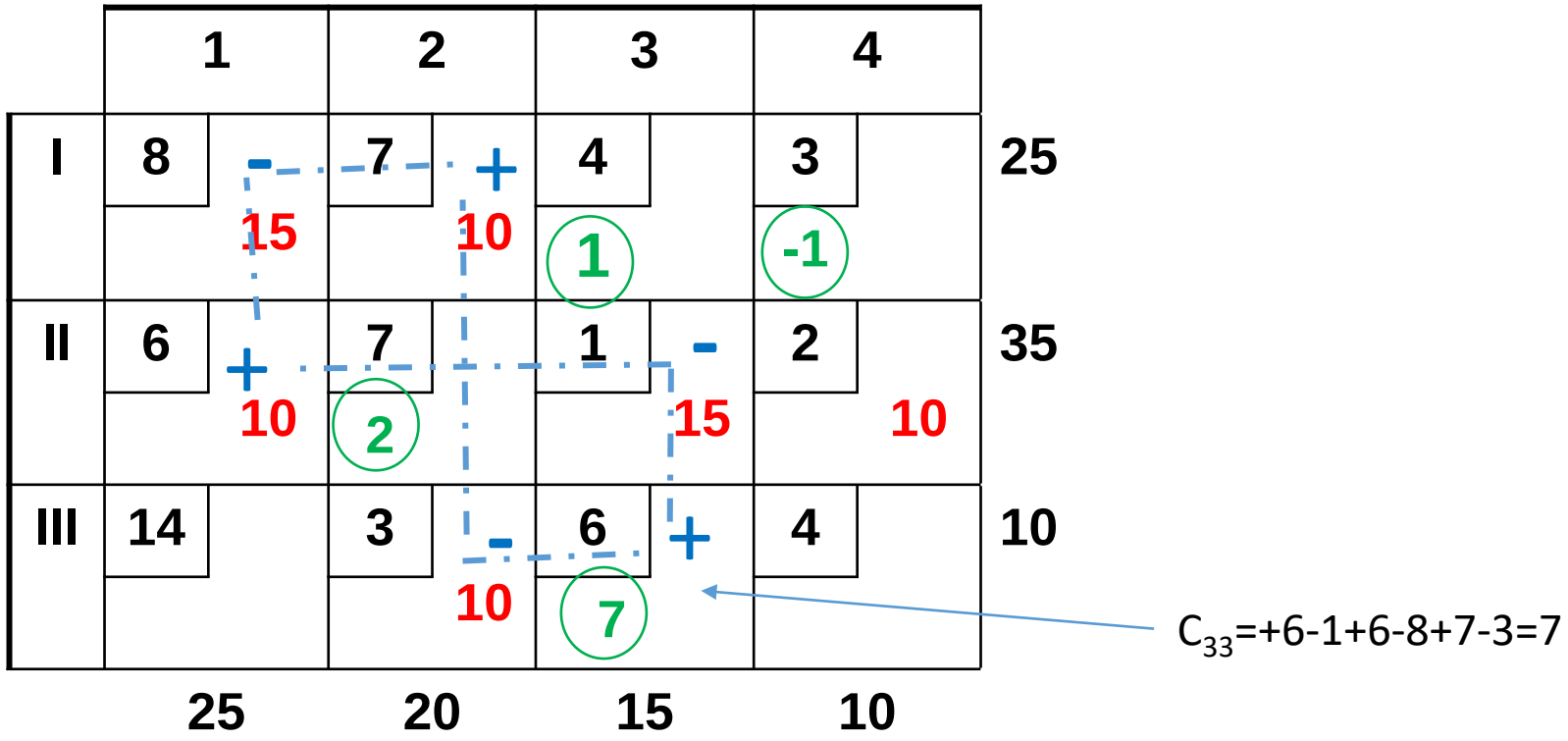
نحسب الكلفة المقدرة لكل خانة فارغة
للمسار المحدد مع اعتماد الاشارة (+,-)

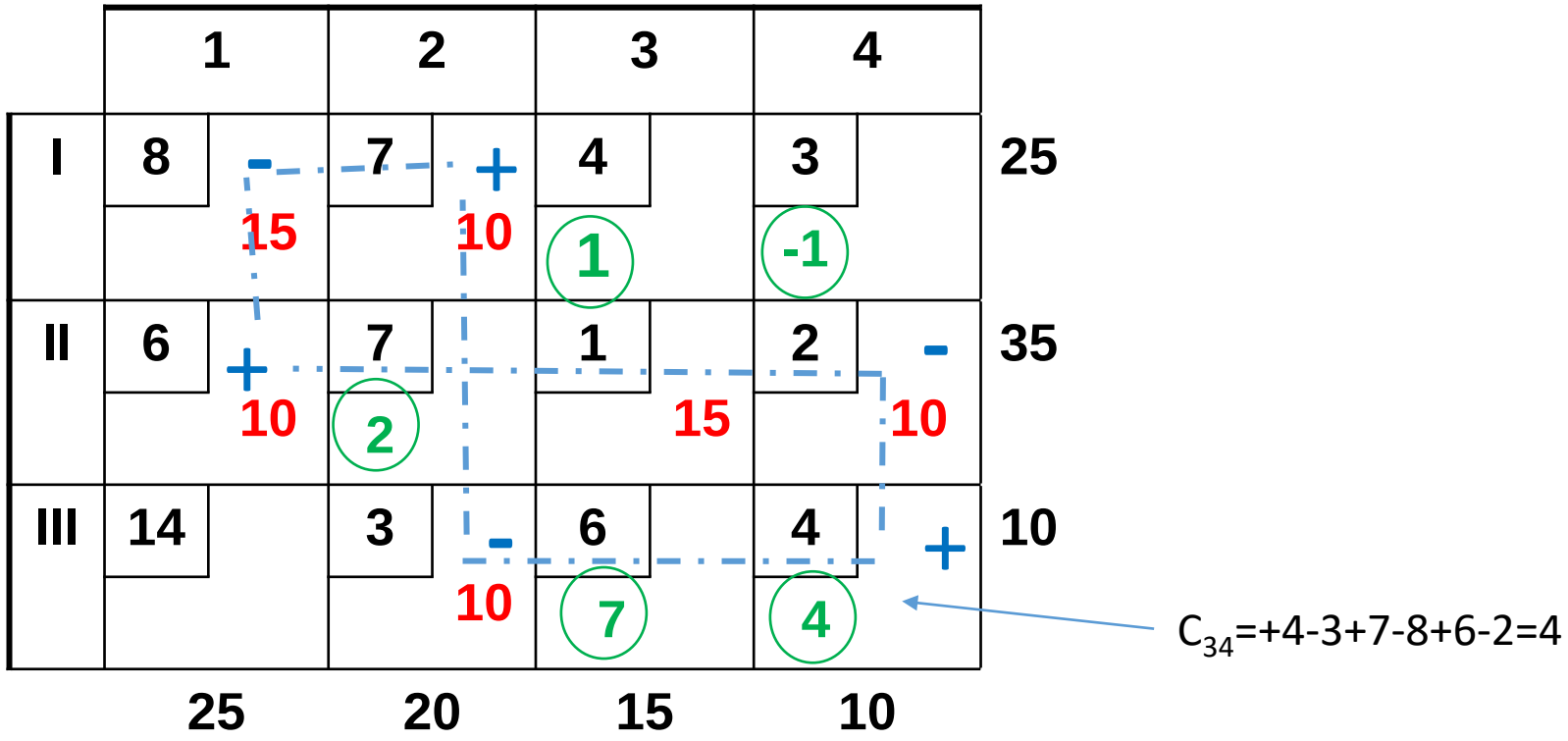
C_{13}=+4-8+6-1=1



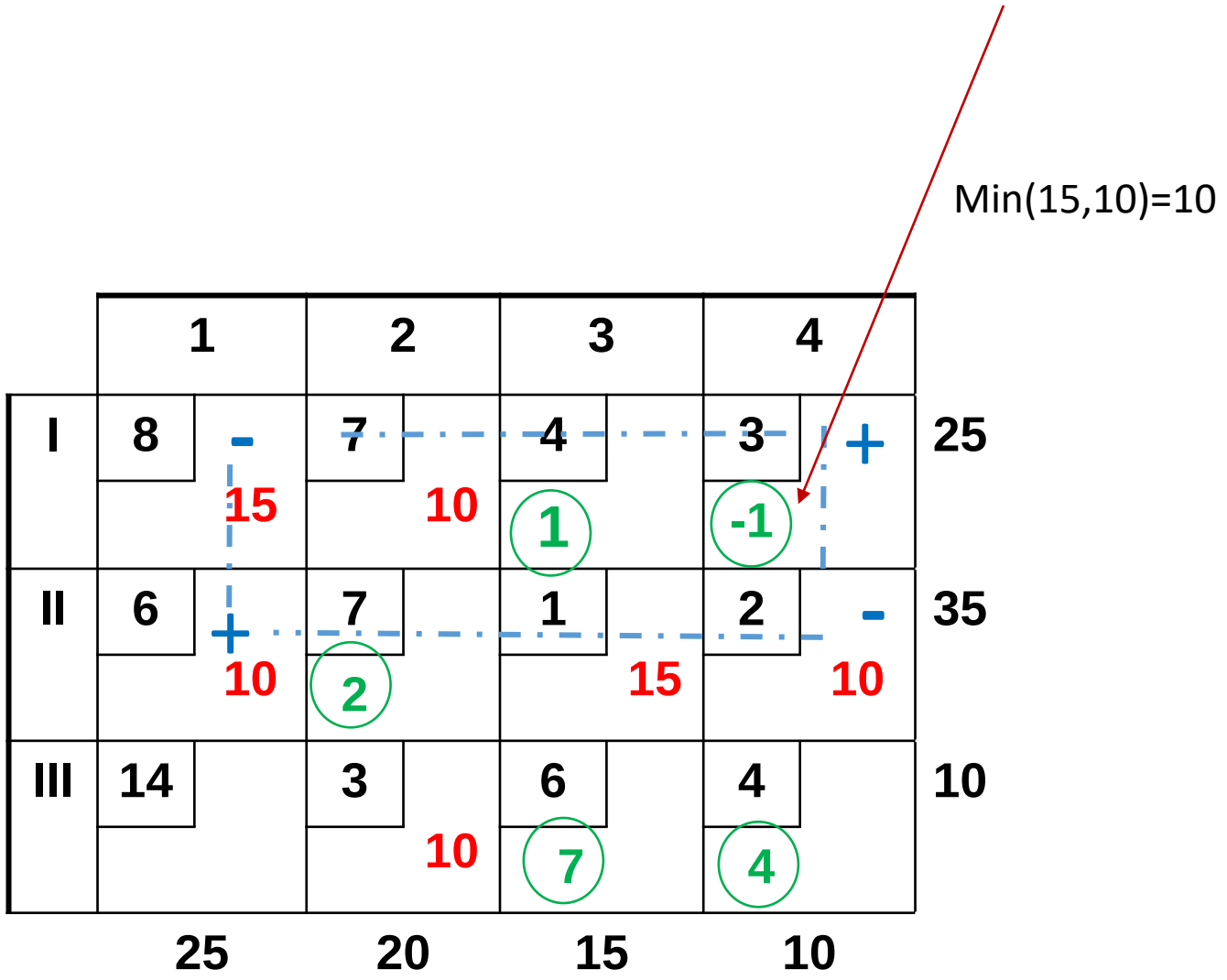

C_{14}=+3-8+6-2=-1
1
2
3
4
I
II
III
8
7
4
3
6
7
1
2
14
3
6
4
25
35
10
15
10
1
-1
10
15
10
25
20
15
10


C_{22}=+7-7+8-6=2
1
2
3
4
I
II
III
8
7
4
3
6
7
1
2
14
3
6
4
+
-
-
+
15
10
1
-1
10
2
15
10
10
25
35
10
25
20
15
10

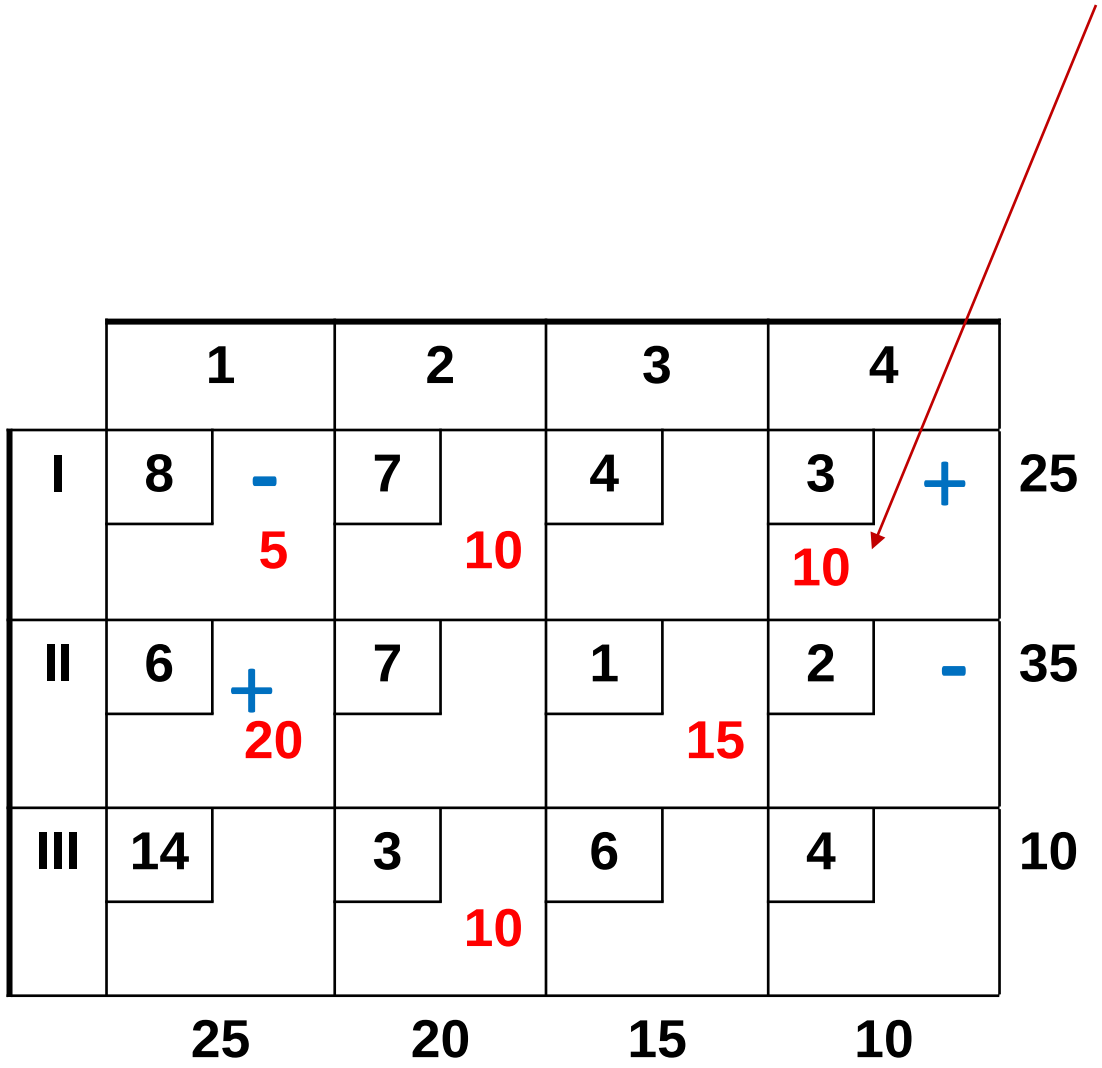

1
2
3
4
I
8
7
4
3
25
II
6
7
1
2
35
III
14
3
6
4
10
25
20
15
10
15
10
1
-1
10
2
15
10
10
7
C_{33}=+6-1+6-8+7-3=7


1
2
3
4
I
II
III
8
7
4
3
6
7
1
2
14
3
6
4
25
35
10
-
15
+
10
1
-1
+
10
2
15
-
10
-
10
7
4
+
25
20
15
10
C_{34}=+4-3+7-8+6-2=4

بما ان الكلفة المقدرة سالبة فمعنى ذلك أنه يمكن إجراءعملية تحسين لهذه الخانة.
بحيث نختار اقل كمية موجودة في الخانة المملوؤة السالبة



الخانات التي لها علامة (+) تضاف لها 10 و الخانات التي لها علامة (–) نحذف منها 10



نحسب الكلفة المقدرة لكل خانة فارغة
للمسار المحدد مع اعتماد الاشارة (+,-)

	1	2	3	4	
I	8 - 5	7 10	4 + 1	3 10	25
II	6 + 20	7 2	1 - 15	2 1	35
III	14 2	3 10	6 7	4 5	10
	25	20	15	10	

حل امثل لان

التوازن

- العرض > الطلب: نضيف **عمود وهمي** (حريف وهمي) بتكلفة تساوي **صفر**لكل خانة

	1	2	العرض
S1	4	2	600
S2	7	5	400
S3	3	10	800
الطلب	1000	500	

	1	2	3	العرض
S1	4	2	0	600
S2	7	5	0	400
S3	3	10	0	800
الطلب	1000	500	300	

التوازن

- العرض > الطلب: نضيف **صف وهمي** (مخزن وهمي) بتكلفة تساوي **صفر**لكل خانة

	1	2	العرض
S1	4	2	600
S2	7	5	200
S3	3	10	300
S4	0	0	400
الطلب	1000	500	

	1	2	العرض
S1	4	2	600
S2	7	5	200
S3	3	10	300
الطلب	1000	500	

مشكلة التخصيص

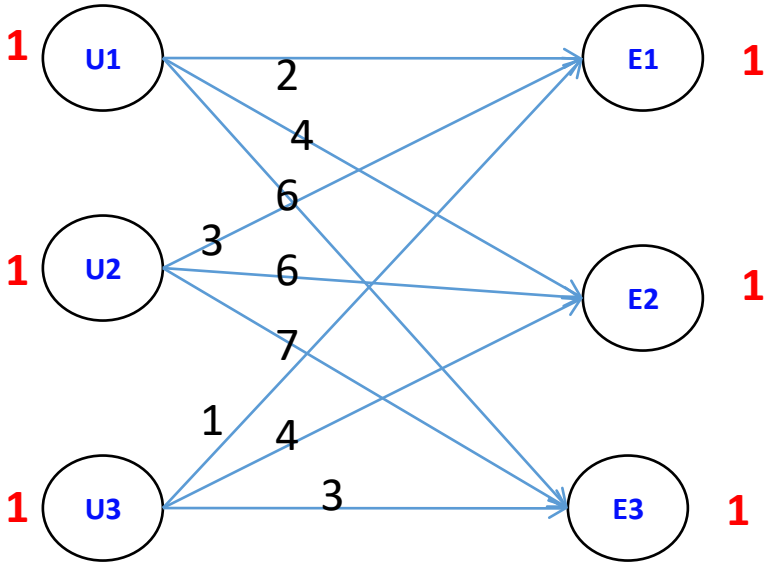
مقدمة

- يهدف نموذج التخصيص إلي تعيين أو تخصيص عدد معين من الموارد أو الإمكانيات (آلات أو عمال مثلا) لعدد مساو من الغايات (الاستخدامات أو المهام مثلا) بصورة تمكن من تحقيق أدني تكلفة أو تحقيق أقصي ربح أو أقل وقت إنجازممكن ....الخ. ويتم التخصيص علي أساس ربط كل مورد بمهمة واحدة وربط كل مهمة بمورد واحد فقط.

- ويستخدم نموذج التعيين في كثير من التطبيقات العملية،

  - مشكلة تخصيص العاملين اللازمين لإنجاز المهام المختلفة بالمنشأة بما يؤدي إلي تحقيق أقل تكلفة أو وقت ممكن.
  - مشكلة إسناد عقود مقاولات محددة لمقاولين معينين بما يؤدي إلي تحقيق أقل تكلفة أو أقل وقت.
  - مشكلة جدولة الإنتاج بالمنشأة بمعني تخصيص كل أمر تشغيل محدد إلي آلة معينة لإنجازه بما يحقق أدني تكلفة كلية للمنشأة أو انجاز العمل في أقل وقت ممكن.
  - مشكلة توزيع رجال البيع بين المناطق المختلفة بما يحقق أكبر ربح ممكن للمنشأة.....

البرنامج الخطي



$$Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$S/C$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in 1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

مشكلة التخصيص: الطريقة الهنغارية (The Hungarian Method)

الجدول التالي يمثل التكاليف المتعلقة بانجاز 5 مهام (5....,2,1) من قبل خمس عمال (E,....B,A)

	1	2	3	4	5
A	24	16	22	30	8
B	14	18	34	28	20
C	18	12	24	14	14
D	14	16	28	16	20
E	18	18	26	20	12

الخطوة الاولى: حدد العنصر الاصغر لكل صف

	1	2	3	4	5
A	24	16	22	30	8
B	14	18	34	28	20
C	18	12	24	14	14
D	14	16	28	16	20
E	18	18	26	20	12

الخطوة الثانية: لكل صف اطرح العنصر الاصغرمن كل عنصر في الصف لايجاد مصفوفة جديدة

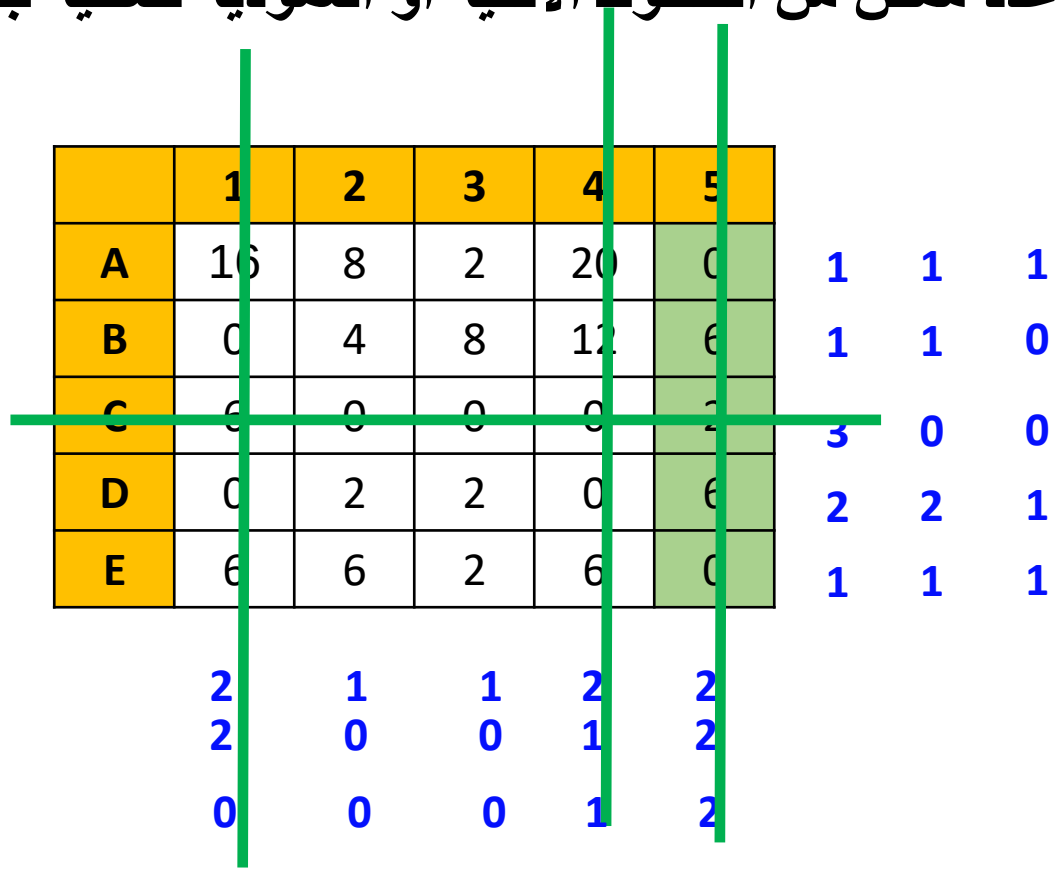
	1	2	3	4	5
A	16	8	14	22	0
B	0	4	20	14	6
C	6	0	12	2	2
D	0	2	14	2	6
E	6	6	14	8	0

الخطوة الثالثة: حدد العنصر الاصغر لكل عمود, واطرح العنصر الاصغر من كل عنصر في العمود لايجاد مصفوفة جديدة

	1	2	3	4	5
A	16	8	2	20	0
B	0	4	8	12	6
C	6	0	0	0	2
D	0	2	2	0	6
E	6	6	2	6	0

الخطوة الثالثة: البحث عن حل امثل

- اوجد اقل عدد ممكن من الخطوط الافقية او العمودية لتغطية جميع الاصفار في المصفوفة



	1	2	3	4	5			
A	16	8	2	20	0	1	1	1
B	0	4	8	12	6	1	1	0
C	6	0	0	0	2	3	0	0
D	0	2	2	0	6	2	2	1
E	6	6	2	6	0	1	1	1
	2	1	1	2	2			
	2	0	0	1	2			
	0	0	0	1	2			

ملاحظة:

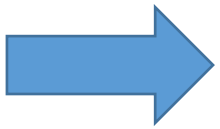
- اذا عدد الخطوط = عدد الصفوف او الاعمدة , يعني ان الحل الموجود هو **الحل الامثل**
- اذا عدد الخطوط < من عدد الصفوف او الاعمدة , انتقل الى الخطوة الرابعة

- **الخطوة الرابعة:** حدد اقل عنصر من العناصرالغير مغطات بخط افقي او عمودي: ليكن h=2

	1	2	3	4	5
A	16	8	2	20	0
B	0	4	8	12	6
C	6	0	0	0	2
D	0	2	2	0	6
E	6	6	2	6	0

- اطرح الاقل عنصر (h=2) من كل العناصرالغير مغطات

	1	2	3	4	5
A	16	8-2	2-2	20	0
B	0	4-2	8-2	12	6
C	6	0	0	0	2
D	0	2-2	2-2	0	6
E	6	6-2	2-2	6	0



	1	2	3	4	5
A	16	6	0	20	0
B	0	2	6	12	6
C	6	0	0	0	2
D	0	0	0	0	6
E	6	4	0	6	0

- اضف القيمة h=2 الى كل عنصر موجود في تقاطع الخطين (الافقي و العمودي)

	1	2	3	4	5
A	16	6	0	20	0
B	0	2	6	12	6
C	6	0	0	0	2
D	0	0	0	0	6
E	6	4	0	6	0

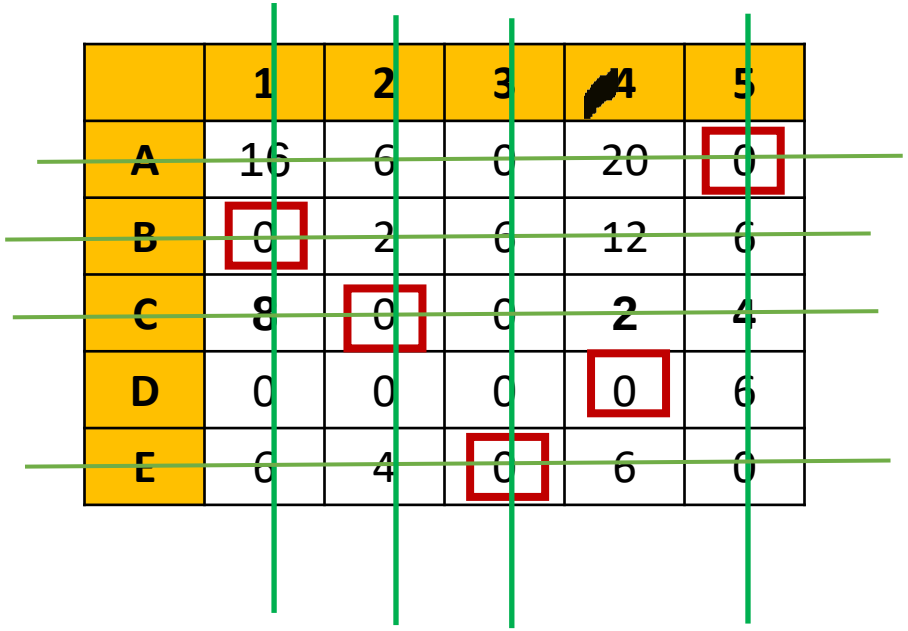
	1	2	3	4	5
A	16	6	0	20	0
B	0	2	6	12	6
C	**8**	0	0	**2**	**4**
D	0	0	0	0	6
E	6	4	0	6	0

- **الخطوة الخامسة: انتقل الى الخطوة الثالثة**

	1	2	3	4	5
A	16	6	0	20	0
B	0	2	6	12	6
C	**8**	0	0	**2**	**4**
D	0	0	0	0	6
E	6	4	0	6	0

عدد الخطوط = عدد الصفوف او الاعمدة , يعني ان الحل الموجود هو الحل الامثل

الحل الامثل : اختيار الصف ذو اقل خلايا صفرية و اختر الخلية الصفرية ذات اقل تكلفة في نفس الصف. ثم احذف الصف و العمود.
اذا تساوت الصفوف في عدد الخلايا الصفرية طبق نفس الطريقة على الاعمدة



	1	2	3	4	5
A	16	6	0	20	0
B	0	2	6	12	6
C	8	0	0	2	4
D	0	0	0	0	6
E	6	4	0	6	0

الكلفة الكلية = 8+14+12+16+26=76

مصفوفة التكلفة

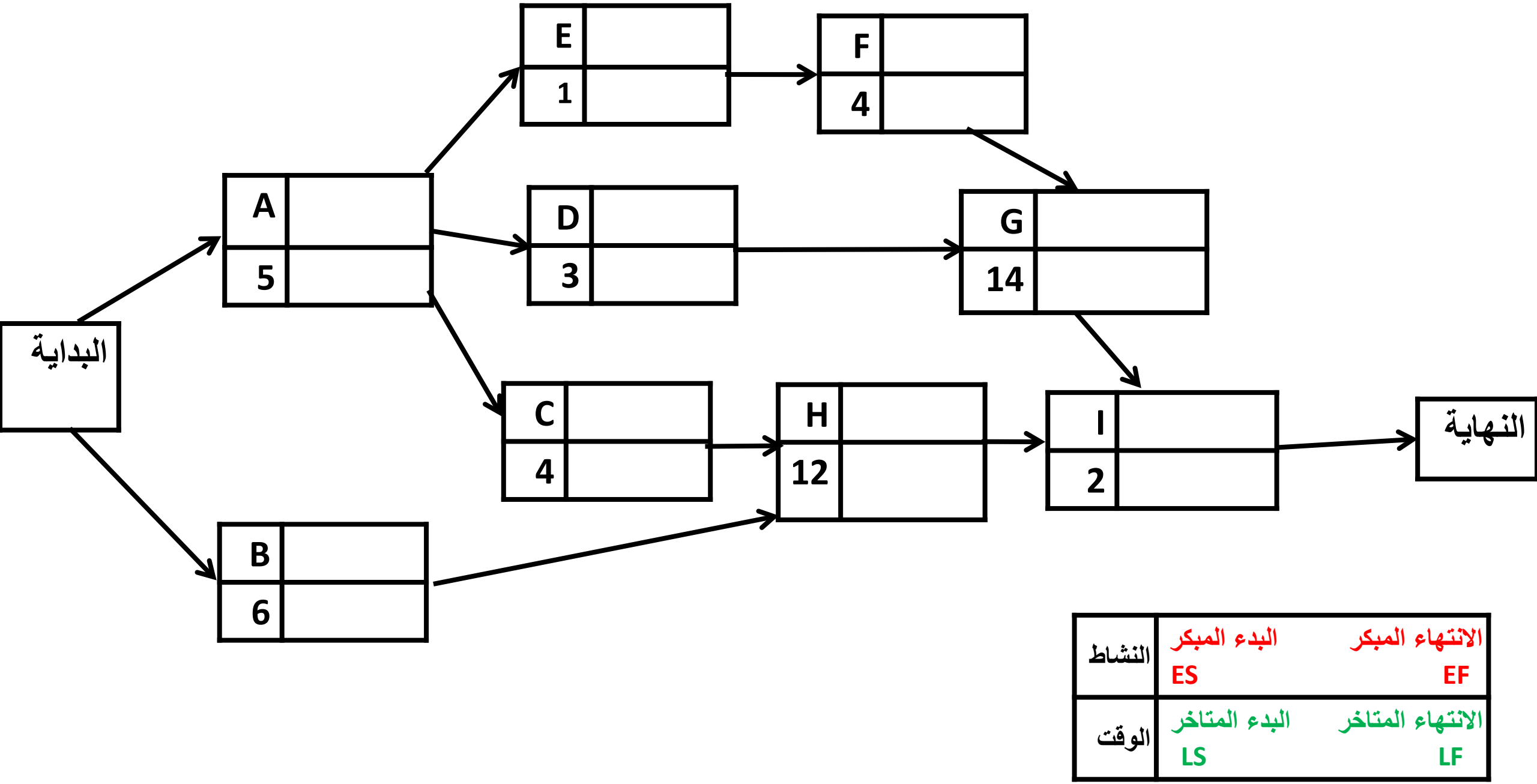
	1	2	3	4	5
A	24	16	22	30	8
B	14	18	34	28	20
C	18	12	24	14	14
D	14	16	28	16	20
E	18	18	26	20	12

جدولة المشروع

مثال 1

النشاط	وصف الأنشطة	النشاط السابق	وقت النشاط
A	تجهيز الرسومات الهندسية	–	5
B	تحديد المستأجرين الجدد	–	6
C	تطوير النشرة الإعلامية	A	4
D	اختيار المقاول	A	3
E	تجهيز رخص البناء	A	1
F	الحصول على الموافقة عليها	E	4
G	التنفيذ	D, F	14
H	التعاقد مع المستأجرين	B, C	12
I	نقل المستأجرين للموقع	G, H	2
		الاجمالي	51

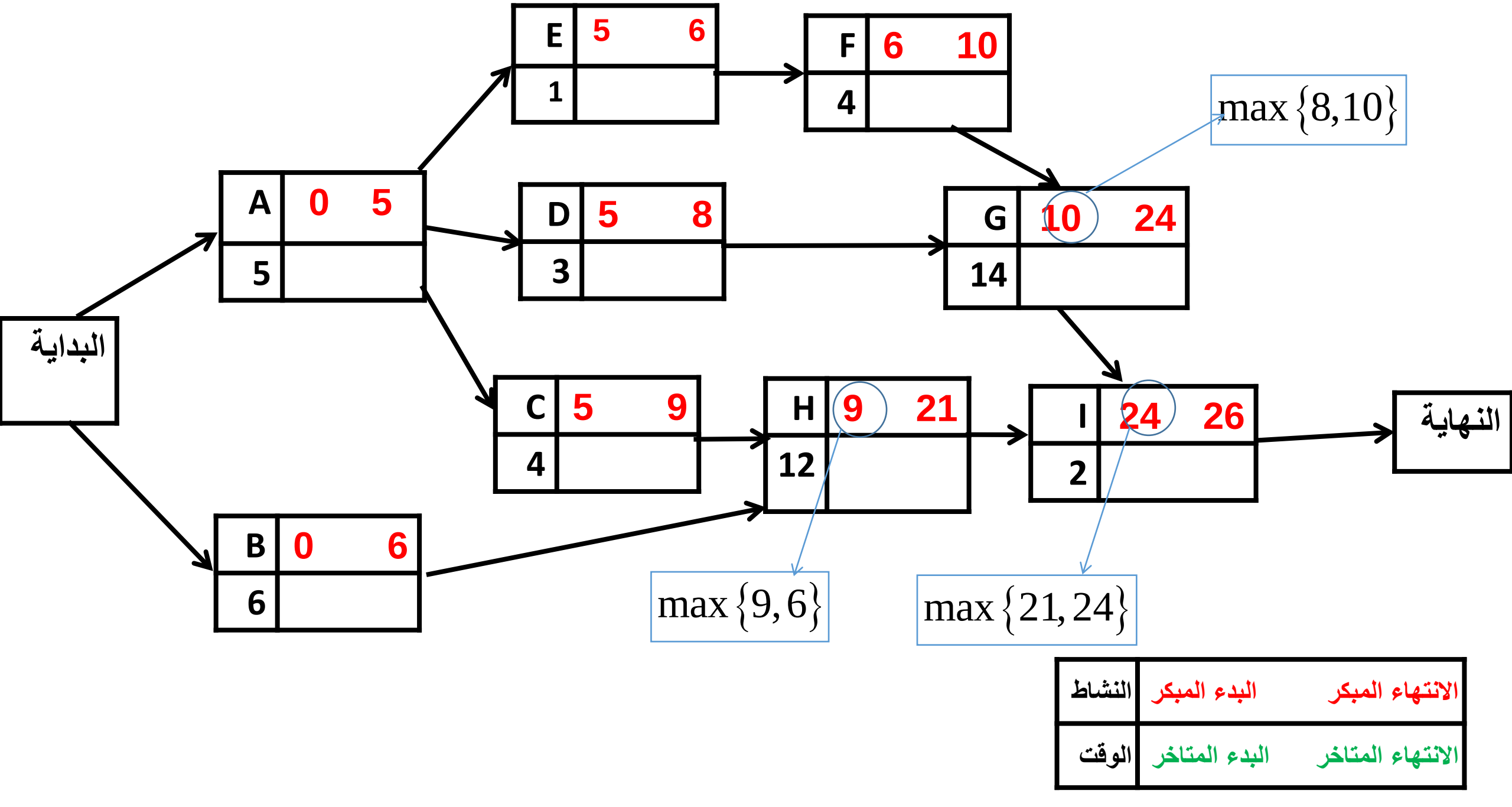
الوقت الاجمالي للمشروع ←

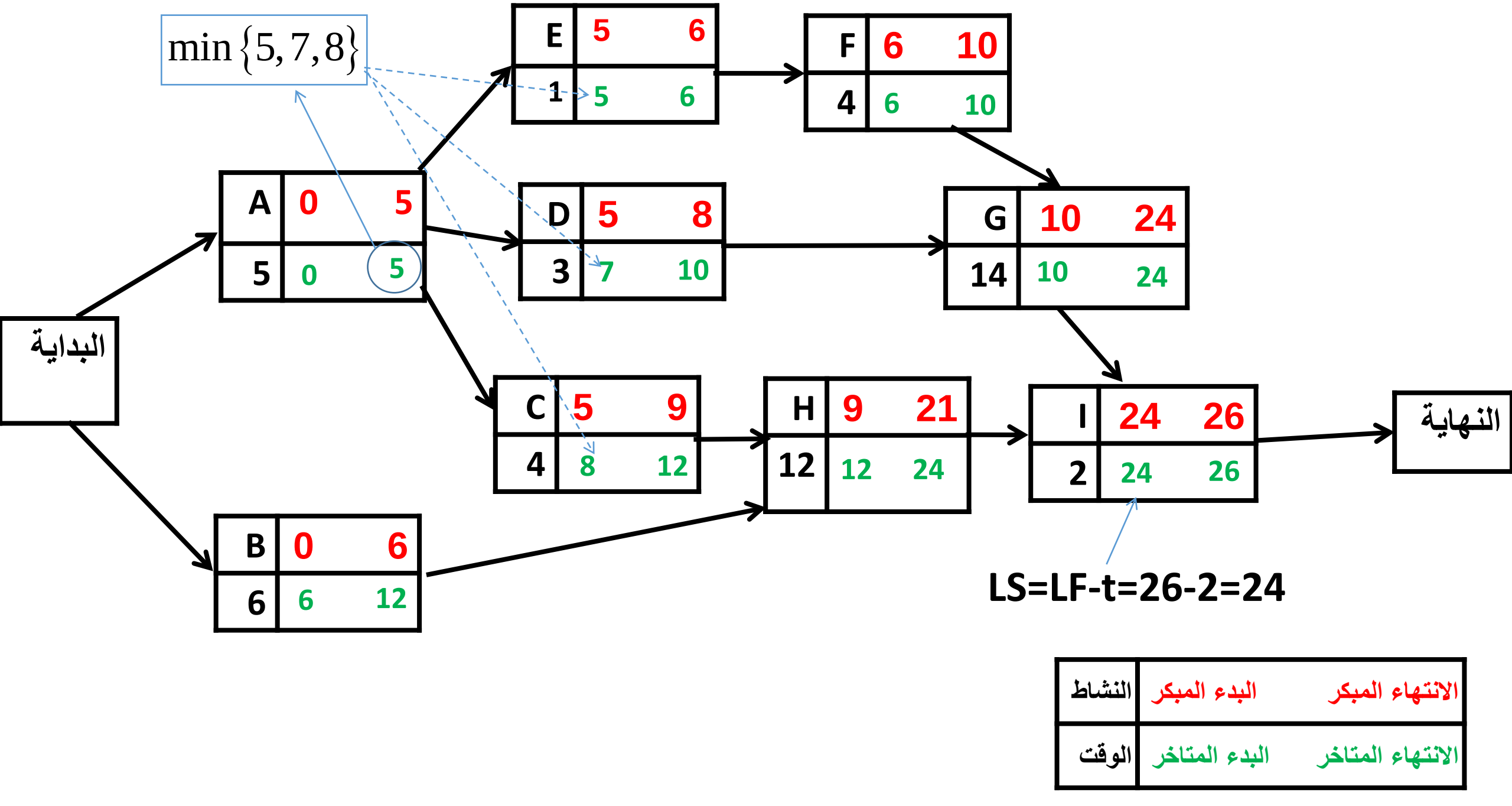

البداية
A
5
B
6
C
4
D
3
E
1
F
4
G
14
H
12
I
2
النهاية
النشاط
الانتهاء المبكر
EF
البدء المبكر
ES
الوقت
الانتهاء المتاخر
LF
البدء المتاخر
LS

النشاط	البدء المبكر ES	الانتهاء المبكر EF
الوقت	البدء المتاخر LS	الانتهاء المتاخر LF

$$EF=ES+t$$

$$LS=LF-t$$


البداية
A 0 5
5
B 0 6
6
C 5 9
4
D 5 8
3
E 5 6
1
F 6 10
4
G 10 24
14
H 9 21
12
I 24 26
2
النهاية
max {8,10}
max {9,6}
max {21,24}
النشاط
البدء المبكر
الانتهاء المبكر
الوقت
البدء المتاخر
الانتهاء المتاخر

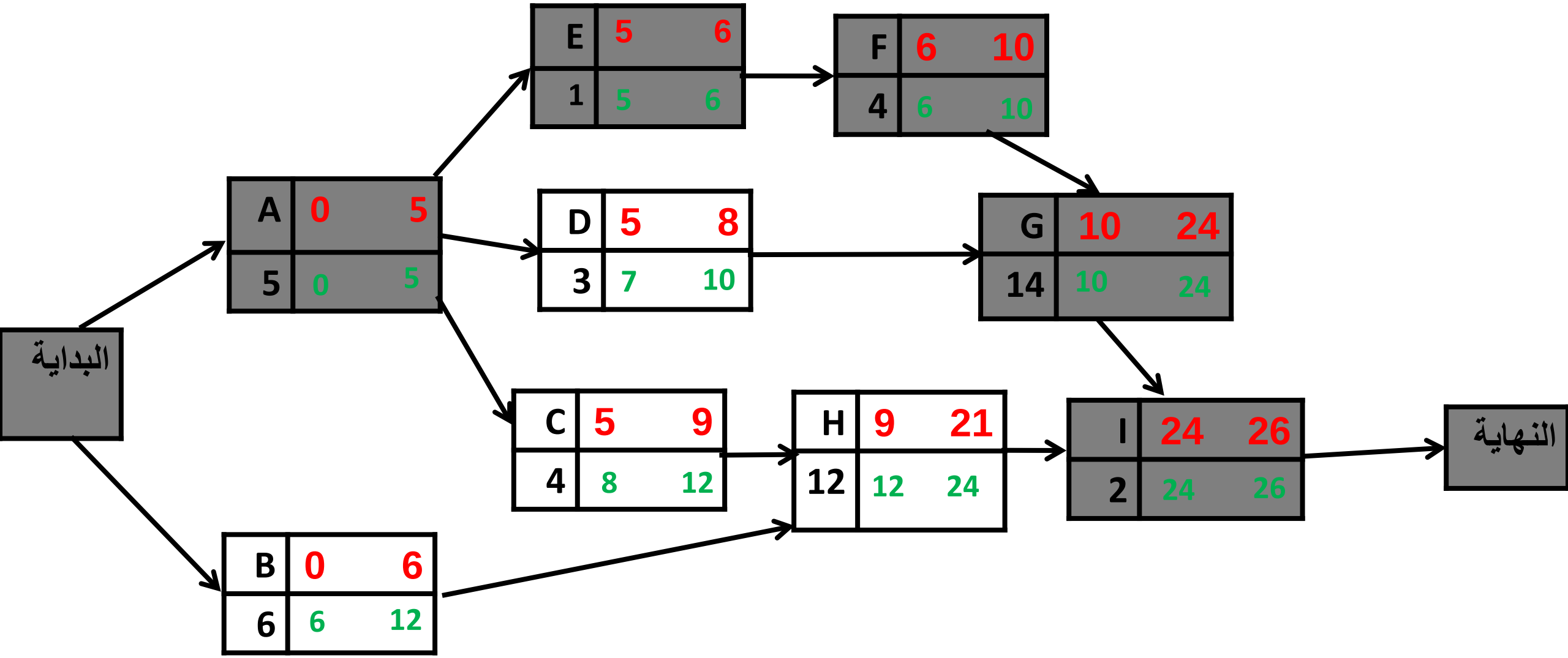

min{5,7,8}
البداية
A 0 5
5 0 5
B 0 6
6 6 12
C 5 9
4 8 12
D 5 8
3 7 10
E 5 6
1 5 6
F 6 10
4 6 10
G 10 24
14 10 24
H 9 21
12 12 24
I 24 26
2 24 26
النهاية
LS=LF-t=26-2=24
الانتهاء المبكر البدء المبكر النشاط
الانتهاء المتاخر البدء المتاخر الوقت

جدول الأنشطة الخاصة بمشروع مركز التسوق

النشاط	البدء المبكر (ES)	البدء المتأخر (LS)	الإنتهاء المبكر (EF)	الإنتهاء المتأخر (LF)	فترة السماح (LS-ES)	المسار الحرج؟
A	0	0	5	5	0	Y
B	0	6	6	12	6	
C	5	8	9	12	3	
D	5	7	8	10	2	
E	5	5	6	6	0	Y
F	6	6	10	10	0	Y
G	10	10	24	24	0	Y
H	9	12	21	24	3	
I	24	24	26	26	0	Y

الأنشطة الحرجة: الأنشطة التي لها فترة سماح تساوي صفر

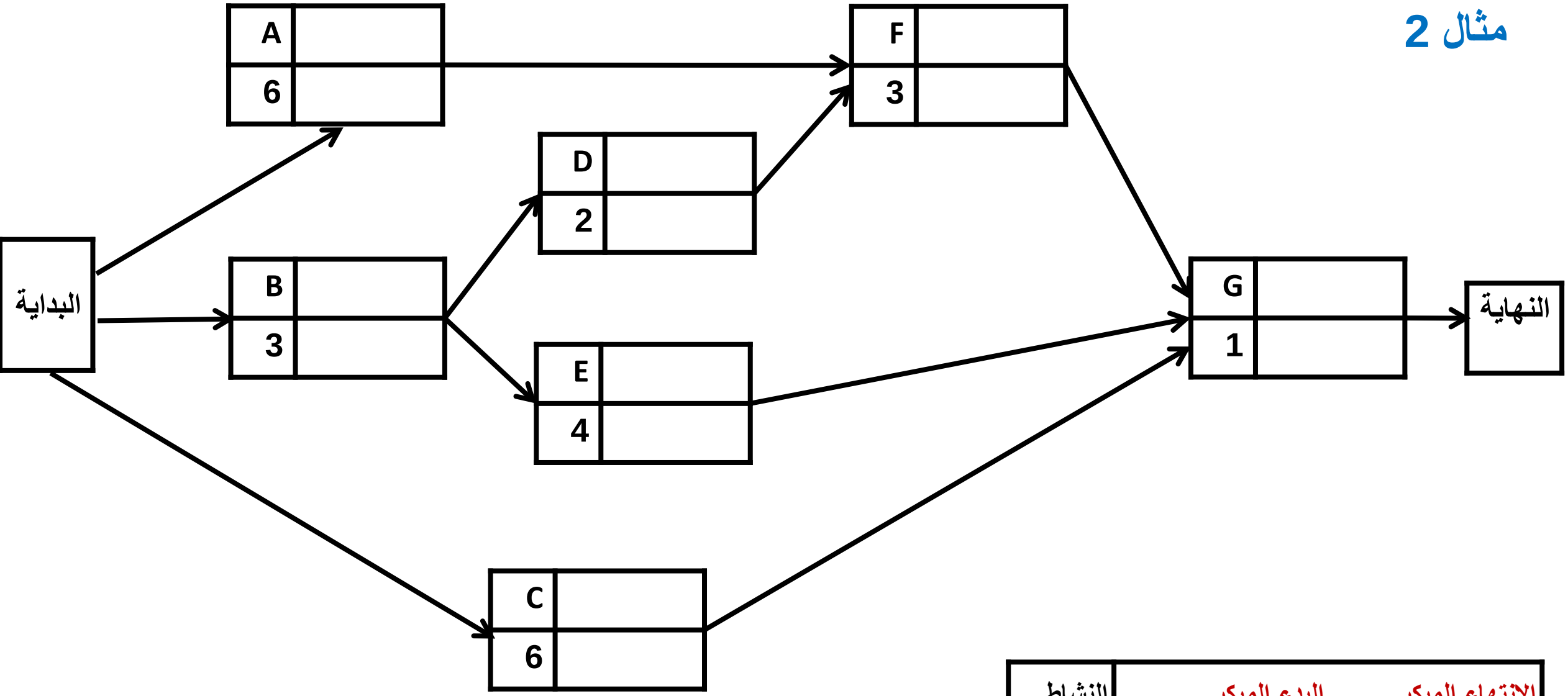
A,E,F,G,I



المسار الحرج: هو المسار الذي يشمل الأنشطة الحرجة .

A→E →F →G →I

مثال 2



الانتهاء المبكر	البدء المبكر	النشاط
الانتهاء المتاخر	البدء المتاخر	الوقت