-- --

$$P(X=1)=\frac{P_3^2 \cdot P_3^1}{P_6^3}\times 3$$

$$=\frac{6\times3\times3}{120}=\frac{9}{20}$$

$X=2$ يمثل ظهور كرة بيضاء وكرتين غير بيضاوين

$$P(X=2)=\frac{3\,P_3^1 P_3^2}{120}=\frac{9}{20}$$

$X=3$ يدل على عدم ظهور أي كرة بيضاء
(يدل على سحب ثلاث كرات ليست بيضاء)

$$P(X=3)=\frac{P_3^3}{P_6^3}=\frac{1}{20}$$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

② $$E(X)=\sum_{k=0}^{3} k\,P(X=k)$$

$$=0+(1)\frac{9}{20}+(2)\frac{9}{20}+(3)\frac{1}{20}$$

$$E(X)=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

حيث $$E(X^2)=\sum_{k=0}^{3} k^2 P(X=k)$$

$$=0+(1)^2\frac{9}{20}+(2)^2\frac{9}{20}+(3)^2\frac{1}{20}$$

$$E(X^2)=\frac{54}{20}=\frac{27}{10}$$

$$V(X)=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{10}-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{54-45}{20}=\frac{9}{20}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{3}{2\sqrt5}=\frac{3\sqrt5}{10}$$

ثالثا: المسألة الأولى:

① إثبات أن Δ_1 و Δ_2 ليسا من نفس المستوي يكافئ إثبات أن Δ_1 و Δ_2 متخالفان (غير متقاطعين وغير متوازيين)

$\vec{v_1}(1,0,-1)$ $\quad$ $\vec{v_2}(1,-2,1)$

$$\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-2}\neq\frac{-1}{1}$$

المركبات غير متناسبة. فالشعاعان $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ غير مرتبطين خطيا. فالمستقيمان Δ_1 و Δ_2 غير متوازيين.

$$1+t=2+s \quad \text{---}\ (1)$$
$$0=4-2s \quad \text{---}\ (2)$$
$$1-t=2+s \quad \text{---}\ (3)$$

من (2): $4=2s$

$s=2$

نعوض في (1):

$1+t=4$

$t=3$

نتحقق من صحة (3):

$$1-t \overset{?}{=} 2+s$$
$$1-3 \overset{?}{=} 2+2$$
$$-2\neq 4$$

غير محققة. فالمستقيمان متخالفان
(ليسا من نفس المستوي)

2)

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 1+0-1=0$$

$$\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$$

فالمستقيمان Δ_1 و Δ_2 متعامدان.

3)

$$(x,y,z)=(1,0,1)$$

$$\begin{cases} 1=1+t & \Rightarrow \quad t=0 \\ 0=0 & \\ 1=1-t & \Rightarrow \quad t=0 \end{cases}$$

فالنقطة A تنتمي إلى المستقيم Δ_1 لأن إحداثياتها تحقق المعادلات الوسيطية.

لتكن K نقطة من المستقيم Δ_2

$$K(2+s\ ;\ 4-2s\ ;\ 2+s)$$

$$\vec{AK}\ (1+s\ ;\ 4-2s\ ;\ 1+s)$$

طريقة أولى:

عندما تنطبق K على B يتحقق لدينا:

$$\vec{AK}\cdot\vec{v_2}=0$$

$$\begin{pmatrix}1+s\\4-2s\\1+s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$1+s-8+4s+1+s=0$$

$$6s=6$$

$$\boxed{s=1}$$

نعوض في معادلات Δ_2:

$$x=2+1=3\ ,\ y=4-2=2\ ,\ z=3$$

$$\boxed{B(3,2,3)}$$

طريقة ثانية: نوجد قيمة s التي تجعل المسافة AK أقصر ما يمكن:

$$AK=\sqrt{(1+s)^2+(4-2s)^2+(1+s)^2}$$

$$=\sqrt{6s^2-12s+18}$$

ط1 بالإتمام إلى مربع كامل:

$$AK=\sqrt{6(s-1)^2+12}$$

قيمة s التي تجعل AK أصغر ما يمكن هي

$$\boxed{s=1}$$

ط2 نفرض تابع ثم ندرس تغيراته أو اطراده:

$$f(s)=AK=\sqrt{6s^2-12s+18}$$

$$f'(s)=\frac{12s-12}{2\sqrt{6s^2-12s+18}}=\frac{6s-6}{\sqrt{6s^2-12s+18}}$$

$$f'(s)=0 \Leftrightarrow 6s-6=0$$

$$6s=6$$

$$\boxed{s=1}$$

s	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(s)$	$-$	0	$+$
$f(s)$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$

f يبلغ قيمته الصغرى عند $s=1$

نعوض في المعادلات الوسيطية فنحصل على $B(3,2,3)$

4)

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$\boxed{I(2,1,2)}$$

5) ط 1) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري فهي تحقق: $AM = BM$

$$\Rightarrow \quad AM^2 = BM^2$$

$$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = (x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-2z+1 = \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}-6z+9$$

$$4x+4y+4z-20=0$$

$$\boxed{x+y+z-5=0}$$

ط 2) المستوي يمر بالنقطة I ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظما له:

$$\overrightarrow{AB}(2,2,2)$$

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

$$2x-4+2y-2+2z-4=0$$

$$2x+2y+2z-10=0$$

$$\boxed{x+y+z-5=0}$$

المسألة الثانية:

1) الدالة g معرفة ومستمرة واشتقاقية على R

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1-(-\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right) = 1-0 = 1$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

$$g'(x) = 0-(e^{-x}-xe^{-x})$$

$$= -(1-x)e^{-x}$$

$$g'(x)=0 \iff x=1$$

$$g(1)=1-e^{-1}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-e^{-1}$	$\nearrow$	1

نستنتج أن $g(x) \geq 1-e^{-1} > 0$

$$g(x) > 0 \quad \forall x\in IR$$

2)

$$f(x)-y_\Delta = (x+1)e^{-x} = \frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=0$$

فالمستقيم Δ ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى C في جوار $+\infty$.

$$f(x)-y_\Delta = (x+1)e^{-x}$$

إشارة الفرق تماثل إشارة المقدار $(x+1)$

$x=-1$ يتقاطع C مع Δ.

$x<-1$ C تحت Δ.

$x>-1$ C فوق Δ.

3) f معرفة ومستمرة واشتقاقية على IR.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$= +\infty+0+0 = +\infty$$

$$f'(x) = 1+e^{-x}-e^{-x}(x+1)$$

$$= 1-xe^{-x} = g(x) > 0$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) لكي يقبل C مماساً يوازي المستقيم Δ يجب تحقق وجود حل وحيد على الأقل للمعادلة $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 1 \Longleftrightarrow 1 - x e^{-x} = 1$$

$$-x e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} \neq 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

ومنه C يقبل مماساً T يوازي Δ وذلك في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

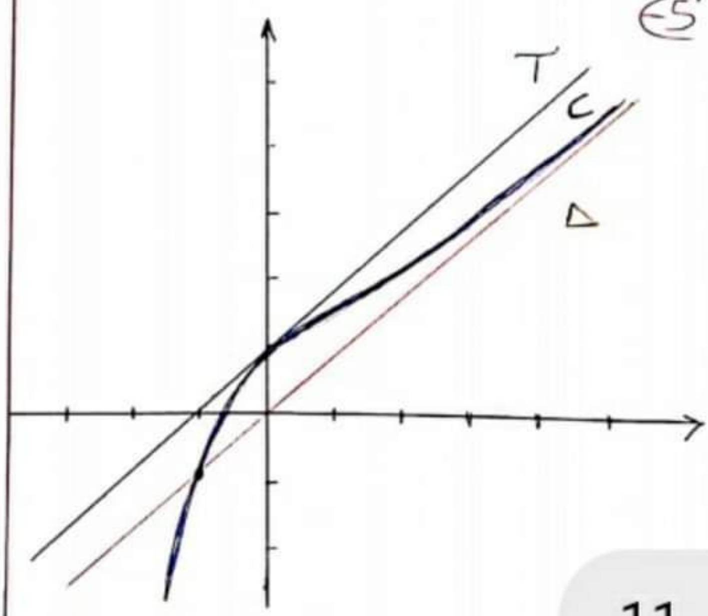
معادلته من الشكل :

$$T: \ y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = (1)(x) + 1$$

$$\boxed{T: \ y = x+1}$$

5)



ملاحظة : نلاحظ أن C يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

أي أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلاً وحيداً α .

يمكن إثبات أن $\alpha \in]-1,0[$ حسب مبرهنة القيمة المتوسطة كالتالي :

f معرف ومستمر ومطرد تماماً على المجال $]-1,0[$ ،

$f(-1) = -1$

$f(0) = 1$

$f(0).f(-1) < 0$

عبدالملك ضيف الله $\quad$ 2021/5/6

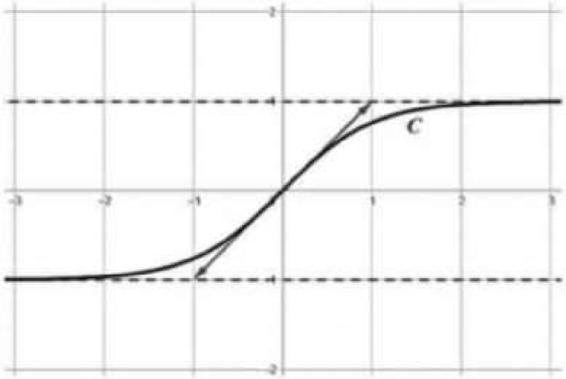
نموذج تدريبي 2 | **امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2021** | الاسم:

الرقم:

الرياضيات: (الفرع العلمي – الدورة الأولى) المدة: ثلاث ساعات

الصفحة الأولى الدرجة: ستمئة

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ **و المطلوب :**

1- أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$.

3- أوجد $f(\mathbb{R})$.

4- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{1}{e}$ ؟

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل المستوي P ذو المعادلة $x+y-z=0$ و النقطة $A(2,1,0)$ **المطلوب :**

1- اكتب معادلة الكرة Γ التي مركزها النقطة A و تمس المستوي P .

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ الذي يمر بالنقطة A و يعامد المستوي P .

السؤال الثالث:

1- أثبت بالتدريج من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ أنّ : $1+2+3+\cdots+n=\binom{n+1}{2}$.

2- حل المعادلة $P_n^3=6\binom{n}{4}$.

السؤال الرابع:

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=m$ و $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ في حالة $x\neq 0$. **المطلوب :**

1- عيّن قيمة m لكي يكون f مستمراً عند $x=0$.

2- أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق : $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. **المطلوب :**

1- أثبت أنّ $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}$ أياً تكن x من المجال $]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$.

2- ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

3- أثبت أنّ $\ln(n+1)\leq u_n$ من أجل كل $n\geq 1$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني :

ليكن العدد العقدي $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. **المطلوب :**

1- عيّن طويلة و زاوية العدد العقدي z^2 ، ثم اكتب z بالشكل الأسّي .

2- استنتج كلاً من $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

3- أثبت أنّ $1+z+z^2+\cdots+z^{15}=0$.

4- ليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد بحيث $uz\neq 1$ أثبت أنّ $w=\frac{z+u}{1-uz}$ تخيّلي بحت .

التمرين الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. **و المطلوب :**

1- أثبت أنّ الخط C يقبل مقاربين مائلين يُطلَب تعيين معادلة ديكارتيّة لكل منهما .

2- اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة $(0,0)$ و ادرس وضعه النسبي .

3- احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$.

التمرين الرابع :

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء و كرتين حمراوين و كرة خضراء .

نسحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي دون إعادة ، و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقّية في الصندوق .

1- عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .

2- احسب التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ و التباين $\mathbb{V}(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$.

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطة $A(1,0,1)$ و المستقيمين Δ_1 و Δ_2 المعرّفين وسيطياً وفق :

$$\Delta_1:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R} \quad , \quad \Delta_2:\begin{cases} x = 2+s \\ y = 4-2s \\ z = 2+s \end{cases} ;\ s\in\mathbb{R}$$

1- أثبت أنّ المستقيمين Δ_1 و Δ_2 ليسا من نفس المستوي .

2- أثبت أنّ المستقيمين Δ_1 و Δ_2 متعامدان .

3- تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى المستقيم Δ_1 ، ثم أوجد إحداثيّات النقطة B المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ_2 .

4- أوجد إحداثيّات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

5- اكتب معادلة ديكارتيّة للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$ ، و ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $g(x) = 1 - xe^{-x}$. **المطلوب :**

1- ادرس تغيّرات التابع g و نظّم جدولاً بها ، و استنتج أنّ $g(x) > 0$ أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$.

2- أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للخط C ، و ادرس وضع Δ بالنسبة للخط C .

3- ادرس تغيّرات التابع f و نظّم بها جدولاً .

4- أثبت أنّ الخط C يقبل مماساً T يوازي المستقيم Δ ، ثم اكتب معادلة للمماس T .

5- في معلم متجانس ارسم المستقيمين Δ و T ، ثم ارسم C .

------------- انتهت الأسئلة -------------

حل النموذج التدريبي الشامل "2"

أولاً: السؤال الأول:

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2) $f(0) = 0$

$f'(0)$ هو ميل المماس عند $x=0$

نختار نقطتين $A(1,1)$, $B(0,0)$

$$f'(0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

3) $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$

4) المعادلة $f(x) = \frac{1}{e}$ لها حل وحيد.

(لأن $-1 < \frac{1}{e} < 1$)

السؤال الثاني:

1) معادلة الكرة Γ من الشكل:

$$\Gamma: \quad (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = r^2$$

حيث:

$$r = dist_{(A,P)} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2+1-0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\Gamma: \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3}$$

2) شعاع توجيه المستقيم D هو ذاته ناظم المستوي P أي

$$\vec{v_D} = \vec{n_P}(1,1,-1)$$

$a=1 \quad b=1 \quad c=-1$

$$D: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$$

حيث t وسيط حقيقي $t \in \mathbb{R}$.

السؤال الثالث:

1) $E(n): \quad 1+2+3+\dots+n = \binom{n+1}{2}$

$E(1)$ محققة لأن:

$L_1 = 1$, $L_2 = \binom{2}{2} = 1$

$L_1 = L_2$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$1+2+3+\dots+n = \binom{n+1}{2}$$

نضيف للطرفين $(n+1)$

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)$$

$$1+2+\dots+(n+1) = (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]$$

$$1+2+\dots+(n+1) = (n+1)\frac{n+2}{2}$$

$$1+2+\dots+(n+1) = \binom{n+2}{2}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

2) شرط الحل $n \geq 4$

$$P_n^3 = 6\binom{n}{4} \to P_n^3 = 6\frac{P_n^4}{4!}$$

$$n(n-1)(n-2) = \frac{6}{24}(n)(n-1)(n-2)(n-3)$$

نقسم الطرفين على $n(n-1)(n-2)\neq 0 \quad (n\geq 4)$

$$1 = \frac{1}{4}(n-3)$$

$$n-3 = 4 \Rightarrow \boxed{n=7}$$

السؤال الرابع:

① لكي يكون f مستمرا عند الصفر يجب تحقق الشرط $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ومنه

$$m = \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1$$

ومنه $\boxed{m=1}$

②

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{e^x-1} - (-x)$$

$$= \frac{x}{e^x-1} + x$$

$$= x\left(\frac{1}{e^x-1}+1\right)$$

$$= x\left(\frac{1+e^x-1}{e^x-1}\right)$$

$$= \frac{xe^x}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to -\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

فالمستقيم Δ ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى C في جوار $-\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f(x)-y_\Delta$		$+$	‖	$+$	
الوضع النسبي		C فوق Δ	‖	C فوق Δ	

ثانيا: التمرين الأول:

① ليكن g الدالة المعرف على المجال

$$I =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$$

ولدينا:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

دراسة تغيرات g:

g مستمرة وقابلة للاشتقاق على I.

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \ln(1) - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} g(x) = \ln(0^+) + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}} - \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]$$

$\frac{1}{x+1}$

$$= (+\infty)(0-1)$$

$$= -\infty$$

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1-x}{x+1}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^3+x^2}$$

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	‖	$+$	
$g(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	‖	$-\infty$ ↗	0

نلاحظ أن $g(I) =]-\infty, 0[$

أي $g(x) \leq 0$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leq 0$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}} \quad \forall x \in I$$

(2) $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة تماما .

(3) طريقة أولى:

المتراجحة $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ محققة من أجل كل n من المجال $[1,+\infty[$ فهي محققة عند كل عدد طبيعي غير معدوم $n \geq 1$.

أي: $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

$$u_n \geq \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$u_n \geq \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$$

$$u_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{1}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\ln(n+1) \leq u_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة .

طريقة ثانية:

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

$$\ln(2) - \ln(1) \leq \frac{1}{1}$$

$$\ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\ln(n) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

$+$

$$\ln(n+1) - \ln(1) \leq u_n$$

$$\ln(n+1) \leq u_n$$

طريقة ثالثة:

$E(n): \ln(n+1) \leq u_n$

$E(1)$ محققة لأن:

$$\ln 2 \leq u_1 = 1$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$،

$$\ln(n+1) \leq u_n$$

نضيف $\frac{1}{n+1}$ للطرفين:

$$\ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \leq \underbrace{u_n + \frac{1}{n+1}}$$

$$\ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \leq u_{n+1}$$

لكن $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

ومنه $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

$$\ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \leq u_{n+1}$$

$$\ln(n+2) \leq u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة . فالقضية صحيحة مهما كان العدد الطبيعي غير المعدوم $n \geq 1$.

التمرين الثاني :

1)

$$z^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} + 2\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{4} i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{4-2}}{2} i$$

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$|z^2| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\arg(z^2) = \frac{\pi}{4}$$

$$|z^2| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1$$

$$|z| = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg(z^2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{8}$$

ومنه $\boxed{z = e^{i\frac{\pi}{8}}}$

2) $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$

$$z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

بالمطابقة

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

3) $1+z+z^2+\dots+z^{15} = (1)\dfrac{1-z^{16}}{1-z}$

نعوض $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$:

$$1+z+z^2+\dots+z^{15} = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{8}\cdot 16}}{1-z}$$

$$= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{8}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

$$= 0$$

4) لدينا $|u| = 1$, $|z| = 1$

وعليه فإن : $\bar{u} = \frac{1}{u}$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$

$$\bar{w} = \frac{\bar{z}+\bar{u}}{1-\bar{u}\bar{z}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{uz}} \cdot \frac{uz}{uz}$$

$$\bar{w} = \frac{u+z}{uz-1} = -\frac{z+u}{1-uz}$$

$$\bar{w} = -w$$

فالعدد العقدي w تخيلي بحت .

التمرين الثالث :

1)

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 1$$

ومنه C يقبل مقاربين مائلين ميلهما $m=1$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \frac{-2}{1+0} = -2$$

(حيث $|x| = +x$ لأن $x\to+\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

لأن $x\to-\infty$ $\quad |x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=\frac{2}{1+0}=2$$

ومنه المستقيم Δ ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

و Δ_2 ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

-2

$$f'(x)=1-2\left(\frac{(1)\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right)$$

$$=1-2\,\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=1-\frac{2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(0)=1-\frac{2}{1}=-1$$

طريقة ثانية لحساب ميل المماس:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=1-2=-1$$

معادلة المماس من الشكل:

$$T:\quad y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$y=(-1)(x)+0$$

$$\boxed{T:\quad y=-x}$$

$$f(x)-y_T=x-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+x$$

$$=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\sqrt{x^2+1}\geqslant 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leqslant 1$$

$$0\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

إشارة الفرق $f(x)-y_T$ تماثل إشارة x

في حالة $x>0$ C فوق T.

في حالة $x<0$ C تحت T.

-3

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-2\sqrt{2}-(0-2)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{2}-2\sqrt{2}$$

التمرين الرابع:

-1

3) دون إعادة

$$n(\Omega)=P_6^3=6\cdot5\cdot4=120$$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$(X=0)$ يدل على ظهور ثلاث كرات بيضاء

$$P(X=0)=\frac{P_3^3}{P_6^3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

$(X=1)$ يدل على ظهور كرتين بيضاوين وكرة غير بيضاء