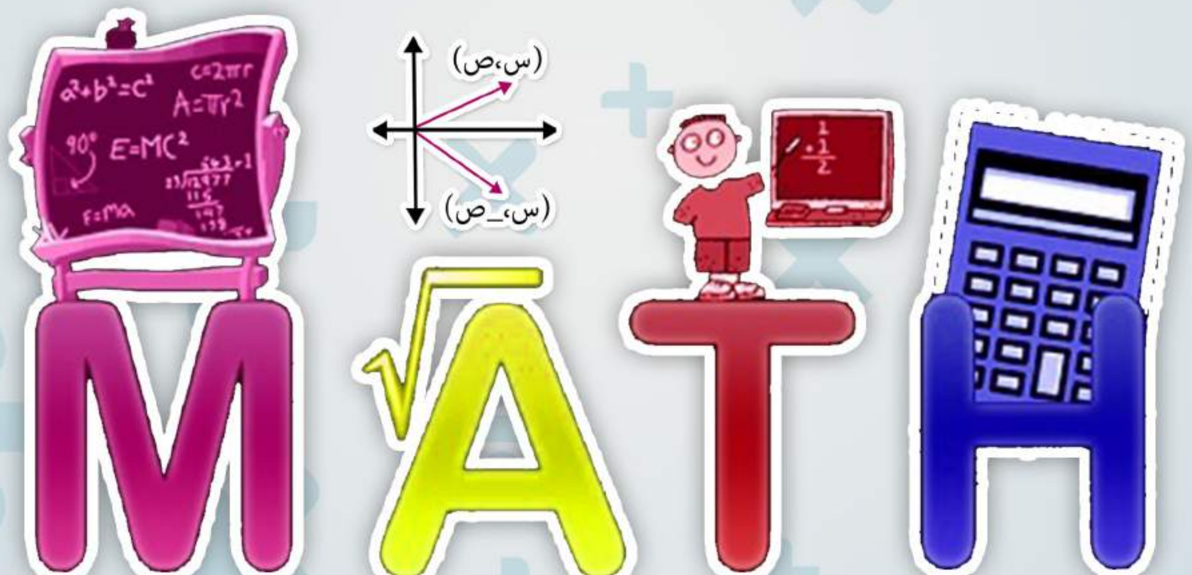
طبعة
2020

سلسلة رياضياتي

المسيطر في الجبر

شرح مبسط وسلس لدروس الرياضيات

للصف الثالث ثانوي



إعـداد /
أ.صوفـي رمضــان حمـادي

لـ أ. صوفي رمضان حمادي
7 7 0 0 6 0 7 6 6

يمكنكم متابعة قناتنا
عبــر برنامج التلجرام
@soofymath

بسم الله الرحمن الرحيم

الأعداد المركبة

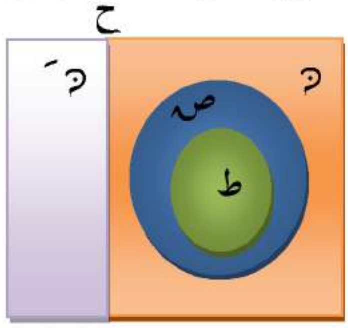
مقدمة

تعرفنا في المراحل السابقة على بعض المجموعات العددية وقمنا بتوسيعها من مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) مروراً بمجموعة الأعداد الصحيحة (صه) والنسبية (ن) إلاّ أن هذا التوسع لا يلبي حاجتنا لحل المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد.

المجموعات التي تم التعرف عليها سابقاً هي كالآتي :

- مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) : ط = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . . }
- مجموعة الأعداد الصحيحة (صه) : صه = { . . . ، ٢ ، ١ ، ٠ ، −١ ، −٢ ، . . . . }
- مجموعة الأعداد النسبية (ن) : وهي الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{أ}{ب}$ ،
  حيث أ ، ب ∈ صه و ب لا يساوي الصفر . أي ن = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ صه، ب ≠ ٠ }
  مثل : $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{١٦}}$.
- مجموعة الأعداد الغير نسبية (ن´) : وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ و ب لا يساوي صفر وهي نوعان :
  ١− الجذور الصماء مثل : $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$.
  ٢− الكسر العشري غير المنتهي : كسر عشري يكتب بجانبه سهم للدلالة على عدم الانتهاء مثل ٢,٥٧٣⟵
- مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) : وهي المجموعة المكوّنة من الأعداد النسبية وغير النسبية.
  أي ح = ن ∪ ن´ (وتشمل جميع المجموعات السابقة) .

ملاحظة : يمكن توضيح العلاقة بين المجموعات العددية في الشكل الآتي :



العدد التخيلي

تمهيد: حل المعادلات الآتية :

أ) س+٨ = ٢ ، (ب) ٣س = ١ ، (جـ) س^{٢} = ٢ ، (د) س^{٢}+١ = ٠

الحل: أ) س = −٦ ∈ ص ، (ب) س= $\frac{١}{٣}$ ∈ ن ، (جـ) س = ±$\sqrt{٢}$ ∈ ح

(د) س^{٢} = −١ ⇐ س = ±$\sqrt{-١}$ ∉ ح ، مثل هذه المعادلات كنا نقول عنها ليس لها حل في ح ومن هنا جاءت الحاجة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية مما أوجد مجموعة جديدة هي مجموعة الأعداد المركبة م وجاءت لتعالج مشكلة الجذور التربيعية للعدد السالب كونه لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب.

ملاحظة: أطلق الرياضيون على المجموعة العددية الجديدة اسم مجموعة الأعداد المركبة وكانت الانطلاقة من أن $\sqrt{-١}$ ليس عدد حقيقي فأسموه عدد تخيلي (imaginary) وتم إعطاءه الحرف اللاتيني (i) ويقابله في اللغة العربية الرمز (ت). أي أن ت = $\sqrt{-١}$.

تعريف العدد التخيلي ت : هو العدد الذي مربعه يساوي (−١) ويرمز له بالرمز ت أي أن ت = $\sqrt{-١}$ ، ت^{٢} = −١ وتسمى الأعداد التي على الصورة ٢ت ، ٥ت ، ٣ت بالأعداد التخيلية .

قوى العدد ت : ∵ ت = $\sqrt{-١}$

∴ ت^{٢} = $(\sqrt{-١})^{٢}$ = −١

ت^{٣} = ت^{٢} × ت = −١ × ت = − ت

ت^{٤} = ت^{٣} × ت = − ت × ت = − ت^{٢} = −(−١) = ١

ت^{٥} = ت^{٤} × ت = ١ × ت = ت

ت^{٦} = ت^{٥} × ت = ت × ت = ت^{٢} = −١

ت^{٧} = ت^{٦} × ت = −١ × ت = − ت

ت^{٨} = ت^{٧} × ت = − ت × ت = − ت^{٢} = − (−١) = ١

نلاحظ مما سبق أن القوى الصحيحة للعدد ت تعطي إحدى القيم (ت) أو (−1) أو (− ت) أو (1) وهذه القيم تتكرر بصفة دورية لتزايد الأس بمقدار 4 .

قاعدة: لإيجاد القوى المختلفة للعدد ت نستخدم الصيغة الآتية : $ت^{ن} = ت^{م}$ ، $\forall ن \in ص^{+}$، حيث م هو باقي قسمة ن على العدد 4 .

ملاحظة: إذا كان العدد ت مرفوع لقوى صحيحة سالبة نقوم بتحويله ($ت^{-ن} = \frac{1}{ت^{ن}}$) ويتم التعامل معه كما في القاعدة السابقة ، فإذا كان العدد الناتج $\frac{1}{ت}$ أو $\frac{1}{-ت}$ نضرب البسط والمقام في (ت) لأن $ت \times ت = ت^{2} = -1$.

مثال : بسط ما يلي : (1) $ت^{12}$ ، (2) $ت^{37}$ ، (3) $ت^{43}$ ، (4) $ت^{-1}$ ، (5) $ت^{-71}$

الحل : (1) $ت^{12} = ت^{0} = 1$ [لأن 12÷4=3 والباقي صفر]

(2) $ت^{37} = ت^{1} = ت$ [لأن 37÷4=9 والباقي 1]

(3) $ت^{-1} = \frac{1}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{ت}{-1} = -ت$ [تطبيق للملاحظة السابقة]

(4) $ت^{-71} = \frac{1}{ت^{71}} \times \frac{ت}{ت} = \frac{ت}{ت^{72}} = \frac{ت}{ت^{0}} = \frac{ت}{1} = ت$ [تطبيق للملاحظة السابقة و 72÷4=18 والباقي 0]

مثال : بسط ما يلي : (1) $ت + 2ت^{2} + 3ت^{3} + 4$ ، (2) $(\sqrt{-1})^{45}$

(3) $1 + ت^{10} + ت^{100} + ت^{1000}$

الحل : (1) $ت + 2(-1) + 3 \times -ت + 4 = ت - 2 - 3ت + 4 = 2 - 2ت$

(2) $(\sqrt{-1})^{45} = ت^{45} = ت^{1} = ت$ [لأن 45÷4= 11 والباقي 1]

(3) $1 + ت^{10} + ت^{100} + ت^{1000} = 1 + ت^{2} + ت^{0} + ت^{0} = 1 - 1 + 1 + 1 = 2$

مثال : أثبت أن $(1 + ت + ت^{3})^{4ن} = 1$ ، $ن \in ص^{+}$

الحل : الطرف الأيمن = $(1 + ت + ت^{3})^{4ن} = (1 + ت - ت)^{4ن} = 1^{4ن} = 1$ الطرف الأيسر

تدريبات :

(1) بسط $ت^{3} + \frac{1}{ت^{3}}$ $\boxed{0}$

(2) أثبت أن : $(1+ت)^{4} (1+\frac{1}{ت})^{4} = 16$

(3) أثبت أن $(\sqrt{-3})^{6} = -27$

العـــدد المـــركب

مثال تمهيدي : حل المعادلة : $\text{ع}^{٢} - ٢\text{ع} + ٥ = ٠$

الحل: المعادلة من الدرجة الثانية ذات متغير واحد تحل بالقانون العام

$\text{ا} = ١$ ، $\text{ب} = -٢$ ، $\text{جـ} = ٥$

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{ا}\text{جـ}}}{٢\text{ا}} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٢٠}}{٢}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{-١٦}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{١٦ \times -١}}{٢} = \frac{٢ \pm ٤\text{ت}}{٢}$$

إما $\text{ع} = \frac{٢ + ٤\text{ت}}{٢} = ١ + ٢\text{ت}$ ، أو $\frac{٢ - ٤\text{ت}}{٢} = ١ - ٢\text{ت}$

نلاحظ من خلال هذا المثال أن قيمتي ع مكوّنة من جزئين أحدهما حقيقي (١) والآخر تخيلي ($\pm ٢\text{ت}$) مثل هذه الأعداد تسمى الأعداد المركبة .

تعريف العدد المركب :

تسمى الأعداد التي على الصورة (س+ت ص) حيث س ، ص $\in$ ح ، ت $= \sqrt{-١}$ بالأعداد المركبة ويسمى س بالجزء الحقيقي و ص بالجزء التخيلي ويرمز لهذه الأعداد بالرمز م حيث : $\text{م} = \{\text{س} + \text{ت ص} : \text{س} ، \text{ص} \in \text{ح} ، \text{ت} = \sqrt{-١}\}$

أو $\text{م} = \{(\text{س}،\text{ص}) : \text{س} ، \text{ص} \in \text{ح}\}$

ملاحظة: تسمى الصورة (س+ت ص) بالصورة الجبرية للعدد المركب .

مثال : ما الجزء الحقيق والجزء التخيلي للأعداد المركبة التالية :

(١) ١٤−٥ت ، (٢) ٥ت ، (٣) ٧ ، (٤) $\sqrt{-٥٠}$ ، (٥) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨}$

الحل : (١) الجزء الحقيقي = ١٤ ، الجزء التخيلي = −٥

(٢) الجزء الحقيقي = صفر ، الجزء التخيلي = ٥

(٣) الجزء الحقيقي = ٧ ، الجزء التخيلي = صفر

(٤) $\sqrt{-٥٠} = \sqrt{-١ \times ٥٠} = \sqrt{-١} \times \sqrt{٥٠} = \sqrt{٥٠}\,\text{ت}$

الجزء الحقيقي = صفر ، الجزء التخيلي = $\sqrt{٥٠}$

(٥) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} = \sqrt{٢}\,\text{ت} \times \sqrt{٨}\,\text{ت} = \sqrt{١٦}\,\text{ت}^{٢} = ٤ \times -١ = -٤$

∴ الجزء الحقيقي = −٤ ، الجزء التخيلي = صفر

تنبيه : لا تستخدم الطريقة الآتية في الضرب لأن هذه الخاصية خاصة بالأعداد الحقيقية:

$$\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} = \sqrt{-٢ \times -٨} = \sqrt{١٦} = ٤$$

ملاحظة : إذا كان ع = س ، فإن ع عدد حقيقي صرف.

ع = ت ص ، فإن ع عدد تخيلي صرف.

مثال : أكتب ما يلي بالصورة الجبرية :

(١) $\frac{\sqrt{-٧}}{٤} - \frac{\sqrt{-١}}{\sqrt{٧}}$ ، (٢) $٣\sqrt{-٥} \times ٤\sqrt{-٢}$ ، (٣) $(-٣\sqrt{-٢})^{٤}$.

الحل : (١) $\frac{\sqrt{-٧}}{٤} - \frac{\sqrt{-١}}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٧}\,\text{ت}}{٤} - \frac{\text{ت}}{\sqrt{٧}} = \frac{٧\text{ت} - ٤\text{ت}}{٤\sqrt{٧}} = \frac{٣\text{ت}}{٤\sqrt{٧}} = \frac{٣}{٤\sqrt{٧}}\,\text{ت}$

(٢) $٣\sqrt{-٥} \times ٤\sqrt{-٢} = ٣\sqrt{٥}\,\text{ت} \times ٤\sqrt{٢}\,\text{ت} = ١٢\sqrt{١٠}\,\text{ت}^{٢} = ١٢\sqrt{١٠} \times -١ = -١٢\sqrt{١٠}$

(٣) $(-٣\sqrt{-٢})^{٤} = (-٣\sqrt{٢}\,\text{ت})^{٤} = ٨١ \times ٤\,\text{ت}^{٤} = ٣٢٤$

تدريبات : أكتب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد المركبة الآتية :

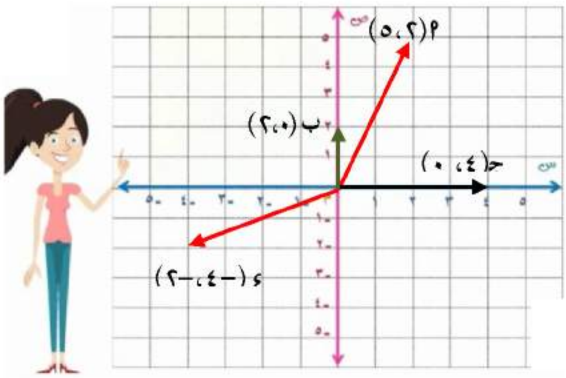
(١) $٥ - ٣\text{ت}$ ، (٢) $\sqrt{-٤٩} + ٧$ ، (٣) $-٢\text{ت} + \sqrt{-٢}\,\text{ت}$

تمثيل الأعداد المركبة في المستوى (مستوى آرجاند) :

عرفنا سابقاً أن العدد المركب ع = س+ت ص يمكن كتابته كزوج مرتب (س،ص) لذلك يمكن تمثيله كمتجه قياسي في مستوى يسمى مستوى آرجاند . المتجه القياسي بدايته نقطة الأصل (و) ونهايته النقطة (س،ص) .

مثال: مثّل الأعداد الآتية في مستوى آرجاند كمتجهات قياسية:

(١) (٢+٥ت) ، (٢) ٢ت ، (٣) ٤ ، (٤) −٤−٢ت



الحل:

(١) العدد ٢+٥ت يمثل بالنقطة (٢،٥) ويمثل بالمتجه $\overrightarrow{\text{وأ}}$

(٢) العدد ٢ت يمثل بالنقطة (٠ ،٢) ويمثل بالمتجه $\overrightarrow{\text{وب}}$

(٣) العدد ٤ يمثل بالنقطة (٤ ،٠) ويمثل بالمتجه $\overrightarrow{\text{وج}}$

(٤) العدد −٤−٢ت يمثل بالنقطة (−٤ ،−٢) ويمثل بالمتجه $\overrightarrow{\text{وء}}$. لاحظ الشكل:

تساوي الأعداد المركبة :

تعريف: يقال للعددين (س$_1$+ت ص$_1$) ، (س$_2$+ت ص$_2$) أنهما متساويان إذا كان:

س$_1$ = س$_2$ (الحقيقي= الحقيقي)، ص$_1$ = ص$_2$ (التخيلي = التخيلي)

أي أن :(س$_1$+ت ص$_1$) = (س$_2$+ت ص$_2$) ⟺ س$_1$ = س$_2$ ∧ ص$_1$ = ص$_2$

ملاحظة: عند تساوي عددين مركبين يمكن فصل المعادلة المتكونة من التساوي إلى معادلتين إحداهما للجزء الحقيقي والأخرى للجزء التخيلي (مع إهمال كتابة الوحدة التخيلية ت) وبحل المعادلتين نحصل على القيم المطلوبة.

مثال : أوجد قيم س ، ص فيما يلي :

(١) ٥س+٤ت ص = ١٥+ت(س−١) ، (٢) ٢+س+ت ص = ٣− ت

(٣) (١+ت)س + ٢ص(١−٢ت) −٣ = صفر ، (٤) (١+ت)س +(١−ت)ص = ٢ت

الحل : (١) ننشئ معادلة للجزء الحقيقي ومعادلة للجزء التخيلي :

الحقيقي = الحقيقي ⇐ ٥س = ١٥ ⇐ س = ٣

التخيلي = التخيلي ⇐ ٤ص = س−١ ⇐ ٤ص=٣−١ ⇐ ٤ص=٢ ⇐ ص= $\frac{١}{٢}$

(٢) الحقيقي = الحقيقي ⇐ ٢+س = ٣ ⇐ س = ١

التخيلي = التخيلي ⇐ ص = −١

(٣) نفك الأقواس : س+س ت +٢ص-٤ص ت - ٣ = ٠

الحقيقي = الحقيقي ⇐ س+٢ص-٣ = ٠ .... (١)

التخيلي = التخيلي ⇐ س-٤ص = ٠ .... (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج : ٦ص-٣ = ٠ ⇐ ص = $\frac{١}{٢}$

وبالتعويض بقيمة ص في (٢) ينتج : س-٤× $\frac{١}{٢}$ = ٠ ⇐ س = ٢

(٤) يترك حله لك عزيزي الطالب :

....

....

....

....

....

....

تدريب : أوجد قيم س ، ص إذا كان (١+ت)س + ٢(١- ت)ص = ٣

....

....

....

....

....

....

....

....

العمليات على الأعداد المركبة

أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة :

ليكن $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$ ، حيث $ع_١ ، ع_٢ \in م$ فإن :

- الجمع : $ع_١ + ع_٢ = (س_١ + س_٢) + (ص_١ + ص_٢)ت$

أي أنه عند جمع عددين مركبين نجمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

- الطرح : $ع_١ - ع_٢ = (س_١ - س_٢) + (ص_١ - ص_٢)ت$

أي أنه عند طرح عددين مركبين نطرح الحقيقي من الحقيقي والتخيلي من التخيلي

يمكن تعميم القاعدتين السابقتين لأكثر من عددين مركبين

مثال : أوجد ناتج ما يلي :

(١) $(٢+٦ت) + (٦-٨ت)$

(٢) $(\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤}ت) + (\frac{-٢}{٥} + \frac{١}{٥}ت)$

(٣) $(\sqrt{٨} + \sqrt{١٢}\,ت) - (\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢٧}\,ت)$

الحل : (١) $(٢+٦ت) + (٦-٨ت) = (٢+٦) + (٦-٨)ت = ٨-٢ت$

(٢) $(\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤}ت) + (\frac{-٢}{٥} + \frac{١}{٥}ت) = (\frac{١}{٢} - \frac{٢}{٥}) + (\frac{-٣}{٤} + \frac{١}{٥})ت = (\frac{٥-٤}{١٠}) + (\frac{-١٥+٤}{٢٠})ت$

$= \frac{١}{١٠} - \frac{١١}{٢٠}ت$

(٣) $(\sqrt{٨} + \sqrt{١٢}\,ت) - (\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢٧}\,ت) = (\sqrt{٨} - \sqrt{٣٢}) + (\sqrt{١٢} - \sqrt{٢٧})ت$

$= (٢\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢}) + (٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣})ت = -٢\sqrt{٢} - \sqrt{٣}\,ت$

تدريب : أوجد ناتج $(٤ + \sqrt{-٩}) - (-١ + \sqrt{-٤٩})$

....

....

....

....

خواص جمع الأعداد المركبة:

ليكن $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ $\in$ م بحيث $ع_١ = س_١+ت ص_١$، $ع_٢ = س_٢+ت ص_٢$، $ع_٣ = س_٣+ت ص_٣$

(١) الإبدال : عملية الجمع في م إبدالية أي أن : $ع_١ + ع_٢ = ع_٢ + ع_١$

مثال : (١+٧ت)+(٣−٦ت) = ٤+ت ، وكذلك (٣−٦ت)+(١+٧ت) = ٤+ت

(٢) التجميع (الدمج) : عملية الجمع تجميعية في م أي أن : $(ع_١+ع_٢)+ع_٣ = ع_١+(ع_٢+ع_٣)$

مثال : (٥−٦ت)+(١+٩ت)+(٢ − ت)=(٦+٣ت)+(٢ − ت)=٨+٢ت

أو (٥−٦ت)+(١+٩ت)+(٢ − ت)=(٥−٦ت)+(٣+٨ت)=٨+٢ت

(٣) العنصر المحايد : العنصر المحايد الجمعي في م هو الصفر أي أن : ع + ٠ = ٠ + ع = ع

(٤) النظير الجمعي : النظير الجمعي للعدد المركب ع = س+ت ص هو −ع = − (س+ت ص)

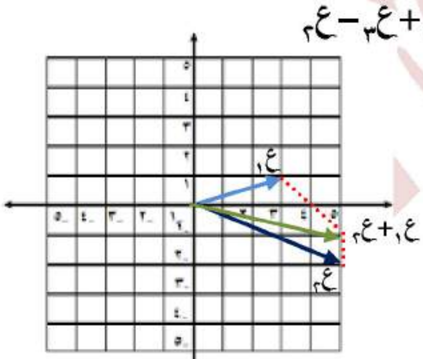
= − س− ت ص

أي أنه ع + (− ع) = (− ع) + ع = صفر

قاعدة : لإيجاد النظير الجمعي لأي عدد مركب نغير إشارة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي معاً

مثال : إذا كان $ع_١$ = ٣+ت ، $ع_٢$ = ٥−٢ت ، $ع_٣$ = ٦− ت فأوجد :

(١) $ع_١ + ع_٢$ ومثله هندسياً (٢) $ع_٣ − ع_١$ ، (٣) $ع_١+ع_٣−ع_٢$



الحل : (١) $ع_١+ع_٢$=(٣+ت)+(٥−٢ت)=٥− ت

(٢) $ع_٣−ع_١$ = (٦− ت)−(٣+ت) = ٣−٢ت

(٣) $ع_١+ع_٣−ع_٢$ = (٣+ت)+(٦−ت)−(٥−٢ت)

= ٩−(٥−٢ت) = ٤+٢ت

تدريب : بسـط : $(\sqrt{٢} - \sqrt{-٣}) + (\sqrt{٨}ت + \sqrt{-٢٧}) - (٥\sqrt{٢} - \sqrt{٣}ت)$

....

....

....

....

ثانياً: ضرب الأعداد المركبة :

ليكن $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$ ، حيث $ع_١، ع_٢ \in م$ فإن :

$ع_١ \times ع_٢ = (س_١ + ت ص_١)(س_٢ + ت ص_٢) = س_١(س_٢ + ت ص_٢) + ت ص_١(س_٢ + ت ص_٢)$

$= س_١ س_٢ + س_١ ت ص_٢ + ت ص_١ س_٢ + ت^٢ ص_١ ص_٢ = س_١ س_٢ + س_١ ت ص_٢ + ت ص_١ س_٢ - ص_١ ص_٢$

$= (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + (س_١ ص_٢ + ص_١ س_٢)ت$

القاعدة : $(س_١ + ت ص_١)(س_٢ + ت ص_٢) = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١)ت$

ملاحظات: ١− عند ضرب عددين مركبين نضرب بالقاعدة أو ضرب أقواس مع مراعاة أن $ت^٢ = -١$

٢− يكتب $ع_١$ ضرب $ع_٢$ بالرموز بالصورة : $ع_١ \times ع_٢$ أو $ع_١ \cdot ع_٢$ أو $ع_١ ع_٢$

مثال : أوجد الناتج : (١) $(٣+٢ت)(٥+٤ت)$ ، (٢) $(١+\sqrt{٢}ت)(\sqrt{٢}-ت)$

الحل : (١) $(٣+٢ت)(٥+٤ت) = (١٥-٨) + (١٢+١٠)ت = ٧+٢٢ت$

استخدام قاعدة الضرب مباشرة

(٢) $(١+\sqrt{٢}ت)(\sqrt{٢}-ت) = ١(\sqrt{٢}-ت) + \sqrt{٢}ت(\sqrt{٢}-ت)$

$= \sqrt{٢} - ت + (\sqrt{٢})^٢ ت - \sqrt{٢}ت^٢ = \sqrt{٢} - ت + ٢ت + \sqrt{٢}$

$= ٢\sqrt{٢} + ت$

استخدام ضرب أقواس

مثال : حل المعادلة التالية : $٧ت = (س+٣ت)(ص-ت) - ٩$

الحل: قبل الاستفادة من تساوي عددين مركبين وحل المعادلتين نجري عملية الضرب أولاً :

$٧ت+٩ = (س ص+٣) + (-س+٣ص)ت$

$\therefore$ $س ص + ٣ = ٩ \Leftarrow س ص = ٦$ .... (١)

وأيضاً $-س + ٣ص = ٧ \Leftarrow س - ٣ص = -٧ \Leftarrow س = ٣ص - ٧$ .... (٢)

وبالتعويض بـ(٢) في(١) ينتج: $(٣ص-٧)ص = ٦ \Leftarrow ٣ص^٢ - ٧ص - ٦ = ٠ \Leftarrow (٣ص+٢)(ص-٣) = ٠$

إما $٣ص+٢ = ٠ \Leftarrow ص = \frac{-٢}{٣}$ ، أو $ص-٣ = ٠ \Leftarrow ص = ٣$

وبالتعويض بقيم ص في المعادلة (٢) ينتج : $س = ٣ \times \frac{-٢}{٣} - ٧ \Leftarrow س = -٩$

$س = ٣ \times ٣ - ٧ \Leftarrow س = ٢$

تدريب : أوجد : $(٢+\sqrt{-٩})(-٣-\sqrt{-٥})$

....

خواص ضرب الأعداد المركبة:

ليكن $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ∋ م بحيث $ع_١ = س_١+ت ص_١$، $ع_٢ = س_٢+ت ص_٢$، $ع_٣ = س_٣+ت ص_٣$

(١) الإبدال : عملية الضرب إبدالية في م أي أن : $ع_١ × ع_٢ = ع_٢ × ع_١$

مثال : (٢+٣ت) (١− ت) = ٥+ت ، وكذلك (١− ت) (٢+٣ت) = ٥+ت

(٢) التجميع (الدمج) : عملية الضرب تجميعية في م أي أن : $(ع_١×ع_٢)×ع_٣ = ع_١×(ع_٢×ع_٣)$

مثال : (٢+٣ت) (١+٢ت) (١− ت) = (−٤+٧ت)+(١− ت) = ٣+١١ت

أو(٢+٣ت) (١+٢ت) (١− ت) = (٢+٣ت)+(٣+ت) = ٣+١١ت

(٣) العنصر المحايد : العنصر المحايد الضربي في م هو ع=١ أو ع=(١ ، ٠)

أي أن: ع × ١ = ١ × ع = ع

مثال :أكمل الفراغ : إذا كان $ع_١×ع_٢ = ع_١$ ، فإن قيمة $ع_٢$ = ...$\boxed{١}$....

(٤) التوزيع : عملية الضرب تتوزع على الجمع : $ع_١(ع_٢+ع_٣) = (ع_١ ع_٢)+(ع_١ ع_٣)$

(٥) النظير الضربي(المعكوس الضربي) (مقلوب العدد) :

لكل عدد ع=س+ت ص ، ع ≠ صفر يوجد نظير ضربي يرمز له

بالرمز $ع^{-١}$ بحيث :

$$ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{١}{س+ت ص} = \frac{س}{س^٢+ص^٢} - \frac{ص}{س^٢+ص^٢} ت$$

نضرب $\frac{١}{س+ت ص} × \frac{س−ت ص}{س−ت ص}$
فتنتج القاعدة المقابلة .

ملاحظة: يستخدم القانون السابق لإيجاد النظير الضربي (المعكوس) لأي عدد مركب بالصورة الجبرية بالتعويض عن كلاً من س ، ص في القانون.

مثال : أوجد النظير الضربي ($ع^{-١}$) لما يلي : (١) −٣−٤ت ، (٢) $\sqrt{٢}$ + ت

الحل : (١) $ع^{-١} = \frac{−٣}{٩+١٦} - \frac{−٤}{٩+١٦} ت = \frac{−٣}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥} ت$

(٢) $ع^{-١} = \frac{\sqrt{٢}}{٢+١} - \frac{١}{٢+١} ت = \frac{\sqrt{٢}}{٣} - \frac{١}{٣} ت$

ملاحظة:

يمكن إيجاد النظير الضربي للأعداد المركبة التي على الصورة $ع = \frac{أ}{س+ت ص}$ بسهولة وبدون استخدام القاعدة السابقة حيث : $ع = \frac{أ}{س+ت ص} \Leftarrow ع^{-١} = \frac{س+ت ص}{أ} = \frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} ت$

مثال : أوجد $ع^{-1}$ للعدد المركب $ع = \frac{٧}{٥+٣ت}$.

الحل: $ع^{-1} = \frac{١}{ع} = \frac{٥+٣ت}{٧} = \frac{٥}{٧} + \frac{٣}{٧}ت$

ملاحظة: إذا كان $ع_{١} \times ع_{٢} = ١$ ، فإن $ع_{٢}$ نظير ضربي لـ $ع_{١}$ والعكس.

تدريب : أوجد النظير الضربي للعدد $(\sqrt{٢} + ت)$.

....

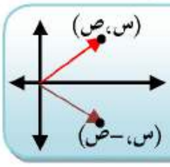
....

مـرافـق العـدد المـركـب

مرافق العدد $ع = س+ت ص$ هو $\bar{ع} = س-ت ص$

(أي نحصل عل مرافق العدد بتغيير إشارة الجزء التخيلي للعدد فقط)

ملاحظة : العددان المترافقان متماثلان حول محور السينات كما نلاحظ في الشكل:



مثال : أوجد المرافق للآتي:(١) $٥+٧ت$ ، (٢) ٩ ، (٣) $-٦ت$ ، (٤) $٣ت-٣$ ، (٥) $\sqrt{-٢}-٤$

الحل : (١) $٥-٧ت$ ،(٢) ٩ ،(٣) $٦ت$ ،(٤) $-٣ت-٣$ ،(٥) $\sqrt{٢}ت-٤$ مرافقه $-\sqrt{٢}ت-٤$

تدريب : أوجد مرافق العدد $\sqrt{-١٦}$

....

....

....

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

خواص مرافق العدد المركب :

١) $\text{ع} + \overline{\text{ع}}$ = عدد حقيقي صرف مقداره ٢س

[مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي = ضعف الجزء الحقيقي]

الإثبات : نضع ع = س+ت ص فيكون $\overline{\text{ع}}$ = س− ت ص

∴ $\text{ع} + \overline{\text{ع}}$ = (س+ت ص) + (س−ت ص) = ٢س (هـ.ط)

على سبيل المثال : ٣+٤ت + ٣−٤ت = ٦

٢) $\text{ع} - \overline{\text{ع}}$ = عدد تخيلي صرف مقداره ٢ت ص

[الفرق بين عددين مترافقين هو عدد تخيلي = ضعف الجزء التخيلي]

الإثبات : نضع ع = س+ت ص فيكون $\overline{\text{ع}}$ = س− ت ص

∴ $\text{ع} - \overline{\text{ع}}$ = (س+ت ص) − (س− ت ص) = س+ت ص − س+ت ص = ٢ت ص (هـ.ط)

٣) $\overline{\text{ع}_1 \pm \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}_1} \pm \overline{\text{ع}_2}$ [المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما]

كذلك [المرافق للفرق بين عددين مركبين = الفرق بين مرافقيهما]

سأثبت أن $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2}$ ويترك إثبات $\overline{\text{ع}_1 - \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}_1} - \overline{\text{ع}_2}$ لك عزيزي الطالب

الإثبات : نضع $\text{ع}_1 = \text{س}_1 + \text{ت ص}_1$ ، $\text{ع}_2 = \text{س}_2 + \text{ت ص}_2$

الطرف الأيمن : $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \overline{(\text{س}_1 + \text{ت ص}_1) + (\text{س}_2 + \text{ت ص}_2)}$

$= \overline{(\text{س}_1 + \text{س}_2) + \text{ت}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2)}$

$= (\text{س}_1 + \text{س}_2) - \text{ت}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2)$ .... ①

الطرف الأيسر: $\overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2} = (\text{س}_1 - \text{ت ص}_1) + (\text{س}_2 - \text{ت ص}_2)$

$= (\text{س}_1 + \text{س}_2) - \text{ت}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2)$ .... ②

من ① ، ② يتضح أن $\overline{\text{ع}_1 \pm \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}_1} \pm \overline{\text{ع}_2}$ (هـ.ط)

٤) $ع \times \bar{ع}$ = عدد حقيقي صرف مقداره $س^{٢} + ص^{٢}$

تذكر $ت^{٢} = -١$

الإثبات : نضع ع = س+ت ص فيكون :

$ع \times \bar{ع} = (س+ت ص)(س-ت ص) = س^{٢} - ت ص س + ت ص س - ت^{٢} ص^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

فمثلاً : (٣+٤ت) (٣-٤ت) = ٩+١٦ = ٢٥ وذلك بتطبيق الخاصية السابقة .

٥) $\overline{ع_{١} \times ع_{٢}} = \bar{ع}_{١} \times \bar{ع}_{٢}$ [المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهما]

الإثبات : نضع $ع_{١} = س_{١} + ت ص_{١}$ ، $ع_{٢} = س_{٢} + ت ص_{٢}$

الطرف الأيمن : $\overline{ع_{١} \times ع_{٢}} = \overline{(س_{١} + ت ص_{١})(س_{٢} + ت ص_{٢})}$

$= \overline{س_{١} س_{٢} + س_{١} ت ص_{٢} + ت ص_{١} س_{٢} + ت^{٢} ص_{١} ص_{٢}}$

$= \overline{(س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢}) + ت(س_{١} ص_{٢} + ص_{١} س_{٢})}$

$= (س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢}) - ت(س_{١} ص_{٢} + ص_{١} س_{٢})$ …… ①

الطرف الأيسر: $\bar{ع}_{١} \times \bar{ع}_{٢} = (س_{١} - ت ص_{١})(س_{٢} - ت ص_{٢})$

$= س_{١} س_{٢} - ت س_{١} ص_{٢} - ت ص_{١} س_{٢} + ت^{٢} ص_{١} ص_{٢}$

$= (س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢}) - ت(س_{١} ص_{٢} + ص_{١} س_{٢})$ …… ②

من ① ، ② يتضح أن : $\overline{ع_{١} \times ع_{٢}} = \bar{ع}_{١} \times \bar{ع}_{٢}$ (هـ.ط)

٦) $\bar{\bar{ع}} = ع$ (الإثبات متروك لك عزيزي الطالب)

....

....

....

....

....

خواص إضافية للمرافق:

١) إذا كان ع = س (حقيقي صرف) فإن $\bar{ع} = ع$ [العدد يساوي مرافقه إذا كان حقيقي صرف]

٢) إذا كان ع = ت ص (تخيلي صرف) فإن $\bar{ع} = -$ ت ص $= -$ع [مرافقه يساوي نظيره الجمعي]

٣) $\overline{ع_1 \div ع_2} = \bar{ع}_1 \div \bar{ع}_2$ ، $ع_2 \neq ٠$

٤) $\overline{١ \div ع} = ١ \div \bar{ع}$ ، $ع \neq ٠$

٥) إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ مترافقين فإن $(ع_1)^2$ ، $(ع_2)^2$ مترافقين .

٦) $(ع)^2 + (\bar{ع})^2$ = عدد حقيقي .

٧) $\frac{ع}{\bar{ع}}$ ، $\frac{\bar{ع}}{ع}$ مترافقان .

ملاحظة : ليس كل عددين مركبين مجموعهما عدد حقيقي يكونان مترافقان .
فمثلاً : (٤−٣ت) ، (٥+٣ت) عددان غير مترافقين ومجموعهما يساوي ٩ (عدد حقيقي)

مثال: إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ عددين مركبين مترافقين ، أثبت أن : $ع_1^2$ ، $ع_2^2$ مترافقان .

الحل: ليكن $ع_1$ = س+ت ص ⇐ ∴ $ع_2$ = س − ت ص

∴ $ع_1^2$ = (س+ت ص) (س+ت ص) = (س^2 − ص^2)+٢ت س ص

و $ع_2^2$ = (س − ت ص) (س − ت ص) = (س^2−ص^2)−٢ت س ص

∴ $ع_1^2$ ، $ع_2^2$ مترافقان .

تدريبات: (١) إذا كان $\bar{ع}$ مرافق العدد ع ، فأثبت أن $ع^2 + \bar{ع}^2$ = عدد حقيقي .

(٢) إذا كان $ع_1$ = ٨+٧ت ، وكان $\overline{ع_1 + ع_2}$ = ٥+ت ، فأوجد $ع_2$.

$\boxed{ع_2 = -٣-٨ت}$

ثالثاً: قسمة الأعداد المركبة:

عند قسمة عدد مركب على آخر أو إيجاد مقلوب عدد مركب نضرب البسط والمقام في مرافق المقام . أي أن : $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} \times \frac{\bar{\text{ع}}_{٢}}{\bar{\text{ع}}_{٢}} = \frac{\text{ع}_{١} \times \bar{\text{ع}}_{٢}}{\text{س}_{٢}^{٢} + \text{ص}_{٢}^{٢}}$

مثال : بسط ما يلي : (أ) $\frac{\text{٥}}{\text{٢+ت}}$ ، (ب) $\frac{\text{٣+٢ت}}{\text{٢-٥ت}}$ ، (جـ) $\frac{\text{(٢+ت)(١-ت)}}{\text{(١+ت)(٣-٢ت)}}$

الحل :

(أ) $\frac{\text{٥}}{\text{٢+ت}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢+ت}} \times \frac{\text{٢-ت}}{\text{٢-ت}} = \frac{\text{١٠-٥ت}}{\text{٤+١}} = \text{٢-ت}$

(ب) $\frac{\text{٣+٢ت}}{\text{٢-٥ت}} \times \frac{\text{٢+٥ت}}{\text{٢+٥ت}} = \frac{\text{٦+١٥ت+٤ت+١٠ت}^{٢}}{\text{٤+٢٥}} = \frac{\text{-٤+١٩ت}}{\text{٢٩}} = \frac{\text{-٤}}{\text{٢٩}} + \frac{\text{١٩}}{\text{٢٩}}\text{ت}$

(جـ) $\frac{\text{(٢+ت)(١-ت)}}{\text{(١+ت)(٣-٢ت)}} = \frac{\text{٢-٢ت+ت-ت}^{٢}}{\text{٣-٢ت+٣ت-٢ت}^{٢}} = \frac{\text{٣-ت}}{\text{٥+ت}} \times \frac{\text{٥-ت}}{\text{٥-ت}} = \frac{\text{١٥-٣ت-٥ت+ت}^{٢}}{\text{٢٥+١}}$

$= \frac{\text{١٤-٨ت}}{\text{٢٦}} = \frac{\text{١٤}}{\text{٢٦}} - \frac{\text{٨}}{\text{٢٦}}\text{ت} = \frac{\text{٧}}{\text{١٣}} - \frac{\text{٤}}{\text{١٣}}\text{ت}$

تدريبات : (١) إذا كان $\text{س+ت ص} = \frac{\text{١+ت}^{٥}}{\text{٢-ت}^{٩}} + \frac{\text{١+ت}^{٣}}{\text{١+ت}}$ ،فأوجد س،ص. $\boxed{\text{س}=\frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{ ، ص}=-\frac{\text{٢}}{\text{٥}}}$

(٢) سؤال وزاري عام ٢٠٠٥-٢٠٠٦م : بيّن أن العدد $\left(\frac{\text{-٢ت}}{\text{١-ت}}\right)^{٦}$ تخيلي صرف . $\boxed{\text{٨ت}}$

(٣) بسط $\left(\frac{\text{٤ت}^{٣}\text{-ت}}{\text{٢+ت}}\right)^{٢}$ $\boxed{\text{-٣+٤ت}}$

....

....

....

....

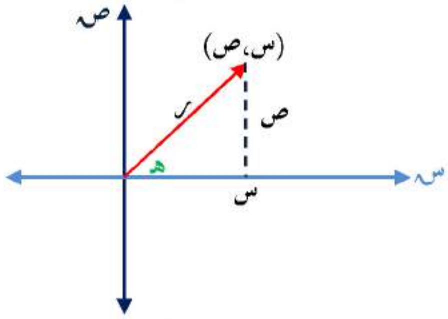
....

....

....

الصورة القطبية (المثلثية) للعدد المركب

تعرفت على كيفية كتابة العدد المركب بالصورة ع = س+ت ص والتي تسمى الصورة الجبرية ، ويمكن أن يكتب العدد كزوج مرتب ع = (س،ص) ويمثّل بنقطة في المستوى وعليه يصنع العدد المركب ع متجهاً بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة (س،ص) طوله "ر" ويصنع زاوية مع محور السينات الموجب مقدارها "هـ" ومن الشكل المقابل يمكن استنتاج طول المتجه ر الذي يمثّل طول العدد المركب ع مستخدمين مبرهنة فيثاغورس كالآتي:



ر^{٢} = س^{٢}+ص^{٢} ⇐ ر = $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}$

كذلك : جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ⇐ ص = ر جاهـ

جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ⇐ س = ر جتاهـ

وعليه عند التعويض عن قيم س ، ص السابقة في الصورة الجبرية ع = س+ت ص تكون الصورة القطبية هي : ع = ر جتاهـ +ت ر جاهـ = ر(جتاهـ+ت جاهـ) .

تسمى الصيغة ع = ر(جتاهـ+ت جاهـ) بالصورة القطبية للعدد المركب ع وتكتب بشكل مختصر بالصورة: [ر ، هـ] ويسمى ر مقياس العدد المركب ع ، وتسمى هـ سعته وعليه فإن:

ر = |ع| = $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}$ ويقرأ |ع| مقياس العدد المركب ع والذي يرمز له بالرمز ر .

تعريف: الصورة القطبية للعدد ع = س+ت ص هي ع = ر(جتاهـ+ت جاهـ) حيث ر = |ع| (مقياس العدد ع) ، هـ سعته ، وتكتب اختصاراً بالصورة ع = [ر ، هـ].

الخلاصة:

١) الصورة الجبرية للعدد المركب ع = س+ت ص .

٢) الصورة القطبية للعدد المركب ع = ر(جتاهـ+ت جاهـ) .

٣) الصورة القطبية المختصرة للعدد المركب ع = [ر ، هـ] .

٤) جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ⇐ ص = ر جاهـ ، جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ⇐ س = ر جتاهـ .

٥) ر = |ع| = $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}$.

٦) ر: مقياس(طول) العدد المركب ، هـ : سعة (زاوية) العدد المركب .

٧) لأي عدد مركب ع مهما كان نوعه ، ع ≠ ٠ عند تحويله إلى الصورة القطبية فإن له مقياس وسعة .

٨) إذا كان |ع| = ٠ ، فإن س = ٠ ، ص = ٠ .

التحويل من الصورة الجبرية إلى الصورة القطبية :

لتحويل العدد ع = س+ت ص إلى الصورة القطبية نتبع الخطوات التالية :

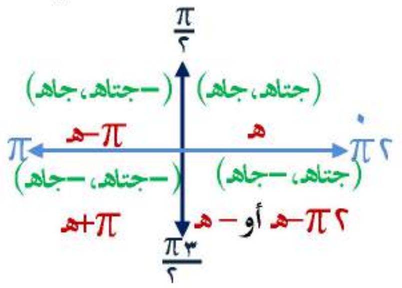
١– نوجد مقياس العدد المركب ر من العلاقة $\text{ر} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ ، ر > ٠

٢– نوجد سعة العدد المركب هـ من خلال :

أولاً : إيجاد جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ، جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$

ثانياً : تحديد موقع الزاوية في الأرباع من خلال إشارة كل من جتا و جا كما في المخطط الآتي

ثالثا : نكتب السعة (الزاوية) كما في المخطط الآتي:



٣– نعوض في الصورة القياسية للصورة القطبية : ع = ر(جتاهـ+ت جاهـ) أو ع = [ر ، هـ]

مثال : أوجد مقياس وسعة العدد المركب (−١+$\sqrt{٣}$ت) ثم أكتبه بالصورة القطبية .

الحل: نطبق الخطوات السابقة ونشرح بالتفصيل هذا المثال :

ع = −١+$\sqrt{٣}$ت ⇐ س = −١ ، ص = $\sqrt{٣}$

نوجد مقياس العدد ر = $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}$ ⇐ ر = $\sqrt{١+٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

نوجد السعة كما يلي : جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ = $\frac{-١}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

[نلاحظ أن قيم هذه النسب بدون مراعاة الإشارة هي لزاوية شهيرة واقع في الربع الأول وهي ٦٠ = $\frac{\pi}{٣}$]

كما نلاحظ قيمة جتاهـ سالبة ، جاهـ موجبة ⇐ وحسب المخطط السابق الزاوية في الربع الثاني

∴ هـ = $\pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ الصورة القطبية للعدد ع = ٢(جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$) = [٢ ، $\frac{٢\pi}{٣}$]

تذكير: يمكن تحويل قياسات الزوايا من درجة إلى راديان والعكس باستخدام القاعدتين الآتيتين :

١) لتحويل قياس الزاوية من درجة إلى راديان نضرب في $\frac{\pi}{١٨٠}$

٢) لتحويل قياس الزاوية من راديان إلى درجة نضرب في $\frac{١٨٠}{\pi}$

تدريب : أكتب العدد ع=$\sqrt{٣}$ + ت بالصورة القطبية

ملاحظة هامة:

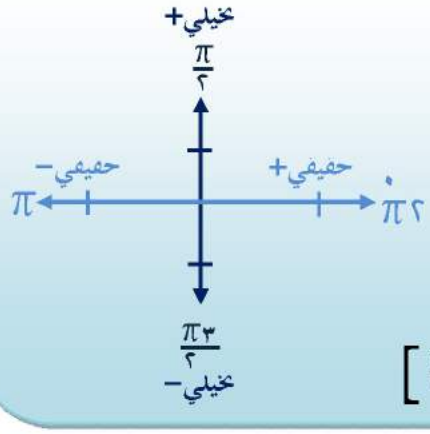
إذا كان العدد المركب حقيقي صرف أو تخيلي صرف ممكن تحويله إلى الصورة القطبية بكل سهولة ومباشرة مستخدمين الحالات الآتية :

١) ع = س ⇐ ع = [س ، ٠] أو [س ، ٢π]

٢) ع = − س ⇐ ع = [س ، π]

٣) ع = ص ت ⇐ ع = [ص ، π/٢]

٤) ع = −ص ت ⇐ ع = [ص ، ٣π/٢] أو [ص ، −π/٢]



مثال : أكتب كلاً من الأعداد الآتية في الصورة القطبية : (١) ١+ت ، (٢) −١ ، (٣) ت

الحل: (١) يحل بنفس خطوات المثال السابق وكما يلي : س=١ ،ص= ١ ⇐ ر= √(١+١) = √٢

جتا هـ = ١/√٢ ، جا هـ = ١/√٢ وكلاهما موجبان ⇐ ∴ هـ = π/٤

∴ الصورة القطبية هي ع = √٢ (جتا π/٤ +ت جا π/٤) ، أو ع = [√٢ ، π/٤]

(٢) العدد (−١) نلاحظ أن هذا العدد حقيقي صرف سالب،وعليه نستخدم الملاحظة الهامة السابقة

∴ ع = −١ ⇐ ع = [١ ، π] (يمكنك التحقق من ذلك باستخدام خطوات الحل السابقة)

(٣) العدد (ت) هو تخيلي صرف موجب ⇐ ع = [١ ، π/٢]

تدريب : أكتب الأعداد الآتية بالصورة القطبية : (١) −٣ ، (٢) − ت

....

....

....

....

....

....

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

تنبيه: عند تحويل عدد مركب بسطه ومقامه أعداد مركبة إلى الصورة القطبية نقوم أولاً بتحويل كل من البسط والمقام إلى الصورة القطبية ثم نستخدم صيغة خارج قسمة عددين قطبياً (كما سيأتي لاحقاً) فإذا تعذر تحويل أحدهما إلى القطبية نضرب البسط والمقام في مرافق المقام بعدها يتم التحويل إلى الصورة القطبية .

مثال: أوجد بالصورة $[ر ، هـ]$ العدد $ع = \frac{٥ + \sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} + ٢ت}$

الحل: نستخدم القسمة من خلال الضرب في المرافق ثم التحويل للصورة القطبية لأنه لا يمكن تحويل كل من البسط والمقام إلى الصورة القطبية (جرب بنفسك)

$$ع = \frac{٥ + \sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} + ٢ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ٢ت}{\sqrt{٣} - ٢ت} = \frac{٥\sqrt{٣} - ١٠ت + ٣ت + ٢\sqrt{٣}}{٣ + ٤} = \frac{٧\sqrt{٣} - ٧ت}{٧} = \sqrt{٣} - ت$$

$ر = \sqrt{٣ + ١} = \sqrt{٤} = ٢$ ، $جتاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $جاهـ = \frac{-١}{٢}$ ⇐ واقعين في الربع الرابع ⇐ $هـ = \frac{-\pi}{٦}$

$\therefore ع = ٢(جتا \frac{-\pi}{٦} + ت\ جا \frac{-\pi}{٦}) \Leftarrow ع = [٢ ، \frac{-\pi}{٦}]$

تحويل العدد المركب من الصورة القطبية القياسية إلى الصورة الجبرية :

إن التحويل من الصورة القطبية القياسية وهي $ع = ر(جتاهـ + ت\ جاهـ)$ إلى الصورة الجبرية هو أمر سهل من خلال إيجاد قيمتي النسبتين والضرب في $ر$ فتتكوّن الصورة الجبرية وإليك الأمثلة :

مثال: أكتب بالصورة الجبرية ما يلي: (١) $ع = [٤ ، ٦٠]$ ، (٢) $ع = [٢ ، ١٥٠]$ ، (٣) $ع = [٤ ، \frac{٢\pi}{٣}]$

(٤) $ع = ٥(جتا١٨٠ + ت\ جا١٨٠)$ ، (٥) $ع = \frac{١}{\sqrt{٣}}[جتا(-٣٠^\circ) + ت\ جا(-٣٠^\circ)]$

الحل: (١) $ع = [٤ ، ٦٠] \Leftarrow ع = ٤(جتا٦٠ + ت\ جا٦٠)$

$= ٤(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت) = ٢ + ٢\sqrt{٣}ت$

الزاوية في الربع الأول سيكون كل من جتا ، جا موجبان

(٢) $ع = [٢ ، ١٥٠] \Leftarrow ع = ٢(جتا١٥٠ + ت\ جا١٥٠)$

$= ٢[جتا(١٨٠ - ٣٠) + ت\ جا(١٨٠ - ٣٠)]$

$= ٢[- جتا(٣٠) + ت\ جا(٣٠)] = ٢(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت) = -\sqrt{٣} + ت$

الزاوية في الربع الثاني ستكون إشارة جتا سالبة و جا موجبة عند التحويل إلى الزاوية الشهيرة في الربع الأول

(٣) $ع = [٤ ، \frac{٢\pi}{٣}] = ٤(جتا\frac{٢\pi}{٣} + ت\ جا\frac{٢\pi}{٣}) = ٤[جتا(\pi - ٦٠) + ت\ جا(\pi - ٦٠)]$

$= ٤[- جتا٦٠ + ت\ جا٦٠] = ٤(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت) = -٢ + ٢\sqrt{٣}ت$

(٤) $ع = ٥(جتا١٨٠ + ت\ جا١٨٠) = ٥(-١ + ت \times ٠) = -٥$

(٥) $ع = \frac{١}{\sqrt{٣}}[جتا(-٣٠^\circ) + ت\ جا(-٣٠^\circ)] = \frac{١}{\sqrt{٣}}(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}ت) = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٦}ت$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٣}} - \frac{١}{٦}ت$

بعد أن تعرفت عزيزي الطالب على التحويل من الصورة الجبرية إلى الصورة القطبية القياسية نتعرف الآن على الأشكال الغير قياسية للصورة القطبية وكيفية التعامل معها لجعلها قياسية ثم تحويلها إلى جبرية ونوضح ذلك بمخطط .

الأشكال الغير قياسية للصورة القطبية :

الشكل القياسي للعدد المركب ع هو ع = ر(جتاهـ+ت جاهـ) حيث جتاهـ بدون ت ، و جاهـ مع ت وكلا النسبتين موجبة . وما غير ذلك نقول بأن العدد بشكل غير قياسي .

ملاحظة: لمعرفة السعة علينا وضع العدد بالصورة القطبية القياسية

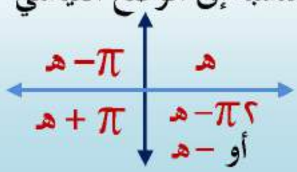
المخطط :

الأشكال الغير قياسية للعدد المركب

الاختلاف في الإشارة

نحدد موقع العدد في الأرباع

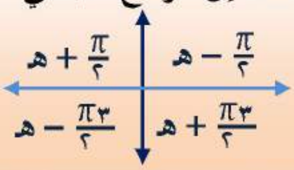
نستخدم المخطط التالي للعودة بالنسبة إلى الوضع القياسي



الاختلاف في النسبة

نحدد موقع العدد في الأرباع

نستخدم المخطط التالي للعودة بالنسبة إلى الوضع القياسي



لاحظ معي الأمثلة الآتية وطريقة وضع العدد المركب في الصورة القطبية القياسية .

مثال : أوجد السعة لكل مما يأتي :

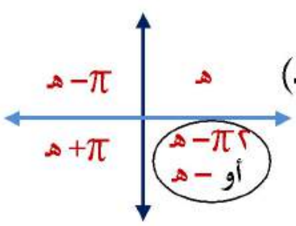
(١) ع = (جتاهـ − ت جاهـ) ، (١) ع = (جاهـ+ت جتاهـ) ، (١) ع = (− جاهـ − ت جتاهـ)

الحل: (١) ع = (جتاهـ − ت جاهـ) ، نلاحظ الاختلاف في الإشارة وليس في النسبة نستخدم في المخطط اليمين فنعيد كتابة ع على الصورة القياسية : ع = ر[جتا(   )+ت جا(   )]

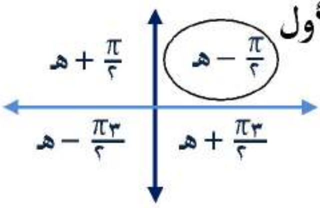
نلاحظ جتاهـ موجب ، جاهـ سالب ⇐ ∴ فالنسبتين في الربع الرابع

∴ ع = جتا(−هـ) +ت جا(−هـ) ، أو ع = جتا(٢π−هـ) +ت جا(٢π−هـ)

∴ السعة = − هـ أو السعة = ٢π − هـ



(٢) ع = (جاهـ + ت جتاهـ) ، نلاحظ الاختلاف في النسبة نستخدم في المخطط اليسار

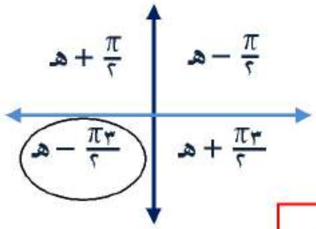


نلاحظ جاهـ موجب ، جتاهـ موجب ⇐ ∴ فالنسبتين في الربع الأول

∴ ع = جتا($\frac{\pi}{٢}$ − هـ) + ت جا($\frac{\pi}{٢}$ − هـ)

∴ السعة = $\frac{\pi}{٢}$ − هـ

(٣) ع = (− جاهـ − ت جتاهـ) ، نلاحظ الاختلاف في النسبة نستخدم في المخطط اليسار



نلاحظ جاهـ سالب ، جتاهـ سالب ⇐ ∴ الربع هو الثالث

∴ ع = جتا($\frac{٣\pi}{٢}$ − هـ) + ت جا($\frac{٣\pi}{٢}$ − هـ)

∴ السعة = $\frac{٣\pi}{٢}$ − هـ

تدريب : أوجد السعة لما يلي : (١) ع = − جتا هـ − ت جا هـ $\boxed{\pi + هـ}$

(٢) ع = − جتا هـ + ت جا هـ $\boxed{\pi - هـ}$

العمليات الحسابية للعدد المركب بالصورة القطبية

(أ) جمع وطرح الأعداد المركبة بالصورة القطبية :

لا يمكن إجراء عمليتي الجمع أو الطرح للأعداد المركبة في الصورة القطبية لذلك نقوم بتحويلها إلى الصورة الجبرية ثم نجري عملية الجمع أو الطرح ثم نقوم بتحويل الناتج إلى الصورة القطبية .

(ب) ضرب الأعداد المركبة بالصورة القطبية :

إذا كان $ع_١ = ر_١(جتا\ هـ_١ + ت\ جا\ هـ_١) = [ر_١ ، هـ_١]$

$ع_٢ = ر_٢(جتا\ هـ_٢ + ت\ جا\ هـ_٢) = [ر_٢ ، هـ_٢]$

فإن : $ع_١ \times ع_٢ = [ر_١ ، هـ_١] \times [ر_٢ ، هـ_٢] = [ر_١ر_٢ ، هـ_١ + هـ_٢]$

أي عند ضرب الأعداد المركبة بالصورة القطبية فإنه يتم ضرب الأطوال وجمع الزوايا

الإثبات: $ع_1 \times ع_2 = [ر_1(جتا هـ_1 + ت جا هـ_1)][ر_2(جتا هـ_2 + ت جا هـ_2)]$

$= ر_1 ر_2 [جتاهـ_1 جتاهـ_2 + ت جتاهـ_1 جاهـ_2 + ت جاهـ_1 جتاهـ_2 - جاهـ_1 جاهـ_2]$

$= ر_1 ر_2 [(جتاهـ_1 جتاهـ_2 - جاهـ_1 جاهـ_2) + ت (جتاهـ_1 جاهـ_2 + جاهـ_1 جتاهـ_2)]$

ومن العلاقتين:

$جتا(أ \pm ب) = جتاأ جتاب \mp جاأ جاب$ .... ①

$جا(أ \pm ب) = جاأ جتاب \pm جتاأ جاب$ .... ②

وبالتعويض بـ ① في الجزء الحقيقي و ② في الجزء التخيلي يكون :

$\therefore ع_1 \times ع_2 = ر_1 ر_2 [جتا (هـ_1 + هـ_2) + ت جا (هـ_1 + هـ_2)] = [ر_1 ر_2 ، هـ_1 + هـ_2]$ (هـ.ط)

(ج) قسمة الأعداد المركبة بالصورة القطبية:

إذا كان $ع_1 = ر_1(جتا هـ_1 + ت جا هـ_1) = [ر_1 ، هـ_1]$

$ع_2 = ر_2(جتا هـ_2 + ت جا هـ_2) = [ر_2 ، هـ_2]$

فإن : $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ر_1(جتا هـ_1 + ت جا هـ_1)}{ر_2(جتا هـ_2 + ت جا هـ_2)} = [\frac{ر_1}{ر_2} ، هـ_1 - هـ_2]$

أي عند قسمة الأعداد المركبة بالصورة القطبية فإنه يتم قسمة الأطوال وطرح الزوايا

الإثبات: $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ر_1(جتا هـ_1 + ت جا هـ_1)}{ر_2(جتا هـ_2 + ت جا هـ_2)} \times \frac{جتا هـ_2 - ت جا هـ_2}{جتا هـ_2 - ت جا هـ_2}$

$= \frac{ر_1(جتاهـ_1 جتاهـ_2 - ت جتاهـ_1 جاهـ_2 + ت جاهـ_1 جتاهـ_2 + جاهـ_1 جاهـ_2)}{ر_2 \quad (جتا^2 هـ_2 + ت جا^2 هـ_2)}$

$= \frac{ر_1(جتاهـ_1 جتاهـ_2 + جاهـ_1 جاهـ_2) + ت (جاهـ_1 جتاهـ_2 - جتاهـ_1 جاهـ_2)}{ر_2 \quad (جتا^2 هـ_2 + ت جا^2 هـ_2)}$

ومن العلاقتين السابقتين وملاحظة المقام = ١ متطابقة شهيرة

$= \frac{ر_1}{ر_2} [جتا (هـ_1 - هـ_2) + ت جا (هـ_1 - هـ_2)] = [\frac{ر_1}{ر_2} ، هـ_1 - هـ_2]$ (هـ.ط)

خواص العدد المركب بالصورة القطبية:

إذا كان ع = ر(جتاهـ+ت جاهـ) = [ر ، هـ] فإن:

(أ) المرافق هو عَ = ر(جتاهـ − ت جاهـ)

= ر[جتا(−هـ)+ت جا(−هـ)]

= [ر ، −هـ]

بوضع العدد في الصورة القياسية لمعرفة السعة

(ب) النظير الجمعي هو (−ع) = −ر(جتاهـ+ت جاهـ)

= ر(− جتاهـ − ت جاهـ)

= ر[−جتا (π+هـ)+ت جا (π+هـ)]

= [ر ، π+هـ]

(جـ) النظير الضربي (مقلوب العدد) هو (ع$^{-١}$) = $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{ر(جتا هـ +ت جا هـ)}} \times \frac{\text{جتا هـ − ت جا هـ}}{\text{جتا هـ − ت جا هـ}}$

= $\frac{\text{جتا هـ − ت جا هـ}}{\text{ر(جتا}^{٢}\text{هـ +ت جا}^{٢}\text{هـ)}}$

جتا^{٢}هـ +ت جا^{٢}هـ = ١

= $\frac{\text{١}}{\text{ر}}$ (جتا هـ − ت جا هـ)

= $\frac{\text{١}}{\text{ر}}$ [جتا (−هـ)+ت جا (−هـ))

= [$\frac{\text{١}}{\text{ر}}$ ، −هـ]

الخلاصة :

إذا كان ع = [ر ، هـ] ، ع$_{١}$= [ر$_{١}$ ، هـ$_{١}$] ، ع$_{٢}$= [ر$_{٢}$ ، هـ$_{٢}$] ، فإن :

☒ ع$^{-١}$ = $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = [$\frac{\text{١}}{\text{ر}}$ ، −هـ]

☒ −ع= [ر ، π+هـ]

☒ عَ = [ر ، −هـ]

☒ ع$_{١}$×ع$_{٢}$ = [ر$_{١}$ر$_{٢}$ ، هـ$_{١}$+هـ$_{٢}$]

☒ $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$ = [$\frac{\text{ر}_{١}}{\text{ر}_{٢}}$ ، هـ$_{١}$−هـ$_{٢}$]

مثال: إذا كان ع = −٣+٣√٣ ت ، فأوجد بالصورة القطبية (١) −ع ، (٢) $\frac{١}{ع}$ ، (٣) عَ

الحل: نكتب العدد ع بالصورة القطبية [ر ، هـ]

ر = √(٩+٢٧) = √٣٦ = ٦

جتاهـ = $\frac{-٣}{٦}$ = $\frac{-١}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٦}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا سالب ، جا موجب ⇐ الربع هو الثاني

∴ السعة هـ = $\pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ ع = [٦ ، $\frac{٢\pi}{٣}$] ، ومن هذه الصورة سنجد المطلوب

(١) −ع = [٦ ، $\pi + \frac{٢\pi}{٣}$] = [٦ ، $\frac{٥\pi}{٣}$]

(٢) $\frac{١}{ع}$ = [$\frac{١}{٦}$ ، $-\frac{٢\pi}{٣}$]

(٣) عَ = [٦ ، $-\frac{٢\pi}{٣}$]

مثال: ليكن ع١ = [٨ ، ٦٠] ، ع٢ = ٤(جتا١٢٠ +ت جا١٢٠) فأوجد بالصورة [ر، هـ] كلاً مما يلي : (١) ع١ ع٢ ، (٢) $\frac{٤ت}{ع٢}$

الحل: (١) ع١ ع٢ = [٨ × ٤ ، ٦٠+١٢٠] = [٣٢ ، ١٨٠]

(٢) $\frac{٤ت}{ع٢}$ ، نحول ٤ت إلى الصورة القطبية مباشرة لأنه تخيلي صرف ٤ت = [٤ ، $\frac{\pi}{٢}$]

$\frac{٤ت}{ع٢}$ = $\frac{[٤ ، \frac{\pi}{٢}]}{[٤ ، ١٢٠]}$ = $\frac{[٤ ، ٩٠]}{[٤ ، ١٢٠]}$ = [$\frac{٤}{٤}$ ، ٩٠−١٢٠] = [١ ، −٣٠]

مثال: إذا كان ع = [٢ ، هـ] ، حيث هـ ∈] π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [، ظاهـ = $\frac{٣}{٤}$ ، أوجد الصورة القطبية والجبرية لكل من : (١) (عَ)٢ ، ($\frac{١}{ع}$)َ

الحل: (١) ∵ ع = [٢ ، هـ] = ٢(جتاهـ+ت جاهـ)

∴ عَ = ٢(جتاهـ− ت جاهـ) = ٢(جتا(−هـ) + ت جا(−هـ)) = [٢ ، −هـ]

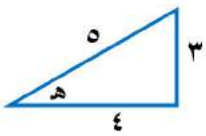
∴ (عَ)٢ = [٢ ، −هـ][٢ ، −هـ] = [٤ ، −٢هـ]

تطبيق قاعدة الضرب

= ٤(جتا٢هـ− ت جا٢هـ) ، وهي الصورة القطبية

لإيجاد الصورة الجبرية لابد من معرفة قيمة الزاوية هـ وسنجد قيم النسب كما يلي:

∵ ظاهـ = $\frac{٣}{٤}$ فيكون الوتر "ر" حسب مبرهنة فيثاغورس = ٥



∴ جتاهـ= − $\frac{٤}{٥}$ ، جاهـ = − $\frac{٣}{٥}$

[لماذا تم اختيار السالب ؟ لأنه معطى هـ ∈] π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [أي في الربع الثالث]

و ∵ جتا٢هـ = ٢جتا٢هـ − ١ ⇐ جتا٢هـ = ٢ × $\frac{١٦}{٢٥}$ − ١ = $\frac{٧}{٢٥}$ استخدام متطابقة

و ∵ جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ = ٢ × − $\frac{٣}{٥}$ × − $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

وبالتعويض بقيمتي جتا٢هـ ، جا٢هـ في الصورة القطبية نحصل على الصورة الجبرية :

∴ (ع̄)٢ = ٤($\frac{٧}{٢٥}$ − $\frac{٢٤}{٢٥}$ ت) = $\frac{٢٨}{٢٥}$ − $\frac{٩٦}{٢٥}$ ت ، وهذه الصورة الجبرية

(٢) ∵ ع̄ = [٢ ، −هـ]

تطبيق لخاصية

∴ ($\frac{١}{ع}$)̄ = [$\frac{١}{٢}$ ، هـ]

= $\frac{١}{٢}$ (جتاهـ + ت جاهـ) ، وهي الصورة القطبية

وبالتعويض بقيمتي جتاهـ ، جاهـ المستنتجتين سابقا

= $\frac{١}{٢}$ (− $\frac{٤}{٥}$ − $\frac{٣}{٥}$ ت)

= − $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{٣}{١٠}$ ت ، وهي الصورة الجبرية

سؤال وزاري: لتكن ع = ٩ + ١٠$\sqrt{٣}$ ت ،فما قيمة ٩ الموجبة التي تجعل للعدد ع زاوية مقدارها $\frac{\pi}{٣}$.

الحل: من العدد ع نلاحظ أن: س = ٩ ، ص = ١٠$\sqrt{٣}$

∴ ر = $\sqrt{٩^٢ + ٣٠٠}$

∵ هـ = $\frac{\pi}{٣}$ (معطى)

∴ جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ .... (١)

∵ جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{٩}{\sqrt{٩^٢+٣٠٠}}$ .... (٢)

وبتكوين معادلة من (١) و (٢) :

$\frac{١}{٢}$ = $\frac{٩}{\sqrt{٩^٢+٣٠٠}}$ ⇐ $\sqrt{٩^٢ + ٣٠٠}$ = ٢٩ ⇐ ٩٢ + ٣٠٠ = ٤٩٢ ⇐ ٤٩٢ − ٩٢ = ٣٠٠ ⇐ ٣٩٢ = ٣٠٠

⇐ ٩٢ = ١٠٠ ⇐ ٩ = ± ١٠

∴ ٩ = ١٠ ، لأنه في السؤال ٩ الموجبة.

سؤال وزاري : إذا كانت $\frac{ع_١}{ع_٢} = -٣+٣\sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_٢ = \left[\frac{١}{٣} ، \frac{-\pi}{٣}\right]$ ، فأوجد :

(١) $ع_١$ بالصورة [ر ، هـ] ، (٢) $ع_٢$ بالصورة س+ت ص ، (٣) أثبت أن $ع_١ \times ع_٢$ حقيقي صرف

الحل: (١) ∵ $\frac{ع_١}{ع_٢} = -٣+٣\sqrt{٣}\,ت \Leftarrow ع_١ = ع_٢ \,(-٣+٣\sqrt{٣}\,ت)$

$\Leftarrow ع_١ = \left[\frac{١}{٣} ، \frac{-\pi}{٣}\right] \times (-٣+٣\sqrt{٣}\,ت)$

نكتب $-٣+٣\sqrt{٣}\,ت$ بالصورة القطبية

أو كتابة $ع_٢$ بالصورة الجبرية

$ر = \sqrt{٩+٢٧} = \sqrt{٣٦} = ٦$

جتاهـ $= -\frac{٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$ ، جاهـ $= \frac{٣\sqrt{٣}}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⇐ وهما واقعتان في الربع الثاني

∴ هـ $= \pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ العدد $-٣+٣\sqrt{٣}\,ت = \left[٦ ، \frac{٢\pi}{٣}\right]$

∴ $ع_١ = \left[\frac{١}{٣} ، \frac{-\pi}{٣}\right] \times \left[٦ ، \frac{٢\pi}{٣}\right] = \left[٢ ، \frac{\pi}{٣}\right]$

(٢) $ع_٢ = \left[\frac{١}{٣} ، \frac{-\pi}{٣}\right] = \frac{١}{٣}\left(\text{جتا}\ \frac{-\pi}{٣} + ت\ \text{جا}\ \frac{-\pi}{٣}\right) = \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت\right) = \frac{١}{٦} - \frac{\sqrt{٣}}{٦}\,ت$

$= \frac{١}{٦} - \frac{١}{٢\sqrt{٣}}\,ت$

(٣) الإثبات : $ع_١ \times ع_٢ = \left[٢ ، \frac{\pi}{٣}\right] \times \left[\frac{١}{٣} ، \frac{-\pi}{٣}\right] = \left[\frac{٢}{٣} ، ٠\right] = \frac{٢}{٣}(\text{جتا}\ ٠ + ت\ \text{جا}\ ٠)$

$= \frac{٢}{٣}(١+٠) = \frac{٢}{٣}$ وهو حقيقي صرف. (هـ.ط)

تدريب : إذا علمت أن ع = [٢ ، هـ] أوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من :

(١) $\bar{ع}$ ، (٢) $-ع$ ، (٣) $\frac{١}{ع}$ ، (٤) $\frac{١}{\bar{ع}}$ ، (٥) $\frac{٣ت}{\bar{ع}}$

القــوى والجــذور

أولاً : القوى : لإيجاد قوى أي عدد مركب نستخدم مبرهنة دي موافر ولتطبيقها يجب أن يكون العدد في الصورة القطبية.

مبرهنة دي موافر :

إذا كان ع = ر(جتاهـ+ت جاهـ) = [ر ، هـ]، فإن :

ع^{ن} = ر^{ن} (جتا ن هـ+ت جا ن هـ) = [ر^{ن} ، ن هـ]

مثال : أوجد مقياس وسعة العددين الآتيين : (أ) $[\,٢(\text{جتا}\frac{\pi}{١٢}+\text{ت جا}\frac{\pi}{١٢})\,]^{٦}$ ، (ب) $[\,\frac{\sqrt{٢}\,\text{ت}}{١+\text{ت}}\,]^{٨}$

الحل: (أ) $[\,٢(\text{جتا}\frac{\pi}{١٢}+\text{ت جا}\frac{\pi}{١٢})\,]^{٦} = [\,٢^{٦}(\text{جتا}٦\frac{\pi}{١٢}+\text{ت جا}٦\frac{\pi}{١٢})\,] = ٦٤\,(\text{جتا}\frac{\pi}{٢}+\text{ت جا}\frac{\pi}{٢})$

∴ المقياس = ٦٤ ، والسعة = $\frac{\pi}{٢}$

(ب) $[\,\frac{\sqrt{٢}\,\text{ت}}{١+\text{ت}}\,]^{٨}$ نحول كلاً من البسط والمقام إلى الصورة القطبية ثم نقسم ونطبق مبرهنة دي موافر

البسط : $\sqrt{٢}$ت = $[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

المقام : ١+ت ، ر = $\sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٤}$

∴ ١+ت = $[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}]$

$(\frac{[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٢}]}{[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}]})^{٨} = [١ ، \frac{\pi}{٤}]^{٨} = [١^{٨} ، ٨\times\frac{\pi}{٤}] = [١ ، ٢\pi]$

∴ المقياس = ١ ، والسعة = ٢π

ممكن إجراء القسمة أولاً بالضرب في المرافق ثم تحويل العدد إلى الصورة القطبية وتطبيق مبرهنة دي موافر.

مثال : أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $(-١+\sqrt{٣}\,\text{ت})^{٣}$

الحل: ∴ ع = $-١+\sqrt{٣}$ت

س = −١ ، ص = $\sqrt{٣}$ ⇐ ر = $\sqrt{١+٣} = \sqrt{٤} = ٢$

جتاهـ = $\frac{-١}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، وهما في الربع الثاني ⇐ ∴ هـ = $\pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ $[\,-١+\sqrt{٣}\,\text{ت}\,]^{٣} = [\,٢ ، \frac{٢\pi}{٣}\,]^{٣} = [\,٨ ، ٢\pi\,] = ٨(\text{جتا}٢\pi+\text{ت جا}٢\pi) = ٨(١+٠) = ٨$

∴ الجزء الحقيقي س = ٨ ، والتخيلي ص = ٠

طريقة أخرى : (−١+$\sqrt{٣}$ت)^{٣} = (−١+$\sqrt{٣}$ت)^{٢} (−١+$\sqrt{٣}$ت)

[عليك إكماله عزيزي الطالب:فك التربيع كمربع كامل واضرب ضرب أقواس سيكون الجواب ٨ دون الحاجة إلى الصورة القطبية]

....

....

....

مثال : بسط ما يلي : $\frac{(\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ})^{١٠}}{(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})^{١٢}}$

الحل : البسط: (جتاهـ−ت جاهـ)^{١٠}

[البسط ليس في الصورة القطبية القياسية فنجعله في الصورة القطبية القياسية]

(جتاهـ−ت جاهـ)^{١٠} = (جتا−هـ+ت جا−هـ)^{١٠} = جتا(−١٠هـ)+ت جا(−١٠هـ) = [١ ، −١٠]

المقام: (جتاهـ+ت جاهـ)^{١٢} = جتا(١٢هـ)+ت جا(١٢هـ) = [١ ، ١٢هـ]

∴ $\frac{(\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ})^{١٠}}{(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})^{١٢}}$ = $\frac{[١ ، -١٠\text{هـ}]}{[١ ، ١٢\text{هـ}]}$ = [١ ، −٢٢هـ]

مثال : عبّر عن جتا٢هـ ، جا٢هـ ، بدلالة جاهـ ، جتاهـ باستخدام مبرهنة دي موافر .

الحل: (جتاهـ +ت جاهـ)^{٢} = جتا^{٢}هـ+٢ت جتاهـ جاهـ + ت^{٢}جا^{٢}هـ [فك التربيع كمربع كامل]

= جتا^{٢}هـ− جا^{٢}هـ+٢ت جاهـ جتاهـ .... (١)

وحسب مبرهنة دي موافر :

(جتاهـ +ت جاهـ)^{٢} = جتا٢هـ+ت جا٢هـ .... (٢)

ومن (١) و (٢) ومن تساوي عددين مركبين ينتج أن :

جتا٢هـ = جتا^{٢}هـ− جا^{٢}هـ [الحقيقي = الحقيقي]

جا٢هـ = ٢ جاهـ جتاهـ [التخيلي = التخيلي]

طريقة أخرى :

ابتداءً من جتا٢هـ+ت جا٢هـ = (جتاهـ +ت جاهـ)^{٢} [من مبرهنة دي موافر ، وبفك التربيع]

= جتا^{٢}هـ+٢ت جتاهـ جاهـ + ت^{٢}جا^{٢}هـ

= جتا^{٢}هـ− جا^{٢}هـ+٢ت جتاهـ جاهـ

ومن تساوي عددين مركبين ينتج أن :

جتا٢هـ = جتا^{٢}هـ− جا^{٢}هـ [الحقيقي = الحقيقي]

جا٢هـ = ٢ جاهـ جتاهـ [التخيلي = التخيلي]

تدريب : سؤال وزاري عام ٢٠١٧-٢٠١٨م :

إذا كانت ع = ٢ + ٢√٣ ت ، فأوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من :

(١) ع̅ ، (٢) ع^{٣} وبين أنه حقيقي صرف

....

....

....

....

....

تدريب محلول: أوجد جتا٣هـ ، جا٣هـ بدلالة جاهـ ، جتاهـ .

[علماً أن (أ+ب)^{٣}=أ^{٣}+٣أ^{٢}ب+٣أب^{٢}+ب^{٣}]

الحل : (جتا٣هـ+ت جا٣هـ) =(جتاهـ+ت جاهـ)^{٣} [من مبرهنة دي موافر ، وبفك التربيع]

= جتا^{٣}هـ+٣جتا^{٢}هـ×ت جاهـ+٣ جتاهـ×ت^{٢}جا^{٢}هـ+ت^{٣}جا^{٣}هـ

= جتا^{٣}هـ−٣جتاهـ×جا^{٢}هـ+ت(٣ جتا^{٢}هـجاهـ−جا^{٣}هـ)

ومن تساوي عددين مركبين ينتج أن :

- جتا٣هـ = جتا^{٣}هـ−٣جتاهـ×جا^{٢}هـ ، ∵ جا^{٢}هـ = ١ − جتا^{٢}هـ

∴ جتا٣هـ = جتا^{٣}هـ−٣جتاهـ(١ − جتا^{٢}هـ)

= جتا^{٣}هـ−٣جتاهـ+٣جتا^{٣}هـ

= ٤ جتا^{٣}هـ−٣جتاهـ

- جا٣هـ = ٣ جتا^{٢}هـجاهـ−جا^{٣}هـ ، ∵ جتا^{٢}هـ = ١ − جا^{٢}هـ

∴ جا٣هـ = ٣(١ − جا^{٢}هـ) جاهـ−جا^{٣}هـ

= ٣جاهـ −٣جا^{٣}هـ−جا^{٣}هـ

= ٣جاهـ −٤جا^{٣}هـ

تدريبات: (١) أثبت أن: $\left[\frac{١+\sqrt{٣}\,ت}{١+ت}\right]^{٦}=٨ت$ ، (٢) أثبت أن: $\left[\frac{-٢ت}{١+ت}\right]^{٢}$ حقيقي صرف

$\boxed{-٦٤}$

ثانياً : الجذور: لإيجاد الجذر النوني لأي عدد مركب في الصورة القطبية القياسية

قاعدة الجذر النوني:

إذا كان $\text{ع} = \text{ر}(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ}) = [\text{ر} \text{ ، } \text{هـ}]$ ، فإن :

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ع}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جتا}\frac{\text{هـ}+\text{٢ك}\pi}{\text{ن}} + \text{ت جا}\frac{\text{هـ}+\text{٢ك}\pi}{\text{ن}}\right) = \left[\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}} \text{ ، } \frac{\text{هـ}+\text{٢ك}\pi}{\text{ن}}\right]$$

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، (ن−١)

مثلاً : الجذر التربيعي نضع ك = ٠ ، ١ ، والتكعيبي نضع ك = ٠ ، ١ ، ٢

خطوات إيجاد الجذر النوني لأي عدد مركب :

١− نحول العدد إلى الصورة القطبية .

٢− نستخدم قاعدة الجذر النوني السابقة .

٣− نضع ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، (ن−١)

لاحظ معي عزيزي الطالب الأمثلة الآتية وكيفية إيجاد الجذر النوني .

مثال: أوجد الجذر التكعيبي للعدد ٨ت

الحل: نحول العدد ع = ٨ت إلى الصورة القطبية فيكون $\text{ع} = \left[\text{٨} \text{ ، } \frac{\pi}{\text{٢}}\right]$

$$\therefore \sqrt[\text{٣}]{\text{ع}} = \left[\sqrt[\text{٣}]{\text{٨}} \text{ ، } \frac{\frac{\pi}{\text{٢}}+\text{٢ك}\pi}{\text{٣}}\right]$$

عندما ك = ٠ ⇐ $\text{ع}_{\text{١}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\pi}{\text{٦}}\right]$ ، عندما ك = ١ ⇐ $\text{ع}_{\text{٢}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\text{٥}\pi}{\text{٦}}\right]$

عندما ك = ٢ ⇐ $\text{ع}_{\text{٣}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\text{٣}\pi}{\text{٢}}\right]$

مثال: حل المعادلة $\text{ع}^{\text{٦}} + \text{٦٤} = \text{٠}$

الحل: بطرح ٦٤ من الطرفين ⇐ $\text{ع}^{\text{٦}} = -\text{٦٤}$ ، فنوجد الجذر السادس لـ ع لإيجاد مجموعة الحل

∵ العدد (−٦٤) حقيقي صرف سالب ⇐ ∴ $-\text{٦٤} = [\text{٦٤} \text{ ، } \pi]$

∴ $\text{ع}^{\text{٦}} = [\text{٦٤} \text{ ، } \pi]$ ، وبأخذ الجذر السادس يكون :

$$\text{ع} = \sqrt[\text{٦}]{[\text{٦٤} \text{ ، } \pi]}$$

$$= \left[\sqrt[\text{٦}]{\text{٦٤}} \text{ ، } \frac{\pi+\text{٢ك}\pi}{\text{٣}}\right]$$

عندما ك = ٠ ⇐ $\text{ع}_{\text{١}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\pi}{\text{٦}}\right]$ ، عندما ك = ١ ⇐ $\text{ع}_{\text{٢}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\pi}{\text{٢}}\right]$

عندما ك = ٢ ⇐ $\text{ع}_{\text{٣}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\text{٥}\pi}{\text{٦}}\right]$ ، عندما ك = ٣ ⇐ $\text{ع}_{\text{٤}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\text{٧}\pi}{\text{٦}}\right]$

عندما ك = ٤ ⇐ $\text{ع}_{\text{٥}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\text{٣}\pi}{\text{٢}}\right]$ ، عندما ك = ٥ ⇐ $\text{ع}_{\text{٦}} = \left[\text{٢} \text{ ، } \frac{\text{١١}\pi}{\text{٦}}\right]$

تدريب : حل المعادلة ع^{٣}+٦٤ت = ٠

مجموعة الحل هي الجذور :
[٤ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، [٤ ، $\frac{٧\pi}{٦}$] ، [٤ ، $\frac{١١\pi}{٦}$]

....

....

....

....

....

ملاحظة هامة : [خاصة بالجذر التربيعي للعدد المركب]

يمكن إيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب بطريقتين وهما الطريقة القطبية والطريقة الجبرية .

- الطريقة القطبية: وهي قاعدة الجذر النوني السابقة أو استخدام الصيغة الآتية :

$$\sqrt{ع} = \pm\sqrt{ر}\,(جتا\frac{هـ}{٢} + ت\ جا\frac{هـ}{٢})$$

- الطريقة الجبرية: وهي خاصة بالجذر التربيعي فقط وهي استخدام الفرض أو إكمال المربع وسيأتي تفصيلهما فيما يلي .

الطريقة الجبرية لإيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب

- **استخدام الفرض : خطواتها كما يلي :**

١) نضع $\sqrt{ع}$ = س+ت ص

٢) نربع الطرفين مع التبسيط

٣) نكوّن معادلتين في س ، ص من تعريف تساوي عددين مركبين

٤) بحل المعادلتين بالحذف أو التعويض نحصل على الجذور المطلوبة

- **إكمال المربع : خطواتها كما يلي :**

١) نوجد نصف معامل ت ($\frac{١}{٢}$ × ت) وليكن م ، مع إهمال إشارة الجزء التخيلي .

٢) نحلل م إلى عاملين بحيث يكون:الفرق بين مربعي العاملين=الجزء الحقيقي[أي (؟)^{٢}– (؟)^{٢}=س]

٣) نضيف الجزء التخيلي للعدد ع لطرفي المعادلة في الخطوة (٢) فيكون:

س±الجزء التخيلي=(؟)^{٢}–(؟)^{٢}±الجزء التخيلي

٤) الطرف الأيمن يعطينا العدد المركب ع والطرف الأيسر يصبح مربع كامل

٥) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين فنحصل على الجذرين المطلوبين

طريقة خارج المنهج لإيجاد الجذر التربيعي :

- **استخدام القانون** : (مشتركة قطبية + جبرية) يمكن إيجاد الجذر التربيعي باستخدام القانون الآتي:

$\sqrt{\text{ع}} = \pm(\text{أ} \pm \text{ب ت})$ ، حيث $\text{أ} = \sqrt{\frac{\text{ر}+\text{س}}{2}}$ ، $\text{ب} = \sqrt{\frac{\text{ر}-\text{س}}{2}}$

وتكون إشارة الجزء التخيلي مشابهة لإشارة الجزء التخيلي في العدد المركب .

تنبيه: طريقة استخدام القانون غير معتمدة في المنهج اليمني وممكن استخدام هذه الطريقة فقط للتأكد من الحل ، أو للاختيار من متعدد أو لأسئلة الصح أو الخطأ .

مثال : أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $(2 - 2\sqrt{3}\,\text{ت})$ بالصيغتين القطبية والجبرية .

الحل : سنحل هذا المثال بكل الطرق المشار إليها سابقاً :

- الطريقة القطبية (قاعدة الجذر النوني) : نكتب العدد $\text{ع} = 2 - 2\sqrt{3}\,\text{ت}$ بالصورة القطبية وكما مر سابقاً : $\text{ر} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$

$\text{جتاهـ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ، $\text{جاهـ} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، وهما في الربع الرابع $\Leftarrow \text{هـ} = -60$

$\therefore \text{ع} = [4 ، -60] \Leftarrow \sqrt{\text{ع}} = \left[\sqrt{4} ، \frac{\frac{-\pi}{3} + 2\text{ك}\pi}{2}\right]$

عندما $\text{ك} = 0 \Leftarrow \text{ع}_1 = [2 ، \frac{-\pi}{6}] = 2(\text{جتا}\ \frac{-\pi}{6} + \text{ت جا}\ \frac{-\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{ت}) = \sqrt{3} - \text{ت}$

عندما $\text{ك} = 1 \Leftarrow \text{ع}_2 = [2 ، \frac{5\pi}{6}] = 2(\text{جتا}\ 150 + \text{ت جا}\ 150)$

$= 2\left[\text{جتا}(\pi - 30) + \text{ت جا}(\pi - 30)\right]$

$= 2\left[-\text{جتا}\ 30 + \text{ت جا}\ 30\right]$

$= 2(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{ت}) = -\sqrt{3} + \text{ت}$

- الطريقة القطبية بالصيغة المختصرة: $\text{ع} = \pm\sqrt{\text{ر}}\ (\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{2} + \text{ت جا}\frac{\text{هـ}}{2})$

بعد إيجاد كل من ر ، هـ كما مر سابقاً ، نطبق الصيغة :

$\therefore \sqrt{\text{ع}} = \pm\sqrt{4}\ (\text{جتا}\ \frac{-60}{2} + \text{ت جا}\ \frac{-60}{2}) = \pm 2\left[\text{جتا}(-30) + \text{ت جا}(-30)\right]$

$= \pm 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{ت}) = \pm(\sqrt{3} - \text{ت})$

$\therefore$ الجذر الأول $\text{ع}_1 = \sqrt{3} - \text{ت}$ ، والجذر الثاني $\text{ع}_2 = -\sqrt{3} + \text{ت}$

- طريقة القانون : تذكر أن العدد هو $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}ت$

أوجدنا ر سابقاً حيث $ر = \sqrt{٤ + ٤ \times ٣} = \sqrt{١٦} = ٤$

نوجد كل من أ ، ب بمعلومية كل من س = ٢ ، ر = ٤ وكما يلي :

$أ = \sqrt{\frac{ر+س}{٢}} = \sqrt{\frac{٤+٢}{٢}} = \sqrt{٣}$ ، $ب = \sqrt{\frac{ر-س}{٢}} = \sqrt{\frac{٤-٢}{٢}} = \sqrt{١} = ١$

$\therefore \sqrt{ع} = \pm(أ - ب ت) = \pm(\sqrt{٣} - ت)$

تم اختيار الإشارة السالب في الجزء التخيلي
لأن العدد ع إشارة الجزء التخيلي فيه سالب

$\therefore$ الجذر الأول $ع_١ = \sqrt{٣} - ت$ ، والجذر الثاني $ع_٢ = -\sqrt{٣} + ت$

- الطريقة الجبرية : (استخدام الفرض)

تذكر أن العدد هو $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}ت$

نضع : $\sqrt{ع} = س + ت ص$ وبتربيع الطرفين

$ع = س^٢ + ٢ت س ص - ص^٢$

$= س^٢ - ص^٢ + ٢ت س ص$

وكما معلوم سابقاً أن $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}ت$

ومن تساوي عددين مركبين ينتج : $س^٢ - ص^٢ = ٢$ .... (١)

$٢س ص = -٢\sqrt{٣}$ .... (٢)

نحل المعادلتين السابقتين ولكي نجد حدود متشابهة لاستخدام طريقة الحذف نربّع كل من (١) و (٢)

$\therefore (س^٢ - ص^٢)^٢ = ٢^٢ \Leftarrow س^٤ - ٢س^٢ص^٢ + ص^٤ = ٤$ .... (٣)

وكذلك $(٢س ص)^٢ = (-٢\sqrt{٣})^٢ \Leftarrow ٤س^٢ص^٢ = ١٢$ .... (٤)

وبجمع (٣) و (٤) ينتج أن : $س^٤ + ٢س^٢ص^٢ + ص^٤ = ١٦$ ، نلاحظ أن الطرف الأيمن مربع كامل

$\therefore (س^٢ + ص^٢)^٢ = ٤^٢ \Leftarrow س^٢ + ص^٢ = ٤$ .... (٥)

وبجمع (١) و (٥) ينتج : $٢س^٢ = ٦ \Leftarrow س^٢ = ٣ \Leftarrow س = \pm\sqrt{٣}$

وبالتعويض بقيم س في المعادلة (٢) لإيجاد قيمة ص :

- عندما $س = \sqrt{٣}$ تكون المعادلة (٢) : $٢ \times \sqrt{٣} \times ص = -٢\sqrt{٣} \Leftarrow ص = -١$
- عندما $س = -\sqrt{٣}$ تكون المعادلة (٢) : $٢ \times -\sqrt{٣} \times ص = -٢\sqrt{٣} \Leftarrow ص = ١$

$\therefore$ الجذران هما : $\sqrt{٣} - ت$ ، $-\sqrt{٣} + ت$

بدل طريقة الحذف لحل نظام معادلات ذات متغيرين سنستخدم <u>طريقة التعويض</u> وسنستخدم نفس الخطوات السابقة إلى أن نصل إلى المعادلتين (١) و(٢) :

$س^٢ - ص^٢ = ٢$ .... (١)

$٢س\ ص = -٢\sqrt{٣}$ .... (٢) $\Leftarrow ص = -\frac{\sqrt{٣}}{س}$

وبالتعويض بـ ص الناتجة من (٢) في المعادلة (١) ينتج

$س^٢ - (-\frac{\sqrt{٣}}{س})^٢ = ٢ \Leftarrow س^٢ - \frac{٣}{س^٢} = ٢$ ، وبالضرب في $س^٢$ ينتج :

$س^٤ - ٣ = ٢س^٢$ ، وبترتيب المعادلة :

$س^٤ - ٢س^٢ - ٣ = ٠ \Leftarrow (س^٢ - ٣)(س^٢ + ١) = ٠$

إما $س^٢ - ٣ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٣ \Leftarrow س = \pm\sqrt{٣}$

أو $س^٢ + ١ = ٠ \Leftarrow س^٢ = -١$ وهي ليس لها حل في ح لأننا نحل النظام في ح .

وبالتعويض بقيم س في المعادلة (١) أو(٢) ونحن سنعوض في (٢) :

- عندما $س = \sqrt{٣}$ يكون : $٢\sqrt{٣}\ ص = -٢\sqrt{٣} \Leftarrow ص = -١$
- عندما $س = -\sqrt{٣}$ يكون : $٢ \times -\sqrt{٣}\ ص = -٢\sqrt{٣} \Leftarrow ص = ١$

$\therefore$ الجذران هما : $\sqrt{٣} - ت$ ، $-\sqrt{٣} + ت$

- <u>الطريقة الجبرية :</u> (إكمال المربع)

تذكر أن العدد هو $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}ت$

نوجد نصف معامل س $= \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{٣} = \sqrt{٣}$ (مع إهمال إشارة السالب في الجزء التخيلي)

نحلل $\sqrt{٣}$ إلى عاملين بحيث يكون الفرق بين مربعي العاملين = ٢(الجزء التخيلي) فيكون:

$(\sqrt{٣})^٢ - (١)^٢ = ٢$

بإضافة الجزء التخيلي $(-٢\sqrt{٣})$ للطرفين يكون : $٢ - ٢\sqrt{٣} = (\sqrt{٣})^٢ - ١ - ٢\sqrt{٣}$

و $\because -١ = ت^٢$ $\boxed{-(١)^٢ = -١ = +ت^٢}$

$\therefore ٢ - ٢\sqrt{٣} = (\sqrt{٣})^٢ - ٢\sqrt{٣} + ت^٢$ ، الطرف الأيسر مربع كامل فيكون :

$٢ - ٢\sqrt{٣} = [\sqrt{٣} - ت]^٢$ ، وبأخذ الجذر التربيعي

$\sqrt{٢ - ٢\sqrt{٣}} = \pm(\sqrt{٣} - ت)$

$\therefore \sqrt{ع} = \pm(\sqrt{٣} - ت)$

$\therefore$ الجذران هما : $\sqrt{٣} - ت$ ، $-\sqrt{٣} + ت$

تدريب : أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $(1+\sqrt{3}\,ت)$ بكل الطرق المستخدمة في المثال السابق .

الجذران هما : $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + ت)$

خواص الجذرين التربيعيين للعدد المركب : إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب ع،

فإن : ١) $ع_١ + ع_٢ = ٠$ (مجموع الجذرين التربيعيين يساوي صفر)

٢) $ع_١ = -ع_٢$ (أحد الجذرين نظير جمعي للآخر ، أي إذا علم أحدهما فإن الآخر هو سالبه)

٣) $(ع_١)^٢ = (ع_٢)^٢ = ع$ (تربيع أي من الجذرين يساوي العدد المركب ع)

مثال : إذا كان $ع_١ = ١+ت$ أحد الجذرين التربيعيين للعدد ع ، فأوجد :

(١) الجذر الآخر ($ع_٢$) ، (٢) العدد المركب (ع)

الحل : (١) $\because ع_١ = ١+ت$ وهو أحد الجذرين

$\therefore ع_٢ = -١-ت$

(٢) $\because \sqrt{ع} = ع_١ ، ع_٢$ ، بتربيع احد الجذرين وأخذنا هنا تربيع $ع_١$

$\therefore ع = (ع_١)^٢ = (١+ت)^٢ = ١^٢+٢ت-١^٢ = ١+٢ت-١ = ٢ت$

تمرين محلول : (معلومة إضافية في الجذر التربيعي)

إذا كان $\sqrt{س+ت ص} = أ+ب ت$ ، أوجد قيمة المقدار $\sqrt{-س-ت ص}$

الحل: $\sqrt{-س-ت ص} = \sqrt{-(س+ت ص)} = \sqrt{س+ت ص} \times \sqrt{-١} = \sqrt{س+ت ص}\ ت$

$= (أ+ب ت)ت = أت+ب ت^٢ = -ب+أت$

من التمرين السابق يمكن استنتاج القاعدة الآتية :

قاعدة: إذا كان $\sqrt{ع} = أ+ب ت$ ، فإن $\sqrt{-ع} = -ب+أت$

مثال : إذا كان $\sqrt{ع_١} = ٥+٤ت$ ، $\sqrt{ع_٢} = ١-٣ت$ ، أوجد : (١) $\sqrt{-ع_١}$ ، (٢) $\sqrt{-ع_٢}$

الحل : (١) $\because \sqrt{ع_١} = ٥+٤ت$

$\therefore \sqrt{-ع_١} = -٤+٥ت$

تطبيق للقاعدة السابقة

(٢) يترك لك كتدريب عزيزي الطالب :

....

....

....

....

....

حل المعادلة من الدرجة الثانية

أضع لك عزيزي الطالب المخطط الآتي والذي سيكون استراتيجيتنا في حل المعادلات .

حل المعادلة من الدرجة الثانية

- تحوي على ع
  - نحسب المميز : Δ = ب^2 − ٤ ٢ جـ
    - Δ > ٠ : للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين أو مركبين مختلفين
    - Δ = ٠ : للمعادلة جذرين متساويان (أي حل وحيد)
    - Δ < ٠ : للمعادلة جذرين مركبين مترافقين (معاملات حقيقية) أو مركبين مختلفين (معاملات مختلفة)
- تحوي على ع، $\bar{ع}$ ، |ع|
  - (١) نضع ع = س+ت ص ، $\bar{ع}$ = س−ت ص، |ع| = $\sqrt{س^2+ص^2}$
  - (٢) نعوض في المعادلة عن ع ،$\bar{ع}$ ، |ع| مع التبسيط.
  - (٣) نكوّن معادلتين من تساوي عددين مركبين.
  - (٤) بحل المعادلتين نحصل على المطلوب.

أولاً: معادلات تحوي ع فقط :

هذا النوع من المعادلات يأتي غالباً على الصورة : ٢ ع^2 +ب ع + جـ = ٠ ، ٢ ≠ ٠ وهي قابلة للحل دائماً في مجموعة الأعداد المركبة ويستخدم القانون العام لإيجاد جذري المعادلة والقانون العام هو :

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ ٢} \quad ، \quad \Delta = ب^2 - ٤ ٢ جـ$$

ملاحظات مهمة: المعادلة ٢ ع^2 +ب ع + جـ = ٠ ، ٢ ≠ ٠ فيها :

١− المعادلة السابقة لها حل دائماً في مجموعة الأعداد المركبة.

٢− عند حساب Δ نميز الحالات الآتية :

أ) Δ > ٠ للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين أو مركبين مختلفين .

ب) Δ = ٠ للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين [جذر مضاعف أي حل وحيد].

ج) Δ < ٠ للمعادلة جذرين مركبين.

٣− إذا كانت المعاملات حقيقية ، Δ < ٠ فإن جذري المعادلة عددان مركبان مترافقان .

[أي إذا علم أحد جذري المعادلة من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية فإن الجذر الآخر هو مرافقه]

٤− عند حساب Δ وكانت قيمته تخيلية نقوم أولاً بإيجاد $\sqrt{\Delta}$ ثم التعويض في القانون العام لإيجاد الجذرين. [ستلاحظ ذلك في مثال (٥) صـ ٤١]

مثال : حل المعادلات الآتية (علماً أن $ع \in م$) : (١) $ع^٢+٣ع-٤=٠$ ، (٢) $ع^٢-٦ع+٩=٠$

(٣) $ع^٢-٢ع+٥=٠$ ، (٤) $٢ع^٢-٤ع+تع+٥-ت=٠$ ، (٥) $ع^٢-٦ع+(٩-٢ت)=٠$

الحل : (١) $ع^٢+٣ع-٤=٠ \Leftarrow ا=١ ، ب=٣ ، جـ=-٤$

$\therefore \Delta = ب^٢-٤اجـ = (٣)^٢-٤\times١\times-٤ = ٩+١٦ = ٢٥ > ٠$

$\therefore$ بالقانون العام يكون $ع = \frac{-ب\pm\sqrt{\Delta}}{٢ا} = \frac{-٣\pm\sqrt{٢٥}}{٢\times١} = \frac{-٣\pm٥}{٢}$

إما $ع_١ = \frac{-٣+٥}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ ، أو $ع_٢ = \frac{-٣-٥}{٢} = -\frac{٨}{٢} = -٤$

نلاحظ أن الجذرين للمعادلة هما ١ ، −٤ وهما جذران حقيقيان لأن $\Delta > ٠$

ملاحظة : ممكن استخدام التحليل لإيجاد الجذور كون الطرف الأيمن للمعادلة مقدار ثلاثي بسيط:

$\therefore ع^٢+٣ع-٤=٠ \Leftarrow (ع-١)(ع+٤)=٠$

ع +٤

ع −١

$\boxed{-ع+٤ع=٣ع}$

إما $ع_١ = ١$ ، أو $ع_٢ = -٤$

(٢) $ع^٢-٦ع+٩=٠$

$ا=١ ، ب=-٦ ، جـ=٩$

$\therefore \Delta = ب^٢-٤اجـ = (-٦)^٢-٤\times١\times٩ = ٣٦-٣٦ = ٠ ، \Delta = ٠$

$\because \Delta = ٠$ ، $\therefore$ يوجد للمعادلة جذر واحد وهو $ع = \frac{-ب\pm\sqrt{\Delta}}{٢ا} = \frac{+٦\pm\sqrt{٠}}{٢\times١} = \frac{٦}{٢} = ٣$

ملاحظة : ممكن استخدام التحليل لإيجاد الجذور كون الطرف الأيمن مقدار مربع كامل :

$\therefore (ع-٣)^٢ = ٠ \Leftarrow ع-٣ = ٠ \Leftarrow ع=٣$

(٣) $ع^٢-٢ع+٥=٠$

$ا=١ ، ب=-٢ ، جـ=٥$

$\therefore \Delta = ب^٢-٤اجـ = (-٢)^٢-٤\times١\times٥ = ٤-٢٠ = -١٦ < ٠$

$\therefore$ بالقانون العام يكون $ع = \frac{-ب\pm\sqrt{\Delta}}{٢ا} = \frac{-(-٢)\pm\sqrt{-١٦}}{٢\times١} = \frac{٢\pm٤ت}{٢}$

إما $ع_١ = \frac{٢+٤ت}{٢} = ١+٢ت$ ، أو $ع_٢ = \frac{٢-٤ت}{٢} = ١-٢ت$

لاحظ أن الجذران ($١+٢ت$) ، ($١-٢ت$) مترافقان لأن ا ، ب ، جـ $\in ح$ ، $\Delta < ٠$

(٤) ٢ع^{٢}−٤ع+تع+٥−ت=٠

نعيد ترتيب المعادلة لتصبح بالصورة : ٢ع^{٢} − (٤− ت)ع+(٥− ت) = ٠

أ=٢ ، ب = − (٤− ت) ، جـ = ٥− ت

∴ Δ = ب^{٢}−٤أجـ = (−٤+ت)^{٢}−٤×٢×(٥− ت) = ١٦−$\cancel{٨ت}$−١−٤٠+$\cancel{٨ت}$ = −٢٥ < ٠

للمعادلة جذران مركبان هما :

ع= $\frac{-ب \pm \sqrt{Δ}}{٢أ}$ = $\frac{-(-٤+ت) \pm \sqrt{-٢٥}}{٢×٢}$ = $\frac{٤-ت \pm ٥ت}{٤}$

إما ع$_{١}$ = $\frac{٤-ت+٥ت}{٤}$ = $\frac{٤+٤ت}{٤}$ = ١+ت ، أو ع$_{٢}$ = $\frac{٤-ت-٥ت}{٤}$ = $\frac{٤-٦ت}{٤}$ = ١−$\frac{٣}{٢}$ ت

جذري المعادلة هما : (١+ت) ، (١−$\frac{٣}{٢}$ ت) لاحظ أنهما غير مترافقان لأن العاملين ب ، جـ ∉ ح

(٥) ع^{٢}−٦ع+(٩−٢ت)=٠ ⇐ أ=١ ، ب = −٦ ، جـ = ٩−٢ت

∴ Δ = ب^{٢}−٤أجـ = (−٦)^{٢}−٤×١×(٩−٢ت) = ٣٦−٣٦+٨ت = ٨ت

نلاحظ أن Δ = ٨ت ، وهنا Δ تخيلي ولأن في القانون العام Δ تكون تحت الجذر (أي $\sqrt{Δ}$)

لذلك علينا إيجاد $\sqrt{٨ت}$ كما مر سابقاً .

∵ ٨ت تخيلي صرف موجب ⇐ ٨ت = [٨ ، ٩٠]

ملاحظة مهمة : لإيجاد $\sqrt{٨ت}$ بأبسط طريقة نوجد جذر واحد في الصورة القطبية أي نعتبر ك= ٠ ونحوّل الجذر الناتج إلى الصورة الجبرية فيكون الجذر الآخر نظيره الجمعي.

∴ $\sqrt{٨ت}$ = $\sqrt{[٨ ، ٩٠]}$ = [$\sqrt{٨}$ ، $\frac{٩٠+٢كπ}{٢}$]

عندما ك = ٠ ⇐ [$\sqrt{٤×٢}$ ، $\frac{٩٠}{٢}$] = [٢$\sqrt{٢}$ ، ٤٥]

= ٢$\sqrt{٢}$(جتا٤٥+ت جا٤٥) = ٢$\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ +ت $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) = ٢+٢ت

∴ الجذر الآخر نظيره الجمعي فيكون $\sqrt{٨ت}$ = ± (٢+٢ت)

نعوض الآن في القانون العام فيكون:

ع= $\frac{-ب \pm \sqrt{Δ}}{٢أ}$ = $\frac{-(-٦) \pm (٢+٢ت)}{٢×١}$ = $\frac{٦ \pm (٢+٢ت)}{٢}$

إما ع$_{١}$ = $\frac{٦+٢+٢ت}{٢}$ = $\frac{٨+٢ت}{٢}$ = ٤+ت ، أو ع$_{٢}$ = $\frac{٦-٢+٢ت}{٢}$ = $\frac{٤+٢ت}{٢}$ = ٢+ت

تدريبات: حل المعادلات الآتية في م :

(١) ع^٢−٦ع+١٣=٠

(٢) (١− ت)ع+٢تع− ت = ١

(٣) ع^٢− (٥+٧ت)ع+ ١٧ت = ٦

الجذران هما: ٣±٢ت

ع$_١$=١ ، ع$_٢$=− ت

Δ=٢ت ، ع$_١$=٣+٤ت ، ع$_٢$=٢+٣ت

ثانياً: معادلات تحوي $\bar{ع}$ أو $|ع|$:

هذا النوع من المعادلات يظهر $\bar{ع}$ أو $|ع|$ ، أي ظهور مرافق العدد ع أو مقياسه أو كليهما في المعادلة لذلك لا يمكن استخدام القانون العام لأنها معادلات غير اعتيادية ويتم استخدام طريقة التعويض بالخطوات الآتية:

١- نضع $ع = س + ت ص$ ، $\bar{ع} = س - ت ص$ ، $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ حسب المعادلة المعطاة.

٢- نعوض في المعادلة عن ع ، $\bar{ع}$ ، $|ع|$ حسب المتغيرات الموجودة مع التبسيط.

٣- نكوّن معادلتين من تساوي عددين مركبين (الحقيقي = الحقيقي) ، (التخيلي = التخيلي).

٤- بحل المعادلتين نحصل على المطلوب.

مثال : حل المعادلتين الآتيتين : (١) $ع^{٢} + ٢\bar{ع} + ١ = ٠$ ، (٢) $ع^{٢} + |ع|^{٢} = ٢ - ٢ت$

الحل: (١) نضع $ع = س + ت ص \Leftarrow \bar{ع} = س - ت ص$

وبالتعويض في المعادلة : $ع^{٢} + ٢\bar{ع} + ١ = ٠$

$\therefore (س + ت ص)^{٢} + ٢(س - ت ص) + ١ = ٠$

$س^{٢} + ٢ت س ص - ص^{٢} + ٢س - ٢ت ص + ١ = ٠$

$(س^{٢} - ص^{٢} + ٢س + ١) + ت(٢س ص - ٢ص) = ٠$

$س^{٢} - ص^{٢} + ٢س + ١ = ٠$ .... (١) [معادلة الحقيقي]

$٢س ص - ٢ص = ٠$ .... (٢) [معادلة التخيلي]

من المعادلة (٢) $\Leftarrow ٢س ص - ٢ص = ٠ \Leftarrow ٢ص(س - ١) = ٠$

إما $٢ص = ٠ \Leftarrow ص = ٠$ ، أو $س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

وبالتعويض في المعادلة (١) :

* عندما $ص = ٠$

$س^{٢} - ٠ + ٢س + ١ = ٠$

$س^{٢} + ٢س + ١ = ٠$

$(س + ١)^{٢} = ٠$

$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

$\boxed{\therefore ص = ٠ ، س = -١ \Leftarrow ع = -١ + ٠ت = -١}$

* عندما $س = ١$

$١ - ص^{٢} + ٢ + ١ = ٠$

$-ص^{٢} + ٤ = ٠$

$ص^{٢} = ٤$

$ص = \pm ٢$

$\boxed{\therefore س = ١ ، ص = \pm ٢ \Leftarrow ع = ١ \pm ٢ت}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-١ ، ١ + ٢ت ، ١ - ٢ت\}$

(٢) نضع ع = س+ت ص ، $|ع| = \sqrt{س^2+ص^2}$ وبالتعويض في المعادلة : $ع^2 + |ع|^2 = ٢-٢ت$

$(س+تص)^2 + (\sqrt{س^2+ص^2})^2 = ٢-٢ت$

$س^2+٢ت س ص \cancel{-ص^2} + س^2 \cancel{+ص^2} = ٢-٢ت$

$٢س^2+٢ت س ص = ٢-٢ت$

معادلة الحقيقي : $٢س^2 = ٢$ .... ①

معادلة التخيلي : $٢س ص = -٢$ .... ②

من المعادلة ① ⇐ $٢س^2 = ٢$ ⇐ $س^2 = ١$ ⇐ $س = ±١$

وبالتعويض في المعادلة ② :

* عندما س = ١

$٢ × ١ × ص = -٢$

$٢ص = -٢$

$ص = -١$

∴ س = ١ ، ص = -١ ⇐ ع = ١ - ت

* عندما س = -١

$٢ × -١ × ص = -٢$

$-٢ص = -٢$

$ص = ١$

∴ س = -١ ، ص = ١ ⇐ ع = -١ + ت

∴ مجموعة الحل = { ١ - ت ، -١ + ت }

تدريبات: حل المعادلات الآتية في م :

(١) $ع^2 - \bar{ع} = ٠$

$ع_1 = ٠$ ، $ع_2 = ١$ ، $ع_3 = \frac{-١}{٢} + \sqrt{\frac{٣}{٢}}$ ت ، $ع_4 = \frac{-١}{٢} - \sqrt{\frac{٣}{٢}}$ ت

(٢) $|ع| + ع - \bar{ع} = ٥+٨ت$

توضيح : عند حل التدريب ② لا تنسى أن من خواص المرافق
$ع - \bar{ع} = ٢ت ص$ ، نعوض به. فيكون الجواب: ع = ±٣+٤ت

....

....

....

....

....

....

....

....

تكوين معادلة الدرجة الثانية إذا علم جذراها :

إذا كان ع$_1$ ، ع$_2$ هما جذري معادلة الدرجة الثانية أ ع^2 + ب ع + جـ = ٠ ، فإن :

١- مجموع الجذرين = ع$_1$ + ع$_2$ = $\frac{\text{-ب}}{\text{أ}}$

٢- حاصل ضرب الجذرين = ع$_1$ × ع$_2$ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

٣- قانون تكوين معادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذريها ع$_1$ ، ع$_2$ هو :

ع^2 – (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضرب الجذرين = ٠

أي أن : ع^2 – (ع$_1$+ع$_2$)ع + ع$_1$×ع$_2$ = ٠

مثال : أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة:

(١+٤ت)ع^2 + (٥-٣ت)ع + (٨-٢ت) = ٠

الحل: أ = ١+٤ت ، ب = ٥-٣ت ، جـ = ٨-٢ت

- مجموع الجذرين = $\frac{\text{-ب}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{-٥+٣ت}}{\text{١+٤ت}}$ = $\frac{\text{-٥+٣ت}}{\text{١+٤ت}}$ × $\frac{\text{١-٤ت}}{\text{١-٤ت}}$

= $\frac{\text{-٥+٢٠ت+٣ت+١٢}}{\text{١+١٦}}$ = $\frac{\text{٧+٢٣ت}}{\text{١٧}}$ = $\frac{\text{٧}}{\text{١٧}}$ + $\frac{\text{٢٣}}{\text{١٧}}$ ت

- حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{٨-٢ت}}{\text{١+٤ت}}$ = $\frac{\text{٨-٢ت}}{\text{١+٤ت}}$ × $\frac{\text{١-٤ت}}{\text{١-٤ت}}$

= $\frac{\text{٨-٣٢ت-٢ت-٨}}{\text{١+١٦}}$ = $\frac{\text{-٣٤ت}}{\text{١٧}}$ = -٢ت

مثال : كوّن المعادلة التي جذراها : ٢- ت ، ٣+٢ت .

الحل: نوجد كلاً من مجموع الجذرين وحاصل ضربها ثم نكوّن المعادلة حسب القانون :

ع$_1$ + ع$_2$ = (٢- ت) + (٣+٢ت) = ٥+ت

ع$_1$ × ع$_2$ = (٢- ت) × (٣+٢ت) = ٦+٤ت-٣ت + ٢ = ٨+ت

∵ ع^2 – (ع$_1$+ع$_2$)ع + ع$_1$×ع$_2$ = ٠

∴ ع^2 – (٥+ت)ع + ٨ + ت = ٠

تدريب: أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة : ت ع^{٢} − (١+ت)ع + (٢−٢ت) = ٠

مجموع الجذرين = ١ − ت ، حاصل ضربهما = −٢−٢ت

....

....

....

مثال : إذا كانت ع + $\frac{١}{ع}$ = ٢جتا هـ ، فأثبت أن : ع^{ن} + $\frac{١}{ع^{ن}}$ = ٢جتا ن هـ

الحل: ∵ ع + $\frac{١}{ع}$ = ٢جتا هـ   [بالضرب في ع]

ع^{٢} + ١ = ٢ع جتا هـ ⇐ ع^{٢} −٢ع جتا هـ + ١ = ٠

أ = ١ ، ب = −٢جتا هـ ، جـ = ١

جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ = ١
⇐ جتا^{٢}هـ − ١ = − جا^{٢}هـ

∴ Δ = ب^{٢}−٤أجـ = ٤جتا^{٢}هـ − ٤ = ٤(جتا^{٢}هـ − ١) = ٤ (− جا^{٢}هـ) = −٤جا^{٢}هـ

ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{Δ}}{٢أ}$ = $\frac{٢جتا هـ \pm \sqrt{-٤جا^{٢}هـ}}{٢×١}$ = $\frac{٢جتا هـ \pm ٢ت جاهـ}{٢}$ = جتا هـ ± ت جا هـ

وبالتعويض في الطرف الأيمن للمعادلة ع^{ن} + $\frac{١}{ع^{ن}}$ = ٢جتا ن هـ يكون :

الطرف الأيمن = ع^{ن} + $\frac{١}{ع^{ن}}$ = (جتا هـ ± ت جا هـ)^{ن} + $\frac{١}{(جتا هـ ± ت جا هـ)^{ن}}$

= (جتا هـ ± ت جا هـ)^{ن} + (جتا هـ ± ت جا هـ)$^{-ن}$

تطبيق مبرهنة دي موافر

= جتا(ن هـ) ± ت جا(ن هـ) + جتا(− ن هـ) ± ت جا(− ن هـ)

= جتا(ن هـ) ~~± ت جا(ن هـ)~~ + جتا(ن هـ) ~~∓ ت جا(ن هـ)~~

= ٢جتا ن هـ = الطرف الأيسر   (هـ . ط)

سؤال وزاري ٢٠٠٥−٢٠٠٦: إذا كان ع$_{١}$= ٢+ت أحد جذري المعادلة: ع^{٢}+(٥+ت)ع+جـ = ٠

فأوجد : (١) ع$_{٢}$ "الجذر الآخر" ، (٢) جـ

الحل: أ = ١ ، ب = ٥+ت ، جـ = ١

(١) ∵ ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = $\frac{-ب}{أ}$ [نوجد الجذر الآخر]

∴ (٢+ت) + ع$_{٢}$ = − (٥+ت) ⇐ ع$_{٢}$ = −٥−ت−٢−ت ⇐ ع$_{٢}$ = −٧−٢ت

(٢) ∵ ع$_{١}$ ع$_{٢}$ = $\frac{جـ}{أ}$

∴ (٢+ت) (−٧−٢ت) = جـ ⇐ جـ = −١٤−٤ت−٧ت +٢ ⇐ جـ = −١٢−١١ت

تدريبات محلولة

- (١) حل المعادلة ع^{٣} −٢٧ت = ٠

الحل: تكتب المعادلة ع^{٣}−٢٧ت = ٠ بالصورة ع^{٣}+٢٧ت^{٣} = ٠ [ت = − ت^{٣}]

⇐ (ع+٣ت)(ع^{٢}−٣ع ت − ٩) = ٠ [تحليل مجموع مكعبين ، علماً أن ت^{٢}=−١]

إما ع+٣ت = ٠ ⇐ ع = −٣ت

أو ع^{٢}−٣ع ت − ٩ = ٠ [هذه معادلة الدرجة الثانية نحلها كما سبق]

أ = ١ ، ب = −٣ت ، جـ = −٩

∴ Δ = ب^{٢}−٤أجـ = −٩ − ٤ × ١ × −٩ = −٩+٣٦ = ٢٧

$$\therefore \text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}} = \frac{\text{٣ت} \pm \sqrt{\text{٢٧}}}{\text{٢} \times \text{١}} = \frac{\text{٣ت} \pm \text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{ \text{−٣ت} ،\ \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}+\text{٣ت}}{\text{٢}} ،\ \frac{-\text{٣}\sqrt{\text{٣}}+\text{٣ت}}{\text{٢}} \right\}$$

- (٢) حل المعادلة ع^{٣}+ع^{٢}+ع+١ = ٠

الحل: (ع^{٣}+١)+(ع^{٢}+ع) = ٠ [خاصية التجميع]

(ع+١)(ع^{٢}−ع+١)+ع(ع+١) = ٠ [تحليل: مجموع مكعبين + سحب عامل مشترك]

(ع+١)[ع^{٢}−~~ع~~+١+~~ع~~] = ٠ [تحليل: مجموع مكعبين + سحب عامل مشترك]

(ع+١) (ع^{٢}+١) = ٠

إما ع+١ = ٠ ⇐ ع = −١

أو ع^{٢}+١ = ٠ ⇐ ع^{٢} = −١ ⇐ ع = ±$\sqrt{-١}$ ⇐ ع = ±ت

∴ مجموعة الحل = { −١ ، ت ، − ت }

- (٣) حل المعادلة ع^{٢}−٢$\bar{\text{ع}}$ + ٦ = ٠

الحل: نضع ع = س+ت ص ⇐ $\bar{\text{ع}}$ = س− ت ص وبالتعويض في المعادلة : ع^{٢}−٢$\bar{\text{ع}}$ + ٦ = ٠

∴ (س+ت ص)^{٢}−٢(س− ت ص)+٦= ٠ ⇐ س^{٢}+٢ت س ص − ص^{٢}−٢س+٢ت ص+٦= ٠

(س^{٢}−ص^{٢}−٢س+٦)+ت(٢س ص+٢ص) = ٠

س^{٢}−ص^{٢}−٢س+٦ = ٠ .....(١) [معادلة الحقيقي]

٢س ص+٢ص = ٠ .....(٢) [معادلة التخيلي]

من المعادلة (٢) ⇐ ٢س ص+٢ص = ٠ ⇐ ٢ص(س+١) = ٠

إما ٢ص=٠ ⇐ ص = ٠، أو س+١ = ٠ ⇐ س = −١

وبالتعويض في المعادلة (١) :

* عندما ص = ٠

س^{٢}−٠ − ٢س + ٦ = ٠

س^{٢}−٢س+٦=٠ نحل المعادلة في ح

Δ = ب^{٢}−٤أ جـ = ٤−٤×١×٦=٤−٢٤=−٢٠

Δ < ٠

∴ لا يوجد للمعادلة حلول في ح

(لابد أن تكون قيم س ، ص حقيقية)

* عندما س = −١

١−ص^{٢}+٢+٦ = ٠

−ص^{٢}+٩ = ٠

ص^{٢} = ٩

ص = ±٣

$\boxed{\text{∴ س = −١ ، ص = ±٣ ⇐ ع= −١±٣ت}}$

∴ مجموعة الحل = { −١+٣ت ، −١−٣ت }

تدريبات :

(١) إذا كانت ع^{٢}−ع+١ = ٠

فأثبت أن : ع^{ن} + $\frac{١}{ع^{ن}}$ = ٢ جتا ن $\frac{\pi}{٣}$

التدريب (١) سؤال وزاري ٢٠٠٥−٢٠٠٦ ، توضيح للمساعدة على الإثبات :ع=$\frac{١}{٢}$ ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، ويحول إلى الصورة القطبية ثم التعويض في الطرف الأيمن.

(٢) إذا كانت ع+$\frac{١}{ع}$ = ٢جا هـ فأثبت أن : ع^{ن} + $\frac{١}{ع^{ن}}$ = ٢جا ن هـ

....

....

....

....

....

....

....

....

أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في الأعداد المركبة

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١– إذا كان ن $\in$ ص$^{+}_{ن}$ فإن ت$^{٤ن+٢}$ = ١ ( )

٢– العدد المركب ٢(جتا٢π + ت جا٢π) تخيلي صرف ( )

٣– مجموعة الاعداد الحقيقية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة ( )

٤– إذا كان س+٢ص ت = ٥–٨ت ، فإن ص = ٤ ( )

٥– |ع$_{١}$ + ع$_{٢}$| = |ع$_{١}$|+|ع$_{٢}$| ( )

٦– $\frac{٧}{ت}$ = ٧ ت ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١– النظير الجمعي(–ع) للعدد ت^{١٢}+ ت^{٣} بالصورة الجبرية = ...

٢– إذا كانت ع= [ر ، هـ] ، فإن –ع بالصورة نفسها ....

٣– إذا كان ع$_{١}$ = [٢ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، ع$_{٢}$ = [٣ ، $\frac{\pi}{٦}$] ، فإن ع$_{١}$ × ع$_{٢}$ بالصورة [ر ، هـ] = ...

٤– ع = ٦ (– جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$) =[٦ ، ....]

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) حاصل ضرب جذري المعادلة ٢ع^{٢} + ع – ٦ = ٠ .... [٣ ، –٣ ، –٤ ، ٤]

٢) إذا كان ع= جتا $\frac{\pi}{٣}$ – ت جا $\frac{\pi}{٣}$ فإن سعة ع= .... [$\frac{\pi}{٣}$ ، –$\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، –$\frac{\pi}{٦}$]

٣) إذا كان ع$_{١}$ = ١+٣ت ، $\overline{ع_{١}+ع_{٢}}$ = ١ –٥ت فإن زاوية ع$_{٢}$ = ... [٩٠° ، ٢٧٠° ، ١٨٠°]

٤) (١+ ت)^{٨} = ... [–١٦ ، ١٦ ، ٤ت ، –٤ت]

٥) ت$^{-٦٤}$ = ... [١ ، –١ ، ت ، – ت]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١– إذا كان ع= [$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٣}$] ، فإن ع^{٦} بالصورة (س+ت ص) = ...	٢
٢– إذا كان ع= $\frac{-١}{\sqrt{٣}ت+١}$، فإن |ع| = ...	$\frac{١}{٢}$
٣– مجموع الجذرين التربيعيين لأي عدد مركب يساوي	٣
٤– مقياس العدد المركب $\sqrt{٣}$ – ت هو	٢
٥– إذا كان ع= ٣ت ، فإن |ع| = ...	صفر
٦– إذا كان ع= ٢ت ، فإن مقياسه = ...	٨

س٥: إذا كان $\text{ع} = \sqrt{\text{٣}} - \text{ت}$ ، فأوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من (١) $\text{ع}^{-\text{١}}$ ، (٢) بيّن أن $\text{ع}^{\text{٦}}$ حقيقي صرف.

س٦: حل المعادلة $\text{ع}^{\text{٣}} - \text{٨} = \text{٠}$.

س٧: لتكن $\text{ع}_{\text{١}} = \frac{\text{١} - \text{٢ت}}{\text{١} - \text{٣ت}}$ ، $\text{ع}_{\text{٢}} = \frac{\text{٢} - \text{ت}}{\text{٣} - \text{ت}}$ ، أثبت أن $\text{ع}_{\text{١}}$ ، $\text{ع}_{\text{٢}}$ مترافقان .

س٨: إذا كان $\text{ع} = \frac{-\text{١} + \sqrt{\text{٣}}\,\text{ت}}{\text{ت}}$ فأوجد بالصورة [ر ، هـ] : (أ) ع . (ب) $\text{ع}^{\text{٣}}$ وبيّن أنه تخيلي صرف .

س٩: إذا كان $\text{ع} = \frac{\text{١} + \sqrt{\text{٢}}\,\text{ت}}{\sqrt{\text{٢}} - \text{ت}}$ فأوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من ع ، $\text{ع}^{-\text{١}}$.

س١٠: إذا كان $ع_{١}=[٥، \frac{\pi}{٣}]$ ، $ع_{٢}=[٢، -\frac{\pi}{٦}]$ ، فأوجد بالصورة [ر، هـ] : (أ) $ع_{١} \times ع_{٢}$ (ب) $ع_{٢}^{٣}$ وأثبت أنه تخيلي.

س١١: أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق المعادلة $س^{٢}-ص^{٢}+ ت(س+ص) = ٣+٣ت$.

س١٢: حل المعادلة $تع^{٢}+٥ع+٦ت = ٠$ في مجموعة الأعداد المركبة .

س١٣: كوّن المعادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها أعداد حقيقية إذا علمت أن أحد جذريها (٢+٣ت) .

س١٤: حل المعادلة $ع^{٢} - (٢جاهـ)ع + ١ = ٠$ ، $جاهـ \neq ٠$.

س١٥: إذا كان ع = ٢+٢$\sqrt{٣}$ ت ، فأوجد بالصورة **[**ر ، هـ**]** : (١) $\bar{ع}$. (٢) ع^{٣} وبيّن أنه حقيقي صرف .

....

....

....

....

س١٦: كوّن معادلة من الدرجة الثانية ذات المعاملات الحقيقية إذا كان أحد جذورها $\frac{١ + ت}{١ - ت}$.

....

....

....

....

س١٧: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (١+ت) بالصورة الجبرية .

....

....

....

....

....

....

س١٨: إذا كان ع = ١+ $\sqrt{٣}$ ت ، أوجد بالصورة **[**ر ، هـ**]** كلاً من : ع ، ع^{٢} .

....

....

....

....

تم الانتهاء من وحدة الأعداد المركبة

كل الشكر لمن ساعدني في إتمامه

إعداد وتصميم وطباعة الأستاذ / صوفي رمضان حمادي

شبام – حضرموت – ٢٠٢٠م

soramnet@gmail.com - +٩٦٧-٧٧٠٠٦٠٧٦٦

مبدأ العد ومبرهنة ذات الحدين

مبدأ العدّ

مقدمة: منذ القدم والإنسان مهتم بحساب عدد إمكانات حدوث ظاهرة معينة ، مثل عدد إمكانات ترتيب وتوزيع الجيش على المواقع المختلفة أو عدد الطرق الممكنة لتحصيل الضرائب ، أو عدد إمكانات ظهور كوكبين متلاصقين ،... وغيرها . إن حساب عدد الطرق الممكنة هو ما يعرف بمبدأ العد وقد امتد مبدأ العد ليدخل مجالات متعددة مثل التجارة والصناعة والاقتصاد والعلوم الاجتماعية والقياس التربوي وفي مجال المرور وترقيم السيارات.

إن مبدأ العد طريقة سريعة وسهلة للعد (أسهل من العد المباشر) وهو يهتم بعدد الطرق (الكمية) وليس الطرق نفسها (النوعية) وإليك المثال الآتي لتوضيح ذلك.

مثال تمهيد: محل تجاري له أربعة أبواب فإذا أراد شخص دخول هذا المحل من أحد الأبواب الأربعة ، وأن يخرج من باب آخر غير الذي دخل منه ، فالسؤال الآن كم عدد الطرق الممكنة للدخول والخروج بهذه الإجراءات .

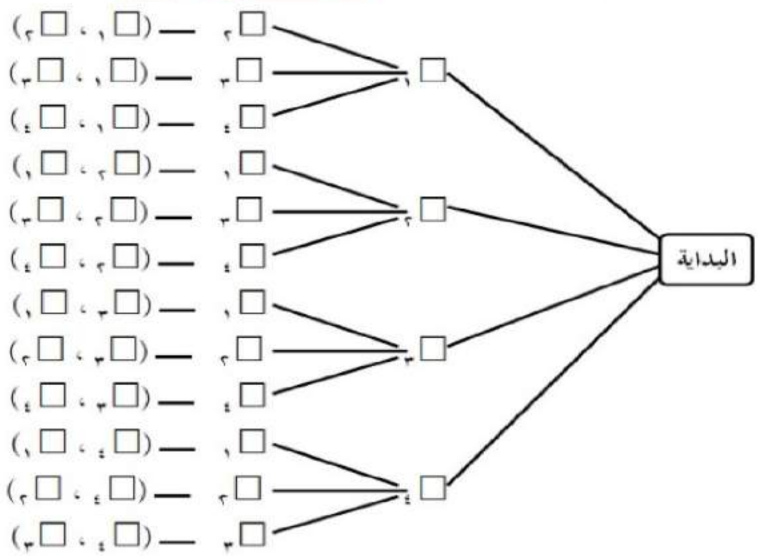
الجواب: نلاحظ هنا أن الدخول هو المرحلة الأولى أي الإجراء الأول وعدد طرق الدخول هو ٤ طرق كون لدينا ٤ أبواب ودون شرط يذكر.

ونلاحظ أن الخروج هو المرحلة الثانية أي الإجراء الثاني وعدد طرق الخروج هو ٣ فقط لأنه اشترط عدم الخروج من الباب الذي دخلنا منه.

وعليه فأن عدد طرق العملية كاملة (الدخول والخروج) سيتم عن طريق ضرب عدد طرق الإجراء الأول في عدد طرق الإجراء الثاني .

أي عدد الطرق الممكنة للدخول والخروج = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة.

ممكن توضيح الحل السابق بمخطط شجري كما يلي:



في مثالنا السابق إجراء العملية الكاملة للدخول والخروج معاً عن طريق الضرب هو ما يعرف بـ "مبدأ العد " ونلاحظ أن مبدأ العد سيكون هو الحل الأسرع والأسهل لإيجاد عدد الطرق مهما كبرت الإجراءات في المسألة.[المخطط الشجري مفيد في المراحل (الإجراءات) القليلة فقط].

تعريف مبدأ العد (قاعدة مبدأ العد):

إذا كان لدينا عملية من م خطوة مستقلة ، وكان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $ن_١$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية $ن_٢$ ، .... وعدد طـرق إجراء الخـطوة الأخـيرة $ن_م$ ، فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة هو: $ن_١ \times ن_٢ \times ... \times ن_م$

ملاحظة: عزيزي الطالب إن بعض مسائل مبدأ العد يمكن حلها باستخدام التباديل لذلك سنركز في دراستنا بهذا الفرع فيما يخص تكوين الأعداد وبعض المسائل الأخرى المبسطة لكي نبعد اللبس الذي قد يطرأ عندك في حل مثل هذه المسائل.

تذكير:

١- العدد الزوجي: هو العدد الذي رقم آحاده { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }(عدد يقبل القسمة على ٢).

٢- العدد الفردي: هو العدد الذي رقم آحاده { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }(عدد لايقبل القسمة على ٢)

٣- العدد الأولي: هو العدد الذي له عاملان وهما نفسه والواحد وفي مجموعة الأرقام الأعداد الأولية هي { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }.

٤- العدد الذي يقبل القسمة على ٣: هو العدد الذي مجموع أرقامه يقبل القسمة على ٣ مثل العدد (٢٤٣).

٥- العدد الذي يقبل القسمة على ٤: هو العدد الذي رقم آحاده وعشراته يقبل القسمة على ٤ مثل العدد (٩٧٤٨).

٦- العدد الذي يقبل القسمة على ٥: هو العدد الذي رقم آحاده { ٠ ، ٥ }.

٧- العدد الذي يقبل القسمة على ٦: هو العدد الذي يقبل القسمة على ٢ ويقبل القسمة على ٣ في نفس الوقت مثل (٣٩٧٢).

٨- مضاعفات العدد: تبدأ بالصفر وبإضافة العدد نفسه كل مرة مثل مضاعفات العدد ٤ هي: { ٠ ، ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ... }.

٩- عدد أكبر من ٤٠٠ معناه أن الشرط في خانة المئات فيجب أن تكون الأرقام في هذه الخانة تحقق الشرط (مع العلم أن العدد مكون من ثلاث خانات)

١٠- عدد أصغر من ٥٠٠ معناه أن الشرط في خانة المئات فيجب أن تكون الأرقام في هذه الخانة تحقق الشرط (مع العلم أن العدد مكون من ثلاث خانات).

ملاحظات مهمة: في مسائل تكوين الأعداد يجب التركيز على بعض الألفاظ منها:

١- "بدون تكرار" أو "مختلفة": ويعني تعبئة الخانات بعدد أرقام المجموعة وكل مرة تتناقص الخانة التالية بمقدار واحد ما لم يظهر في المسألة شرط أو في المجموعة صفر.

٢- "مع التكرار" أو لم يذكر شي: ويعني تعبئة الخانات بعدد مجموعة الأرقام بالتساوي ما لم يظهر شرط في المسألة أو صفر في المجموعة.

٣- "الأعداد مختلفة" ويقصد هنا الاختلاف في الأعداد وليس الأرقام فنحل مع تكرار الأرقام.

٤- "عدد زوجي" هنا الشرط بمنزلة الآحاد لذلك يتم تعبئة الآحاد بالأعداد الزوجية فقط.

٥- "عدد فردي" هنا الشرط بمنزلة الآحاد لذلك يتم تعبئة الآحاد بالأعداد الفردية فقط.

٦- إذا وجد شرط في المسألة نبدأ بالخانة التي فيها الشرط ثم بقية الخانات.

٧- إذا وجد الصفر ضمن المجموعة المعطاة نبدأ بالخانة الأخيرة مع إلغاء الصفر ثم بقية الخانات مع إضافة الصفر.

تنبيه: يلغى الصفر من الخانة الأخيرة في حالة تكوين الأعداد أما في بقية الحالات لا يلغى الصفر من الخانة الأخيرة مثله مثل أي عدد آخر . ومثل ذلك : أرقام التلفونات ، لوائح السيارات ، كلمة سر الحقائب ... وغيرها.

٨- إذا لم يذكر مجموعة الأرقام فإن المجموعة = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} وعددها (١٠) أرقام.

٩- في المسائل التي فيها أكثر من شرط وقد تتعارض الشروط فيما بينها هنا علينا تقسيم الحل إلى جدولين أو أكثر حسب التعارض.

المرحلة	
عدد الطرق	

+

المرحلة	
عدد الطرق	

الفرق بين الرقم والعدد:

الأرقام تبدأ من الصفر إلى تسعة. والأعداد تبدأ من العشرة إلى مالانهاية. الأرقام هي الوحدات الأساسية التي تشكل منها الأعداد. إن هذه المعطيات تعد صحيحاً جزئياً. ولكن هناك استثناءات لهذه القاعدة. فالرقم هو الذي يعبر عن وحدة واحدة فقط. أما العدد فهو يعبر عن مجموعة حتى وإن كانت خالية **الرقم مادل على ترتيب والعدد مادل على معدود (كمية)** فنقول مثلاً رقم السيارة ١٢٣٤ (بالرغم أنه أقل أكبر من ١٠) لأنه عبر عن وحدة واحدة هي السيارة. ونقول عدد السيارات ٢ (بالرغم أنه أقل من ١٠). ومثله كذلك نقول رقم ترتيب سورة العصر في المصحف ١٠٣ لأنه عبر عن وحدة واحدة هي سورة العصر. ونقول عدد آيات سورة العصر ٣ لأنه عبر عن مجموعة وهي آيات سورة العصر . فنقول رقم الآية وعدد كلماتها وعدد حروفها .

ملاحظة: عند حل مسائل مبدأ العد علينا مراعاة الآتي:

(١) فهم المسألة فهماً جيداً وتمييز الإجراءات (المراحل).

(٢) رسم مستطيل ويقسم إلى مربعات حسب عدد الإجراءات (المراحل).

(٣) تعبئة كل مرحلة بعدد الطرق الممكنة له.

(٤) نضرب عدد الطرق في بعضها لنحصل على المطلوب.

المرحلة	الأولى	الثاني	...وهكذا
عدد الطرق			

نضع لك عزيزي الطالب مجموعة من المسائل المحلولة مع توضيح الملاحظات السابقة واستخداماتها.

مثال: لتكن سـ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ، كم عدداً مكوناً من رقمين مختلفين يمكن تشكيله من هذه المجموعة.

الحل: ∵ العدد مكون من رقمين سنكوّن جدول وتقسيم مراحله إلى مربعين للآحاد والعشرات ، وبما أنه ذكر أن الأرقام مختلفة فهذا يعني بدون تكرار الأرقام وسيكون ملئ الجدول كالآتي:

المرحلة	الآحاد	العشرات
عدد الطرق	٣	٤

يفضل في التعبئة أن نبدأ من اليسار لعدم وجود شرط في خانة معينة ثم الانتقال إلى ما قبله وهكذا.

يتم تعبئة العشرات بعدد الأرقام في المجموعة وعددها ٤ ، ثم الآحاد بناقص واحد من عناصر المجموعة لأن التكرار غير مسموح فيكون عددها ٣.

∴ عدد الأعداد = ٣ × ٤ = ١٢.

تنبيه: ١ – عدد المراحل في تكوين الأعداد هي دائماً عدد الخانات المطلوبة.

٢ – الأرقام الموضوعة داخل الخانات | ٣ | ٤ | تمثل عدد طرق تعبئة هذه الخانات وليس أرقام المجموعة ذاتها . فمثلاً الرقم ٣ الموضوع في الآحاد يعني عدد طرق وليس الرقم "٣" الذي في المجموعة.

مثال: كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٩}
في الحالات الآتية: (أ) مع تكرار الأرقام ، (ب) بدون تكرار الأرقام.

الحل:

المجموعة خالية من الصفر	
مع التكرار	بدون تكرار
اكتبها كاملة (عدد عناصر المجموعة) في جميع الخانات	اكتب عدد العناصر كاملة ابتداءً بالخانة الأخير ثم اللي قبلها بناقص واحد وهكذا

نلاحظ عدم وجود الصفر في المجموعة أو شرط في المسألة.

(أ) مع التكرار الأرقام: ∴ العدد مكون من ٣ أرقام فيعني أنه ثلاث منازل (مراحل) وسيكون الجدول كالآتي:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٥	٥	٥

وبما أنه مع تكرار الأرقام ستعبأ جميع المنازل بعدد الأرقام في المجموعة والتي عددها (٥) . وعليه فإن عدد الأعداد = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ عدداً.

(ب) بدون تكرار الأرقام: ستعبأ الخانة الأخير بجميع الأرقام ثم كل منزلة تتناقص بمقدار واحد لعدم السماح بالتكرار ، وعليه يكون الجدول كالآتي:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٥

∴ عدد الأعداد = ٣ × ٤ × ٥ = ٦٠ عدداً.

مثال: كم عدداً مؤلفاً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٠ ، ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥}
في الحالات الآتية: (أ) مع التكرار ، (ب) بدون التكرار .

الحل:

المجموعة تحوي الصفر	
مع التكرار	بدون تكرار
يكتب عدد عناصر المجموعة كاملة ما عدا في الخانة الأخيرة (لأنه يحذف الصفر)	نبدأ بالخانة الأخيرة وتكتب عدد عناصر المجموعة بدون الصفر ثم يرجع الصفر في بقية الخانات

نلاحظ وجود الصفر في المجموعة لذلك سنبدأ بالخانة الأخيرة مع إلغاء الصفر ثم الخانة اللي قبلها مع إرجاع الصفر وهكذا مع بقية الخانات.

(أ) مع التكرار: ستكتب عدد الأرقام في جميع الخانات عدا الخانة الأخيرة لاحتواء المجموعة على الصفر .

∴ عدد الأعداد = ٥ × ٥ × ٥ × ٤ = ٥٠٠ عدداً.

الألوف	المئات	العشرات	الآحاد	المرحلة
٤	٥	٥	٥	عدد الطرق

(ب) بدون التكرار: عند تعبئة الخانات سيكون هناك تناقص كل خانة عن الأخرى وسنبدأ هنا بالخانة الأخيرة (ألوف) مع إلغاء الصفر .

الألوف	المئات	العشرات	الآحاد	المرحلة
٤ إلغاء الصفر	٤ إرجاع الصفر	٣	٢	عدد الطرق

ثم خانة المئات مع إرجاع الصفر وبنفس الوقت إنقاص واحد من المجموعة وهكذا مع بقية الخانات.

∴ عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ٤ × ٤ = ٩٦ عدداً.

مثال: إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨} كم عدداً مكوّن من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من المجموعة سـ بالتكرار تارة وبعدم التكرار تارة أخرى في الحالات الآتية:

(١) بدون شرط ، (٢) زوجي ، (٣) أكبر من ٤٠٠ ، (٤) أقل من ٤٠٠

(٥) زوجي وعشراته من مضاعفات الثلاثة .

الحل: نلاحظ عدم وجود الصفر في المجموعة.

(١) بدون شرط :

(أ) مع التكرار :

عدد الأعداد = ٧ × ٧ × ٧ = ٣٤٣ عدداً.

المئات	العشرات	الآحاد	المرحلة
٧	٧	٧	عدد الطرق

(ب) بدون تكرار :

عدد الأعداد = ٥ × ٦ × ٧ = ٢١٠ عدداً.

المئات	العشرات	الآحاد	المرحلة
٧	٦	٥	عدد الطرق

(٢) زوجي : نلاحظ وجود شرط في الآحاد لذلك هذه الخانة سيتم تعبئتها أولاً وبالأعداد الزوجية فقط وهي {٢ ، ٤ ، ٨} وعددها (٣)

(أ) مع التكرار :

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة الشرط	٧	٧

عدد الأعداد = ٣ × ٧ × ٧ = ١٤٧ عدداً.

(ب) بدون تكرار :

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة الشرط	٥	٦

عدد الأعداد = ٣ × ٥ × ٦ = ٩٠ عدداً

(٣) أكبر من ٤٠٠ : الشرط في المئات وحتى يكون أكبر من ٤٠٠ لابد أن تكون الأرقام في المئات {٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨} وعددها (٤) أرقام.

(أ) مع التكرار :

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٧	٧	٤ خانة الشرط

عدد الأعداد = ٧ × ٧ × ٤ = ١٩٦ عدداً.

(ب) بدون تكرار :

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٥	٦	٤ خانة الشرط

عدد الأعداد = ٥ × ٦ × ٤ = ١٢٠ عدداً.

(٤) أقل من ٤٠٠ : الشرط في المئات وحتى يكون أقل من ٤٠٠ يلزم أن تكون الأرقام في المئات {١ ، ٢ ، ٣} وعددها (٣) أرقام.

(أ) مع التكرار :

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٧	٧	٣ خانة الشرط

عدد الأعداد = ٧ × ٧ × ٣ = ١٤٧ عدداً.

(ب) بدون تكرار :

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٥	٦	٣ خانة الشرط

عدد الأعداد = ٥ × ٦ × ٣ = ٩٠ عدداً.

(٥) زوجي وعشراته من مضاعفات الثلاثة: نلاحظ أن هنا خانتين مشروطة لذلك سيتم تعبئة الخانات المشروطة أولاً ثم بقية الخانات

في هذا الفرع لا يوجد تعارض لأن خانة الآحاد (زوجي) ستعبأ بالأرقام الزوجية وهي {٢ ، ٤ ، ٨} وعددها (٣) ، وخانة العشرات (المضاعفات) ستعبأ بالأرقام {٣} وعدها (١) .

تنبيه: إذا كان السؤال في هذا الفرع عدد فردي وعشراته من مضاعفات الثلاثة هنا سيحصل تعارض (خصوصاً مع بدون تكرار) وسيأتي تفصيل ذلك في المثال الآتي.

(أ) مع التكرار :

عدد الأعداد = ٣ × ١ × ٧ = ٢١ عدداً.

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة شرط	١ خانة شرط	٧ عدد ارقام المجموعة – ٢

(ب) بدون تكرار :

عدد الأعداد = ٣ × ١ × ٥ = ١٥ عدداً.

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة شرط	١ خانة شرط	٥ عدد ارقام المجموعة – ٢

مثال: إذا كانت سـ= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٩} ، كم عدداً فردياً وعشراته من مضاعفات الثلاثة مكوناً من ثلاثة أرقام في الحالتين : (أ) مع التكرار ، (ب) بدون تكرار .

الحل: * لاحظ عدم وجود الصفر في المجموعة.

* لاحظ أن هنا خانتين مشروطتين:

– عدداً فردياً يعني تعبئة الآحاد بالأرقام الفردية وهي {١ ، ٣ ، ٥ ، ٩} وعددها (٤) .

– منزلة العشرات تعبأ بمضاعفات الثلاثة وهي الرقمين {٣ ، ٩} وعددها (٢) .

تنبيه: لاحظ أن الرقمين {٣,٩} مشترك في الشرطين

(أ) مع التكرار: تعبأ الآحاد بالأرقام الفردية وهي {١ ، ٣ ، ٥ ، ٩} وعددها (٤) .

تعبأ العشرات بالرقم {٣ ، ٩} وعددها (٢) ، لاحظ وضع الرقمين {٣ ، ٩} في المنزلتين لأنه مع التكرار والجدول كالآتي:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٤ خانة شرط {٩,٥,٣,١}	٢ خانة شرط {٩,٣}	٧ عدد الأرقام (جميعها)

∴ عدد الأعداد = ٤ × ٢ × ٧ = ٥٦ عدداً .

(ب) بدون تكرار: ∵ الرقمين {٣ ، ٩} موجودين في خانتين مشروطتين.

∴ أما نكون جدولين إذا اعتمدنا على الشرط الثاني أولاً. (حل أول ويغني)

أو ثلاثة جداول إذا اعتمدنا على الشرط الأول أولاً. (حل آخر صحيح)

- بتكوين جدولين : وذلك بالبدء بتجزئة أرقام العشرات {٣ ، ٩} وكما تلاحظ بالجدولين:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة شرط {٩،٥،١}	١ خانة شرط {٣}	٥ عدد ارقام المجموعة – ٢

+

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة شرط {٥،٣،١}	١ خانة شرط {٩}	٥ عدد ارقام المجموعة – ٢

∴ عدد الأعداد = (٣ × ١ × ٥) + (٣ × ١ × ٥) = ١٥ + ١٥ = ٣٠ عدداً.

- بتكوين ثلاثة جداول : وذلك بالبدء بتجزئة أرقام منزلة الآحاد {١ ، ٣ ، ٥ ، ٩} وكما يلي:

ملاحظة: عند اشتراك الأرقام وتجزئة كل رقم لحاله لا تأخذ أي أرقام أخرى مع الرقم المشترك حتى لو لم تكن هذا الأرقام مشتركة لأنه سيعطينا إجابة خاطئة. مثل مثالنا هذا لا تأخذ الرقمين {١،٥} مع {٣} أو مع {٩} وإنما يكون جدول مستقل لكل من {١،٥} مثل ما تلاحظ أدناه:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٣}	١ خانة شرط {٩}	٥ عدد ارقام المجموعة – ٢

+

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٩}	١ خانة شرط {٣}	٥ عدد ارقام المجموعة – ٢

+

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٢ خانة شرط بقية الأرقام {٥،١}	٢ خانة شرط {٩،٣}	٥ عدد ارقام المجموع – ٢

∴ عدد الأعداد = ١ × ١ × ٥ + ١ × ١ × ٥ + ٢ × ٢ × ٥ = ٥ + ٥ + ٢٠ = ٣٠ عدداً.

مثال: إذا كانت س= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨} ، كم عدداً فردياً وعشراته من مضاعفات الثلاثة مكوناً من ثلاثة أرقام في الحالتين : (أ) مع التكرار ، (ب) بدون تكرار .

الحل: * لاحظ عدم وجود الصفر في المجموعة.

* لاحظ أن هنا خانتين مشروطتين:

– عدداً فردياً يعني تعبئة الآحاد بالأرقام الفردية وهي {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧} وعددها (٤) .

– منزلة العشرات تعبأ بمضاعفات الثلاثة وهي الرقم {٣} وعددها (١) .

تنبيه: لاحظ أن الرقم {٣} مشترك في الشرطين

(أ) مع التكرار: تعبأ الآحاد بالأرقام الفردية وهي {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧} وعددها (٤) .

تعبأ العشرات بالرقم {٣} وعددها (١) ، لاحظ وضع الرقم {٣} في المنزلتين لأنه مع التكرار والجدول كالآتي:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٤ خانة شرط {١,٣,٥,٧}	١ خانة شرط {٣}	٧ عدد الأرقام (جميعها)

∴ عدد الأعداد = ٤ × ١ × ٧ = ٢٨ عدداً .

(ب) بدون تكرار: تعبأ الآحاد بالأرقام الفردية وهي {١ ، ٥ ، ٧} وعددها (٣)

تعبأ العشرات بالرقم {٣} وعددها (١) ، لاحظ أن خانة الآحاد سيحذف الرقم {٣} منها كعدد فردي [لأنه بدون تكرار وكما لا يمكن أن تعبأ خانة الشرط الثانية (خانة العشرات) إلا برقم واحد وهو {٣}] والجدول كالآتي:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة شرط {١,٥,٧}	١ خانة شرط {٣}	٥ عدد ارقام المجموعة – ٢

∴ عدد الأعداد = ٣ × ١ × ٥ = ١٥ عدداً .

تدريب: بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من ثلاثة أرقام مختلفة من المجموعة {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩} بحيث يكون:

(١) زوجي وعشراته من مضاعفات الثلاثة. ٣٢

(١) فردي ومئاته أولي. ٢٨

....

....

....

....

....

ملاحظة: إذا وجد الصفر في المجموعة مع شرط في المسألة سنميّز الحالات الآتية:

١– إذا كان الصفر ليس ضمن خانة شرط آخر ، هنا سنكون جدولاً واحداً مع مراعاة الخانة الأخيرة وأيضا مراعاة بتكرار أو بدونه.

٢– إذا كان الصفر ضمن خانة الشرط ومع التكرار ، فإننا نكوّن جدولاً واحداً ولا يحتاج إلى جدولين رغم إمكانية عمل ذلك.

٣– إذا كان الصفر ضمن خانة الشرط وبدون تكرار فإننا في هذه الحالة نجزئ ثم نجمع وذلك بتكوين جدولين كما يلي:

الصفر فقط في خانة الشرط

المرحلة	
عدد الطرق	

بقية عناصر خانة الشرط بدون الصفر

المرحلة	
عدد الطرق	

مثال: كم عدداً زوجياً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام من المجموعة {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} بحيث يكون رقم عشراته فردياً في الحالتين : (أ) مع التكرار ، (ب) بدون تكرار .

الحل: نلاحظ أن هنا خانتين مشروطة لذلك سيتم تعبئة الخانات المشروطة أولاً ثم بقية الخانات.

في هذا الفرع نلاحظ وجود تعارض بين خانة الآحاد والخانة الأخيرة الخاصة بالصفر لأن خانة الآحاد (زوجي) ستعبأ بالأرقام الزوجية وهي {٢،٠} وعددها (٢) ويلغى الصفر من الخانة الأخير ، وخانة العشرات (فردي) لا يوجد معها تعارض وستعبأ بالأرقام {١ ، ٣ ، ٥} وعددها (٣) .

(أ) مع التكرار: ممكن تكوين جدول أو جدولين لأن التكرار لا يؤثر على تعبئة الخانات بالأرقام مع الصفر. وسنضع لك الطريقتين في الحل.

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٢ خانة شرط {٢ ، ٠}	٣ خانة شرط {٥،٣،١}	٤ عدد الأرقام مع إلغاء الصفر

* عدد الأعداد (بجدول واحد) = ٢ × ٣ × ٤ = ٢٤ عدداً.

* عدد الأعداد بجدولين:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٠}	٣ خانة شرط {٥،٣،١}	٤ عدد الأرقام والصفر تم تثبيته في الآحاد

+

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٢}	٣ خانة شرط {٥،٣،١}	٤ عدد الأرقام مع إلغاء الصفر

∴ عدد الأعداد (بجدولين) = (١ × ٣ × ٤) + (١ × ٣ × ٤) = ١٢ + ١٢ = ٢٤ عدداً.

(ب) بدون التكرار: في هذه الحالة فإن التعارض يلزمنا عمل جدولين لتخطي مشاكل التعارض مع بدون تكرار إذ أن الخانات ستتناقص . سيتم تعبئة خانة زوجي أولاً بالعدد صفر في الجدول الأول وثم بالعدد ٢ في الجدول الثاني وكما ستلاحظ في الجدولين:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٠}	٣ خانة شرط {٥,٣,١}	٣ (٥-٢) تثبيت الصفر وأخذ رقم للعشرات

+

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٢}	٣ خانة شرط {٥,٣,١}	٢ (٥-٣) إلغاء الصفر وأخذ رقم للآحاد ورقم للعشرات

∴ عدد الأعداد = (١ × ٣ × ٣) + (١ × ٣ × ٢) = ٩ + ٦ = ١٥ عدداً.

مثال: بكم طريقة يمكن تكوين عدد يقبل القسمة على (٥) من ثلاثة أرقام من المجموعة {٠ ، ١ ، ٢ ، ٥ ، ٨} بحيث تكون الأعداد أكبر من ٣٠٠ في الحالتين :

(أ) مع التكرار ، (ب) بدون تكرار .

الحل: نلاحظ أن هنا خانتين مشروطة لذلك سيتم تعبئة الخانات المشروطة أولاً ثم بقية الخانات.

في هذا الفرع نلاحظ وجود تعارض بين خانة الآحاد والخانة الأخيرة (المئات) الخاصة بالصفر وكذلك الأعداد التي أكبر من ٣٠٠ .

سيتم الحل بنفس الطريقة في المثال السابق:

(أ) مع التكرار: ممكن تكوين جدول أو جدولين لأن التكرار لا يؤثر على تعبئة الخانات بالأرقام مع الصفر. وسنضع لك الطريقتين في الحل.

الآحاد لا تقبل إلاّ {٠ ، ٥} وعددها (٢)

المئات لا تقبل إلاّ {٥ ، ٨} وعددها (٢)

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٢ خانة شرط {٠ ، ٥}	٥ جميع أرقام المجموعة	٢ خانة شرط {٥ ، ٨}

* عدد الأعداد (بجدول واحد) = ٢ × ٥ × ٢ = ٢٠ عدداً.

* عدد الأعداد بجدولين:

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٠}	٥ جميع أرقام المجموعة	٢ خانة شرط {٥ ، ٨}

+

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٥}	٥ جميع أرقام المجموعة	٢ خانة شرط {٥ ، ٨}

∴ عدد الأعداد (بجدولين) = (١ × ٥ × ٢) + (١ × ٥ × ٢) = ١٠ + ١٠ = ٢٠ عدداً.

(ب) بدون التكرار: في هذه الحالة فإن التعارض يلزمنا عمل جدولين لتخطي مشاكل التعارض مع بدون تكرار إذ أن الخانات ستتناقص . سيتم تعبئة خانة الآحاد أولاً بالعدد صفر في الجدول الأول وثم بالعدد ٥ في الجدول الثاني مع حذف ٥ من المئات وكما ستلاحظ في الجدولين :

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٠}	٣ (٥−٢) تثبيت الصفر وأخذ رقم للمئات	٢ خانة شرط {٥ ، ٨}

+

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	١ خانة شرط {٥}	٣ (٥−٢) ارجاع الصفر واخذ رقم للآحاد ورقم للمئات	١ خانة شرط {٨} فقط

∴ عدد الأعداد = (١ × ٣ × ٢) + (١ × ٣ × ١) = ٦ + ٣ = ٩ عدداً.

تدريب: كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من المجموعة {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} مع التكرار وبدون تكرار بحيث يكون:

(١) زوجي . $\boxed{١٦٨}$ $\boxed{١٠٥}$ (٢) زوجي ويقبل القسمة على ١٠. $\boxed{٤٢}$ $\boxed{٣٠}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تنويه: (خاص مع "أكبر من" أو "أكبر من أو يساوي" أو "أصغر من" أو "أصغر من أو يساوي)

* للجواب نكون جدولاً والالتزام بالشرط مثل ما سبق. لكن إذا ظهر في السؤال الثلاثة البنود الآتية معاً: (١) المجموعة تحوي "الصفر" ، (٢) المسألة كانت "مع التكرار" ،
(٣) "الرقم غير الصفر في العدد المعطى بعد أكبر من أو أصغر من" ضمن مجموعة الأرقام.

في هذه الحالة علينا القيام بالآتي حسب السؤال:

(أ) أكبر من أو يساوي: الناتج هو نفسه ما نحصل عليه من حاصل ضرب المراحل بالجدول .

(ب) أكبر من: الناتج من أ ثم نطرح واحد منه لأنه سيكون العدد من ضمن الأعداد.

(ج) أصغر من: الناتج هو نفسه ما نحصل عليه من حاصل ضرب المراحل بالجدول .

(د) أصغر من أو يساوي: نضيف واحد للناتج من د لأننا لن نحصل على العدد المذكور ضمن الأعداد.

مثال: بكم طريقة يمكن تكوين عدد ثلاثي من المجموعة {٠ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦} مع التكرار بحيث :

(١) أكبر أو يساوي ٤٠٠ ،(٢) أكبر من ٤٠٠ ،(٣) أصغر من ٤٠٠،(٤) أصغر أو يساوي ٤٠٠

الحل: نلاحظ أن المجموعة تحوي الصفر ضمن أرقامها ، وأن الأعداد المطلوبة مع التكرار ، ونلاحظ كذلك أن العدد ٤٠٠ يحتوي الرقم ٤ وهو ضمن المجموعة ، لذلك سنحل السؤال حسب التنويه السابق:

(١) أكبر من أو يساوي ٤٠٠:

∵ العدد أكبر من ٤٠٠ فإن الشرط في خانة المئات حيث يمكن تعبئة الخانة بأحد الأرقام {٤ ، ٥ ، ٦} وعددها (٣) ، أما بقية الخانات فيتم وضع عدد الأرقام في المجموعة وعددها (٦)

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٦ جميع أرقام المجموعة	٦ جميع أرقام المجموعة	٣ خانة شرط {٦,٥,٤}

∴ عدد الأعداد التي أكبر من أو يساوي ٤٠٠ = ٦ × ٦ × ٣ = ١٠٨ عدداً.

(٢) أكبر من ٤٠٠:

وهنا أكبر تماماً لذلك يستبعد (٤٠٠) من ضمن عدد الأعداد وعليه يكون:

∴ عدد الأعداد التي أكبر من ٤٠٠ = ١٠٨ − ١ = ١٠٧ عدداً.

(٣) أصغر من ٤٠٠ :

∵ العدد أصغر من ٤٠٠ فإن الشرط في خانة المئات حيث يمكن تعبئة الخانة بأحد الأرقام {١ ,٢} وعددها (٢)، أما بقية الخانات فيتم وضع عدد الأرقام في المجموعة وعددها (٦)،كما نلاحظ أن المطلوب أصغر تماماً من ٤٠٠ لذلك تم استبعاد ٤ من خانة الشرط واكتفينا فقط بالرقمين {١ ,٢} لكي لا يكون العدد ٤٠٠ من ضمنها.

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٦ جميع أرقام المجموعة	٦ جميع أرقام المجموعة	٢ خانة شرط {١ ,٢}

∴ عدد الأعداد التي أصغر من ٤٠٠ = ٦ × ٦ × ٢ = ٧٢ عدداً.

(٢) أصغر من أو يساوي ٤٠٠ :

وهنا يوجد يساوي ٤٠٠ مع العلم لم تكن موجودة في ناتج ③ لذلك نضيف للناتج ١ :

∴ عدد الأعداد التي أصغر من أو يساوي ٤٠٠ = ٧٢ + ١ = ٧٣ عدداً.

ملاحظة: يجب التركيز على الألفاظ التالية وماذا تعني [ن تمثل عدد المراحل (المنازل)]:

(١) " ن على الأكثر " (مع التكرار أو بدونه) تعني عدد المنازل ن أو (ن−١) أو (ن−٢) ... إلى منزلة واحدة.

(٢) أ " ن على الأقل " (مع التكرار) تعني عدد المنازل ن أو (ن+١) أو (ن+٢) ... إلى ما لا نهاية.

ب " ن على الأقل " (بدون تكرار) تعني عدد المنازل ن أو (ن+١) أو (ن+٢) ... إلى أن يظهر الصفر ضمن خانات المنازل (أو عدد المنازل في الجدول تساوي عدد الأرقام).

(٣) لفظ "أو" تعني الجمع (+) ، ولفظ "و" يعني الضرب (×) .

مثال: كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام على الأكثر من المجموعة {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} في الحالتين: (أ) مع التكرار ، (ب) بدون تكرار .

الحل: (أ) مع التكرار : واللفظ هو ثلاثة أرقام على الأكثر أي يعني :

(ثلاثة أرقام) أو (رقمين) أو (رقم)

∴ المراحل حسب اللفظ كالآتي: $\boxed{٥|٥|٥}$ + $\boxed{٥|٥}$ + $\boxed{٥}$ = ١٢٥+٢٥+٥ = ١٥٥عدداً.

(ب) بدون تكرار : واللفظ هو ثلاثة أرقام على الأكثر أي يعني :

(ثلاثة أرقام) أو (رقمين) أو (رقم)

∴ المراحل حسب اللفظ كالآتي: $\boxed{٣|٤|٥}$ + $\boxed{٤|٥}$ + $\boxed{٥}$ = ٦٠+٢٠+٥ = ٨٥ عدداً.

مثال: كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام على الأقل من المجموعة {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} في الحالتين: (أ) مع التكرار ، (ب) بدون تكرار .

الحل: (أ) مع التكرار : واللفظ هو ثلاثة أرقام على الأقل أي يعني :

(٣ أرقام) أو (٤أرقام) أو...

∴ المراحل حسب اللفظ كالآتي: | ٥ | ٥ | ٥ | + | ٥ | ٥ | ٥ | ٥ | +... = عدد لانهائي لوجود التكرار.

(ب) بدون تكرار : واللفظ هو ثلاثة أرقام على الأكثر أي يعني :

(٣ أرقام) أو (٤أرقام) أو...

∴ المراحل حسب اللفظ كالآتي:

| ٣ | ٤ | ٥ | + | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | + | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | + | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |

ليس مهم عملها لأن ناتجها صفر. راجع الملاحظة

عدد الأعداد = ٦٠ + ١٢٠ + ١٢٠ + ٠ = ٣٠٠ عدداً.

مثال: أرادت إدارة المرور عمل لوحات معدنية للسيارات تبدأ رموز كل منها من اليمين بحرف من حروف الهجاء العربية متبوعة بأربعة أرقام من مجموعة الأرقام {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} ، كم لوحة مختلفة يمكن تكوينها في الحالتين: (أ) مع تكرار الأرقام ، (ب) بدون تكرار الأرقام .

الحل: عدد حروف الهجاء العربية هي (٢٨) حرفاً

(أ) مع تكرار الأرقام:

المرحلة	الحروف	آحاد	عشرات	مئات	ألوف
عدد الطرق	٢٨	٩	٩	٩	٩

∴ عدد اللوحات = ٢٨ × ٩ × ٩ × ٩ × ٩ = ١٨٣٧٠٨ لوحة.

(ب) بدون تكرار الأرقام:

المرحلة	الحروف	آحاد	عشرات	مئات	ألوف
عدد الطرق	٢٨	٦	٧	٨	٩

∴ عدد اللوحات = ٢٨ × ٦ × ٧ × ٨ × ٩ = ٨٤٦٧٢ لوحة.

سؤال وزاري ٢٠١٧–٢٠١٨ : لدينا سـ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧} المطلوب:

عدد الأعداد الزوجية المختلفة من سـ ذات ٣ أرقام أو ٤ أرقام.

الحل: إن ذكر كلمة المختلفة إنما يقصد بها الأعداد (أي لايعني اختلاف ارقام منازلها ، بل الأعداد نفسها مختلفة) ، إذ كان اللفظ في السؤال " عدد الأعداد الزوجية المختلفة " ، ولم يقل "عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام" وعليه فإن الإختلاف في هذا السؤال يقصد به الأعداد وليس الأرقام وبالتالي تحل المسألة مع التكرار.

لاحظ أيضاً وجود لفظ "أو" ويعني (+) بين الحالتين :

الخانة المشروطة هي خانة الآحاد لذلك سيتم تعبئة هذه الخانة بالأعداد الزوجية فقط وفي هذا السؤال هي المجموعة {٢ ، ٤ ، ٦} وعددها (٣) لاحظ الجدولين:

وثم بالعدد ٥ في الجدول الثاني مع حذف ٥ من المئات وكما ستلاحظ في الجدولين:

ذات ٣ أرقام

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣ خانة شرط {٢,٤,٦}	٤ جميع أرقام المجموعة	٤ جميع أرقام المجموعة

أو

+

ذات ٤ أرقام

المرحلة	الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
عدد الطرق	٣ خانة شرط {٢,٤,٦}	٤ جميع أرقام المجموعة	٤ جميع أرقام المجموعة	٤ جميع أرقام المجموعة

∴ عدد الأعداد= (٣ × ٤ × ٤)+(٣ × ٤ × ٤ × ٤)=٤٨+١٩٢ = ٢٤٠ عدداً زوجياً مختلفاً.

سؤال وزاري ٢٠٠٤–٢٠٠٥ : لدينا سـ مجموعة أحرف كلمة (حضرموت). بكم طريقة يمكن تكوين كلمات مختلفة ، رباعية الحروف على النحو الآتي:

(١) بدون شرط . (٢) تبدأ بالحرف م وتنتهي بالحرف ح .

(٣) تبدأ بأحد الحرفين " م أو ر " ولا تتضمن الحرف الآخر منهما.

الحل: إن ذكر "كلمات مختلفة" إنما يقصد بها الكلمات ذاتها وليس اختلاف الأحرف في الكلمة الواحدة لذلك سيكون مع التكرار. (إذا كان اللفظ في السؤال " كلمات مختلفة الأحرف " فهنا يقصد بدون تكرار الحرف) .

- مجموعة أحرف كلمة حضرموت هي سـ = {ح ، ض ، ر ، م ، و ، ت} وعددها (٦) .
- الكلمات من أربع أحرف لذلك سيكون لدينا أربع مراحل (أربع خانات في الجدول) .

(١) بدون شرط: لا يوجد شرط فيتم تعبئة الخانات بجميع الأحرف وعددها (٦)

المرحلة	الحرف الأول	الحرف الثاني	الحرف الثالث	الحرف الرابع
عدد الطرق	٦ جميع أحرف المجموعة	٦ جميع أحرف المجموعة	٦ جميع أحرف المجموعة	٦ جميع أحرف المجموعة

∴ عدد الكلمات = ٦ × ٦ × ٦ × ٦ = ١٢٩٦ كلمة مختلفة.

(٢) تبدأ بالحرف م وتنتهي بالحرف ح:

المرحلة	الحرف الأول	الحرف الثاني	الحرف الثالث	الحرف الرابع
عدد الطرق	١ خانة شرط { م }	٦ جميع أحرف المجموعة	٦ جميع أحرف المجموعة	١ خانة شرط { ر }

∴ عدد الكلمات = ١ × ٦ × ٦ × ١ = ٣٦ كلمة مختلفة.

(٣) تبدأ بأحد الحرفين " م أو ر " ولا تتضمن الحرف الآخر منهما:

المرحلة	الحرف الأول	الحرف الثاني	الحرف الثالث	الحرف الرابع
عدد الطرق	٢ خانة شرط { م ، ر }	٤ لاتتضمن { م ، ر }	٤ لاتتضمن { م ، ر }	٤ لاتتضمن { م ، ر }

∴ عدد الكلمات = ٢ × ٤ × ٤ × ٤ = ١٢٨ كلمة مختلفة.

كن حاضراً بقناتنا
على التلجرام
ليصلك كل جديد
بعالمنا
عالم رياضياتي

تدريبات: (١) إذا كانت سـ = {٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩} المطلوب ما يلي :

(أ) كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه من مجموعة أرقام سـ مع التكرار. ١٢٥

(ب) كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه من مجموعة أرقام سـ بدون تكرار. ٦٠

(٢) من المجموعة سـ = {٠ ، ٢ ، ٥ ، ٨} كم عدداً يمكن تكوينه من المجموعة سـ إذا كان :

(أ) مكوّن من ثلاثة أرقام (مع التكرار وبدونه). ٤٨ ١٨

(ب) زوجياً ومكوّن من أربعة أرقام (مع التكرار وبدونه). ١٤٤ ١٤

(٣) كم عدداً زوجياً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام من المجموعة {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} بحيث يكون عشراته فردياً مع امكانية التكرار. ٢٤

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن :

هو حاصل ضرب كافة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تبدأ بالعدد ن وتتناقص بمقدار واحد وتنتهي بالواحد الصحيح ، ويرمز له بالرمز |ن .

أي أن: |ن = ن (ن−١) (ن−٢) (ن−٣) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلاً: (١) |٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

(٢) |س = س (س−١) (س−٢) (س−٣) × ... × ٣ × ٢ × ١

(٣) |ن−ر = (ن−ر) (ن−ر−١) (ن−ر−٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

(٤) |ن−ر+٢ = (ن−ر+٢) (ن−ر+١) (ن−ر) (ن−ر−١) × ... × ٣ × ٢ × ١

(٥) |٣−ر = (٣−ر) (٣−ر−١) (٣−ر−٢) (٣−ر−٣) × ... × ٣ × ٢ × ١

= (٣−ر) (٢−ر) (١−ر) (ر) (ر−١) × ... × ٣ × ٢ × ١

أهم قواعد وخواص المضروب:

(١) العلاقة بين |٠ و |١

|٠ = ١ ، |١ = ١ ⇐ |٠ = |١

وعليه يمكن الاستفادة من هذه الخاصية في حل المعادلات وكما يلي:

إذا كان : |ن = |م فإنه لدينا حالتين :

١ ن = م

٢ ن = ١ و م = ٠ ، أو العكس ن = ٠ و م = ١

(٢) تنبيهات:

أ |أ±ب ≠ |أ ± |ب ، ب |أ×ب ≠ |أ × |ب

ج |(أ/ب) ≠ |أ / |ب

(٢) فك المضروب: (نفك المضروب حسب الحاجة في حل المسائل أو الإثباتات)

|ن = ن |ن−١ ، مثلاً : |٩ = ٩ × |٨

|ن = ن (ن−١) |ن−٢ ، مثلاً : |٩ = ٩ × ٨ × |٧

|ن = ن (ن−١) (ن−٢) |ن−٣ ، مثلاً : |٩ = ٩ × ٨ × ٧ × |٦

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

مثال: أوجد قيمة ن في $\underline{\lvert ن} = ١٢٠$

الحل: نقسم ١٢٠ على ١ ، ثم الناتج على ٢ ، ثم الناتج على ٣ ، ...

حتى نحصل على ١ ، فنجد أن آخر عدد تمت القسمة عليه هو قيمة ن

$\therefore$ ن = ٥

١٢٠	١
١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

التباديل

تعريف التباديل:

هو عدد طرق ترتيب عدة أشياء متميزة بأخذها جميعها أو جزء منها في كل مرة.

ويرمز للتباديل بالرمز : $^{ن}ل_{ر}$ ، أو ل (ن ، ر)

قانون التباديل: يمكن حساب $^{ن}ل_{ر}$ بطريقتين:

(١) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{\lvert ن}}{\underline{\lvert ن - ر}}$ ، ن $\geqslant$ ر [القانون الرئيسي يستخدم عندما تكون ر مجهولة أو عدداً كبيراً]

(٢) $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن−١) (ن−٢) (ن−٣) × ... [عدد عوامل حاصل الضرب يكونك حسب قيمة ر

ويستخدم عندما ر عددا صغيراً معلوماً]

خواص التباديل:

(١) (أ) $^{ن_١}ل_{ر} = {}^{ن_٢}ل_{ر} \Leftarrow ن_١ = ن_٢$

(ب) $^{ن}ل_{ر_١} = {}^{ن}ل_{ر_٢} \Leftarrow ر_١ = ر_٢$

(ج) $^{ن}ل_{ن} = \underline{\lvert ن}$ ، $^{ن}ل_{ن-١} = \underline{\lvert ن}$

يمكن الاستفادة من هذه الخاصية في حل المعادلات وكما يلي:

إذا كان : $^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإنه لدينا حالتين :

$\boxed{١}$ ر = ن

$\boxed{٢}$ ر = ن − ١

(٢) $^{ن}ل_{١}$ = ن

(٣) $^{ن}ل_{٠}$ = ١

مثال: أوجد قيمة كلاً من: (١) ${}^{٦}ل_{٢}$ ، (٢) ${}^{٥}ل_{٥}$ ، (٣) ${}^{٥}ل_{٤}$ ، (٤) ${}^{٦}ل_{١}$ ، (٥) ${}^{٣}ل_{٠}$.

الحل: (١) ${}^{٦}ل_{٢} = \frac{\lfloor ٦}{\lfloor ٤} = \frac{٦\times٥\times\lfloor ٤}{\lfloor ٤} = ٣٠$ (طريقة القانون الرئيسي)

${}^{٦}ل_{٢} = ٦ \times ٥ = ٣٠$ (طريقة حاصل ضرب العوامل التي تبدأ بـ ن= ٦ وعددها ر = ٢)

(٢) ${}^{٥}ل_{٥} = \lfloor ٥ = ٥\times٤\times٣\times٢\times١ = ١٢٠$ ، (٣) ${}^{٥}ل_{٤} = \lfloor ٥ = ٥\times٤\times٣\times٢ = ١٢٠$

(٤) ${}^{٦}ل_{١} = ٦$ ، (٥) ${}^{٣}ل_{٠} = ١$

معادلات التباديل:

إن صورة المعادلة هو تكوّن طرفين أيمن وأيسر وبينهما إشارة المساواة "=" وسنتطرق إلى الثلاثة الأنواع التالية مع أمثلة لكل نوع:

(١) المعادلة بالصورة ${}^{ن(مجهول)}ل_{ر(معلوم)}$ = الناتج (معلوم)

الطريقة السريعة (الحاسبة): نجعل الناتج بالطرف الأيسر كحاصل ضرب عوامل صحيحة موجبة متتالية عددها حسب قيمة (ر) ، ومن التساوي نكون معادلة ونوجد المطلوب (ن).

طريقة التحليل: نقسم الناتج الذي بالطرف الأيسر على الأعداد الأولية ثم نرتبها تنازلياً متتالياً.

والأعداد الأولية = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ... }

ملاحظة: عزيزي الطالب أنصحك بالاكتفاء بأحد الحلول دون توسع أو تكلف.

مثال: أوجد قيمة ن فيما يأتي:

(١) ${}^{ن}ل_{٢} = ٤٢$ ، (٢) ${}^{ن+١}ل_{٣} = ١٣٢٠$ ، (٣) ${}^{ن-٢}ل_{٣} = ٢٤$

الحل: (١) ${}^{ن}ل_{٢} = ٤٢$

- **الطريقة السريعة:** نبحث بالآلة الحاسبة عن عاملين متتاليين حاصل ضربهم ٤٢

${}^{ن}ل_{٢} = ٤٢$

نحلل الطرف الأيسر (الناتج) إلى حاصل ضرب عاملين متتاليين حاصل ضربهم ٤٢ ، نلاحظ أن ٤٢ = ٧ × ٦

$ن\,(ن-١) = ٧ \times ٦$

من تساوي العامل الأول (الأكبر) ينتج: ن = ٧

أو من تساوي العامل الثاني ينتج: ن-١ = ٦ ⟸ ن = ٦+١ ⟸ ن = ٧

- **طريقة التحليل:** ${}^{ن}ل_{٢} = ٤٢$

٤٢	٢
٢١	٣
٧	٧
١	

$٢ \times ٣ = ٦$

$ن\,(ن-١) = ٧ \times ٦$

∴ ن = ٧

(٢) $^{ن+١}ل_{٣} = ١٣٢٠$

- الطريقة السريعة: نبحث بالآلة الحاسبة عن ٣ عوامل متتالية حاصل ضربهم ١٣٢٠

$^{ن+١}ل_{٣} = ١٣٢٠$

نحلل الطرف الأيسر (الناتج) إلى حاصل ضرب ٣عوامل متتالية حاصل ضربهم ١٣٢٠ ، نلاحظ أن ١٠ × ١١ × ١٢ = ١٣٢٠

ن(ن−١) (ن−٢) = ١٢ × ١١ × ١٠

من التساوي ينتج: ن = ١٢

أو من تساوي آخر ينتج: ن−٢ = ١٠ ⇐ ن = ١٠+٢ ⇐ ن = ١٢

- طريقة التحليل:

$^{ن+١}ل_{٣} = ١٣٢٠$

ن(ن−١) (ن−٢) = ١٢ × ١١ × ١٠

من التساوي ينتج: ن = ١٢

١٣٢٠	٢
٦٦٠	٢
٣٣٠	٢
١٦٥	٣
٥٥	٥
١١	١١
١	

١٢ = ٢ × ٢ × ٣

١٠ = ٢ × ٥

(٣) $^{ن-٢}ل_{٣} = ٢٤$ (يترك تدريب لك عزيزي الطالب) $\boxed{ن = ٦}$

(٢) المعادلة بالصورة $^{\text{ن(معلوم)}}ل_{\text{ر(مجهول)}}$ = الناتج (معلوم)

الطريقة السريعة (الحاسبة): باستخدام الآلة الحاسبة العادية بضرب ن المعلوم $\otimes$ العدد الأقل منه ثم يساوي ونستمر بالعملية إلى أن نحصل على العدد الناتج في المسألة ،
ومن العملية يمكن نحسب عدد العوامل التي تم ضربها وهي قيمة ر .

طريقة التحليل: وهــنا التحليل للعدد الناتج بقسمته على ن المعلومة ثم ن الأقل منها بمقدار ١ أي (ن−١) ونستمر إلى أن نحصل على ١ ، فتكون عدد العوامل في الطرف الأيسر من التحليل هي قيمة ر .

مثال: أوجد قيمة (ر) فيما يلي:

(١) $^{٦}ل_{ر}$ = ٣٠ ، (٢) $^{١٢}ل_{ر}$ = ١٣٢٠ ، (٣) $^{٧}ل_{ر}$ = ٢٥٢٠

الحل: (١) $^{٦}ل_{ر}$ = ٣٠

- الطريقة السريعة: نستخدم الحاسبة حيث نضرب قيمة ن = ٦ ، في العدد الصحيح الأقل منه مباشرة وهنا ٥ ، وهكذا حتى نحصل على الناتج وهو ٣٠ وهنا نلاحظ أن ٦×٥ = ٣٠ وعدد العوامل التي حصلنا منها على ٣٠ هو عاملان هما ٦ و ٥ وعليه فإن قيمة ر = ٢
- طريقة التحليل: وهنا الناتج ٣٠ على ٦ ثم على ٥ إلى أن نصل في الطرف الأيمن على ١ مثل ما تلاحظ في هذا التحليل:

٣٠	٦
٥	٥
١	

(٢) $^{١٢}ل_{ر}$ = ١٣٢٠ بمثل ما سبق تستخدم أحد الطريقتين للحصول على قيمة ر

- الطريقة السريعة: نستخدم الآلة الحاسبة بالضرب ١٢×١١ = ١٣٢ × ١٠ = ١٣٢٠
∴ عدد العوامل للحصول على الناتج هي ٣ حيث ١٢×١١×١٠ = ١٣٢٠
∴ ر = ٣
- طريقة التحليل: نلاحظ أن : ١٢×١١×١٠ = ١٣٢٠
∴ عدد العوامل ر = ٣

١٣٢٠	١٢
١١٠	١١
١٠	١٠
١	

(٣) $^{٧}ل_{ر}$ = ٢٥٢٠ (يترك تدريب لك عزيزي الطالب) $\boxed{ر = ٥}$

....

....

....

....

(٣) المعادلة بالصورة: تباديل أو مضروب = تباديل أو مضروب

في هذه الحالة نعالج كل من الطرفين الأيمن والأيسر باستخدام قوانين التباديل والمضروب وإجراء العمليات الحسابية المختلفة والاختصار إلى أن نحصل على معادلة من الدرجة الأولى أو الثانية وحلها جبرياً لإيجاد قيمة المجهول (المطلوب).

> ملاحظة: ممكن نعتبر هذه الطريقة هي الأشمل في حل معادلات التباديل.
> إذ يمكنك عزيزي الطالب حل النوعين السابقين بهذه الطريقة.

مثال: أوجد قيمة ن فيما يلي:

(١) $^{ن}ل_{٤} = ٣ \; {}^{ن}ل_{٣}$ ، (٢) $^{ن+١}ل_{٣} : \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-٢}} = ٧$

الحل: (١) $^{ن}ل_{٤} = ٣ \; {}^{ن}ل_{٣}$

> يمكنك حل المثال مستخدماً قانون التباديل الرئيسي.

$$\cancel{ن}\cancel{(ن-١)}\cancel{(ن-٢)}(ن-٣) = ٣\,\cancel{ن}\cancel{(ن-١)}\cancel{(ن-٢)}$$

$\therefore$ ن − ٣ = ٣ ⟸ ن = ٣+٣ ⟸ ن = ٦

(٢) $^{ن+١}ل_{٣} : \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-٢}} = ٧$ (نحول النسبة إلى قسمة)

$\frac{|\underline{ن+١}}{|\underline{ن+١-٣}} \div \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-٢}} = ٧$ (نحول القسمة إلى ضرب ونقلب المقسوم عليه)

$\frac{|\underline{ن+١}}{|\underline{ن+١-٣}} \times \frac{|\underline{ن-٢}}{|\underline{ن}} = ٧$ (نحول القسمة إلى ضرب ونقلب المقسوم عليه)

> لاحظ استخدمنا في $^{ن+١}ل_{٣}$ القانون الرئيسي ولم نستخدم حاصل ضرب العوامل وذلك لنحصل على اختصارات بعد فك المضروبات حسب الطلب.

$\frac{(ن+١)\cancel{|\underline{ن}}}{\cancel{|\underline{ن-٢}}} \times \frac{\cancel{|\underline{ن-٢}}}{\cancel{|\underline{ن}}} = ٧$ (فك المضروب حسب المطلوب لنحصل على اختصارات)

$\therefore$ ن + ١ = ٧ ⟸ ن = ٦

مسائل الإثبات:

إن مسائل الإثبات تتكوّن من طرفين بينهما إشارة المساواة "=" ولحل مسائل الإثبات هناك طريقتين هما:

الطريقة الأولى: نبدأ بالطرف الأيمن في الحل وتبسيطه باستخدام قوانين التباديل والمضروب والعمليات الحسابية المختلفة ، والتوصل بالطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر.

الطريقة الثانية: نعمل تغييرات على الطرف الأيمن باستخدام قوانين التباديل والمضروب والعمليات الحسابية المختلفة والتوصل لمقدار معيّن.

إجراء أيضاً تغييرات على الطرف الأيسر باستخدام قوانين التباديل والمضروب والعمليات الحسابية المختلفة والتوصل إلى نفس المقدار الحاصلين عليه من الطرف الأيمن.

مثال: أثبت صحة الآتي:

(١) $\dfrac{\underline{\text{ن}+٢}|}{\underline{\text{ن}}|} = \text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ٢$ ، (٢) $\dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}-١}} = \text{ن}$ ، (٣) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = {^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}}} + \text{ر}\ {^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}-١}}$

الحل: (١) الطرف الأيمن : $\dfrac{\underline{\text{ن}+٢}|}{\underline{\text{ن}}|} = \dfrac{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)\cancel{\underline{\text{ن}}|}}{\cancel{\underline{\text{ن}}|}}$

$= (\text{ن}+٢)(\text{ن}+١) = \text{ن}^٢ + \text{ن} + ٢\text{ن} + ٢ = \text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ٢ =$ الطرف الأيسر.

(٢) الطرف الأيمن : $\dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\underline{\text{ن}}|}{\underline{\text{ن}-\text{ر}}|} \div \dfrac{\underline{\text{ن}-١}|}{\underline{\text{ن}-١-(\text{ر}-١)}|} = \dfrac{\underline{\text{ن}}|}{\underline{\text{ن}-\text{ر}}|} \times \dfrac{\underline{\text{ن}-\cancel{١}-\text{ر}+\cancel{١}}|}{\underline{\text{ن}-١}|}$

$= \dfrac{\text{ن}\cancel{\underline{\text{ن}-١}|}}{\cancel{\underline{\text{ن}-\text{ر}}|}} \times \dfrac{\cancel{\underline{\text{ن}-\text{ر}}|}}{\cancel{\underline{\text{ن}-١}|}} = \text{ن} =$ الطرف الأيسر .

(٣) الطرف الأيمن $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{\text{ن}}|}{\underline{\text{ن}-\text{ر}}|}$ .... ①

الطرف الأيسر $= {^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}}} + \text{ر}\ {^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\underline{\text{ن}-١}|}{\underline{\text{ن}-١-\text{ر}}|} + \text{ر}\dfrac{\underline{\text{ن}-١}|}{\underline{\text{ن}-\cancel{١}-\text{ر}+\cancel{١}}|}$

$= \dfrac{\underline{\text{ن}-١}|}{\underline{\text{ن}-\text{ر}-١}|} + \text{ر}\dfrac{\underline{\text{ن}-١}|}{\underline{\text{ن}-\text{ر}}|} = \dfrac{\underline{\text{ن}-١}|}{\underline{\text{ن}-١-\text{ر}}|} + \text{ر}\dfrac{\underline{\text{ن}-١}|}{(\text{ن}-\text{ر})\underline{\text{ن}-\text{ر}-١}|}$

بتوحيد المقامات:

$$= \frac{(\text{ن}-\text{ر})\,\underline{|\text{ن}-1} + \text{ر}\,\underline{|\text{ن}-1}}{(\text{ن}-\text{ر})\,\underline{|\text{ن}-\text{ر}-1}} = \frac{\underline{|\text{ن}-1}\,(\text{ن}-\cancel{\text{ر}}+\cancel{\text{ر}})}{(\text{ن}-\text{ر})\,\underline{|\text{ن}-\text{ر}-1}}$$

[بسحب $\underline{|\text{ن}-1}$ عامل مشترك في البسط]

$$= \frac{\text{ن}\,\underline{|\text{ن}-1}}{(\text{ن}-\text{ر})\,\underline{|\text{ن}-\text{ر}-1}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; ②$$

من ① و ② ينتج أن: ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}} + \text{ر}\;{}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}-1}$

تدريب: أثبت أن: ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}-1} = \text{ن} - \text{ر} + 1$

المسائل اللفظية:

لحل المسائل اللفظية يجب أولاً فهم السؤال جيداً [يقولون فهم السؤال نصف الإجابة وأقول في مبدأ العد والتباديل والتوافيق فهم السؤال هو الإجابة كلها] وكما هو معلوم من تعريف التباديل بأنها تهتم بالترتيب ، ويفهم أهمية الترتيب في المسألة من خلال الآتي:

١– إذا كان المفهوم للمسألة يوحي بالترتيب (التباديل) [تكوين أعلام، توزيع جوائز، فائز أول ،...].

٢– ذكر لفظ الترتيب أو التبديل أو مختلفة الحروف أو الأرقام [تنظيم كتب، ترتيب جلوس ، ...].

٣– إذا كانت العينة المختارة لها مهام محددة ومختلفة [رئيس ، نائب ، مشرف ، ...].

٤– إذا تم اختيار العينة بشكل متتابع أو متوالي [واحدة تلو الأخرى ، على التوالي ، بالتتالي وبدون إعادة].

مثال: بكم طريقة يمكن تلوين علم يتكون من أربعة ألوان إذا كان لدينا تسعة ألون.

الحل: لاحظ أن الألوان مختلفة وهنا ترتيب الألوان في العلم له أهمية لذلك فالمسألة تباديل:

$\therefore$ $^{٩}ل_{٤} = ٩\times٨\times٧\times٦ = ٣٠٢٤$ طريقة .

مثال: من بين ثلاثون طالباً ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكوّنة من رئيس ومساعد وسكرتير وأمين صندوق .

الحل: لاحظ تم تحديد مهام اللجنة المكونة من ٤ أشخاص.

$\therefore$ $^{٣٠}ل_{٤} = ٣٠\times٢٩\times٢٨\times٢٧ = ٦٥٧٧٢٠$ طريقة .

التطبيقات المتباينة:

تعريف التطبيق المتباين: هو تطبيق فيه كل عنصر من عناصر المجال المقابل (ص) صورة لعنصر واحد على الأكثر من عناصر المجال.

قاعدة تباديل التطبيقات المتباينة:

إذا كان التطبيق معرفاً من س ← ص [ن عدد عناصر س، م عدد عناصر ص]، فإن:

١ عدد التطبيقات = $م^{ن}$

٢ (أ) عندما عدد عناصر ص ⩾ عدد عناصر س ،فإن: عدد التطبيقات المتباينة = ${}^{م}ل_{ن}$

(ب) عندما عدد عناصر ص < عدد عناصر س ،فإن: عدد التطبيقات المتباينة = صفر

٣ عدد التطبيقات غير المتباينة = عدد التطبيقات – عدد التطبيقات المتباينة .

مثال: إذا كانت س = {٢ ، ٤ ، ٧} ، ص = {أ ، ب ، جـ ، ء} ، فأوجد ما يلي:

(١) عدد التطبيقات من س ← ص .

(٢) عدد التطبيقات من ص ← س .

(٣) عدد التطبيقات من س ← س .

(٤) عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص .

(٥) عدد التطبيقات المتباينة من ص ← س .

(٦) عدد التطبيقات المتباينة من س ← س .

(٧) عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← ص .

(٨) عدد التطبيقات غير المتباينة من ص ← س .

(٩) عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← س .

الحل: عدد عناصر س هي ن = ٣ عناصر ، وعدد عناصر ص هي م = ٤ عناصر .

(١) عدد التطبيقات من س ← ص = $م^{ن}$ = $٤^{٣}$ = ٤×٤×٤ = ٦٤ تطبيقاً .

(٢) عدد التطبيقات من ص ← س = $ن^{م}$ = $٣^{٤}$ = ٣×٣×٣×٣ = ٨١ تطبيقاً .

(٣) عدد التطبيقات من س ← س = $ن^{ن}$ = $٣^{٣}$ = ٣×٣×٣ = ٢٧ تطبيقاً .

(٤) عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص = ${}^{م}ل_{ن}$ = ${}^{٤}ل_{٣}$ = ٤×٣×٢ = ٢٤ تطبيقاً متبايناً .

(٥) عدد التطبيقات المتباينة من ص ← س = ${}^{ن}ل_{م}$ = ${}^{٣}ل_{٤}$ = صفر [لأن ر > ن] .

(٦) عدد التطبيقات المتباينة من سـ ← سـ = $^{ن}ل_{ن}$ = $^{٣}ل_{٣}$ = ٣×٢×١ = ٦ تطبيقاً متبايناً .

(٧) عدد التطبيقات غير المتباينة من سـ ← صـ = ٦٤ − ٢٤ = ٤٠ تطبيقاً غير متباين.

(٨) عدد التطبيقات غير المتباينة من صـ ← سـ = ٨١ − ٠ = ٨١ تطبيقاً غير متباين.

(٩) عدد التطبيقات غير المتباينة من سـ ← سـ = ٢٧ − ٦ = ٢١ تطبيقاً غير متباين.

تدريب: إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = { أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ } ، فأوجد ما يلي:

(١) عدد التطبيقات من سـ ← صـ .

(٢) عدد التطبيقات المتباينة من سـ ← صـ.

(٣) عدد التطبيقات غير المتباينة من سـ ← صـ .

(٤) عدد التطبيقات من صـ ← سـ .

(٥) عدد التطبيقات المتباينة من صـ ← سـ.

(٦) عدد التطبيقات غير المتباينة من صـ ← سـ .

(٧) عدد التطبيقات من صـ ← صـ .

(٨) عدد التطبيقات المتباينة من صـ ← صـ .

(٩) عدد التطبيقات غير المتباينة من صـ ← صـ .

الترتيب في صف مستقيم أو بشكل دائري:

ترتيب $ن$ من الأشياء المختلفة نلخصه في الجدول الآتي:

النوع	الحالة	على صف مستقيم	على شكل دائري (لا توجد نقطة بداية)
بدون شرط	عدد الأماكن($ن$) $\leqslant$ عدد الأشياء($ر$)	$^{ن}ل_{ر}$	$^{ن-1}ل_{ر-1}$
	عدد الأماكن($ر$) $<$ عدد الأشياء($ن$)	$^{ن}ق_{ر} \times \underline{\lvert ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ نختار الأشياء أولاً بالتوافيق ثم (×) ترتيبها في صف	$^{ن}ق_{ر} \times \underline{\lvert ر-1} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر}$ نختار الأشياء أولاً بالتوافيق ثم (×) ترتيبها في دائرة
التجاور	$ن$ من الأشياء يضل $م$ منها متجاورة	$\underline{\lvert ن-م+1} \times \underline{\lvert م}$	$\underline{\lvert ن-م} \times \underline{\lvert م}$
	$ن$ من الأشياء لايضل $م$ منها متجاورة	$\underline{\lvert ن} - \underline{\lvert ن-م+1} \times \underline{\lvert م}$	$\underline{\lvert ن-1} - \underline{\lvert ن-م} \times \underline{\lvert م}$
المجموعات (الفئات) معاً	$ن_1$ ، $ن_2$ ، ... ، $ن_م$ هي مجموعات (فئات) بحيث تضل كل عناصر المجموعة (الفئة) معاً .	$\underline{\lvert ن_1} \times \underline{\lvert ن_2} \times \ldots \times \underline{\lvert ن_م} \times \underline{\lvert م}$ [$م$ عدد المجموعات (الفئات)]	$\underline{\lvert ن_1} \times \underline{\lvert ن_2} \times \ldots \times \underline{\lvert ن_م} \times \underline{\lvert م-1}$
التناوب بين مجموعتين أو أكثر	$م$ عدد المجموعات $ن$ عدد عناصر كل مجموعة (عدد عناصر المجموعات متساوي)	$(\underline{\lvert ن})^{م} \times \underline{\lvert م}$	$\frac{(\underline{\lvert ن})^{م} \times \underline{\lvert م-1}}{ن} = (\underline{\lvert ن})^{م-1} \times \underline{\lvert ن-1} \times \underline{\lvert م-1}$
	ملاحظات: [١] لا يمكن ترتيب المجموعات في صف بالتناوب إلاّ إذا كان عدد عناصر المجموعات متساوي أو الفرق بينهم يساوي واحد . [٢] لا يمكن ترتيب المجموعات بالتناوب حول دائرة إلاّ إذا كان عدد عناصر المجموعات متساوي.		

ملاحظات مهمة:

(١) الترتيب حول دائرة مع وجود نقطة بداية أو تثبيت نقطة مثل (كرسي جوار نافذة أو باب ، كراسي مرقمة أو كرسي مميّز ، ... ، وغيرها بما يدل على بداية) في هذه الحالة تحل المسألة كترتيب صف مستقيم.

(٢) عدد طرق ترتيب $ن$ من العناصر المتماثلة (المتطابقة) في صف أو في شكل دائري يساوي طريقة واحدة.

عزيزي الطالب فيما يلي مثال عن كل حالة في الجدول السابق:

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٦ أشخاص في الحالتين:

(أ) في صف مستقيم . (ب) على طاولة مستديرة .

الحل: لاحظ لم يحدد عدد المقاعد للجلوس لذلك سيكون على عدد الأشخاص:

(أ) في صف مستقيم : عدد الطرق = $^{٦}ل_{٦}$ = ⌊٦ = ٧٢٠ طريقة .

(ب) حول طاولة مستديرة: عدد الطرق = $^{٦-١}ل_{٦-١}$ = $^{٥}ل_{٥}$ = ⌊٥ = ١٢٠ طريقة .

مثال: بكم طريقة يمكن تنظيم جلوس ٥ أشخاص على ٧ كراسي في الحالات الآتية:

(أ) في صف مستقيم . (ب) حول طاولة مستديرة . (ج) حول طاولة مستديرة مرقمة الكراسي.

الحل: لاحظ أن عدد الأشخاص أقل من عدد المقاعد :

(أ) في صف مستقيم : عدد الطرق = $^{٧}ل_{٥}$ = ٧×٦×٥×٤×٣ = ٢٥٢٠ طريقة .

(ب) حول طاولة مستديرة: عدد الطرق = $^{٧-١}ل_{٥-١}$ = $^{٦}ل_{٤}$ = ٦×٥×٤×٣ = ٣٦٠ طريقة .

(ج) يتم التعامل كصف مستقيم لأن الكراسي مرقمه هنا محددة البداية:

عدد الطرق = $^{٧}ل_{٥}$ = ٧×٦×٥×٤×٣ = ٢٥٢٠ طريقة .

مثال: بكم طريقة يمكن وضع ٨ شمعات ذات ألوان مختلفة في شمعدان يسع خمس شمعات فقط إذا كان : (أ) الشمعدان خطي . (ب) الشمعدان دائري .

الحل: لاحظ أن عدد الشمعات أكبر من عدد مقاعدها (الشمعدان) :

(أ) الشمعدان خطي:عدد الطرق = $^{ن}ل_{ر}$ = $^{٨}ل_{٥}$ = ٨×٧×٦×٥×٤ = ٦٧٢٠ طريقة .

(ب) الشمعدان دائري: عدد الطرق = $\frac{^{ن}ل_{ر}}{ر}$ = $\frac{^{٨}ل_{٥}}{٥}$ = $\frac{٨×٧×٦×٥×٤}{٥}$ = ١٣٤٤ طريقة .

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب مختلفة على رف مستقيم في الحالات التالية :

(أ) بدون شرط . (ب) في رف يتوفر مكانان شاغران فقط .

(ج) يظل كتابان معينان متجاوران (لا ينفصلان أو متلازمان) .

(ء) كتابان معينان لا يمكن وضعهما متجاوران.

الحل: (أ) بدون شرط: عدد الطرق = $^{٦}ل_{٦}$ = ⌊٦ = ٧٢٠ طريقة .

(ب) في رف يتوفر مكانان شاغران فقط: عدد الطرق = $^{٦}ل_{٢}$ = ٦×٥ = ٣٠ طريقة .

(ج) يظل كتابان معينان متجاوران: عدد الطرق = ⌊ن−م+١ × ⌊م = ⌊٦−٢+١ × ⌊٢

= ⌊٥ × ⌊٢ = ١٢٠ × ٢ = ٢٤٠ طريقة .

(ء)كتابان معينان لا يمكن وضعهما متجاوران: عدد الطرق = ⌊ن − ⌊ن−م+١ × ⌊م

= ⌊٦ − ⌊٦−٢+١ × ⌊٢ = ٧٢٠ − ١٢٠ × ٢ = ٧٢٠ − ٢٤٠ = ٤٨٠ طريقة .

طريقة أخرى: عدد الطرق = عدد طرق ترتيب ٦ كتب في خط مستقيم − عدد طرق ترتيب ٦ كتب وكتابان متجاوران = ٧٢٠ − ٢٤٠ = ٤٨٠ طريقة .

تدريب: بكم طريقة يمكن جلوس ٤ طلاب ، ٣ مدرسين في الحالتين التاليتين:

(١) على طاولة مستديرة . ٧٢٠

(٢) في صف مستقيم بشرط أن يجلس طالب ومدرس محددين متجاورين . ١٤٤٠

مثال: بكم طريقة يمكن جلوس ٤ مصريين ، و ٣ سوريين ، و ٤ سعوديين ، و يمنيان ، بشرط أن يجلس ذو الجنسية الواحدة معاً في الحالتين: (أ) في صف مستقيم. (ب) حول طاولة مستديرة.

الحل: هنا المسألة مسألة مجموعات (فئات) جلوسهم معاً ولدينا أربع فئات (جنسيات) فيكون:

(أ) في صف مستقيم: عدد الطرق = |ن١ × |ن٢ × |ن٣ × |ن٤ × |م

= |٤ × |٣ × |٤ × |٢ × |٤

= ٢٤ × ٦ × ٢٤ × ٢ × ٢٤ = ١٦٥٨٨٨ طريقة .

(ب) حول طاولة مستديرة: عدد الطرق = |ن١ × |ن٢ × |ن٣ × |ن٤ × |م−١

= |٤ × |٣ × |٤ × |٢ × |٤−١

= ٢٤ × ٦ × ٢٤ × ٢ × ٦ = ٤١٤٧٢ طريقة .

تدريب: بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٤ مصريين ، و ٣ سوريين ، و ٥ عراقيين ، و٢ من اليمن في الحالات: (١) في صف مستقيم. |١٤ (٢) حول طاولة مستديرة . |١٣

(٣) في صف بشرط أن يجلس ذو الجنسية الواحدة معاً . ٨٢٩٤٤٠

(٤) في صف بشرط أن يظل المصريين متجاورين . |١١ × |٤

(٥) حول طاولة مستديرة بشرط أن يظل السوريين متجاورين . |١١ × |٣

مثال: بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة طلاب وأربعة مدرسين على ٨ كراسي ، بحيث يجلس كل طالب ومدرس بالتناوب في الحالتين: (أ) في صف مستقيم. (ب) حول طاولة مستديرة.

الحل: هنا التناوب ممكن نلاحظ أن عدد الطلاب = عدد المدرسين = ٤

نلاحظ أن عدد المجموعات م = ٢ ، وعدد عناصر كل مجموعة ن = ٤

(أ) في صف مستقيم: عدد الطرق = $(\underline{|٤})^{٢} \times \underline{|٢} = ٥٧٦ \times ٢ = ١١٥٢$ طريقة

(ب) حول طاولة مستديرة: عدد الطرق = $\frac{(\underline{|٤})^{٢} \times \underline{|١}}{٤} = \frac{٥٧٦}{٤} = ١٤٤$ طريقة .

القانون الآخر: عدد الطرق = $(\underline{|٤})^{٢-١} \times \underline{|٤-١} \times \underline{|٢-١} = \underline{|٤} \times \underline{|٣} \times \underline{|١}$

$= ٢٤ \times ٦ \times ١ = ١٤٤$ طريقة .

تنبيه: في مثالنا هذا فإن شكل التناوب إما أن يبدأ بطالب ثم مدرس أو يبدأ بمدرس ثم طالب وعليه فإن قيمة $\underline{|م} = \underline{|٢}$ ، فإذا تم تحديد التناوب في السؤال مثلاً (أن يبدأ بطالب) فإن قيمة $\underline{|م} = \underline{|١}$ [بينما م الأس تبقى م = ٢(عدد المجموعات)]، لأن التناوب في الجلوس تم بطريقة واحدة وهي طالب ثم مدرس. وإذا كان عدد الطلاب (٣) أكبر من عدد المدرسين (٢) بواحد فإننا ستبدأ بطالب أولاً $^{٣}ل_{١}$ (بعد أخذ طالب للجلوس يكون عدد الطلاب = عدد المدرسين = ن) حتى يحصل التناوب في صف مستقيم وعليه فإن:

عدد الطرق = $^{ن+١}ل_{١} \times (\underline{|ن})^{م}$ ، حيث ن عدد عناصر كل مجموعة بالتساوي ، م عدد المجموعات.

سؤال وزاري ٢٠١٨–٢٠١٩: بكم طريقة يمكن أن يجلس ٤طلاب و٣مدرسين في خط مستقيم في الحالتين : (١) بدون شرط . (٢) بالتناوب .

الحل: (١) بدون شرط فمجموع العناصر للمجموعتين (٧) وعليه عدد الطرق = $\underline{|٧} = ٥٠٤٠$ طريقة.

(٢) هنا التناوب ممكن لأنه في خط مستقيم والفرق بين المجموعتين ١ ، أي عدد الطلاب يزيد عن عدد المدرسين بواحد فقط .كما نلاحظ أن عدد المجموعات م = ٢ ، وعدد عناصر المجموعتين غير متساوي لذلك سنثبت طالباً ($^{ن+١}ل_{١} = {}^{٤}ل_{١}$) أولاً لكي يكون عدد عناصر المجموعتين متساوي فيكون ن = ٣ . وعليه فإن: عدد الطرق = $^{٤}ل_{١} \times (\underline{|٣})^{٢} = ٤\times٦\times٦ = ١٤٤$ طريقة .

طريقة أخرى: عدد الطرق = $\underline{|٤} \times \underline{|٣} = ٤\times٣\times٢\times٣\times٢ = ١٤٤$ طريقة .

قانون عدد المصافحات: يمكن إيجاد عدد المصافحات بين ن من الأشخاص بالقانون الآتي :

$$\text{عدد المصافحات} = \frac{ن(ن-١)}{٢}$$

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

مثال: إذا كان عدد المصافحات بين ن شخصاً = ١٠ ، فأوجد عدد الأشخاص .

الحل: هنا المطلوب عدد الأشخاص (ن) والمعطى عدد المصافحات (١٠) وبتطبيق القانون السابق:

∴ عدد المصافحات = $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ ⇐ ١٠ = $\frac{ن^{٢}-ن}{٢}$ ⇐ $ن^{٢}$ − ن − ٢٠ = ٠ (وبالتحليل)

⇐ (ن−٥) (ن+٤) = ٠ ⇐ ن = ٥ وهو عدد المصافحات ، بينما ن = −٤ مرفوض . لماذا ؟

تدريب: بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٥ مصريين ، و ٥ عراقيين ، و٥ من اليمن في الحالات:

(١) في صف. (٢) في صف بالتناوب. (٣) حول طاولة مستديرة. (٤) حول طاولة بالتناوب.

$\boxed{|١٥}$ $\boxed{١٠٣٦٨٠٠٠}$ $\boxed{|١٤}$ $\boxed{٦٩١٢٠٠}$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ علب من علب العصير في صف وبشكل دائري في الحالات:

(١) جميعها من نفس النوع . (٢) كل علبة تختلف عن الأخرى .

الحل: (١) جميعها من نفس النوع:

عدد طرق الترتيب في صف = عدد طرق الترتيب بشكل دائري = طريقة واحدة (عناصر متطابقة).

(٢) كل علبة تختلف عن الأخرى: في صف: $^{٦}ل_{٦}$ = |٦ = ٧٢٠ طريقة .

بشكل دائري: $^{٦-١}ل_{٦-١}$ = |٦−١ = |٥ = ١٢٠ طريقة .

التوافيق

إن اختيار عدد معيّن من الأشياء من بين مجموعة من الأشياء دون مراعاة للترتيب يسمى توفيق.

تعريف التوافيق:

هو عـدد المجموعـات الجزئية التي يمكن تكوينها من $ر$ من الأشياء من بين $ن$ من الأشياء إلاّ أنهم يختلفون في مضمون أساسي وهو الترتيب ، ففي التباديل نهتم بالترتيب ، بينمافي التوافيق لا نهتم بالترتيب .

قوانين وخواص التوافيق:

(أ) قوانين:

(١) $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$ [قانون العلاقة بين التباديل والتوافيق حيث نلاحظ أن التوافيق هي تباديل حذف ترتيبها القانون الرئيسي يســتخدم عادةً عندما تكون $ر$ كبيرة أو مجهولة]

(٢) $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$ [قانون التوافيق الرئيسي ، يستخدم عندما $ر$ مجهولة أو عدداً كبيراً يكونك حسب قيمة $ر$]

(٣) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ [قانون التبسيط ويستخدم عندما $ر > \frac{1}{2} ن$]

(ب) خواص التوافيق:

(١) $^{ن}ق_{ر_1} = {}^{ن}ق_{ر_2} \Leftarrow$ إما $ر_1 = ر_2$ ، أو $ر_1 + ر_2 = ن$

[تستخدم لإيجاد قيمة $ر$ عندما $ن$ هي نفسها في التوافيق]

(٢) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ [وقد مرت في قوانين التوافيق]

(٣) $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$ [علاقة الكرخي]

(ب) حالات خاصة:

(١) $^{ن}ق_{ن} = 1$

(٢) $^{ن}ق_{0} = 1$

(٣) $^{ن}ق_{1} = ن$

(٤) $^{ن}ق_{ن-1} = ن$

مثال: أحسب ما يلي: (١) $^{١٥}\text{ق}_{٤}$ ، (٢) $^{١٢}\text{ق}_{١٢}$ ، (٣) $^{٣}\text{ق}_{٠}$ ، (٤) $^{٦}\text{ق}_{٥}$ ، (٥) $^{٦}\text{ق}_{١}$ ، (٦) $^{٦٠}\text{ق}_{٢٠}$.

الحل: (١) $^{١٥}\text{ق}_{٤} = \frac{١٥!}{٤!\,(١٥-٤)!} = \frac{١٥!}{٤!\,١١!} = \frac{\cancel{١١!}\times ١٢\times ١٣\times ١٤\times ١٥}{١\times ٢\ \cancel{١١!}} = ١٣٦٥$

(٢) $^{١٢}\text{ق}_{١٢} = ١$ ، (٣) $^{٣}\text{ق}_{٠} = ١$ ، (٤) $^{٦}\text{ق}_{٥} = ٦$ ، (٥) $^{٦}\text{ق}_{١} = ٦$

(٦) $^{٦٠}\text{ق}_{٢٠} = \frac{٦٠!}{٢٠!\,٤٠!} = \frac{\cancel{٤٠!}\ ٤١\times ٤٢\times ...\times ٥٨\times ٥٩\times ٦٠}{١\times ٢\times ...\times ١٩\times ٢٠\ \cancel{٤٠!}} = ٤,١٩١٨٤٤ \times ١٠^{١٥}$

نلاحظ في المثال السابق أنه عندما كانت الإعداد صغيرة أمكننا إيجاد القيم بالحساب مباشرة ولكن في حالة الأعداد كبيرة فإن استخدام الآلة الحاسبة يوفر الوقت والجهد .

معادلات التوافيق:

إن معادلات التوافيق لا تختلف كثيراً عمّا تم تداوله في درس التباديل (راجع معادلات التباديل) مع اختلاف القوانين المستخدمة .

مثال: إذا كان $^{٢٥}\text{ق}_{٢\text{ر}} = {}^{٢٥}\text{ق}_{٣\text{ر}-٥}$ ، فأوجد قيمة ر .

الحل: بالاستفادة من الخاصية: $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}_١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}_٢} \Leftarrow$ إما $\text{ر}_١ = \text{ر}_٢$ ، أو $\text{ر}_١ + \text{ر}_٢ = \text{ن}$

∴ إما $\text{ر}_١ = \text{ر}_٢ \Leftarrow ٢\text{ر} = ٣\text{ر} - ٥ \Leftarrow ٣\text{ر} - ٢\text{ر} = ٥ \Leftarrow \text{ر} = ٥$

أو $\text{ر}_١ + \text{ر}_٢ = \text{ن} \Leftarrow ٢\text{ر} + ٣\text{ر} - ٥ = ٢٥ \Leftarrow ٥\text{ر} = ٣٠ \Leftarrow \text{ر} = ٦$

∴ قيم $\text{ر} = \{٥ ، ٦\}$

تدريب: أوجد قيمة ر التي تحقق المعادلات الآتية:

(١) $^{٢٨}\text{ق}_{\text{ر}+٤} = {}^{٢٨}\text{ق}_{\text{ر}-٢}$ ، (٢) $^{٢٠}\text{ق}_{٢\text{ر}} = {}^{٢٠}\text{ق}_{\text{ر}+٢}$

مثال: أوجد قيمة ر التي تحقق المعادلة : $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠\ ^{ن}ق_{ن-ر}$

الحل: نفك كلاً من التباديل والتوافيق كلاً بقانونه

$$^{ن}ل_{ر} = ١٢٠\ ^{ن}ق_{ن-ر}$$

$$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر} = ١٢٠ \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر\ \lfloor \cancel{ن}-\cancel{ن}+ر}$$

$$\frac{\cancel{\lfloor ن}}{\cancel{\lfloor ن-ر}} = ١٢٠ \frac{\cancel{\lfloor ن}}{\cancel{\lfloor ن-ر}\ \lfloor ر} \Leftarrow \lfloor ر = ١٢٠ = ٥×٤×٣×٢×١ \Leftarrow ر = ٥$$

مثال: أوجد قيمة ن التي تحقق ما يأتي

(١) $^{ن}ق_{٢} = ٤٣٥$ ، (٢) $٥\ ^{ن}ق_{٦} = ١٢\ ^{ن}ق_{٤}$

الحل: (١) $^{ن}ق_{٢} = ٤٣٥$ (نفك التوافيق بقانونه الرئيسي)

$$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ٢\ \lfloor ن-٢} = ٤٣٥$$

$$\frac{ن(ن-١)\cancel{\lfloor ن-٢}}{\lfloor ٢\ \cancel{\lfloor ن-٢}} = ٤٣٥$$ (بالضرب التبادلي)

$ن(ن-١) = ٨٧٠$ [نبحث عن عاملين متتاليين حاصل ضربهم ٨٧٠ (استخدم الحاسبة لتسريع الحل)
نلاحظ أن $٨٧٠ = ٣٠×٢٩$]

$\therefore ن(ن-١) = ٣٠ × ٢٩ \Leftarrow ن = ٣٠$

(٢) $٥\ ^{ن}ق_{٦} = ١٢\ ^{ن}ق_{٤}$ (نفك التوافيق بقانونه)

$$٥ \frac{\cancel{\lfloor ن}}{\lfloor ٦\ \lfloor ن-٦} = ١٢ \frac{\cancel{\lfloor ن}}{\lfloor ٤\ \lfloor ن-٤}$$

$$\frac{\cancel{٥}}{٦×\cancel{٥}×\cancel{٤}×\cancel{٣}×\cancel{٢}×١\ \cancel{\lfloor ن-٦}} = \frac{١٢}{\cancel{٤}×\cancel{٣}×\cancel{٢}×١(ن-٤)(ن-٥)\cancel{\lfloor ن-٦}}$$

$(ن-٤)(ن-٥) = ٧٢$ (بنفس طريقة المثال السابق)

$(ن-٤)(ن-٥) = ٩ × ٨$ (بنفس طريقة المثال السابق)

$\therefore ن-٤ = ٩ \Leftarrow ن = ٩+٤ \Leftarrow ن = ١٣$

تدريب: أوجد قيمة ر التي تحقق المعادلة : $٢\ ^{ن}ق_{٤} = ٣٥\ ^{\frac{ن}{٢}}ق_{٣}$

مثال: إذا كانت $^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، $\frac{^{ن-٢}ق_{ر-٢} + ^{ن-٢}ق_{ر-١} + ^{ن-١}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = ٢$ ،فأوجد قيمة ن،ر .

الحل: (١) $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠ = ١٠\times٩\times٨ \Leftarrow \therefore ر = ٣$

وبتطبيق علاقة الكرخي في الآتي:

$$\frac{^{ن-٢}ق_{ر-٢} + ^{ن-٢}ق_{ر-١} + ^{ن-١}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = ٢ \Leftarrow \frac{^{ن-١}ق_{ر-١} + ^{ن-١}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = ٢ \Leftarrow \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = ٢$$

$\Leftarrow \frac{ن-ر+١}{ر} = ٢$ (من إثبات سيأتي لاحقاً) .

وبالتعويض بقيمة $ر = ٣$ ينتج: $\frac{ن-٣+١}{٣} = ٢ \Leftarrow ن - ٢ = ٦ \Leftarrow ن = ٨$

تدريب: أوجد قيمة ن ، ر التي فيما يلي :

(١) إذا كانت $^{٧}ل_{ر} = ٨٤٠$ ، $\frac{^{ن}ق_{ر-٢} + ^{ن}ق_{ر-١} + ^{ن+١}ق_{ر}}{^{ن+١}ق_{ر}} = ٢$ $\boxed{ن = ٦ ، ر = ٤}$

(٢) $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٢٠$ $\boxed{ن = ٦ ، ر = ٣}$

مسائل الإثبات:

إن مسائل الإثبات لا تختلف كثيراً عمّا تم تداوله في درس التباديل (راجع إثبات التباديل) مع اختلاف القوانين المستخدمة .

مثال: أثبت أن : $٢ \; {}^{٨}\text{ق}_{٤} = ٣٥ \; {}^{٤}\text{ق}_{٣}$

الحل:

الطرف الأيمن: $٢ \; {}^{٨}\text{ق}_{٤} = ٢ \times \frac{٨!}{٤! \; ٤!} = ٢ \times \frac{\cancel{٨}\times٧\times\cancel{٦}^{\,٢}\times٥\times\cancel{٤!}}{\cancel{٤}\times\cancel{٣}\times\cancel{٢}\times١\times\cancel{٤!}} = ٢\times٧\times٢\times٥ = ١٤٠$ ....(١)

الطرف الأيسر: $٣٥ \; {}^{٤}\text{ق}_{٣} = ٣٥ \times \frac{٤!}{٣! \; ١!} = ٣٥ \times \frac{٤ \times \cancel{٣!}}{\cancel{٣!}} = ٣٥ \times ٤ = ١٤٠$ ....(٢)

من (١) و (٢) ينتج أن: $٢ \; {}^{٨}\text{ق}_{٤} = ٣٥ \; {}^{٤}\text{ق}_{٣}$ (الطرف الأيمن = الطرف الأيسر)

مثال: أثبت أن : $\frac{{}^{ن}\text{ق}_{ر}}{{}^{ن}\text{ق}_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

الحل: نبدأ بالطرف الأيمن إلى أن نتوصل إلى الطرف الأيسر:

الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}\text{ق}_{ر}}{{}^{ن}\text{ق}_{ر-١}} = {}^{ن}\text{ق}_{ر} \div {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} = \frac{ن!}{ر! \; (ن-ر)!} \div \frac{ن!}{(ر-١)! \; (ن-ر+١)!}$

$= \frac{\cancel{ن!}}{ر \; \cancel{(ر-١)!} \; \cancel{(ن-ر)!}} \times \frac{\cancel{(ر-١)!} \; (ن-ر+١) \; \cancel{(ن-ر)!}}{\cancel{ن!}} = \frac{ن-ر+١}{ر} =$ الطرف الأيسر .

علاقة الكرخي: تم ذكرها سابقاً ضمن خواص التوافيق وسننفرد بها هنا لإثباتها واستخدامها في إثبات الكثير من المسائل.

$${}^{ن}\text{ق}_{ر} + {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} = {}^{ن+١}\text{ق}_{ر} \quad [\text{ علاقة الكرخي }]$$

خلاصة علاقة الكرخي:

إن مجموع توفيقين فيهما ن متساوي والفرق بين قيمتي $ر_١$ ، و $ر_٢$ هو ١ ، يعطي توفيقاً فيه ن مضافاً له ١ ، و ر هي قيمة الأكبر في التوفيقين المجموعين:

مثلاً : ${}^{٥}\text{ق}_{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٢} = {}^{٦}\text{ق}_{٣}$ ، ${}^{٧}\text{ق}_{١} + {}^{٧}\text{ق}_{٢} = {}^{٨}\text{ق}_{٢}$ ، ${}^{٢٠}\text{ق}_{٥} + {}^{٢٠}\text{ق}_{٤} = {}^{٢١}\text{ق}_{٥}$

مثال: أثبت أن: $^{ن}ق_{ر} + {^{ن}ق_{ر-1}} = {^{ن+1}ق_{ر}}$.

الحل: الطرف الأيمن $= {^{ن}ق_{ر}} + {^{ن}ق_{ر-1}} = \dfrac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} + \dfrac{ن!}{(ر-1)!\,(ن-ر+1)!}$

$$= \frac{ن!}{ر\,(ر-1)!\,(ن-ر)!} + \frac{ن!}{(ر-1)!\,(ن-ر+1)\,(ن-ر)!} = \frac{(ن-ر+1)\,ن! + ر\,ن!}{ر\,(ن-ر+1)\,(ر-1)!\,(ن-ر)!}$$

$$= \frac{ن!\,(ن-ر+1+ر)}{ر\,(ن-ر+1)\,(ر-1)!\,(ن-ر)!} = \frac{(ن+1)\,ن!}{ر\,(ن-ر+1)\,(ر-1)!\,(ن-ر)!} = \frac{(ن+1)!}{ر!\,(ن+1-ر)!} = {^{ن+1}ق_{ر}}$$

= الطرف الأيسر .

مثال: أثبت أن $^{ن}ق_{ر} + 2\,{^{ن}ق_{ر-1}} + {^{ن}ق_{ر-2}} = {^{ن+2}ق_{ر}}$

الحل: الطرف الأيمن $= {^{ن}ق_{ر}} + 2\,{^{ن}ق_{ر-1}} + {^{ن}ق_{ر-2}}$ [بفك الحد الثاني]

$$= \underbrace{{^{ن}ق_{ر}} + {^{ن}ق_{ر-1}}} + \underbrace{{^{ن}ق_{ر-1}} + {^{ن}ق_{ر-2}}} = \underbrace{{^{ن+1}ق_{ر}} + {^{ن+1}ق_{ر-1}}} = {^{ن+2}ق_{ر}}$$

بتطبيق علاقة الكرخي

تدريب: أثبت أن :

(1) $^{ن}ق_{ر+1} + 2\,{^{ن}ق_{ر}} + {^{ن}ق_{ر-1}} = {^{ن+2}ق_{ر+1}}$

(2) $^{ن}ق_{ر} : {^{ن-1}ق_{ر}} = \dfrac{ن}{ن-ر}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

قاعدة التقسيم (تجزئة مجموعة):

عـدد طـرق تقســيم ن من العناصـر المتماثلة إلى م من المجموعـات المنفصـلة بحيث تتضمن المجموعة الأولى $ن_١$ عنصراً ، والمجموعة الثانية $ن_٢$ عنصراً ،...، والمجموعة الأخيرة $ن_م$ عنصراً

فإن : عدد طرق هذا التقسيم = $\binom{\text{ن}}{\text{ن}_١ ، \text{ن}_٢ ، \dots ، \text{ن}_م} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}_١}\ \underline{|\text{ن}_٢} \times \dots \times \underline{|\text{ن}_م}}$

<u>أو بطريقة أخرى:</u>

عدد طرق التقسيم = ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}_١} + {}^{\text{ن}-\text{ن}_١}\text{ق}_{\text{ن}_٢} + {}^{\text{ن}-\text{ن}_١-\text{ن}_٢}\text{ق}_{\text{ن}_٣} \times \dots \times {}^{\text{ن}_م}\text{ق}_{\text{ن}_م}$

[حيث عدد عوامل حاصل ضرب التوافيق حسب عدد التقسيمات]

<u>ملاحظة:</u> نلاحظ في قاعدة التقسيم أن مجموع عدد عناصر المجموعات الجزئية (التقسيمات) يساوي عدد عناصر المجموعة كاملة.

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع ١٥ كتاباً مختلفاً على ٤ طالبات ، بحيث تأخذ الطالبة الأولى ٤ كتب والثانية ٦ كتب والثالثة كتابين والرابعة ٣ كتب .

الحل: نلاحظ أن الكتب جميعها سيتم توزيعها على الطالبات الأربع فإن العملية هي تجزئة مجموعة مؤلفة من ١٥ عنصراً إلى ٤ مجموعات جزئية منفصلة ، أعداد عناصرها ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٣ على الترتيب ونلاحظ أن : ٤ + ٦ + ٢ + ٣ = ١٥ وعليه فإن:

عدد الطرق الممكنة لتوزيع الكتب على الطالبات الأربع = $\binom{١}{٤,٦,٢,٣} = \dfrac{\underline{|١٥}}{\underline{|٤}\ \underline{|٦}\ \underline{|٢}\ \underline{|٣}}$

$= \dfrac{١٥\times١٤\times\dots\times٧\times\cancel{\underline{|٦}}}{٤\times٣\times٢\times١\times٢\times١\times\cancel{\underline{|٦}}}$ = ٦٣٠٦٣٠٠ طريقة .

<u>حل بطريقة أخرى:</u>

${}^{١٥}\text{ق}_٤ \times {}^{١١}\text{ق}_٦ \times {}^{٥}\text{ق}_٢ \times {}^{٣}\text{ق}_٣$ = ١٣٦٥ × ٤٦٢ × ١٠ × ١ = ٦٣٠٦٣٠٠ طريقة .

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة سلسبيل .

الحل: لاحظ أن المطلوب ترتيب الحروف ، قد يتبادر لذهنك أنها تباديل لوجود كلمة (ترتيب) ولكن التكرار الموجود لبعض الأحرف (مثل س ، س وكذلك ل ، ل) يجعل من الضروري حذف أي تكرار إضافي غير اللذي لدينا في الكلمة لأنه ليس لها معنى. ففي الخانات الست نرتب فقط مواقع الحروف التي لدينا دون تكرار أي حرف غير تكراره اللذي في الكلمة. فحرف السين (س) مكتوب لدينا مرتين لذلك لا يمكن كتابته أكثر من ذلك فنكتفي بترتيب الحرفين فقط وبالمثل حرف اللام وأما حرفي الباء والياء(ب،ي) فنرتبهم فقط دون تكرارهم. لذا نستخدم قاعدة التقسيم وكما يلي:

عدد حروف الكلمة (ن) = ٦ أحرف ، عدد تكرار حرف السين ($ن_{١}$) = ٢ (حرفين)

عدد تكرار حرف اللام ($ن_{٢}$) = ٢ (حرفين) ، عدد تكرار حرف الباء ($ن_{٣}$) = ١ (حرف)

عدد تكرار حرف الباء ($ن_{٤}$) = ١ (حرف)

∴ عدد الطرق = $\binom{٦}{١,١,٢,٢} = \frac{\lfloor ٦}{\lfloor ١ \lfloor ١ \lfloor ٢ \lfloor ٢} = ٣ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ١٨٠$ طريقة .

<u>حل بطريقة أخرى:</u>

$^{٦}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٢} \times {}^{٢}ق_{١} \times {}^{١}ق_{١} = ١٥ \times ٦ \times ٢ \times ١ = ١٨٠$ طريقة .

تدريبات: (١) يراد ترتيب تسع سيارات : اثنتين منها لونها أحمر ، وثلاث لونها أبيض ، والباقي لكل وحدة لون مختلف عن الأحمر والأبيض ، فبكم طريقة يمكن ترتيبها . $\boxed{٣٠٢٤٠}$

(٢) يراد تقسيم ١٥ طالباً إلى ثلاث مجموعات متماثلة مكوّنة من ٨ ، ٤ ، ٣ طلاب ، بكم طريقة يتم ذلك . $\boxed{٢٢٥٢٢٥}$

(٣) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة بلابل . $\boxed{٣٠}$

المسائل اللفظية

عزيزي الطالب قبل إعطاءك هنا المسائل اللفظية سأعطي لك جدولاً سيساعدك كثيراً في التمييز بين مسائل التباديل والتوافيق اللفظية .

التمييز بين التباديل والتوافيق في المسائل اللفظية

التباديل	التوافيق
المفهوم للمسألة يوحي بالترتيب أو التباديل مثل تكوين أعلام ، توزيع جوائز ، فائز أول ...	المفهوم للمسألة يوحي بالتوافيق أي لا يوحي بالترتيب أو التباديل .
ذكر لفظ الترتيب أو التبديل أو مختلفة الحروف أو الأرقام مثل تنظيم كتب ، ترتيب جلوس ، ...	لا يذكر لفظ الترتيب أو التبديل عدا في ترتيب حروف كلمة معينة مثل ترتيب حروف كلمة سلسبيل وسبق تبيانها .
العينة المختارة تكون لها مهام محددة ومختلفة مثل رئيس ، نائب ، محرر ، ...	العينة المختارة ليس لها مهام محددة (أي الكل يشترك في مهمة واحدة وهم فيها سواء)
اختيار العينة بشكل متتابع أو متوالي ، مثل واحدة تلو الأخرى ، على التوالي ، بالتتالي ، وبدون إعادة ،... وهذه الألفاظ تأتي غالباً في الاحتمالات.	اختيار العينة دفعة واحدة (معاً) أي إذا لم يذكر لفظ على التوالي أو الواحدة تلو (بعد) الأخرى أو بدون إعادة .

أولاً: المسائل اللفظية في التوافيق:

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار خمس طالبات من بين عشر طالبات متميزات لتمثيل المدرسة في مسابقة علمية .

الحل: واضح أن ترتيب الطالبات في المجموعة المختارة غير مهم حيث لم يحدد وظائف الطالبات المختارات لذلك سنختار مجموعة من خمسة عناصر وهي مجموعة جزئية من مجموعة تتكوّن من عشرة عناصر مختلفة وعليه يكون عدد طرق الاختيار يساوي عدد توافيق عشرة عناصر مأخوذة خمسة في كل مرة أي أن:

$${}^{١٠}ق_{٥} = \frac{\underline{|١٠}}{\underline{|٥}\ \underline{|٥}} = \frac{١١\times١٠\times٩\times٨\times٧\times٦\ \cancel{\underline{|٥}}}{٥\times٤\times٣\times٢\times١\ \cancel{\underline{|٥}}} = ٣\times٢\times٧\times٦ = ٢٥٢ \text{ طريقة .}$$

ملاحظات مهمة:

١- كلمة "على الأقل" تعني العدد نفسه وكل مرة تزيد واحد إلى أن نصل إلى ن .

٢- كلمة "على الأكثر" تعني العدد نفسه والأقل منه إلى أن نصل إلى الصفر .

٣- الـ واو "و" تعني الضرب والـ أو "أو" تعني الجمع .

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار ٣ كتب على الأكثر من بين ٨ كتب .

الحل: لاحظ أنه يمكن اختيار: ٣ كتب أو كتابان أو كتاب واحد أو لا يتم اختيار شي .

وبتحويل الاختيار اللفظي إلى مسألة توافيق يكون:

عدد الطرق = ${}^{8}\text{ق}_{3} + {}^{8}\text{ق}_{2} + {}^{8}\text{ق}_{1} + {}^{8}\text{ق}_{0} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ طريقة .

مثال: مجموعة مكوّنة من ٧ طلاب ، و ٤ طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكوّنة من ٥ أشخاص في الحالات التالية: (أ) بدون شرط . (ب) تتكون اللجنة من ثلاث طلاب على الأقل .

الحل: (أ) بدون شرط :

نجمع كلاً من عدد الطلاب مع عدد الطالبات فيكون المجموع = ١١ شخصاً .

∵ اللجنة المراد تكوينها من ٥ أشخاص

∴ عدد الطرق = ${}^{11}\text{ق}_{5} = \dfrac{11\times10\times9\times8\times7\,\cancel{\boxed{6}}}{5\times4\times3\times2\times1\,\cancel{\boxed{6}}} = 462$ طريقة .

(ب) تتكون اللجنة من ثلاث طلاب على الأقل :

هذا يعني أنه يتم إكمال اللجنة الخماسية من الطالبات لذلك سيتم اختيار :

٣ طالب $\boxed{\text{و}}$ طالبتان أو ٤ طلاب $\boxed{\text{و}}$ طالبة أو ٥ طلاب $\boxed{\text{و}}$ صفر طالبة (لا توجد طالبة)

∴ عدد الطرق = ${}^{7}\text{ق}_{3} \times {}^{4}\text{ق}_{2} + {}^{7}\text{ق}_{4} \times {}^{4}\text{ق}_{1} + {}^{7}\text{ق}_{5} \times {}^{4}\text{ق}_{0}$.

$= 35 \times 6 + 35 \times 4 + 21 \times 1 = 210 + 140 + 21 = 371$ طريقة .

مثال: اختبار مكوّن من ثمانية أسئلة بكم طريقة يستطيع طالب أن يختار ستة منها إذا كان عليه أن يجيب عن سؤالين على الأقل من بين الثلاثة الأولى .

الحل: سيجيب الطالب عن الاختبار بالشكل الأتي :

حل سؤالين من الثلاثة الأولى $\boxed{\text{و}}$ أربعة من الخمسة أو ثلاثة من الثلاثة الأولى $\boxed{\text{و}}$ ثلاثة من الخمسة

∴ عدد الطرق = ${}^{3}\text{ق}_{2} \times {}^{5}\text{ق}_{4} + {}^{3}\text{ق}_{3} \times {}^{5}\text{ق}_{3} = 3\times5 + 1\times10 = 15 + 10 = 25$ طريقة .

تدريبات: (١) من بين خمسة عشر عضواً ، يراد اختيار لجنة فرعية مكوّنة من خمسة أشخاص ، بكم طريقة يتم ذلك . ٣٠٠٣

(٢) بكم طريقة يمكن اختيار ٥ أسئلة للإجابة عنها في امتحان اشتمل على ٦ أسئلة . ٦

(٣) بكم طريقة يمكن اختيار ٤ كتب على الأقل من بين ٨ كتب . ١٦٣

(٤) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين تتكوّن كل مهما من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بشرط ألاّ يتكرر اختيار الشخص الواحد في كلتي اللجنتين معاً . ٣١٥٠

(٥) بكم طريقة يمكن تكوين لجنة في مصنع من سبعة أعضاء يتم اختيارهم من بين تسع إناث وخمسة ذكور بحيث يكون في الفريق ثلاثة ذكور فقط . ١٢٦٠

ثانياً: المسائل اللفظية المشتركة (تباديل + توافيق):

قد يشترك كلاً من التوافيق والتباديل في بعض الأسئلة التي توجد بها شروط معينة وبعد تعرفك عزيزي الطالب على كل من صفات التباديل وكذلك التوافيق صار بإمكانك التمييز بين مختلف المسائل اللفظية حتى المشتركة منها وإليك بعض هذه المسائل .

مثال: من بين خمس عشرة طالبة ، أريد تكوين لجنة مكوّنة من خمس طالبات فبكم طريقة يمكن تشكيل هذه اللجنة في الحالتين التاليتين :

(أ) بدون شرط . (ب) بشرط أن تتكوّن اللجنة من رئيساً ونائباً وثلاثة أعضاء .

الحل: (أ) بدون شرط : عدد الطرق = $^{١٥}ق_{٥}$ = ٣٠٠٣ طريقة .

(ب) بشرط أن تتكوّن اللجنة من رئيساً ونائباً وثلاثة أعضاء : إن اختيار كل من الرئيس والنائب تباديل لكل واحد مهمة معينة ، ونظراً لاشتراك أكثر من شخص في مهمة واحدة (العضوية) فهنا توافيق . وعليه : عدد الطرق = $^{١٥}ل_{٢}$ × $^{١٣}ق_{٣}$ = ٢١٠ × ٢٨٦ = ٦٠٠٦٠ طريقة .

مثال: كم عدد طرق اختيار خمسة أسئلة للإجابة عنها في امتحان ما يشتمل على ستة أسئلة ، إذا علم أن السؤال الأول إجباري .

الحل: ∵ السؤال الأول إجباري فإنه وجب علينا اختياره فيكون اختيار ١ من ١ أي $^{١}ل_{١}$ أو $^{١}ق_{١}$

عدد الطرق = $^{١}ل_{١}$ × $^{٥}ق_{٤}$ = ١ × ٥ = ٥ طرق .

حل آخر : عدد الطرق = $^{١}ق_{١}$ × $^{٥}ق_{٤}$ = ١ × ٥ = ٥ طرق .

تدريب: مجموعة مكوّنة من عشرة طلاب ، وخمس طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكوّنة من سبعة أشخاص في الحالات الآتية: (أ) بدون شرط . $\boxed{٦٤٣٥}$

(ب) من طالب رئيساً وعضوية ثلاث طالبات وثلاثة طلاب . $\boxed{٨٤٠٠}$

(ج) من طالب رئيساً وطالبة نائبة وعضوية ثلاثة طلاب على الأقل . $\boxed{٥٦٧٠٠}$

مبرهنة ذات الحدين

يتكوّن المقدار الجبري $(\text{أ}+\text{ب})$ من حدين هما: أ ، ب ، وبإمكاننا أن نرفع هذا المقدار إلى قوة صحيحة موجبة ، ثم نستخدم خاصية التوزيع والضرب المتكرر نحصل على مفكوك لهذا المقدار . فمثلاً :

$$(\text{أ}+\text{ب}) = \text{أ}+\text{ب}$$

$$(\text{أ}+\text{ب})^{٢} = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}+\text{ب}) = \text{أ}^{٢} + ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}$$

$$(\text{أ}+\text{ب})^{٣} = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})^{٢} = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}^{٢} + ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}) = \text{أ}^{٣} + ٣\text{أ}^{٢}\text{ب} + ٣\text{أب}^{٢} + \text{ب}^{٣}$$

$$(\text{أ}+\text{ب})^{٤} = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})^{٣} = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}^{٣} + ٣\text{أ}^{٢}\text{ب} + ٣\text{أب}^{٢} + \text{ب}^{٣})$$

$$= \text{أ}^{٤} + ٤\text{أ}^{٣}\text{ب} + ٦\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢} + ٤\text{أب}^{٣} + \text{ب}^{٣}$$

وكذلك يمكن فك المقادير $(\text{أ}+\text{ب})^{٥}$ ، $(\text{أ}+\text{ب})^{٦}$ ، ... الخ .

ولكن هل يوجد قانون عام لفك مثل هذه المقادير . هذا ما توضحه المبرهنة الآتية :

مبرهنة ذات الحدين:

إذا كانت ن عدداً صحيحاً فإن :

$$(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}\,\text{أ}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{٠} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}\,\text{ب}^{١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢}\,\text{ب}^{٢} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{أ}^{٠}\,\text{ب}^{\text{ن}}$$

$$\boxed{\therefore (\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}} \quad \text{(قانون نيوتن)}$$

قوانين وخواص مفكوك $(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}}$:

١) عدد حدود المفكوك يساوي $(\text{ن}+١)$ حداً .

٢) الحد الاول = $\text{أ}^{\text{ن}}$ خالي من ب ، والحد الأخير = $\text{ب}^{\text{ن}}$ خالي من أ .

٣) أس الحد الأول (أ) يبدأ بـ ن ويتناقص بمقدار واحد حتى الصفر في الحد الأخير . بينما أس الحد الثاني (ب) يبدأ بالصفر ويتزايد بمقدار واحد حتى يصل إلى ن في الحد الأخير .

٤) مجموع أسي أ ، ب في كل حد يساوي ن .

٥) معاملات الحدود المتناظرة متساوية (بمعنى معامل الحد الأول = معامل الحد الأخير ، ومعامل الحد الثاني = معامل الحد ما قبل الأخير ... وهكذا) .

٦) إذا كان الحد الثاني سالباً فإن حدود المفكوك الفردية تكون موجبة والحدود الزوجية تكون سالبة (+ ، − ، + ، − ، ...) .

٧) لإيجاد مجموع معاملات مفكوك $(\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}}$ نضع المتغيرات في ذات الحدين يساوي واحد (١) وعليه يكون مجموع معاملات $(\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}} = (١+١)^{\text{ن}} = ٢^{\text{ن}}$ وإليك مثالين توضيحيين :

فمثلاً مجموع معاملات مفكوك $(٢\text{س}+٣\text{ص})^{٣} = (٢\times١+٣\times١)^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥$.

وكذلك مجموع معاملات مفكوك $(٣\text{س}-\text{ص})^{٤} = (٣\times١-١)^{٤} = (٢)^{٤} = ١٦$.

مثال: أوجد مفكوك : (١) $(\text{س}+\text{ص})^{٦}$. (٢) $\left(\text{ص}-\frac{١}{٢\text{ص}}\right)^{٥}$.

الحل: (١) $(\text{س}+\text{ص})^{٦} = {}^{٦}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{٦}\,\text{ص}^{٠} + {}^{٦}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{٥}\,\text{ص}^{١} + {}^{٦}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٣}$

$+ {}^{٦}\text{ق}_{٤}\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٤} + {}^{٦}\text{ق}_{٥}\,\text{س}^{١}\,\text{ص}^{٥} + {}^{٦}\text{ق}_{٦}\,\text{س}^{٠}\,\text{ص}^{٦}$

$= \text{س}^{٦} + ٦\text{س}^{٥}\text{ص} + ١٥\text{س}^{٤}\text{ص}^{٢} + ٢٠\text{س}^{٣}\text{ص}^{٣} + ١٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٤}$

$+ ٦\text{س}\,\text{ص}^{٥} + \text{ص}^{٦}$

الحل: (٢) $\left(\text{ص}-\frac{١}{٢\text{ص}}\right)^{٥} = {}^{٥}\text{ق}_{٠}\,\text{ص}^{٥}\left(\frac{-١}{٢\text{ص}}\right)^{٠} + {}^{٥}\text{ق}_{١}\,\text{ص}^{٤}\left(\frac{-١}{٢\text{ص}}\right)^{١} + {}^{٥}\text{ق}_{٢}\,\text{ص}^{٣}\left(\frac{-١}{٢\text{ص}}\right)^{٢}$

$+ {}^{٥}\text{ق}_{٣}\,\text{ص}^{٢}\left(\frac{-١}{٢\text{ص}}\right)^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}\,\text{ص}^{١}\left(\frac{-١}{٢\text{ص}}\right)^{٤} + {}^{٥}\text{ق}_{٥}\,\text{ص}^{٠}\left(\frac{-١}{٢\text{ص}}\right)^{٥}$

$= \text{ص}^{٥} - \frac{٥}{٢}\text{ص}^{٣} + \frac{٥}{٢}\text{ص} - \frac{٥}{٤}\text{ص}^{-١} + \frac{٥}{١٦}\text{ص}^{-٣} - \frac{١}{٣٢}\text{ص}^{-٥}$

تدريب: أوجد مفكوك $\left(٢\text{أ} - \frac{١}{٢\text{أ}}\right)^{٦}$

الحد العام لمفكوك ذات الحدين $(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}}$:

الحد العام في مفكوك $(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}}$ هو الحد الذي ترتيبه $(\text{ر}+١)$ [لأننا نبدأ بوضع $\text{ر} = ٠$]

ويرمز له بالرمز $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، حيث $\text{ر}+١ \leqslant \text{ن}$ ويعطى بالعلاقة: $\boxed{\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ب}^{\text{ر}}}$

استخدامات الحد العام لمفكوك ذات الحدين (الفوائد) :

من أهم استخدامات الحد العام هو إيجاد حد معين دون إجراء عملية الفك وإليك الاستخدامات:

١) إيجاد الحدود معلومة الرتبة (مثلاً عند إيجاد الحد السادس نضع $\text{ر} = ٥$ في الحد العام فيكون $\text{ح}_{٥+١} = \text{ح}_{٦}$ ، ... وهكذا) .

٢) إيجاد الحدود غير معلومة الرتبة وكما يلي:

أ) إيجاد الحد الذي يحوي على $\text{س}^{\text{م}}$ أو معامله وكما يلي:

$\boxed{١}$ نضع $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ب}^{\text{ر}}$ ، ثم نحسبه بحسب ما لدينا من معطيات .

$\boxed{٢}$ نضع أس (س) في $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ = م [(س) $^{\text{مرفوع لأي قوة}}$ = $\text{س}^{\text{م}}$ ⇐ القوة]

$\boxed{٣}$ نعوض عن قيمة ر في $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ فنحصل على الحد الذي يحوي $\text{س}^{\text{م}}$ ومعامله .

ب) إيجاد الحد الخالي من س وكما يلي:

$\boxed{١}$ نحسب $\text{ح}_{\text{ر}+١}$.

$\boxed{٢}$ نضع أس (س) في $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ = صفر [(س) $^{\text{مرفوع لأي قوة}}$ = $\text{س}^{٠}$ ⇐ القوة]

(لأن $\text{س}^{٠} = ١$ ، فيكون الحد خالي من س)

مثال: أوجد الحد السابع في مفكوك $(٢س - ص)^{٩}$.

الحل: باستخدام علاقة الحد العام $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

حيث : أ = ٢س ، ب = − ص ، ن = ٩ ، ر = ٦ وبالتعويض :

$\therefore ح_{٧} = ح_{٦+١} = {}^{٩}ق_{٦}\ (٢س)^{٣}\ (-ص)^{٦} = ٨٤ \times ٨س^{٣} \times ص^{٦} = ٦٧٢\ س^{٣}\ ص^{٦}$

مثال: أوجد الحد الثامن في مفكوك $(٢س^{٣} + \frac{١}{س})^{١٠}$.

الحل: باستخدام علاقة الحد العام $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

حيث : أ = $٢س^{٣}$ ، ب = $\frac{١}{س}$ ، ن = ١٠ ، ر = ٧ وبالتعويض :

$\therefore ح_{٨} = ح_{٧+١} = {}^{١٠}ق_{٧}\ (٢س^{٣})^{٣}\ (\frac{١}{س})^{٧} = ١٢٠ \times ٨س^{٩} \times \frac{١}{س^{٧}} = ٩٦٠\ س^{٢}$

مثال: أوجد معامل $ح_{٧}$ في مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{٢}{٣}\ س)^{١١}$.

الحل: باستخدام علاقة الحد العام $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

حيث : أ = $٣س^{٢}$ ، ب = $-\frac{٢}{٣}$ س ، ن = ١١ ، ر = ٦ وبالتعويض :

$\therefore ح_{٧} = ح_{٦+١} = {}^{١١}ق_{٦}\ (٣س^{٢})^{٥}\ (\frac{-٢}{٣}\ س)^{٦} = ٤٦٢ \times ٢٤٣س^{١٠} \times \frac{٦٤}{٧٢٩}\ س^{٦} = ٩٨٥٦\ س^{١٦}$

$\therefore$ معامل $ح_{٧}$ = ٩٨٥٦ .

تدريب: أوجد الحد السادس $(ح_{٦})$ في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١١}$. $\boxed{ح_{٦} = ٤٦٢\ س}$

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال: أوجد الحد الذي يحوي على $\text{س}^{٩}$ في مفكوك $(\text{س}^{٢} - \frac{٣}{\text{س}^{٣}})^{١٢}$.

الحل: عند إيجاد الحد الذي يحوي $\text{س}^{٩}$ أو معامله فإن لهما نفس الخطوات للوصول إلى أحدهما:

نلاحظ أن رتبة الحد غير معلومة ($\text{ر}+١ = ؟$) لذلك نفرض الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{٩}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

وعليه: $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ب}^{\text{ر}}$ ، علماً أن $\text{أ} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{ب} = -\frac{٣}{\text{س}^{٣}}$ ، $\text{ن} = ١٢$

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}}\ (\text{س}^{٢})^{١٢-\text{ر}}\ (\frac{-٣}{\text{س}^{٣}})^{\text{ر}}$$

$$= {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{٢٤-٢\text{ر}} \times (-٣)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-٣\text{ر}} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \times (-٣)^{\text{ر}} \times \text{س}^{٢٤-٥\text{ر}}$$

$\because \text{س}^{٢٤-٥\text{ر}} = \text{س}^{٩} \Leftarrow ٢٤-٥\text{ر} = ٩ \Leftarrow -٥\text{ر} = ٩-٢٤ \Leftarrow \text{ر} = \frac{١٥}{٥} \Leftarrow \text{ر} = ٣$

وبعد معرفة ر فإن الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{٩}$ هو :

$$\text{ح}_{٣+١} = \text{ح}_{٤} = {}^{١٢}\text{ق}_{٣} \times (-٣)^{٣} \times \text{س}^{٢٤-٥\times٣} = ٢٢٠ \times -٢٧ \times \text{س}^{٢٤-١٥} = -٥٩٤٠\ \text{س}^{٩}$$

ومعامل $\text{س}^{٩}$ هو -٥٩٤٠

مثال: أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(٢\text{س}^{٥} - \frac{١}{\text{س}^{٣}})^{٨}$.

الحل: بنفس خطوات المثال السابق مع ملاحظة وضع أس (س) في $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يساوي صفر :

$\text{أ} = ٢\text{س}^{٥}$ ، $\text{ب} = -\frac{١}{\text{س}^{٣}}$ ، $\text{ن} = ٨$

$\because \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ب}^{\text{ر}}$ ،

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}\ (٢\text{س}^{٥})^{٨-\text{ر}}\ (\frac{-١}{\text{س}^{٣}})^{\text{ر}}$

$$= {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \times ٢^{٨-\text{ر}} \times \text{س}^{٤٠-٥\text{ر}} \times (-١)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-٣\text{ر}} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \times ٢^{٨-\text{ر}} \times (-١)^{\text{ر}} \times \text{س}^{٤٠-٨\text{ر}}$$

$\because$ الحد خالي من س $\Leftarrow \text{س}^{٤٠-٨\text{ر}} = \text{س}^{٠} \Leftarrow ٤٠-٨\text{ر} = ٠ \Leftarrow ٨\text{ر} = ٤٠ \Leftarrow \text{ر} = ٥$

$\therefore$ الحد الخالي من س هو :

$$\text{ح}_{٥+١} = \text{ح}_{٦} = {}^{٨}\text{ق}_{٥} \times ٢^{٨-٥} \times (-١)^{٥} \times \text{س}^{٤٠-٨\times٥} = ٥٦ \times ٢^{٣} \times -١ \times \text{س}^{٤٠-٤٠}$$

$$= ٥٦ \times ٨ \times -١ \times \text{س}^{٠} = -٤٤٨$$

تدريب: أوجد: (١) الحد الذي يحوي $\text{س}^{٨}$ في مفكوك $(٢\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}})^{١٠}$ ومعامله. $\boxed{\text{ح}_{٥} = ١٣٤٤٠\ \text{س}^{٨}}$

(٢) الحد الخالي من س في مفكوك $(\text{س} - ٢\text{س}^{-١})^{١٠}$. $\boxed{\text{ح}_{٦} = -٨٠٦٤}$

....

....

....

الحدود الوسطى في المفكوك $(أ+ب)^{ن}$:

لإيجاد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$ ، وحيث أن عدد حدود المفكوك $(ن+١)$ فهناك حالتين هما:

$\boxed{١}$ عندما $ن$ زوجي فإن عدد الحدود $(ن+١)$ فردي فيكون للمفكوك حد أوسط وحيد رتبته (ترتيبه) هي $\frac{ن}{٢}+١$.

$\boxed{٢}$ عندما $ن$ فردي فإن عدد الحدود $(ن+١)$ زوجي وفي هذه الحالة يوجد حدان أوسطان رتبة (ترتيب) الأول $\frac{ن+١}{٢}$ ، ورتبة (ترتيب) الثاني $\frac{ن+١}{٢}+١$.

مثال: أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(٢ص - \frac{ص^٢}{٤})^٩$.

الحل: ∵ الأس ٩ عدد فردي ، فإنه يوجد حدان أوسطان .

رتبة الأول $= \frac{٩+١}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$ وعليه يكون :

$$ح_٥ = ح_{٤+١} = {}^{٩}ق_{٤}\,(٢ص)^{٩-٤}\left(\frac{-ص^٢}{٤}\right)^٤ = ١٢٦ \times (٢ص)^٥ \times \frac{ص^٨}{٤^٤}$$

$$= ١٢٦ \times ٣٢ \times \frac{١}{٢٥٦} \times ص^{١٣} = \frac{٦٣}{٤}\,ص^{١٣} \quad \text{(الأوسط الأول)}$$

رتبة الثاني $= ٥+١ = ٦$

$$ح_٦ = ح_{٥+١} = {}^{٩}ق_{٥}\,(٢ص)^{٩-٥}\left(\frac{-ص^٢}{٤}\right)^٥ = ١٢٦ \times (٢ص)^٤ \times \frac{ص^{١٠}}{٤^٥}$$

$$= ١٢٦ \times ١٦ \times \frac{١}{١٠٢٤} \times (-ص^{١٤}) = -\frac{٦٣}{٣٢}\,ص^{١٤} \quad \text{(الأوسط الثاني)}$$

تدريب: أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(\frac{س}{٣} + \frac{٢}{س})^٩$.

$\boxed{ح_٥ = \frac{٦٧٢}{٨١}\,س \text{ ، } ح_٦ = \frac{١٣٤٤}{٢٧\,س}}$

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

مثال: أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(٢س - \frac{١}{س})^{١٢}$.

الحل: ∵ الأس ١٢ عدد زوجي ، ∴ يوجد حد أوسط واحد .

وعليه : رتبة الحد الأوسط = $\frac{ن}{٢} + ١ = \frac{١٢}{٢} + ١ = ٦+١ = ٧$

∴ $ح_٧ = ح_{٦+١} = {}^{١٢}ق_٦ \, (٢س)^{١٢-٦} \, (-\frac{١}{س})^٦ = ٩٢٤ \, (٢س)^٦ \, (-\frac{١}{س})^٦$

$= ٩٢٤ \times ٦٤ \, س^٦ \times \frac{١}{س^٦} = ٥٩١٣٦$ لاحظ لا يحتوي على س .

تدريبات: (١) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(٢س^٣ + \frac{١}{٢س})^{١٤}$. $\boxed{ح_٨ = ٣٤٣٢س^{١٤}}$

(٢) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^٨$ مبيناً أنه يخلو من س . $\boxed{ح_٥ = ٧٠}$

النسبة بين كل حد والحد السابق له في مفكوك $(أ س + ب ص)^{ن}$:

إذا كان $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، حدين متجاورين (متتاليين) في مفكوك $(أ س + ب ص)^{ن}$ فإن :

$\boxed{١}$ $ح_{ر+١} : ح_{ر} = \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ب ص}{أ س}$ [يستخدم لإيجاد النسبة بين حدين متجاورين]

$\boxed{٢}$ $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ب}{أ}$ [يستخدم لإيجاد النسبة بين معاملي حدين متجاورين]

حالات خاصة: (أ) إذا لم تكن الحدود متتالية نستخدم قاعدة التسلسل فمثلاً :

$\frac{ح_{٦}}{ح_{٤}} = \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} \times \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}}$ ، وبالمثل لإيجاد النسبة بين المعاملات

(ب) إذ كان النسبة بالشكل $\frac{ح_{ر}}{ح_{ر+١}}$ فإننا نقلب القاعدة فتكون :

$\frac{ح_{ر}}{ح_{ر+١}} = \frac{ر}{ن-ر+١} \times \frac{أ س}{ب ص}$ ، وبالمثل لإيجاد النسبة بين المعاملات .

تنبيه: يجب مراعاة ترتيب الحدود حسب المطلوب .

تذكر :

$$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

استنتاج النسبة السابقة:

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{^{ن}ق_{ر}\,(أ س)^{ن-ر}\,(ب ص)^{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}\,(أ س)^{ن-ر+١}\,(ب ص)^{ر-١}}$$

$$= \frac{ن-ر+١}{ر} \times (أ س)^{ن-ر} \times (أ س)^{-ن+ر-١} \times (ب ص)^{ر} \times (ب ص)^{-ر+١}$$

$$= \frac{ن-ر+١}{ر} \times (أ س)^{-١} \times (ب ص)^{١} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ب ص}{أ س}$$

مثال: أوجد النسبة بين الحدين الخامس والرابع في مفكوك $(٣س + ٤ص)^{١٢}$.

الحل: $ن = ١٢$ ، الحد الأول $= ٣س$ ، الحد الثاني $= ٤ص$ ، $ر = ٤$ (نأخذ $ر$ للقيمة الصغيرة)

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}}$$

$$\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{١٢-٤+١}{٤} \times \frac{٤ص}{٣س} = \frac{٩}{٤} \times \frac{٤ص}{٣س} = \frac{٣ص}{س}$$

مثال: أوجد النسبة بين معاملي الحدين التاسع والعاشر في مفكوك $(٢س - ٣ص)^{١٤}$.

الحل: $ن = ١٤$ ، الحد الأول = ٢س ، الحد الثاني = −٣ص ، $ر = ٩$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر}}{\text{معامل } ح_{ر+١}} = \frac{ر}{ن-ر+١} \times \frac{\text{معامل الحد الأول}}{\text{معامل الحد الثاني}}$$

$$\frac{ح_{٩}}{ح_{١٠}} = \frac{٩}{١٤-٩+١} \times \frac{٢}{-٣} = \frac{٩}{٦} \times \frac{٢}{-٣} = -١$$

[بإمكانك إيجاد $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}}$ ثم قلب الناتج للحصول على $\frac{ح_{٩}}{ح_{١٠}}$] .

تدريبات: (١) في مفكوك $(٢س - \frac{٣}{س})^{١١}$ أوجد كلاً من :

أ النسبة بين الحدين الثالث والثاني . $\boxed{\frac{-١٥}{٢س^{٢}}}$

ب النسبة بين الحدين الرابع والخامس . $\boxed{\frac{س^{٢}}{-٣}}$

(٢) أوجد النسبة بين معاملي الحدين الرابع والخامس في مفكوك $(٢س - \frac{١}{٤س^{٢}})^{٥}$ $\boxed{ح_{٤}:ح_{٥} = ١٦:-١}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

معادلات ذات الحدين ومسائل الإثبات :

مثال: إذا كان الحد الثالث في مفكوك $(١ - \text{س})^{٨}$ يساوي ١١٢ ، فأوجد قيمة س .

الحل: $\text{ر} = ٢$ ، $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = \text{س}$ ، $\text{ن} = ٨$ ، $\text{ح}_{٣} = ١١٢$

وكما نعلم أن المعادلات تتكون من طرفين:

$\therefore \text{ح}_{٣} = ١١٢$

$\text{ح}_{٢+١} = ١١٢$

$^{٨}\text{ق}_{٢} \times (١)^{٨-٢} \times \text{س}^{٢} = ١١٢$ (الحد العام)

$٢٨ \times \text{س}^{٢} = ١١٢ \Leftarrow \text{س}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{س} = \pm ٢$

وزاري ٢٠١٧-٢٠١٨: في مفكوك $(\text{س} + ٢)^{٨}$ إذا كان $\text{ح}_{٤}$ يساوي ٤٤٨ ، فأوجد قيمة س.

.... $\boxed{\text{س} = ١}$

....

....

....

....

....

وزاري ٢٠١٦-٢٠١٧: في مفكوك $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{٤}{\text{س}}\right)^{١١}$ أوجد قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين يساوي صفر .

الحل: رتبة الحد الأوسط الأول $\frac{\text{ن}+١}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \Leftarrow \text{ح}_{٦}$

رتبة الحد الأوسط الثاني $= ٦+١ = ٧ \Leftarrow \text{ح}_{٧}$

$\because \text{ح}_{٦} + \text{ح}_{٧} = ٠ \Leftarrow \text{ح}_{٧} = -\text{ح}_{٦} \Leftarrow \frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٦}} = -١$

وبتطبيق التناسب بين حدين متتاليين: $\text{ن} = ١١$ ، $\text{ر} = ٦$ ، الحد الأول $= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ ، الحد الثاني $= \frac{-٤}{\text{س}}$

$\frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٦}} = -١$

$\frac{١١-٦+١}{٦} \times \frac{-٤}{\text{س}} \div \frac{\text{س}^{٢}}{٢} = -١$

$\frac{٦}{٦} \times \frac{-٤}{\text{س}} \times \frac{٢}{\text{س}^{٢}} = -١ \Leftarrow \frac{-٨}{\text{س}^{٣}} = -١ \Leftarrow \text{س}^{٣} = ٨ \Leftarrow \text{س} = ٢$

تدريب: إذا كان $ح_{١٣} = ح_{١٤}$ في مفكوك $(١ - س)^{٢٥}$ ، فأوجد قيمة س حيث $س \neq ٠$.

$\boxed{س = -١}$

مثال: إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية في مفكوك $(٣س + ٤ص)^{ن}$ هي:

٢٧ : ٣٦ : ٣٢ ، فأوجد قيمة ن ورتب هذه الحدود .

الحل: نفرض أن الثلاثة الحدود المتتالية هي: $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{٣٦}{٢٧}$$

$$\frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٣٦}{٢٧} \quad (\text{بالضرب في } \tfrac{٣}{٤}) \Leftarrow \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{١٠٨}{١٠٨} \Leftarrow \frac{ن - ر + ١}{ر} = -١$$

$$\Leftarrow ن - ر + ١ = ر \Leftarrow ن - ٢ر + ١ = ٠ \;\ldots\ldots\; (١)$$

وبالمثل: $\dfrac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \dfrac{٣٢}{٣٦}$

$$\frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣٦} \quad (\text{بالضرب في } \tfrac{٣}{٤}) \Leftarrow \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٩٦}{١٤٤} \Leftarrow \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٢}{٣}$$

$$\Leftarrow ٣ن - ٣ر + ٣ = ٢ر \Leftarrow ٣ن - ٥ر + ٣ = ٠ \;\ldots\ldots\; (٢)$$

وبحل المعادلتين بطريقة الحذف وبعد ضرب طرفي المعادلة (١) في ٣ يكون :

$$٣ن - ٦ر + ٣ = ٠ \;\ldots\ldots\; (٣)$$

وبطرح المعادلة (٣) من (٢) كما يلي:

$$\begin{array}{r} ٣ن - ٥ر + ٣ = ٠ \\ -\;(\,٣ن - ٦ر + ٣ = ٠\,) \\ \hline \end{array}$$

$$٠ + ر - ٥ = ٠ \Leftarrow ر = ٥$$

وبالتعويض بقيمة ر في المعادلة (١) نحصل على :

$$ن - ٢ر + ١ = ٠ \Leftarrow ن - ٢ \times ٥ + ١ = ٠ \Leftarrow ن - ٩ = ٠ \Leftarrow ن = ٩$$

وعليه فإن ترتيب الحدود: $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$

تدريب: إذا كانت ثلاثة معاملات لحدود متتالية في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هي:

٢٠ ، ١٩٠ ، ١١٤٠ فما قيمة ن ؟ وما رتب تلك الحدود .

$\boxed{ر = ٢ \text{ ، } ن = ٢٠}$

....

....

....

....

....

....

مثال: إذا كان قيم الحد الثاني والثالث والرابع في مفكوك $(س+ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هي:

١٦ ، ١١٢ ، ٤٤٨ على الترتيب . أوجد قيم كلاً من : ن ، س ، ص .

الحل: $\because$ $ح_{٢} = ١٦$ ، $ح_{٣} = ١١٢$ ، $ح_{٤} = ٤٤٨$

$\therefore \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{١١٢}{١٦}$

$\frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{ص}{س} = ٧ \Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{١٤}{ن - ١}$ .... ①

$\because \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٤٤٨}{١١٢}$

$\frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س} = ٤ \Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{١٢}{ن - ٢}$ .... ②

وبمقابلة ① و ② يكون : $\frac{١٤}{ن - ١} = \frac{١٢}{ن - ٢}$ (بالضرب التبادلي)

$١٤ن - ٢٨ = ١٢ن - ١٢ \Leftarrow ٢ن = ١٦ \Leftarrow ن = ٨$

نعوض بقيمة ن في كل من ① ، ② على التوالي فيكون :

$\frac{ص}{س} = \frac{١٤}{٨-١} \Leftarrow \frac{ص}{س} = ٢ \Leftarrow ص = ٢س$ .... ③

$\frac{ص}{س} = \frac{١٢}{٨-٢} \Leftarrow \frac{ص}{س} = ٢ \Leftarrow ص = ٢س$ .... ④

لن نستفيد من ④ لأنها نفس ③ ، ولكن يمكن الاستفادة من قاعدة الحد العام :

$ح_{٢} = {}^{٨}ق_{١} \times س^{٨-١} \times ص^{١} \Leftarrow ح_{٢} = ٨ س^{٧} ص$

$\because ح_{٢} = ١٦$ ، $ص = ٢س$

$\therefore ١٦ = ٨ س^{٧} \times ٢س \Leftarrow ١٦ = ١٦ س^{٨} \Leftarrow س^{٨} = ١ \Leftarrow س = ١$

تدريب: في مفكوك $(٣ + ٢\text{س})^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية كان $ح_{٥} = ٦\ ح_{٤}$ ، $ح_{٨} = ٣\ ح_{٧}$ ، فأوجد قيمة كل من ن ، س .

$\boxed{ن = ٢٧ \text{ ، } س = \frac{٣}{٢}}$

سؤال وزاري ٢٠٠٨: في مفكوك $(\text{س}+\text{ص})^{٨}$ إذا كان $ح_{٤} : ح_{٣} = ٤ : ١$ وقيمة الحد الأوسط = ١١٢٠ ، فأوجد قيمة س ، ص .

الحل: $\because \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٤}{١} \Leftarrow \frac{٨-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س} = ٤ \Leftarrow \frac{ص}{س} = ٢ \Leftarrow ص = ٢س$ .... (*)

نوجد الحد الأوسط ، رتبته $= \frac{ن}{٢} + ١ = \frac{٨}{٢} + ١ = ٤+١ = ٥$

$\therefore ح_{٥} = ١١٢٠$ (وبتطبيق قاعدة الحد العام على الطرف الأيمن)

$^{٨}ق_{٤}\ س^{٨-٤}\ ص^{٤} = ١١٢٠$ (بالتعويض بـ ص = ٢س من (*))

$٧٠\ س^{٤}\ (٢س)^{٤} = ١١٢٠ \Leftarrow ٧٠ \times ١٦\ س^{٨} = ١١٢٠ \Leftarrow ١١٢٠\ س^{٨} = ١١٢٠$

$\Leftarrow س^{٨} = ١ \Leftarrow س = ١$

وبالتعويض بقية س = ١ في المعادلة (*) يكون $ص = ٢ \times س \Leftarrow ص = ٢ \times ١ \Leftarrow ص = ٢$

مثال: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٢س+٣ص)^{٢ن+١}$ متساويان أثبت أن :

س : ص = ٣ : ٢

الحل: رتبة الحد الأوسط الأول = $\frac{(٢ن+١)+١}{٢}$ = $\frac{٢ن+٢}{٢}$ = ن + ١

رتبة الحد الأوسط الثاني = ن + ١ + ١ = ن + ٢

∴ الحدان الأوسطان هما : $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن+٢}$

وبما أنهما متساويان ، أي $ح_{ن+١}$ = $ح_{ن+٢}$ ⇐ $\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}}$ = ١

∴ $\frac{(٢ن+١) - (ن+١) +١}{ن + ١}$ × $\frac{٣ص}{٢س}$ = ١ ⇐ ∴ $\frac{٢ن+١ - ن-١+١}{ن+١}$ × $\frac{٣ص}{٢س}$ = ١

$\frac{ن + ١}{ن + ١}$ × $\frac{٣ص}{٢س}$ = ١ ⇐ $\frac{٣ص}{٢س}$ = ١ (بضرب الطرفين في $\frac{٢}{٣}$)

∴ س : ص = ٣ : ٢ (وهو المطلوب)

تدريب: إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك $(أس^{٢} - \frac{١}{ب س})^{٩}$ يساوي الحد الخالي من س في مفكوك $(أس + \frac{١}{ب س^{٢}})^{٩}$ فأثبت أن أ ب = ١ .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مسائل إضافية :

مثال: باستخدام مفكوك ذي الحدين أوجد قيمة $(١٫٠٠٥)^{١٠}$ مقربة إلى أربعة أرقام عشرية .

الحل: ∵ المطلوب العدد مقرب إلى أربعة منازل عشرية نتوقف عند ذلك :

نقوم بتقسيم (١٫٠٠٥) إلى جمع أو طرح عدد صحيح وكسر عشري وفي مثالنا هذا سنستخدم عملية الجمع مع جعل العدد الصحيح في الحد الأول لتجنب الكسور ذات الأرقام الكبيرة. وقس على ذلك بقية المسائل من هذا النوع .

$(١٫٠٠٥)^{١٠} = (١ + ٠٫٠٠٥)^{١٠} = \text{مجـ}\ {}^{١٠}\text{ق}_{ر}\ (١)^{١٠-ر} \times (٠٫٠٠٥)^{ر}$ [مهما يكن أس ١ = ١]

$= {}^{١٠}\text{ق}_{٠} \times (٠٫٠٠٥)^{٠} + {}^{١٠}\text{ق}_{١} \times (٠٫٠٠٥)^{١} + {}^{١٠}\text{ق}_{٢} \times (٠٫٠٠٥)^{٢} + {}^{١٠}\text{ق}_{٣} \times (٠٫٠٠٥)^{٣} + \dots$

$= ١ + ١٠ \times \frac{٥}{١٠٠٠} + ٤٥ \times \frac{٢٥}{١٠٠٠٠٠٠} + ١٢٠ \times \frac{١٢٥}{١٠^{٩}} + \dots$

$= ١ + ٠٫٠٥ + ٠٫٠٠١١٢٥ + ٠٫٠٠٠٠١٥ + \dots$

$\approx ١٫٠٥١١٤$

$\therefore (١٫٠٠٥)^{١٠} \approx ١٫٠٥١١$

تدريب: باستخدام مفكوك ذي الحدين أوجد قيمة كلاً مما يأتي:

(١) $(١٫٠٣)^{١٠}$ مقربة إلى ثلاثة منازل عشرية .	١٫٣٤٤
(٢) $(٠٫٩٩٨)^{٥}$ مقربة إلى منزلتين عشريتين .	٠٫٩٩
(٣) $(٥٫١)^{٤}$ مقرباً الناتج إلى منزلتين عشريتين .	٦٧٦٫٥٢

ملاحظة: ١) $(س + س^{-١})^{ن} - (س - س^{-١})^{ن} = ٢\ (ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ...)$

$= ٢$ (مجموع الحدود الزوجية)

٢) $(س + س^{-١})^{ن} + (س - س^{-١})^{ن} = ٢\ (ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...)$

$= ٢$ (مجموع الحدود الفردية)

مثال: أوجد قيمة $(١ + \sqrt{٢})^{٥} - (١ - \sqrt{٢})^{٥}$.

الحل: بتطبيق الملاحظة (١) السابقة مع ملاحظة أن $ن = ٥$ وعليه فإن:

عدد الحدود $= ن + ١ = ٥+١ = ٦$

$\therefore (١ + \sqrt{٢})^{٥} - (١ - \sqrt{٢})^{٥} = ٢\ (ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦})$

نوجد كلاً من : $ح_{٢} = {}^{٥}ق_{١}\ (١)^{٥-١} \times (\sqrt{٢})^{١} = ٥ \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$

$ح_{٤} = {}^{٥}ق_{٣}\ (١)^{٥-٣} \times (\sqrt{٢})^{٣} = ١٠ \times ٢\sqrt{٢} = ٢٠\sqrt{٢}$

$ح_{٦} = {}^{٥}ق_{٥}\ (١)^{٥-٥} \times (\sqrt{٢})^{٥} = ١ \times ٤\sqrt{٢} = ٤\sqrt{٢}$

$\therefore (١ + \sqrt{٢})^{٥} - (١ - \sqrt{٢})^{٥} = ٢\ (٥\sqrt{٢} + ٢٠\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢})$

$= ٢(٢٩\sqrt{٢}) = ٥٨\sqrt{٢}$

تدريب: أوجد قيمة $(١ + \sqrt{س})^{٤} - (١ - \sqrt{س})^{٤}$. $\boxed{٢\ (١ + ٦س + س^{٢})}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

أسئلة وزارية من ٢٠١٤-٢٠١٩ في مبدأ العد ومفكوك ذات الحدين

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١- إذا كان ${}^{ن}ق_{٢} = ٣٦$ ، فإن قيمة ن = ٨ ( )

٢- عدد طرق فتح حقيبة رقمية ذات (٣) خانات علم رقم أحد خاناتها = ١٠٠ ( )

٣- من المجموعة {٣,٤,٥,٨} يمكن تكوين سته أعداد ثلاثية مختلفة تقبل القسمة على ٣ ( )

٤- عدد طرق ترتيب (٥) أخوة في صف بحيث يجلس الأكبر في بداية الصف والأصغر في نهايته = $\underline{|٣}$ ( )

٥- ${}^{٩}ق_{٤} : {}^{٩}ق_{٢} = \frac{٧}{٢}$ ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١- مجموع المعاملات في مفكوك $(س+ص)^{٦}$ = ...

٢- عدد الأعداد الزوجية من رقمين مختلفين من المجموعة {١ ، ٣ ، ٤} = ...

٣- إذا كان ١+٦س+ ...... + $س^{٦}$ = ٦٤ فإن س = ...

٤- إذا كان ن ∈ $ص^{+}$ فإن $(س+ص)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن}$ ....

٥- رتبة الحد الأوسط في مفكوك $(٢-س)^{٥}\ (٢-س)^{٥}$ يساوي ....

٦- عدد طرق ترتيب حروف كلمة اليمن يساوي ....

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) ${}^{١١}ق_{ر} = {}^{١١}ق_{ر-٣}$ ، قيمة ر = ... [٢ ، ١١ ، ٧ ، ٨]

٢) رتبة الحد الأوسط في مفكوك $(س+ص)^{٢ن}$ = ... [ن ، ن+١ ، $\frac{ن}{٢}$+١ ، ٢ن+١]

٣) عدد طرق ترتيب ٤ طلاب في صف مستقيم = ... [١٢٠ ، ٦٠ ، ٢٤ ، ٣٦]

٤) (ن+١)$\underline{|ن}$ = ١٢٠ فإن قيمة ن = ... [٤ ، ٦ ، ٣ ، ٥]

٥) عدد طرق ترتيب ٦ كتب على رف بحيث يبقى كتابان معينان لاينفصلان = [$\underline{|٦}$ ، ٢$\underline{|٥}$ ، $\underline{|٢} \times \underline{|٤}$]

٦) إذا كان ٥$\underline{|ن}$ = ٣٦٠٠ ، فإن ن = ... [٦ ، ٥ ، ٤]

٧) عدد حدود المفكوك $(أ+ب)^{ن+١}$ = ... [ن ، ن+١ ، ن+٢]

٨) عدد طرق ترتيب حروف كلمة "تحرير" = ... [$\frac{ك}{٢}$ ، $\underline{|٤}$ ، $\underline{|٣}$ ، ٢$\underline{|٥}$]

٩) إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ن^{٢} - ن$ فإن ر = ... [٢ ، ٣ ، ١ ، صفر]

١٠) ${}^{٧}ق_{٤}$ = ... [١٦ ، ٣٥ ، ٢٥]

١١) في مفكوك $(س+ص)^{ن+١}$ ، مجموع أسي س و ص في كل حد يساوي .... [ن ، ن+١ ، ن-١ ، ن+٢]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١- عدد المجموعات الجزئية من س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٣} والمكون من عنصرين = ...	٦
٢- إذا كان مجموع أسي أ ،ب في كل حد في مفكوك$(أ+ب)^{٢ن-١}$ يساوي١٧ فإن ن = ...	٥
٣- إذا كان عدد المصافحات بين ن شخصاً = ١٠ ، فإن عدد الأشخاص = ...	٨
٤- إذا كان ${}^{ن}ق_{٢} = {}^{ن}ق_{٤}$ فإن قيمة ن = ...	٧
٥- إذا كان $\underline{|٤} = {}^{٤}ل_{ر}$ ، فإن ر = ...	٤
٦- في المفكوك $(س+ص)^{٨}$ مجموع الأسين لكل من س،ص في أي حد يساوي	٩
٧- إذا كان ${}^{ن}ل_{ن} = ٥٠٤٠$ ، فإن قيمة ن = ...	١٠

س٥: في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل الحدين السادس والخامس متساويان فأوجد قيمة ن .

س٦: في مفكوك $(س + ٢)^{٨}$ إذا كان $ح_{٤}$ يساوي ٤٤٨ فأوجد قيمة س .

س٧: لدينا $س_{ن}$ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ } والمطلوب:

(١) عدد التطبيقات المتباينة من $س_{ن} \longrightarrow س_{ن}$.(٢) عدد الأعداد الزوجية المختلفة من $س_{ن}$ ذات ٣ أرقام أو ٤ أرقام .

س٨: في مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٤}{س}\right)^{١١}$ أوجد قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين يساوي صفر.

س٩: إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٣٦٠$ ، $\underline{|ر} = ٢٤$ ، أوجد $^{٣ن}ق_{ر}$.

س١٠: إذا كان $^{ن}ل_{٢} = {}^{ن-١}ق_{٢} + {}^{ن-١}ق_{٣}$ أوجد قيمة ن .

....

....

....

س١١: إذا كان $^{٥ن}ق_{٤} = {}^{٥ن}ق_{٦}$ أوجد (١) ن . (٢) $\underline{|٢ن}$. (٣) $^{ن^٢}ل$.

....

....

....

....

س١٢: في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{١٥}$ أوجد :

(١) الحد الخالي من س . (٢) إذا كانت النسبة بين $ح_{١٠}$ ، $ح_{٩}$ = ٢١ أوجد قيمة س .

....

....

....

....

س١٣: إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٨٤٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٣٥$ ، أوجد $^{ن+٣}ل_{ر-١}$.

....

....

....

س١٤: في المفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{١٠}$ ، أوجد الحد الذي يحوي $س^٢$.

....

....

....

....

س١٥: بكم طريقة يمكن أن يجلس ٤ طلاب و٣ مدرسين في خط مستقيم في الحالتين :

(١) بدون شرط . (٢) بالتناوب .

....

....

....

س١٦: إذا كان $^{٧}ق_{٢س-٥} = {}^{٧}ق_{٢س+٣}$ ، فما قيمة س .

....

....

ملحق

مثلث باسكال (مثلث الكرخي)

إن مفكوك ذا الحدين (أ+ب)^{ن} قد تم التعبير عنه سابقاً باستخدام التوافيق . كما أنه يمكن أيجاد مفكوك ذات الحدين باستخدام طريقة أخرى تسمى مثلث باسكال .

إن مثلث باسكال يستخدم في فك المقدار (أ+ب)^{ن} حيث يتكوّن المثلث من عدة صفوف حيث أن عدد الصفوف يكون حسب قيمة الأس مضافاً له واحد أي عدد الصفوف = ن+١ . فإذا كان الأس المرفوع له المقدار ٣ فإن عدد الصفوف ن+١ = ٣+١ = ٤ ، وإذا كان الأس ٧ فإن عدد الصفوف يكون ٧+١ = ٨ ، ... وهكذا. وسنبيّن ذلك في المثال الآتي .

ملاحظات عند تكوين مثلث باسكال لإيجاد المفكوك :

١ – مثلث باسكال يتكوّن من صفوف عددها (ن+١) .

٢ – بداية ونهاية كل صف في مثلث باسكال يساوي ١ .

٣ – يكتب ناتج جمع العددين بين العددين في الأسف بالوسط .

٤ – عدد الحدود الناتجة من المفكوك يزيد واحد دائماً عن الأس للمقدار .

مثال: أوجد مفكوك (س+ص)^{٧} باستخدام مثلث باسكال .

الحل: (١) ∵ الأس = ٧

∴ نضع صفوف عددها ٨ على شكل مثلث بداية ونهاية كل صف ١ كما يلي ثم نكمل رسم المثلث بوضع أضلاع مثلث حول الصفوف:

(٢) نجمع العددين في الصف الثاني ونضع الناتج أسفلهم في الصف الثاني في الوسط أي ١+١=٢ فنضع ٢ أسفل بين ١ و ١ لاحظ الشكل المقابل . نستمر بالعملية للصف الثالث حيث يكون ١+٢=٣ وأيضاً ٢+١=٣ فنكتب الناتج بين العددين في الأسفل . وهكذا نستمر بالعملية إلى الصف الأخير وهو وهو الصف الثامن .

(٣) بعد الانتهاء من جمع العددين وكتابة الناتج أسفلهم فيكون الصف الأخير يمثل معاملات حدود المفكوك وعددها مثل ما ذكرنا سابقاً ن+١ = ٧+١ = ٨ .

١
١ ١
١ ٢ ١
١ ٣ ٣ ١
١ ٤ ٦ ٤ ١
١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١
١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١
١ ٧ ٢١ ٣٥ ٣٥ ٢١ ٧ ١

(٤) نكتب المفكوك مع ملاحظة أن أس الحد الأول يبدأ بـ ٧ في المفكوك ويقل تدريجياً . بينما أس الحد الثاني يبدأ بــ ٠ ويزداد تدريجياً . وعليه فإن :

$$(س+ص)^{٧} = ١س^{٧}ص^{٠}+٧س^{٦}ص^{١}+٢١س^{٥}ص^{٢}+٣٥س^{٤}ص^{٣}+٣٥س^{٣}ص^{٤}+٢١س^{٢}ص^{٥}+٧س^{١}ص^{٦}+١س^{٠}ص^{٧}$$

$$\therefore (س+ص)^{٧} = س^{٧}+٧س^{٦}ص+٢١س^{٥}ص^{٢}+٣٥س^{٤}ص^{٣}+٣٥س^{٣}ص^{٤}+٢١س^{٢}ص^{٥}+٧س\ ص^{٦}+ص^{٧}$$

تدريب: أوجد مفكوك $(س+ص)^{٦}$ باستخدام مثلث باسكال. الجواب موجود صفحة ١٠١ باستخدام التوافيق

تم الانتهاء من وحدة مبدأ العد ومبرهنة ذات الحدين

كل الشكر لمن ساعدني في إتمامه

إعداد وتصميم وطباعة الأستاذ / صوفي رمضان حمادي
شبام – حضرموت – ٢٠٢٠م
soramnet@gmail.com - ٧٧٠٠٦٠٧٦٦-٩٦٧+

الاحتـمـــالات

مقدمة :

إن قضايا الحظ والصدفة كانت تعتبر في الماضي من الأمور الغامضة التي لا تخضع للتحليل ولكن الرياضيين أثبتوا مؤخراً عكس ذلك ، حيث استطاعوا أن يحولوا أكثر هذه القضايا إلى علم يساهم في تنمية وتقدم البشر وهو علم الاحتمال .

فكلمة احتمال يقصد بها فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة ، وعلم الاحتمال هو دراسة التجارب العشوائية . والتجربة : هي كل عملية أو إجراء تؤدي إلى ملاحظة أو مشاهدة ، والتجربة نوعان تجربة محددة نعلم نتائجها مسبقاً كالتجارب المختبرية (مثل التجارب الفيزيائية والتجارب الكيميائية) والنوع الثاني تجربة عشوائية .

مفاهيم أساسية في الاحتمال (تعاريف مهمة) :

١) التجربة العشوائية: وهي العملية (التجربة) التي نعلم مسبقاً جميع نواتجها ولكن لا نعلم أياً من هذه النتائج سيقع . مثل رمي قطعة نقود ، رمي حجر نرد ، عقد مباراة بين فريقين ، سحب عينة من مجموعة أشياء .

٢) فضاء العينة: وهي جميع نواتج التجربة العشوائية ، ويرمز لها بالرمز (ع) . مثل :

(أ) تجربة رمي قطعة نقود ، فضاء العينة لها ع= {ص ، ك} ، وعدد عناصر فضاء العينة ن(ع) = ٢ .

(ب) تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين ، وهنا سيكون فضاء العينة على شكل أزواج مرتبة لحدوث رمية أولى تمثل المسقط الأول للزوج المرتب ورمية ثانية تمثل المسقط الثاني وعليه فإن: ع = {(ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك)} وعدد عناصر فضاء العينة ن(ع)=٤

(جـ) رمي قطعتين نقود متماثلتين مرة واحدة (في نفس الوقت) .

فضاء العينة ع = {ص ص ، ص ك ، ك ك} وعليه فإن ن(ع) = ٣ .

لاحظ أن ص ك نفسه ك ص لأنه لا نستطيع التفريق بين القطعتين بسبب تماثلهما فالنتيجة الظاهرة لنا صورة من أحدهما وكتابة من الآخر . ويجب الانتباه إلى أن فرصة وقوع الحادثة ص ك ضعف فرصة وقوع باقي الحوادث .

(د) رمي حجر نرد مرة واحدة ، فضاء العينة لها ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ،
وعدد عناصرها ن(ع) = ٦

... وهكذا .

ملاحظة: عدد عناصر فضاء العينة ن(ع) = $ن^م$ ، حيث ن عدد ما يحويه الشكل من احتمالات ظهور و م عدد مرات الإجراء (الرمي ، القذف ، السحب ، ...)

٣) الحادثة: هي مجموعة جزئية من فضاء العينة (ع) ويرمز لها بحرف مثل : أ ، ب ، جـ ، ... .

وللحادثة أو الحدث أنواع :

(أ) الحادثة البسيطة (الأولية): وهي حادثة تشمل على عنصر واحد (نتيجة واحدة) وتسمى أيضاً حادثة ابتدائية .

(ب) الحادثة المركبة: هي حادثة تشمل على أكثر من عنصر .

(جـ) الحادثة الأكيدة (المؤكدة): هي الحادثة المؤكد وقوعها أي هي فضاء العينة ع .

(د) الحادثة المستحيلة: هي الحادثة التي لا يمكن أن تقع أو هي الحادثة التي لاتحوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ وهي المجموعة الخالية .

مثال: ألقيت قطعة نقود مرتين أوجد عناصر ما يلي:

(١) فضاء العينة .

(٢) حادثة ظهور الصورة مرتين .

(٣) حادثة ظهور صورة مرة واحدة على الأقل .

(٤) حادثة عدم ظهور أي من الصورة أو الكتابة .

(٥) حادثة ظهور كتابة واحدة على الأكثر .

(٦) حادثة ظهور صورة واحدة بالضبط .

(٧) حادثة عدم ظهور كتابة في أي من الرميتين .

(٨) حادثة عدم ظهور كتابة في الرميتين معاً .

(٩) حادثة ظهور صورتين على الأقل .

(١٠) حادثة ظهور صورة أو كتابة مرة واحدة على الأقل .

الحل:

(١) ع = { (ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك) }

(٢) ٩ = { (ص،ص) } (حادثة بسيطة)

(٣) ب = { (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ص،ص) } (حادثة مركبة)

(٤) جـ = ∅ (حادثة مستحيلة)

(٥) د = { (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ص،ص) } (حادثة مركبة)

(٦) هـ = { (ص،ك) ، (ك،ص) } (حادثة مركبة)

(٧) م = { (ص،ص) } (حادثة بسيطة)

(٨) ن = { (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ص،ص) } (حادثة مركبة)

(٩) و = { (ص،ص) } (حادثة بسيطة)

(١٠) ي = { (ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك) } (حادثة أكيدة)

٤) فضاء الحوادث (ك): هي كل المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من فضاء العينة ع ويرمز لها بالرمز (ك) . وعدد عناصرها ن(ك) = ٢ن ، حيث ن عدد عناصر فضاء العينة .

فمثلاً: إذا احتوى فضاء العينة على ٤ عناصر [أي ن(ع) = ٤] فإن عدد المجموعات الجزئية (فضاء الحوادث) ن(ك) = ٢٤ = ٢×٢×٢×٢ = ١٦ مجموعة .

مثال: أكتب فضاء الحوادث لتجربة رمي قطعة نقود .

الحل: ∵ ع = { ص ، ك } ، ن(ع) = ٢

∴ عدد المجموعات الجزئية (عدد عناصر فضاء الحوادث) ن(ك) = ٢٢ = ٢×٢ = ٤ مجموعات

∴ ك = { {ص} ، {ك} ، {ص،ك} ، ∅ }

٥) الحادثتان المتنافيتان(المنفصلتان): هما حدثان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر أي ٩ ∩ ب = ∅

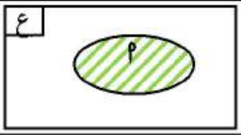
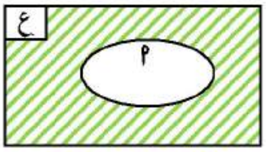
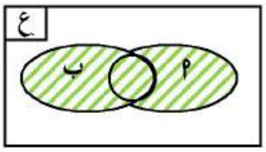
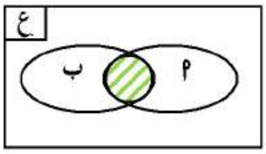
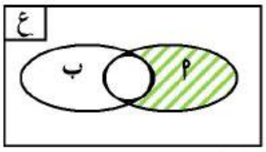
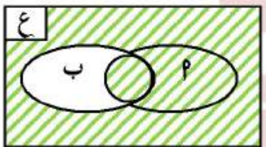
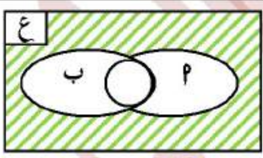
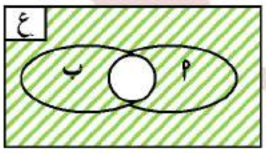
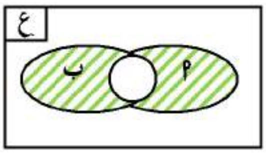
٦) قانونا دي مورجان:

(أ) (٩ ∪ ب)َ = ٩َ ∩ بَ (عدم وقوع إحداهما على الأقل)

(ب) (٩ ∩ ب)َ = ٩َ ∪ بَ (عدم وقوعهما معاً) أو (وقوع أحداهما على الأكثر)

العمليات على الحوادث :

نلخص لك عزيزي الطالب أهم العمليات على الحوادث في الجدول الآتي مع تمثيلها بأشكال ڤن :

الحادثة	الصورة الرمزية	الصورة اللفظية	تمثيل الحدث بـ ڤن
أ	أ	وقوع الحادثة أ	
متممة حادثة	أَ	عدم وقوع أ	
اتحاد حادثتين	أ ∪ ب = ب ∪ أ	وقوع إحدى الحادثتين على الأقل وقوع الحادثة الأولى أو الثانية أو كليهما وقوع أي من الحادثتين	
تقاطع حادثتين	أ ∩ ب = أ ب = ب ∩ أ	وقوع الحادثتين أ و ب معاً وقوع أ و وقوع ب	
الفرق بين حادثتين	أ − ب = أ بَ	وقوع الحادثة أ وعدم وقوع الحادثة ب وقوع الحادثة أ فقط	
الحادثة أ اتحاد متممة الحادثة ب	أ ∪ بَ = (ب − أ)َ	وقوع أ أو عدم وقوع ب عدم وقوع ب فقط	
متممة الاتحاد (دي مورجان)	(أ ∪ ب)َ = أَ بَ	عدم وقوع أي من الحادثتين أ و ب عدم وقوع إحداهما على الأقل	
متممة التقاطع (دي مورجان)	(أ ∩ ب)َ = أَ ∪ بَ	عدم وقوع الحادثتين أ و ب معاً وقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأكثر عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب	
الفرق بين اتحاد حدثين وتقاطعهما	(أ ∪ ب) − أ ب = (أ − ب) ∪ (ب − أ)	وقوع إحدى الحادثتين أ و ب وليس كليهما وقوع إحدى الحادثتين أ أو ب فقط	

تذكير: إذا كانت ء ، ب حادثتين في فضاء العينة ع فإن :		
١) ءَ ∪ ء = ع	٢) ءَ ∩ ء = ∅	٣) ء ∪ ع = ع
٤) ء ∩ ع = ء	٥) ءَ = ع − ء	٦) عَ = ∅
٧) ء ∩ ∅ = ∅	٨) ء ∪ ∅ = ء	٩) ء − ب = ء ∩ بَ = ءبَ
ملاحظة: إذا كان : ء ⊂ ب ، فإن ء ∪ ب = ب ، ء ∩ ب = ء		

دالة الاحتمال: إذا كان ع فضاء العينة و ى فضاء الحوادث وكانت الحادثة ء ∋ ى فإن الدالة

حا : ى ⟵ [٠ ، ١] تسمى دالة احتمال إذا تحققت فيها المسلمات التالية :

(١) حا (ء) ⩾ ٠ ، ∀ ء ∋ ى (أي أن احتمال وقوع أي حدث هو عدد حقيقي غير سالب) .

(٢) حا (ع) = ١ (أي أن وقوع الحادثة الأكيدة يساوي واحد) .

(٣) لكل حادثتين متنافيتين ء ، ب يكون : حا (ء ∪ ب) = حا (ء) + حا (ب) .

(يمكن تعميم هذه المسلمة لأكثر من حادثتين)

بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمال

مبرهنة(١) : احتمال وقوع الحادثة المستحيلة يساوي صفر : أي أن حا (∅) = صفر

البرهان: ∵ ع ∪ ∅ = ع (بإدخال " حا " على الطرفين)

حا (ع ∪ ∅) = حا (ع) [∵ ع ، ∅ متنافيتان أي ع ∩ ∅ = ∅]

حا (ع) + حا (∅) = حا (ع) (بطرح حا (ع) من الطرفين)

حا (∅) = حا (ع) − حا (ع) ⇐ حا (∅) = صفر ، (هـ . ط . ث)

مبرهنة(٢) : إذا كانت ءَ هي الحادثة المكملة للحادثة ء في فضاء العينة (ع) ، فإن :

حا (ءَ) = ١ − حا (ء)

البرهان: ∵ ء ∪ ءَ = ع (بإدخال " حا " على الطرفين)

حا (ء ∪ ءَ) = حا (ع) [∵ ء ، ءَ متنافيتان]

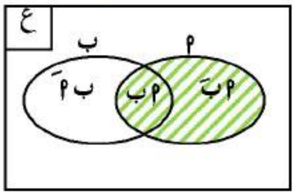
حا (ء) + حا (ءَ) = حا (ع) (بطرح حا (ء) من الطرفين)

حا (ءَ) = حا (ع) − حا (ء) [∵ حا (ع) = ١ ، مسلمة]

حا (ءَ) = ١ − حا (ء) ، (هـ . ط . ث)

مبرهنة(٣) : لأي حادثتين ٲ ، ب ∋ ى ، فإن : حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – حا (ٲ ب)

البرهان: من الشكل المقابل:



∵ ٲ بَ ∪ ٲ ب = ٲ (بإدخال " حا " على الطرفين)

حا (ٲ بَ ∪ ٲ ب) = حا (ٲ) [∵ ٲ بَ ، ٲ ب متنافيتان]

∴ حا (ٲ بَ) + حا (ٲ ب) = حا (ٲ) (بطرح حا (ٲ ب) من الطرفين)

حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – حا (ٲ ب) ، (هـ . ط . ث)

[ملاحظة: ∵ ٲ بَ = ٲ – ب ⇐ حا(ٲ–ب) = حا (ٲ) – حا (ٲ ب)]

نتيجة(١) : إذا كانت ٲ ، ب حادثتان متنافيتان فإن :

(١) حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) ، (٢) حا (ب ٲَ) = حا (ب)

البرهان: (١) ∵ حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – حا (ٲ ب) (مبرهنة ٣)

و ∵ ٲ ، ب حادثتين متنافيتين (أي ٲ ب = ∅ ⇐ حا (ٲ ب) = حا (∅) = ٠)

∴ حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – ٠ ⇐ حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) ، (هـ . ط)

(٢) برهانه بالمثل لـ (١)

....

....

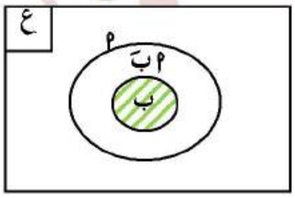
....

....

نتيجة(٢) : لأي حادثتين ٲ ، ب ∋ ى ، ب ⊆ ٲ فإن :

(١) حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – حا(ب) ، (٢) حا (ب) ≥ حا (ٲ)

البرهان: بالاعتماد على الشكل المرسوم جانباً



(١) ∵ حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – حا (ٲ ب) (مبرهنة ٣)

و ∵ ب ⊆ ٲ ⇐ ٲ ب = ب ⇐ حا (ٲ ب) = حا (ب)

∴ حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – حا(ب)

(٢) نعلم من (١) أن حا (ٲ بَ) = حا (ٲ) – حا(ب) [∵ حا (ٲ بَ) ≤ ٠ مسلمة]

∴ حا (ٲ) – حا(ب) ≤ ٠ ⇐ حا (ٲ) ≤ حا(ب) ⇐ حا (ب) ≥ حا(ٲ) ، (هـ . ط)

نتيجة(٣) : لأي حادثتين أ ∈ ك فإن : ٠ ≤ حا (أ) ≤ ١

البرهان: لدينا ∅ ، أ ، ع ثلاث حوادث

∵ ∅ ⊆ أ ⊆ ع (بإدخال " حا " على الطرفين)

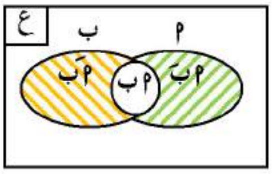
∴ حا (∅) ⊆ حا (أ) ⊆ حا (ع) ⇐ ٠ ⊆ حا (أ) ⊆ ١ ، (هـ . ط)

إن المبرهنة الآتية تعتبر من أهم المبرهنات الأساسية في الاحتمالات وتعرف بـ

" قانون الاحتمال الكلّي "

مبرهنة(٤) : لأي حادثتين أ ، ب ∈ ك ، فإن : حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أب)

البرهان: بالاستعانة بالشكل المرسوم جانباً:



∵ أ ∪ ب = أ ∪ ب أَ (بإدخال " حا " على الطرفين)

حا (أ ∪ ب) = حا (أ ∪ ب أَ) [∵ أ ، ب أَ متنافيتان]

∴ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب أَ) [∵ حا (ب أَ) = حا (ب) – حا (أب) مبرهنة ٣]

∴ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أب) ، (هـ . ط . ث)

ملخص قوانين الاحتمال:

(١) حا (ع) = ١ . ، (٢) حا (∅) = صفر . ، (٣) ٠ ≤ حا(أ) ≤ ١ .

(٤) حا (أَ) = ١ – حا (أ) .

(أ) حا (أ ∩ ب)َ = ١ – حا (أ ∩ ب) .

(ب) حا (أ ∪ ب)َ = ١ – حا (أ ∪ ب) .

(٥) حا (أ بَ) = حا (أ) – حا (أب)

(أ) حا (أ بَ) = حا (أ)
(ب) حا (ب أَ) = حا (ب) } ، حيث أ ، ب متنافيتان .

(ج) حا (أ بَ) = حا (أ) – حا (ب) ، حيث ب ⊆ أ

(د) حا (أ بَ) = حا (أ) – حا (أ) = صفر ، حيث أ ⊆ ب

(٦) حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أب) [قانون الاحتمال الكلّي]

❖ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) ، حيث أ ، ب متنافيتان .

يمكنك الاستفادة عزيزي الطالب من المسلمات والمبرهنات التي تعرفت عليها في حل كثير من المسائل وإليك بعضها .

مثال: إذا كان : حا (أ) = ٠,٤ ، حا (ب) = ٠,٢ ، حا (أ ∪ ب) = ٠,٥ ، حا (أب) = ٠,١

أوجد احتمال : (١) عدم وقوع الحادثة أ . (٢) وقوع الحادثة أ دون وقوع الحادثة ب .

(٣) وقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأكثر . (٤) عدم وقوع أي من الحادثتين أ أو ب .

الحل: علينا ترجمت الصيغة اللفظية إلى صيغة رمزية ثم تطبيق القانون المناسب لاحظ الجدول صـ٤ـ

(١) عدم وقوع الحادثة أ يعني :

حا (أَ) = ١ − حا (أ) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

(٢) وقوع الحادثة أ دون وقوع الحادثة ب يعني :

حا (أ − ب) = حا (أ بَ) = حا (أ) − حا (أب) = ٠,٤ − ٠,١ = ٠,٣

(٣) وقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأكثر يعني :

حا (أ ∩ ب)َ = ١ − حا (أ ∩ ب) نفس القاعدة المستخدمة في حل الفرع (١)

= ١ − ٠,١ = ٠,٩

(٤) عدم وقوع أي من الحادثتين أ أو ب يعني :

حا (أ ∪ ب)َ = ١ − حا (أ ∪ ب) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

تدريب: إذا كان : حا (أ) = ٠,٥ ، حا (ب) = ٠,٧ ، حا (أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد احتمال :

(١) وقوع أ فقط. $\boxed{٠,٢}$ (٢) وقوع أ وعدم وقوع ب. $\boxed{٠,٢}$ (٣) وقوع ب وعدم وقوع أ. $\boxed{٠,٤}$

(٤) وقوع أحد الحادثين فقط. $\boxed{٠,٦}$ (٥) وقوع أحد الحادثين وليس كليهما. $\boxed{٠,٦}$

(٦) وقوع أ أو عدم وقوع ب. $\boxed{٠,٦}$ (٧) عدم وقوع أياً من الحادثين. $\boxed{٠,١}$

(٨) عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب. $\boxed{٠,٧}$

....

....

....

....

....

....

....

مثال: إذا كانت $ \text{م} \subset \text{ب} $ وكان حا (م) = ٠,٣ ، حا (ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، أوجد احتمال :

(١) حا (م ∪ ب) . (٢) حا (م ∪ ب̄)

الحل: (١) حا (م ∪ ب) = حا (م) + حا (ب) − حا (م ب)

∵ م ⊂ ب ⇐ م ∩ ب = م ⇐ حا (م ب) = حا (م)

∴ حا (م ∪ ب) = ~~حا (م)~~ + حا (ب) − ~~حا (م)~~ = حا (ب) = $\frac{٣}{٨}$.

(٢) حا (م ∪ ب̄) = حا (م) + حا (ب̄) − حا (م ب̄)

∵ حا (ب̄) = ١ − حا (ب) ، وكذلك ∵ م ⊂ ب ⇐ حا (م ب̄) = ٠

∴ حا (م ∪ ب̄) = حا (م) + ١ − حا (ب) − ٠

= ٠,٣ + ١ − $\frac{٣}{٨}$ = ١,٣ − ٠,٣٧٥ = ٠,٩٢٥

تدريب: إذا كانت م ⊂ ب وكان حا (م) = ٠,٣ ، حا (ب) = ٠,٧ ، أوجد احتمال :

(١) حا (م ∪ ب) . $\boxed{٠,٧}$ (٢) حا (م ب̄) . $\boxed{\text{صفر}}$ (٣) حا (ب م̄) . $\boxed{٠,٤}$

....

....

....

....

مثال: تقدم طالب بطلبين أحدهما لكلية الهندسة واحتمال قبوله فيها ٠,٧ والآخر لكلية الطب واحتمال قبوله فيها هو ٠,٥ . فإذا كان احتمال رفض أحد طلبيه هو ٠,٦ . فما احتمال قبوله في إحدى الكليتين .

الحل: نفرض أن م حادثة قبوله في كلية الهندسة ، فيكون حا (م) = ٠,٧

نفرض أن ب حادثة قبول الطالب في كلية الطب ، فيكون حا (ب) = ٠,٥

وعليه فإن احتمال رفض أحد طلبيه هو حا (م̄ ∪ ب̄) = حا (م ∩ ب)̄ = ٠,٦

∴ الاحتمال المطلوب هو احتمال قبوله في إحدى الكليتين = حا (م ∪ ب)

∴ حا (م ∪ ب) = حا (م) + حا (ب) − حا (م ب)

وكما نلاحظ أن حا (م ب) غير موجود ضمن المعطيات فنستخدم المبرهنة :

حا (م̄) = ١ − حا (م) ⇐ حا (م) = ١ − حا (م̄)

∴ حا (م ب) = ١ − حا (م ب)̄ = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

∴ حا (م ∪ ب) = حا (م) + حا (ب) − حا (م ب) = ٠,٧ + ٠,٥ − ٠,٤ = ٠,٨

نلاحظ من أمثلة الدرس السابق أنه يعطينا احتمال حادثة معينة كأن يقول حا (أ) = ٣,٠ ثم نطبق قوانين الاحتمال للوصول إلى المطلوب ، وفي درسنا هذا سنتعلم كيفية الحصول على هذه الاحتمالات . وعلى ٣,٠ الناتجة من حا (أ) مثلاً . وهذا ما سنلاحظه في الدرس الآتي .

بناء النموذج الاحتمالي

بناء النموذج الاحتمالي يعني إيجاد طريقة لحساب قيمة الدالة الاحتمالية "حا" لأي حادثة في الفضاء الاحتمالي (ع ، ك ، حا) .

فإذا خصصنا لكل حادثة ابتدائية س ر في الفضاء الاحتمالي (ع ، ك ، حا) عدداً حقيقياً أ ر [أي حا (س ر) = أ ر] فإننا بذلك قد كوّنا نموذجاً احتمالياً إذا تحقق الشرطين التاليين :

(١) أ ر ⩾ ٠ ، ∀ ر = {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن} . (أي أن احتمال أي حادثة ليس قيمة سالبة).

(٢) مجـ أ ر = ١ . (أي أن أ١ + أ٢ + أ٣ + ... + أن = ١) .

خطوات بناء النموذج الاحتمالي:

١ – تحديد فضاء العينة ع ومعرفة عدد عناصره .

٢ – تخصيص لكل حادثة ابتدائية الاحتمال نفسه = $\frac{١}{ن(ع)}$.

تعريف احتمال حادثة:

احتمال أي حادثة هو مجموع احتمالات الحوادث الابتدائية الداخلة في تشكيل هذه الحادثة .

أنواع الفضاء الاحتمالي:

أولاً: فضاء احتمالي منتظم: وهو الفضاء الذي يكون فيه فرص وقوع الحوادث الابتدائية متساوي ، مثل رمي قطعة نقود فـ احتمال ظهور الصورة = احتمال ظهور الكتابة .

خطوات حساب احتمال وقوع أي حادثة في فضاء احتمالي منتظم:

١ – نوجد عدد عناصر فضاء العينة أي نوجد ن(ع) .

٢ – نوجد عدد العناصر للحادثة أ أي نوجد ن(أ) .

٣ – نحسب احتمال وقوع الحادثة أ بالقانون : حا (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ع)}$.

مثال: في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة كوّن نموذج احتمالي لهذه التجربة .

الحل: ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ⇐ ن(ع) = ٦

احتمال ظهور الوجه ١ = $\frac{1}{6}$ ، احتمال ظهور الوجه ٢ = $\frac{1}{6}$

احتمال ظهور الوجه ٣ = $\frac{1}{6}$ ، احتمال ظهور الوجه ٤ = $\frac{1}{6}$

احتمال ظهور الوجه ٥ = $\frac{1}{6}$ ، احتمال ظهور الوجه ٦ = $\frac{1}{6}$

نلاحظ أن : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

∴ النموذج الاحتمالي هو :

حا {(١)} = حا {(٢)} = حا {(٣)} = حا {(٤)} = حا {(٥)} = حا {(٦)} = $\frac{1}{6}$

تدريب: ألقيت قطعة نقود متجانسة مرة واحدة كوّن نموذج احتمالي لهذه التجربة .

....

....

....

مثال: ألقيت قطعة نقود متجانسة مرتين ، ولوحظ الوجه الظاهر عند استقرارها على الأرض :

(١) أكتب فضاء العينة . (٢) كوّن نموذجاً احتمالياً مناسباً لهذه التجربة .

(٣) أوجد احتمالات الحوادث التالية :

أ) ﺃ : ظهور الصورة مرتين .

ب) ب : الحصول على الصورة مرة واحدة على الأقل .

ج) ج : الحصول على الكتابة من الرمية الثانية .

د) د : الحصول على الكتابة مرة واحدة فقط .

هـ) هـ : الحصول على الصورة مرة واحدة على الأكثر .

الحل: (١) فضاء العينة ع = { (ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك) } ⇐ ن(ع) = ٤

(٢) تم تحديد فضاء العينة سابقاً وعدد عناصره ن(ع) = ٤

نخصص لكل نقطة (عنصر) في ع قيمة احتمالية = $\frac{1}{4}$

∴ النموذج الاحتمالي هو :

حا {(ص،ص)} = حا {(ص،ك)} = حا {(ك،ص)} = حا {(ك،ك)} = $\frac{1}{4}$

(٣) أ) حا (ء) = {(ص،ص)} ⇐ ∿(ء) = ١ ⇐ حا (ء) = $\frac{\text{∿ (ء)}}{\text{∿ (ع)}}$ = $\frac{1}{4}$

ب) حا (ب) = {(ص،ك) ، (ك،ص) ، (ص،ص)} ⇐ ∿(ب) = ٣ ⇐ حا (ب) = $\frac{3}{4}$

ج) حا (ج) = {(ص،ك) ، (ك،ك)} ⇐ ∿(ج) = ٢ ⇐ حا (ج) = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$

د) حا (د) = {(ص،ك) ، (ك،ص) } ⇐ ∿(د) = ٢ ⇐ حا (د) = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$

هـ) حا (هـ) = {(ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك)} ⇐ ∿(هـ) = ٣ ⇐ حا (هـ) = $\frac{3}{4}$

تدريب: إذا رمينا حجر نرد وكان احتمال ظهور أي وجه = $\frac{1}{6}$ ، فما احتمال ظهور الحوادث التالية:

(١) حادثة ظهور عدد فردي . $\boxed{\frac{1}{2}}$ (٢) حادثة ظهور عدد أكبر من ٤ . $\boxed{\frac{1}{3}}$

....

....

....

مثال: صندوق به ٩ كرات حمراء ، ٧ بيضاء ، ٨ سوداء ، سحبت كرة واحدة عشوائياً من الصندوق ، فما احتمال الحوادث الآتية :

١) ء : حادثة الكرة المسحوبة بيضاء .

٢) ب : حادثة الكرة المسحوبة ليست حمراء .

٣) ج : حادثة الكرة المسحوبة حمراء أو سوداء .

الحل: عدد عناصر فضاء العينة ∿(ع) = ٩+٧+٨ = ٢٤ (عدد الكرات في الصندوق)

١) حا (ء) = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات جميعاً}}$ = $\frac{7}{24}$

٢) حا (ب) = $\frac{\text{عدد الكرات غير الحمراء}}{\text{عدد الكرات جميعاً}}$ = $\frac{15}{24}$

٣) حا (ج) = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء أو السوداء}}{\text{عدد الكرات جميعاً}}$ = $\frac{9+8}{24}$ = $\frac{17}{24}$

تدريب: صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراوات ، ٤ كرات بيضاوات ، ٥ كرات سوداوات ، سحبت كرة – عشوائياً – من الصندوق . فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(١) سوداء . $\boxed{\frac{1}{3}}$ (٢) ليست حمراء . $\boxed{\frac{3}{5}}$ (٣) حمراء أو بيضاء . $\boxed{\frac{2}{3}}$

....

....

....

مثال: سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٤٠ أوجد احتمال أن البطاقة المسحوبة تحمل رقماً فردياً في الحالات :

١) أ : يقبل القسمة على ٥ .

٢) ب : يقبل القسمة على ٧ .

٣) ج : يقبل القسمة على ٥ أو ٧ .

الحل: ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٣٩ ، ٤٠ } ⇐ ن(ع) = ٤٠

١) أ = { ٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ } ⇐ حا (أ) = $\frac{٤}{٤٠}$

٢) ب = { ٧ ، ٢١ ، ٣٥ } ⇐ حا (ب) = $\frac{٣}{٤٠}$

١) ج = أ ∪ ب = { ٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٧ ، ٢١ } ⇐ حا (ج) = $\frac{٦}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

<u>حل آخر</u> : حا (ج) = حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أب)

= $\frac{٤}{٤٠}$ + $\frac{٣}{٤٠}$ − $\frac{١}{٤٠}$ [أ ∩ ب = {٣٥} ⇐ حا (أب) = $\frac{١}{٤٠}$]

= $\frac{٦}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

تدريب: سحبت – عشوائياً – بطاقة مرقمة من بين ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠، ما احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة :

١) أ : يقبل القسمة على ١٠ . $\boxed{\frac{١}{١٠}}$ (٢) ب : يقبل القسمة على ١٧ . $\boxed{\frac{١}{٢٠}}$

٣) ج : يقبل القسمة على ١٠ أو ١٧ . $\boxed{\frac{٣}{٢٠}}$

مثال: قاعة بها ٨٠ طالباً ، من بينهم ٦٠ طالباً يدرسون اللغة الإنجليزية ، ٤٠ طالباً يدرسون اللغة الفرنسية ، ٣٠ طالباً يدرسون اللغتين معاً . لتكن أ ، ب حادثتين معرفتين على النحو الآتي:

أ : حادثة اختيار طالب يدرس اللغة الانجليزية . ، ب : حادثة اختيار طالب يدرس الفرنسية .

أوجد : (١) حا (أ ∪ ب) . (٢) حا (أَ ب) . (٣) حا (أ بَ) .

الحل: نلاحظ أن ن(ع) = ٨٠ طالباً

أ : حادثة اختيار طالب يدرس اللغة الانجليزية والذين عددهم ٦٠ طالباً ⇐ حا (أ) = $\frac{٦٠}{٨٠} = \frac{٣}{٤}$

ب : حادثة اختيار طالب يدرس اللغة الفرنسية والذين عددهم ٤٠ طالباً ⇐ حا (ب) = $\frac{٤٠}{٨٠} = \frac{١}{٢}$

كما نلاحظ أن الذين يدرسون اللغتين معاً : أ ∩ ب = أب وعددهم ٣٠ طالباً وعليه فإن :

حا (أب) = $\frac{٣٠}{٨٠} = \frac{٣}{٨}$.

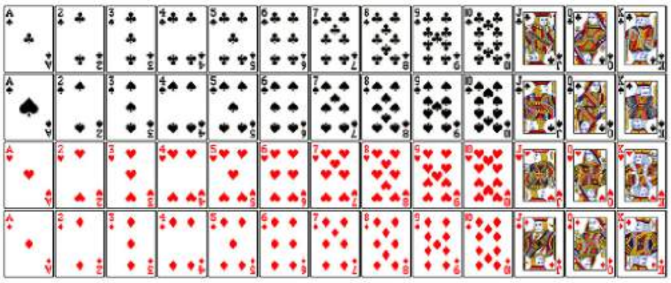
١) حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أب) = $\frac{٦٠}{٨٠} + \frac{٤٠}{٨٠} - \frac{٣٠}{٨٠} = \frac{٧٠}{٨٠} = \frac{٧}{٨}$.

٢) حا (أَ ب) = حا (ب) − حا (أب) = $\frac{٤٠}{٨٠} - \frac{٣٠}{٨٠} = \frac{١٠}{٨٠} = \frac{١}{٨}$.

٣) حا (أ بَ) = حا (أ) − حا (أب) = $\frac{٦٠}{٨٠} - \frac{٣٠}{٨٠} = \frac{٣٠}{٨٠} = \frac{٣}{٨}$.

تدريب: قاعة بها ٨٠ طالباً يدرس كل منهم لغة أجنبية واحدة ، فإذا كان ٣٥ طالباً منهم يدرسون الانجليزية ، ٢٥ طالباً يدرسون الفرنسية والباقي يدرسون الألمانية . أختير – عشوائياً – طالب ، فما احتمال أن يكون ممن يدرسون :

(١) اللغة الانجليزية . $\boxed{\frac{٧}{١٦}}$ (٢) اللغة الفرنسية . $\boxed{\frac{٥}{١٦}}$ (٣) اللغة الألمانية أو اللغة الفرنسية . $\boxed{\frac{٩}{١٦}}$



أوراق اللعب (الكوتشينة) :

موضحة هذه الأوراق في الصورة الجانبية:

عدد أوراق اللعب (الكوتشينة) = ٥٢

ورقة مقسمة كالآتي:

١٣ ورقة من الشكل [♣ السباتي] ولونها أسود وهي مرقمة من ١ إلى ١٠+بنت+ولد+شائب .

١٣ ورقة من الشكل [♠ البستوني] ولونها أسود وهي مرقمة من ١ إلى ١٠+بنت+ولد+شائب .

١٣ ورقة من الشكل[♥الكوبة(القلب)]ولونها أحمر وهي مرقمة من ١إلى ١٠+بنت+ولد+شائب.

١٣ ورقة من الشكل [♦ الديناري] ولونها أحمر وهي مرقمة من ١ إلى ١٠+بنت+ولد+شائب .

وكما نلاحظ أن عدد الأوراق التي باللون الأحمر ٢٦ ورقة والتي باللون الأسود عددها ٢٦ ورقة .

مثال: سحبت ورقة – عشوائياً – من بين مجموعة أوراق اللعب العادي [الكوتشينة وعددها ٥٢ ورقة] محكمة الخلط . أحسب احتمال أن تكون الورقة المسحوبة :

١) ؟ : صورة ولد أو بنت . (٢) ب : سوداء . (٣) ج : سوداء أو صورة ولد .

الحل: نلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة ن(ع) = ٥٢ ورقة .

١) عدد صور الولد = ٤ و عدد صور البنت = ٤ ⇐ ن(؟) = ٨ ، ∴ حا (؟) = $\frac{٨}{٥٢}$

٢) عدد الأوراق السوداء = ٢٦ ⇐ ن(ب) = ٢٦ ، ∴ حا (ب) = $\frac{٢٦}{٥٢}$ = $\frac{١}{٢}$

٣) لتكن ب حادثة الأوراق السوداء ⇐ ن(ب) = ٢٦ ⇐ حا (ب) = $\frac{٢٦}{٥٢}$

لتكن د حادثة صورة ولد ⇐ ن(د) = ٤ ⇐ حا (د) = $\frac{٤}{٥٢}$

وكما نلاحظ أن عدد عناصر ب ∩ د = ٢ [لأن الولد الأسود مشترك في الحادثة ب والحادثة د]

وعليه فإن : ن(؟ ∩ د) = ٢ ⇐ حا (؟ د) = $\frac{٢}{٥٢}$

∴ حا (ج) = حا (؟ ∪ د) = حا (؟) + حا (د) − حا(؟ د) = $\frac{٢٦}{٥٢}$ + $\frac{٤}{٥٢}$ − $\frac{٢}{٥٢}$ = $\frac{٢٨}{٥٢}$ = $\frac{٧}{٥٢}$

تدريب: في تجربة سحب ورقة واحدة من أوراق اللعب (الكوتشينة) وعددها ٥٢ ورقة ، احسب احتمال : (١) ؟ : ظهور ورقة عليها علامة حمراء . $\boxed{\frac{١}{٢}}$ (٢) ب : ظهور ورقة عليها ٧ فقط . $\boxed{\frac{١}{١٣}}$

(٣) ج : ظهور ورقة عليها علامة ديناري ♦. $\boxed{\frac{١}{٤}}$ (٤) د : ظهور ورقة عليها صورة . $\boxed{\frac{٣}{١٣}}$

(٥) هـ : ظهور ورقة عليها علامة حمراء و ٧. $\boxed{\frac{١}{٢٦}}$ (٦) و: ظهور ورقة عليها علامة حمراء أو ٧. $\boxed{\frac{٧}{١٣}}$

....

....

....

مثال: اختير عشوائياً عدد صحيح س حيث: ١ ≤ س ≤ ٥٠ أوجد احتمال أن يكون العدد المختار:

(١) فردياً . (٢) يقبل القسمة على ١٣ . (٣) ليس مربعاً كاملاً . (٤) لا يقبل القسمة على ١٠ .

الحل: ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٥٠ } ⇐ ن(ع) = ٥٠

(١) ليكن أ حادثة العدد المختار فردي ⇐ أ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ٤٩} ⇐ ن(أ) = ٢٥

∴ حا (أ) = $\frac{٢٥}{٥٠}$ = $\frac{١}{٢}$

(٢) نفرض ب حادثة العدد يقبل القسمة على ١٣ ⇐ ب = {١٣ ، ٢٦ ، ٣٩} ⇐ ن(ب) = ٣

∴ حا (ب) = $\frac{٣}{٥٠}$

(٣) ليكن جـ حادثة العدد المختار ليس مربعاً كاملاً

فتكون جَ (المتممة) هي : حادثة العدد المختار مربعاً كاملاً

∴ جـ = {١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩} ⇐ ن(جَ) = ٧

∴ حا (جـ) = ١ − حا (جَ) = ١ − $\frac{٧}{٥٠}$ = $\frac{٤٣}{٥٠}$

(٤) ليكن د حادثة العدد المختار لا يقبل القسمة على ١٠

فتكون دَ (المتممة) هي : حادثة العدد المختار يقبل القسمة على ١٠

∴ د = {١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠} ⇐ ن(دَ) = ٥

∴ حا (د) = ١ − حا (دَ) = ١ − $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{٩}{١٠}$

تدريب: اختير عشوائياً عدد صحيح س من المجموعة { س : ٢ ≤ س ≤ ١٢ ، س ∈ ص$^{+}$ } ، فإذا كان : أ : حادثة الحصول على عدد زوجي ، ب : حادثة الحصول على عدد أولي فردي .

فأوجد : (١) حا (أ) . (٢) حا (ب) . $\boxed{\frac{٤}{١١}}$ (٣) حا (أب) . $\boxed{٠}$ (٤) حا (أ ∪ ب) . $\boxed{\frac{١٠}{١١}}$

مثال: صندوقان يحتوي الأول منهما على كرتين بيضاوين وكرة سوداء ، ويحتوي الآخر على كرة بيضاء فقط ، سحبت عشوائياً كرة من الصندوق الأول ووضعت في الصندوق الثاني وخلطت الكرتان في الصندوق الثاني خلطاً محكماً . ثم سحبت منه بعد ذلك عشوائياً كرة :

(١) كوّن نموذجاً احتمالياً مناسباً لهذه التجربة .

(٢) ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني بيضاء .

الحل: للتمييز بين الكرات فالكرات البيضاء ستكون $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ للصندوق الأول و $ب_{٣}$ للصندوق الثاني والكرة السوداء الوحيدة ستكون س .

عناصر فضاء العينة سيكون على شكل أزواج مرتبة مسقط أول ومسقط ثاني أي من الشكل :

(الكرة المسحوبة من الصندوق الأول ، الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني)

$\therefore$ ع = { $(ب_{١} ، ب_{١})$ ، $(ب_{١} ، ب_{٣})$ ، $(ب_{٢} ، ب_{٢})$ ، $(ب_{٢} ، ب_{٣})$ ، (س ، س) ، $(س ، ب_{٣})$ }

و ن(ع) = ٦ .

(١) النموذج الاحتمالي سيكون كما يلي بعد تخصيص لكل عنصر احتمالاً :

حا $\{(ب_{١} ، ب_{١})\}$ = حا $\{(ب_{١} ، ب_{٣})\}$ = حا $\{(ب_{٢} ، ب_{٢})\}$ = حا $\{(ب_{٢} ، ب_{٣})\}$

= حا {(س ، س)} = حا $\{(س ، ب_{٣})\}$ = $\frac{١}{٦}$

(٢) لتكن أ حادثة سحب كرة بيضاء من الصندوق الثاني :

$\therefore$ أ = { $(ب_{١} ، ب_{١})$ ، $(ب_{١} ، ب_{٣})$ ، $(ب_{٢} ، ب_{٢})$ ، $(ب_{٢} ، ب_{٣})$ ، $(س ، ب_{٣})$ }

$\therefore$ حا (أ) = $\frac{٥}{٦}$.

تدريب: صندوقان يحتوي الأول على كرتين بيضاوين وكرة سوداء ويحتوي الثاني على كرة بيضاء وكرة سوداء . سحبت كرة – عشوائياً – من الصندوق الثاني الأول ووضعت في الصندوق الثاني وخلطت جميع الكرات في الصندوق الثاني ثم سحبت منه كرة عشوائياً .

(١) كوّن النموذج الاحتمالي لهذه التجربة .

(٢) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني بيضاء . $\boxed{\frac{٥}{٩}}$

....

....

....

....

مثال: وجد في أحد الأحياء أن احتمال إنجاب ولد يساوي احتمال إنجاب بنت . اختيرت عشوائياً أسرة من بين أسر ذلك الحي ووجد أن لديها ٣ أطفال .

(١) حدد فضاء العينة المرتبط بالجنس ، والترتيب في العمر لدى الأسرة المختارة .

(٢) احسب احتمال الحادثتين التاليتين :

(أ) أ : أن يكون أطفال الأسرة المختارة بنتين وولد .

(ب) ب : أن يكون الطفل الأكبر للأسرة المختارة ولداً .

الحل: نرمز للولد بالرمز "و" وللبنت بالرمز "ب" :

(١) سيكون فضاء العينة على الشكل (نوع المولود الأول ، نوع المولود الثاني . نوع المولود الثالث) مع الأخذ في الاعتبار ترتيب المواليد فيكون فضاء العينة كالآتي:

ع = { (و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (و ، ب ، ب) ، (ب ، ب ، ب) ، (ب ، ب ، و) ، (ب ، و ، ب) ، (ب ، و ، و) } ⇐ ن(ع) = ٨

(٢) (أ) أ = {(و ، ب ، ب) ، (ب ، ب ، و) ، (ب ، و ، ب) } ⇐ ن(أ) = ٣

∴ حا (أ) = $\frac{٣}{٨}$.

(٣) (ب) ب = { (و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (و ، ب ، ب) } ⇐ ن(ب) = ٤

∴ حا (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$.

تدريب: أسرة لها أربعة أطفال ، تم تسجيلهم من الأكبر إلى الأصغر حسب النوع :

أولاً : أكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

ثانياً : عبِّر عن الحوادث التالية واحسب احتمالها :

(١) أ : لدى الأسرة بنتان . $\boxed{\frac{٣}{٨}}$ (٢) ب : لدى الأسرة ولد واحد على الأقل . $\boxed{\frac{١٥}{١٦}}$

(٣) جـ : عدد الذكور أكثر من عدد الإناث . $\boxed{\frac{٥}{١٦}}$

....

....

....

....

....

....

ثانياً: فضاء احتمالي غير منتظم: في هذا النوع من الاحتمالات لا تكون الفرص متساوية (أي أن الحوادث الابتدائية احتمال وقوعهم غير متساوي) ، ولكن مجموع هذه الحوادث الأولية (الابتدائية) يساوي واحد . لذلك عند حل هذا النوع نعتمد على المعطيات بالمسألة وليس تساوي الحوادث الابتدائية .

ممكن نعطي لك بعض المعلومات التي تدل على الاحتمال غير منتظم في الآتي :

١) حجر نرد غير مثالي أو غير منتظم أو غير متساوي أو ...

٢) عملة غير مستوية أو غير مثالية أو بها غيب تصنيع أو ...

٣) احتمال تحقيق الرجال لحادثة ما يختلف عن احتمال تحقيق النساء للحادثة .

٤) احتمالات الفوز إذا كانت مختلفة بين المتسابقين .

مثال: عند إلقاء حجر نرد عدد من المرات لوحظ أن ظهور العدد الزوجي ضعف ظهور العدد الفردي أوجد احتمال ظهور العدد الفردي ، واحتمال ظهور العدد الزوجي .

الحل: ليكن ؟ حادثة ظهور عدد فردي . وليكن ب حادثة ظهور عدد زوجي .

ونفرض أن حا (؟) = س

فيكون حا (ب) = ٢س (معطى أن ظهور العدد الزوجي ضعف العدد الفردي)

و ∵ حا (؟) + حا (ب) = ١ (في الفضاء الاحتمالي مجموع الحوادث الابتدائية يساوي واحد)

∴ س + ٢س = ١ ⇐ ٣س = ١ ⇐ س = $\frac{١}{٣}$

∴ احتمال ظهور العدد الفردي حا (؟) = $\frac{١}{٣}$

واحتمال ظهور العدد الزوجي حا (ب) = ٢ × س = ٢ × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

تدريب: صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصورة يساوي ضعف احتمال ظهور الكتابة عند رميها . أوجد : (١) حا (ك) . $\boxed{\frac{١}{٣}}$ (٢) حا (ص) . $\boxed{\frac{٢}{٣}}$ (٣) حا (ص ∪ ك) . $\boxed{١}$

....

....

....

....

....

الاحتمال الشرطي

كثيراً ما يصادفنا في حياتنا اليومية حسابات وقوع حادثة بشرط تحقق وقوع حادثة أخرى كحادثة دخول طالب كلية الطب بشرط حصوله على نسبة ٨٥ % فأكثر .

إذا افترضنا أن الحادثة ٩ هي دخول الطالب كلية الطب و ب حادثة حصول الطالب على نسبة ٨٥ % على الأقل فإن لوقوع الحادثة ب تأثير على احتمال وقوع الحادثة ٩ لذلك الحادثة ٩ لن تتحقق إلاّ بعد تحقق الحادثة ب وهو ما يسمى بالاحتمال الشرطي (المشروط) ويرمز لاحتمال وقوع الحادثة ٩ بشرط وقوع الحادثة ب بالرمز حا (٩ / ب) ويقرأ كالآتي :

- احتمال ٩ بشرط وقوع ب مسبقاً .
- احتمال وقوع ٩ علماً أن ب قد وقعت .
- احتمال وقوع ٩ بعد وقوع ب .
- إذا كانت ب قد وقعت فما احتمال وقوع ٩ .

قانون الاحتمال الشرطي :

في حالة حا (٩ / ب) أي احتمال ٩ بشرط وقوع ب (الحادثة ب هي الشرط) فإن:

$$\text{حا}(٩\,/\,\text{ب}) = \frac{\text{حا}(٩\,\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} \ ،\ \text{حا}(\text{ب}) \neq ٠$$

[أي الحادثة ب ليست مجموعة خالية]

وفي حالة حا (ب / ٩) أي احتمال ب بشرط وقوع ٩ (الحادثة ٩ هي الشرط) فإن:

$$\text{حا}(\text{ب}\,/\,٩) = \frac{\text{حا}(٩\,\text{ب})}{\text{حا}(٩)} \ ،\ \text{حا}(٩) \neq ٠$$

[أي الحادثة ٩ ليست مجموعة خالية]

ملاحظات:

١- القانون السابق تتم القسمة دائماً على احتمال الشرط .

٢- $\text{حا}(\bar{٩}\,/\,\text{ب}) = ١ - \text{حا}(٩\,/\,\text{ب})$

البرهان: الطرف الأيمن $= \text{حا}(\bar{٩}\,/\,\text{ب}) = \frac{\text{حا}(\bar{٩}\,\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{\text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(٩\,\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})}$

$$= \frac{\text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} - \frac{\text{حا}(٩\,\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = ١ - \text{حا}(٩\,/\,\text{ب})$$

حالات خاصة:

١) إذا كانت أ ، ب متنافيتان فإن أ ب = ∅ ⇐ حا (أ ب) = صفر ، ومنه يكون:

$$\text{حا (أ / ب)} = \text{حا (ب / أ)} = \frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (ب)}} = \frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (أ)}} = \frac{\text{٠}}{\text{حا (ب)}} = \frac{\text{٠}}{\text{حا (أ)}} = \text{صفر .}$$

وهذا يعني دام أن الحادثتين متنافيتين فإن وقوع ب يمنع وقوع أ ووقوع أ يمنع وقوع ب أو بعبارة أخرى " إذا كانت أ ، ب متنافيتان فلا يمكن أن تقع أ إذا وقعت ب في حا (أ / ب) . ولا يمكن أن تقع ب إذا وقعت أ في حا (ب / أ)" .

٢) أ) إذا كانت ب ⊂ أ ⇐ أ ب = ب ⇐ حا (أ ب) = حا (ب) وعليه فإن :

$$\text{حا (أ / ب)} = \frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (ب)}} = \frac{\text{حا (ب)}}{\text{حا (ب)}} = \text{١ .}$$

[وهذا يعني لابد أن تقع أ كلما وقعت ب] .

ب) إذا كانت أ ⊂ ب ⇐ أ ب = أ ⇐ حا (أ ب) = حا (أ) وعليه فإن :

$$\text{حا (ب / أ)} = \frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (أ)}} = \frac{\text{حا (أ)}}{\text{حا (أ)}} = \text{١ .}$$

[وهذا يعني لابد أن تقع ب كلما وقعت أ] .

تنبيه: ركز عزيزي الطالب على الحالات الخاصة لوجودها بكثرة في أسئلة الصح أو الخطأ أو أكمل الفراغ أو الاختيار من متعدد .

مثال: إذا كان حا (أ ∪ ب) = ٠,٤ ، حا (أ ب) = ٠,١ ، حا (ب) = ٠,٢ ، فأوجد :

(١) حا (أ / ب) . (٢) حا (ب / أ) . (٣) حا (ب / أَ) . (٤) حا (أَ / ب) . (٥) حا (أَ / بَ) .

الحل: (١)

$$\text{حا (أ / ب)} = \frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (ب)}} = \frac{\text{٠,١}}{\text{٠,٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ .}$$

(٢)

$$\text{حا (ب / أ)} = \frac{\text{حا (ب أ)}}{\text{حا (أ)}} = \frac{\text{٠,١}}{\text{؟}}$$

نلاحظ أن حا (أ) غير معطى لدينا فنوجده كما يلي:

∵ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ب) ، وبالتعويض بالقيم المعطاة في المعادلة :

٠,٤ = حا (أ) + ٠,٢ − ٠,١ ⇐ حا (أ) = ٠,٤ − ٠,١ = ٠,٣

وبالتعويض بقيمة حا (أ) في القانون السابق والمحدد قيمته بـ ؟ يكون :

$$\text{حا (ب / أ)} = \frac{\text{حا (ب أ)}}{\text{حا (أ)}} = \frac{\text{٠,١}}{\text{٠,٣}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{ .}$$

(٣)

$$\text{حا (ب / أَ)} = \frac{\text{حا (ب أَ)}}{\text{حا (أَ)}} = \frac{\text{حا (ب) − حا (أ ب)}}{\text{١ − حا (أ)}} = \frac{\text{٠,٢ − ٠,١}}{\text{١ − ٠,٣}} = \frac{\text{٠,١}}{\text{٠,٧}} = \frac{\text{١}}{\text{٧}} \text{ .}$$

(٤) حا (أَ / ب) = $\frac{\text{حا (أَ ب)}}{\text{حا (ب)}}$ = $\frac{\text{حا (ب) − حا (أ ب)}}{\text{حا (ب)}}$ = $\frac{٠,٢ - ٠,١}{٠,٢}$ = $\frac{٠,١}{٠,٢}$ = $\frac{١}{٢}$.

حل بطريقة أخرى (بطريقة القانون المثبت سابقاً) :

حا (أَ / ب) = ١ − حا (أ / ب) = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$.

(٥) حا (أَ / بَ) = $\frac{\text{حا (أَ بَ)}}{\text{حا (بَ)}}$ [بتطبيق قانون دي مورجان في البسط]

= $\frac{\text{حا (أ ∪ ب)َ}}{\text{حا (بَ)}}$ = $\frac{\text{١ − حا (أ ∪ ب)}}{\text{١ − حا (ب)}}$ = $\frac{١ - ٠,٤}{١ - ٠,٢}$ = $\frac{٠,٦}{٠,٨}$ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$.

تدريب: إذا كانت أ ، ب حادثتين وكان حا (أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (أ ب) = $\frac{١}{٣}$ أحسب:

(١) حا (أ / ب) . $\boxed{\frac{٢}{٣}}$ (٢) حا (ب / أ) . $\boxed{\frac{١}{٢}}$ (٣) حا (أَ / ب) . $\boxed{\frac{١}{٣}}$

(٤) حا (أَ / بَ) . $\boxed{\frac{١}{٣}}$ (٥) حا (أ ∪ بَ / أ) . $\boxed{\frac{١}{٢}}$

مثال: في إحدى السنوات وجد أن ٨٥ % من طلاب الثانوية العامة نجحوا في مادة الرياضيات ، و ٧٥ % منهم نجحوا في مادة الفيزياء ، و ٧٠ % منهم نجحوا في المادتين معاً . اختير طالب عشوائياً احسب احتمال:

(١) أن يكون ناجح في إحداهما على الأقل . (٢) ناجح في الرياضيات فقط .

(٣) راسب في المادتين معاً . (٤) ناجح في الرياضيات علماً بأنه ناجح في الفيزياء .

(٥) إذا كان ناجح في الرياضيات فما احتمال أن يكون راسب في الفيزياء .

(٦) أن يكون راسب في الفيزياء بشرط أنه راسب في الرياضيات .

الحل: ليكن أ : حادثة الطالب ناجح في الرياضيات ⇐ حا (أ) = ٨٥ % = $\frac{٨٥}{١٠٠}$.

ب : حادثة الطالب ناجح في الفيزياء ⇐ حا (ب) = ٧٥ % = $\frac{٧٥}{١٠٠}$.

أب : حادثة الطالب ناجح في المادتين معاً (الرياضيات والفيزياء) ⇐ حا (أب) = ٧٠ % = $\frac{٧٠}{١٠٠}$

(١) احتمال أن يكون ناجح في إحداهما على الأقل يعني حا (أ ∪ ب)

∴ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أب) = $\frac{٨٥}{١٠٠} + \frac{٧٥}{١٠٠} - \frac{٧٠}{١٠٠} = \frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٩٠ %

(٢) احتمال ناجح في الرياضيات فقط يعني حا (أ − ب) = حا (أبَ)

∴ حا (أبَ) = حا (أ) − حا (أب) = $\frac{٨٥}{١٠٠} - \frac{٧٠}{١٠٠} = \frac{١٥}{١٠٠}$ = ١٥ %

(٣) احتمال راسب في المادتين معاً أي حا (أَبَ)

∴ حا (أَبَ) = حا (أ ∪ ب)َ = ١ − حا (أ ∪ ب) = ١ − $\frac{٩٠}{١٠٠} = \frac{١٠}{١٠٠}$ = ١٠ %

(٤) احتمال ناجح في الرياضيات علماً بأنه ناجح في الفيزياء يعني حا (أ / ب)

∴ حا (أ / ب) = $\frac{\text{حا (أب)}}{\text{حا (ب)}} = \frac{٧٠ \%}{٧٥ \%} = \frac{١٤}{١٥}$

(٥) إذا كان ناجح في الرياضيات فإن احتمال أن يكون راسب في الفيزياء يعني حا (بَ / أ)

∴ حا (بَ / أ) = $\frac{\text{حا (بَ أ)}}{\text{حا (أ)}} = \frac{\text{حا (أ)} - \text{حا (أب)}}{\text{حا (أ)}} = \frac{٨٥\% - ٧٠\%}{٨٥ \%} = \frac{١٥ \%}{٨٥ \%} = \frac{٣}{١٧}$

(٦) احتمال أن يكون راسب في الفيزياء بشرط أنه راسب في الرياضيات يعني حا (بَ / أَ)

∴ حا (بَ / أَ) = $\frac{\text{حا (بَ أَ)}}{\text{حا (أَ)}} = \frac{\text{حا (أ ∪ ب)َ}}{\text{حا (أَ)}} = \frac{١ - \text{حا (أ ∪ ب)}}{١ - \text{حا (أ)}} = \frac{١ - ٩٠\%}{١ - ٨٥\%} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

تدريب: وجد في إحدى اختبارات الثانوية العامة أن ٢٥% من الطلبة قد رسبوا في مادة الرياضيات ، ١٥% رسبوا في الكيمياء ، ١٠% رسبوا في الرياضيات والكيمياء . اختير – عشوائياً – طالب . فما احتمال أن يكون :

(١) راسباً في الرياضيات ، علماً بأنه راسب في الكيمياء . $\boxed{\frac{٢}{٣}}$

(٢) راسباً في الكيمياء ، علماً بأنه راسب في الرياضيات . $\boxed{\frac{٢}{٥}}$

....

....

....

....

مثال: يحتوي صندوق على ٨ كرات زرقاء و ٦ كرات حمراء و ١٠ كرات صفراء و ٦ كرات بيضاء و ٥ كرات خضراء . إذا سحبت كرة واحدة عشوائياً فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي:

(١) أن تكون الكرة خضراء إذا علم أنها ليست زرقاء .

(٢) أن تكون حمراء إذا علم أنها ليست خضراء .

(٣) أن تكون زرقاء إذا علم أنها بيضاء .

الحل: إن المعطيات للمسألة كالآتي :

ن(ع) = ٣٥ .

لتكن ؟ حادثة الكرة زرقاء ⇐ ن(؟) = ٨ ⇐ حا (؟) = $\frac{٨}{٣٥}$.

لتكن ب حادثة الكرة حمراء ⇐ ن(ب) = ٦ ⇐ حا (ب) = $\frac{٦}{٣٥}$.

لتكن جـ حادثة الكرة صفراء ⇐ ن(جـ) = ١٠ ⇐ حا (جـ) = $\frac{١٠}{٣٥}$.

لتكن د حادثة الكرة بيضاء ⇐ ن(د) = ٦ ⇐ حا (د) = $\frac{٦}{٣٥}$.

لتكن هـ حادثة الكرة خضراء ⇐ ن(هـ) = ٥ ⇐ حا (هـ) = $\frac{٥}{٣٥}$.

(١) احتمال أن تكون الكرة خضراء إذا علم أنها ليست زرقاء يعني حا (هـ / ؟َ)

∴ حا (هـ / ؟َ) = $\frac{\text{حا (هـ ؟َ)}}{\text{حا (؟َ)}}$

∵ هـ ؟َ يعني الكرة خضراء وليست زرقاء ، فإن عدد العناصر للكرات = ٥ ⇐ حا (هـ ؟َ) = $\frac{٥}{٣٥}$

∴ حا (هـ / ؟َ) = $\frac{\frac{٥}{٣٥}}{\frac{٢٧}{٣٥}}$ = $\frac{٥}{٢٧}$

(٢) احتمال أن تكون حمراء إذا علم أنها ليست خضراء يعني حا (ب / هـَ)

$\therefore$ حا (ب / هـَ) = $\frac{\text{حا (ب هـَ)}}{\text{حا (هـَ)}}$ = $\frac{\frac{٦}{٣٥}}{\frac{٣٠}{٣٥}}$ = $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{١}{٥}$

(٣) احتمال أن تكون زرقاء إذا علم أنها بيضاء يعني حا (ﻫ / د)

حا (ﻫ / د) = $\frac{\text{حا (ﻫ د)}}{\text{حا (د)}}$

نلاحظ أن ﻫ د هي حادثة الكرات الزرقاء والبيضاء في نفس الوقت وفي هذه الحالة

عدد العناصر = صفر ⇐ حا (ﻫ د) = ٠

$\therefore$ حا (ﻫ / د) = $\frac{\text{حا (ﻫ د)}}{\text{حا (د)}}$ = $\frac{٠}{\frac{٣٠}{٣٥}}$ = صفر . (احتمال مستحيل التحقق) .

قانون حاصل الضرب

إن لفظ "أو" فيما سبق بين الحادثتين عبّرنا عنه رمزياً بالاتحاد (∪) وكما أن لفظ "و" بين الحادثتين يعني تقاطع (∩) . لذلك سنستنتج قانون حا (ﻫ ∩ ب) = حا (ﻫ ب) فيما يلي :

من قانون الاحتمال الشرطي : حا (ﻫ / ب) = $\frac{\text{حا (ﻫ ب)}}{\text{حا (ب)}}$ ، حا (ب) ≠ ٠ [وبالضرب التبادلي]

⇐ $\boxed{\text{حا (ﻫ ب) = حا (ب) × حا (ﻫ / ب) ، وبالمثل : حا (ﻫ ب) = حا (ﻫ) × حا (ب / ﻫ)}}$

يسمى هذا القانون " قانون حاصل الضرب " ويعتمد تطبيقه على أي الحادثتين قد وقعت أولاً .

مثال: ليكن حا (ﻫ / ب) = ٠,٣ ، حا (ب) = ٠,٦ أوجد حا (ﻫ ب) .

الحل: حا (ﻫ ب) = حا (ب) × حا (ﻫ / ب) = ٠,٦ × ٠,٣ = ٠,١٨ .

مثال: إذا كان نجاح طالب في الامتحان ٠,٧ واحتمال قبوله في الكلية بعد نجاحه ٠,٦ فما احتمال نجاحه وقبوله في الكلية .

الحل: نفرض أن ﻫ حادثة النجاح فإن حا (ﻫ) = ٠,٧

نفرض ب حادثة قبوله في الكلية ، فإن احتمال قبوله في الكلية بعد نجاحه هو حا (ب / ﻫ) = ٠,٦

$\therefore$ احتمال نجاحه وقبوله في الكلية حا (ﻫ ب)

$\therefore$ حا (ﻫ ب) = حا (ﻫ) × حا (ب / ﻫ) = ٠,٧ × ٠,٦ = ٠,٤٢

تدريبات: (١) إذا كان حا (بَ) = ٠,٢ ، حا (أ / ب) = ٠,٣ أوجد حا (أب) . $\boxed{٠,٢٤}$

(٢) ليكن احتمال نجاح طالب يساوي ٠,٩ واحتمال سفره بعد نجاحه يساوي ٠,٧ ما احتمال نجاحه وسفره . $\boxed{٠,٦٣}$

....

....

....

....

....

....

....

مثال: سحبت عشوائياً ورقتين من أوراق اللعب العادي (الكوتشينة) . ما احتمال الحصول على ولد في الورقة الأولى و ٦ في الثانية .

الحل: لاحظ عزيزي الطالب أنه تم تحديد الورقة الأولى وهو ظهور فيها ولد والورقة الثانية وهو ظهور ٦ وبالتالي فإن الاحتمال سيتم بالترتيب المعطى حيث حادثة ظهور ولد وقعت أولاً .

ليكن أ حادثة الحصول على الولد في الورقة الأولى ⇐ حا (أ) = $\frac{٤}{٥٢}$ = $\frac{١}{١٣}$

و ب حادثة الحصول على ٦ في الورقة الثانية ⇐ حا (ب / أ) = $\frac{٤}{٥١}$ وهو احتمال مشروط بالورقة الأولى لذلك تقل عدد الأوراق في السحب الثاني (الورقة الثانية) فتكون عدد الأوراق ٥١ بدل ٥٢

∴ احتمال الحصول على الولد و ٦ يعني حا (أب) [يعتمد حا (أب) على أي الحدثين وقع أولاً]

∴ حا (أب) = حا (أ) × حا (ب / أ) = $\frac{١}{١٣}$ × $\frac{٤}{٥١}$ = $\frac{٤}{٦٦٣}$

مثال: سحبت عشوائياً بطاقتان من بين أوراق اللعب العادي (عددها ٥٢ بطاقة) ما احتمال الحصول على الباشا (الشائب) وعشرة .

الحل: ليكن أ حادثة الحصول على الباشا و ب حادثة الحصول على عشرة .

احتمال الحصول على الباشا (الشائب) والعشرة يتم بمرحلتين لأنه لم يحدد أياً في الورقة الأولى وأياً في الورقة الثانية وهنا سنضع الاحتمالين وليس مثل المثال السابق الذي حدد فيه ما على الورقة الأولى وما على الورقة الثانية . وعليه فالمرحلتين لحل هذا المثال ستكون كالآتي:

إما الورقة الأولى الباشا والثانية عشرة أو الورقة الأولى عشرة والثانية الباشا

أي حا (٩ب) + حا (ب ٩)

عندما الورقة الأولى باشا فإن

حا (٩) = $\frac{٤}{٥٢}$ = $\frac{١}{١٣}$

وعندما الورقة الثانية عشرة فإن

حا (ب / ٩) = $\frac{٤}{٥١}$

حيث أن عدد الأوراق صارت ٥١ بدل ٥٢

لأنه مشروط بورقة أولى .

∴ حا (٩ب) = حا (٩) × حا (ب / ٩)

عندما الورقة الأولى عشرة فإن

حا (ب) = $\frac{٤}{٥٢}$ = $\frac{١}{١٣}$

وعندما الورقة الثانية باشا فإن

حا (٩ / ب) = $\frac{٤}{٥١}$

حيث أن عدد الأوراق صارت ٥١ بدل ٥٢

لأنه مشروط بورقة أولى .

∴ حا (ب ٩) = حا (ب) × حا (٩ / ب)

∴ حا (٩ب) = حا (٩) × حا (ب / ٩) + حا (ب) × حا (٩ / ب)

= $\frac{١}{١٣}$ × $\frac{٤}{٥١}$ × $\frac{١}{١٣}$ + × $\frac{٤}{٥١}$ = $\frac{٤}{٦٦٣}$ + $\frac{٤}{٦٦٣}$ = $\frac{٨}{٦٦٣}$

تدريب: سحبت عشوائياً ورقتين من أوراق اللعب العادي (الكوتشينة) . ما احتمال الحصول على ولد و ٦ .

توضيح: [عليك عزيزي الطالب حل هذا التدريب وهو بنفس طريقة المثال السابق أي تتحقق الحادثة بمرحلتين إما الورقة الأولى ولد والثانية ٦ أو الورقة الأولى ٦ والورقة الثانية ولد] $\boxed{\frac{٨}{٦٦٣}}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المخطط الشجري

في كثير من التجارب المخطط الشجري مطلب مهم لتسهيل طريقة الحل ، خاصة عندما يكون لدينا تجربتين متتاليتين أو السحب المتتالي ، أو في تجربة يتم تنفيذها بأكثر من خطوة . ومن الأمثلة في ذلك :

١) إذا كان لدينا عدة صناديق بها مجموعة من الكرات سحبنا عشوائياً صندوقاً ثم سحبنا منه كرة .

٢) إذا كان لدينا صندوق به مجموعة من الكرات مثلاً سحبنا منه كرتان أو أكثر واحدة بعد الأخرى أو على التوالي .

- عند استخدام المخطط الشجري نتبع الخطوات التالية :

١– نمثل نتائج التجربة الأولى (السحب الأول مثلاً) بأفرع شجرة ونكتب على كل فرع احتمال الحادثة المناظرة بحيث مجموع احتمالات حوادث هذه الفروع يساوي واحد .

٢– نمثل نتائج التجربة الثانية (السحب الثاني مثلاً) على أفرع الشجرة الأولى ونكتب على أفرع الثانية احتمال الحوادث كما سبق في الأولى .

٣– نجد مجموع حواصل ضرب المسارات التي تحقق الاحتمال المطلوب .

مثال: صندوقان متجانسان يحتوي الأول على ٩ بطاقات مرقمة من (١–٩) ويحتوي الثاني على ٦ بطاقات مرقمة من (١–٦) اختير صندوق عشوائي وسحبت منه بطاقة بشكل عشوائي احسب احتمال ما يلي :

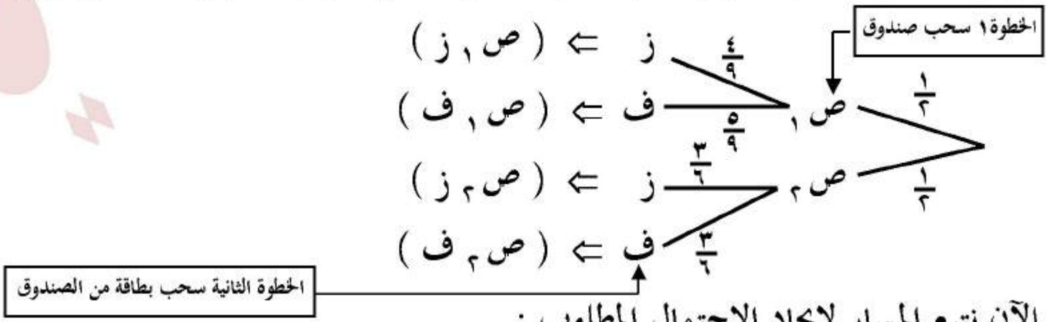
١) البطاقة المسحوبة تحمل رقم فردي من الصندوق الأول .

٢) البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي .

٣) إذا كانت البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي فما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني .

الحل: نكوّن مخطط يمثل احتمالات التجربة كاملة .

لنرمز للصندوق الأول بالرمز ص ١ ، وللصندوق الثاني بالرمز ص ٢ والعدد الزوجي ز والفردي ف



الآن نتبع المسار لإيجاد الاحتمال المطلوب :

١) البطاقة المسحوبة تحمل رقم فردي من الصندوق الأول :

∴ حا (ص$_{١}$ ف) = $\frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٥}{١٨}$ [لاحظ أن الذي يؤدي للمطلوب مسار واحد]

٢) البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي : يوجد مساران يؤديان للرقم الزوجي

∴ حا (ز) = حا (ص$_{١}$ ز) + حا (ص$_{٢}$ ز) = $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٩} + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٦} = \frac{٢}{٩} + \frac{١}{٤} = \frac{٩+٨}{٣٦} = \frac{١٧}{٣٦}$

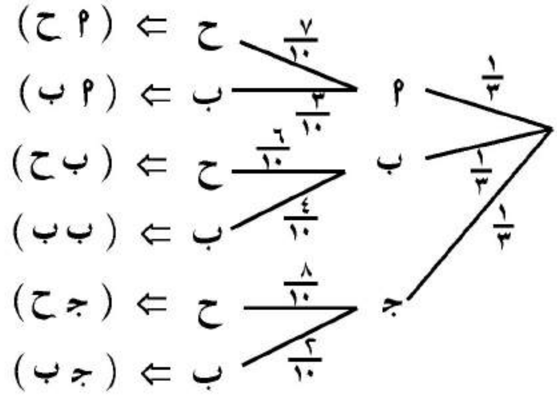
٣) إذا كانت البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي فما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني .

∴ حا (ص$_{٢}$ / ز) = $\frac{\text{حا (ص}_{٢}\text{ ز)}}{\text{حا (ز)}} = \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٦}}{\frac{١٧}{٣٦}} = \frac{\frac{٣}{١٢}}{\frac{١٧}{٣٦}} = \frac{٣}{١٢} \times \frac{٣٦}{١٧} = \frac{٩}{١٧}$

تدريب: صندوقان متجانسان يحتوي الأول على ٩ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٩ ، ويحتوي الثاني على ٥ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٥ . اختير صندوق – عشوائياً – وسحبت منه بطاقة – عشوائياً – وإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجياً ، فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول ؟ $\boxed{\frac{١٠}{١٩}}$

مثال: ثلاثة أوعية م ، ب ، جـ يحتوي م على ٧ كرات حمراء و ٣ بيضاء ، ويحتوي ب على ٦ حمراء و ٤ بيضاء ، ويحتوي جـ على ٨ حمراء و ٢ بيضاء . اختير عشوائياً أحد الأوعية ثم اختيرت منه كرة عشوائياً . ما احتمال أن تكون حمراء ؟

الحل: نكوّن مخطط ويكون من مرحلتين أولاً سحب أحد الأوعية وثانياً سحب كرة



الآن نتبع المسار لإيجاد الاحتمال المطلوب :

احتمال أن تكون حمراء يعني حا (ح) $= \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٨}{١٠} = \frac{٢١}{٣٠}$

تدريب: لدينا ثلاثة صناديق متجانسة ، يحتوي الأول على ٣ كرات حمراوات ، ٥ كرات بيضاوات ، ويحتوي الثاني على كرتين حمراوين وكرة بيضاء ، ويحتوي الثالث على كرتين حمراوين ، ٣ كرات بيضاوات . اختير صندوق عشوائياً وسحبت منه كرة عشوائياً فاحسب ما يلي :

(١) احتمال أن تكون الكرة حمراء . $\boxed{\frac{١٧٣}{٣٦٠}}$

(٢) إذا وجد أن الكرة المسحوبة منه كانت حمراء . فما احتمال أن تكون تلك الكرة من الصندوق الأول . $\boxed{\frac{٤٥}{٣٦٠}}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

إن العالم يتحرك بجناحين هما : السرعة والابتكار
وعلى الإنسان أن يدرك ذلك ... حتى لا يحطمه قطار الزمن
مُذ تلبك بالآيات .. ومُذ مثلك بالرياضيات
ومن يتهيب صعود الجبال .... يعش أبد الدهر بين الحُفر

مثال: صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراوات ، ٧ كرات بيضاوات . سحبت – عشوائياً – كرة من الصندوق وأضيفت إليه كرة من اللون المخالف للكرة المسحوبة وخلطت مع بقية الكرات الموجودة في الصندوق ، ثم سحبت منه – عشوائياً – كرة . أوجد احتمال الحوادث التالية :

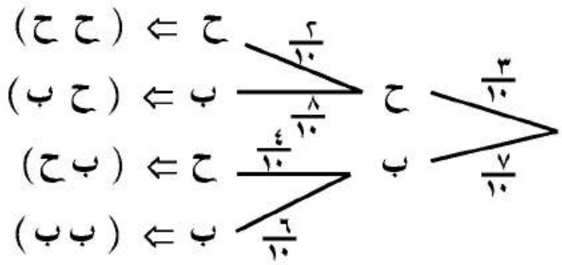
(١) أن تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء .   (٢) أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوان .

(٣) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد . (٤) الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .

(٥) إذا كانت الكرتان المسحوبتان من لون واحد ، فما احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض.

الحل: نكوّن مخطط للتجربة ونرمز للكرة الحمراء بالرمز ح ، والبيضاء بالرمز ب :

لاحظ عند تكوين المخطط أنه عند سحب كرة فإن مجموع الكرات سيقل في المرحلة الثانية لكن بإضافة كرة من اللون المختلف يرجع عدد الكرات في الصندوق مثل المجموع الأول (١٠):



الآن نتبع المسار لإيجاد الاحتمال المطلوب :

(١) أن تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء ولتكن الحادثة م :   [يوجد مساران للمطلوب]

∴ حا (م) = حا (ح ح) + حا (ب ح) = $\frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٦}{١٠٠} + \frac{٢٨}{١٠٠} = \frac{٣٤}{١٠٠} = \frac{١٧}{٥٠}$

(٢) أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوان ولتكن الحادثة ب :

∴ حا (ب) = حا (ب ب) = $\frac{٧}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٤٢}{١٠٠} = \frac{٢١}{٥٠}$ [يوجد مسار واحد للمطلوب]

(٣) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد ولتكن الحادثة ج :   [يوجد مساران للمطلوب]

∴ حا (ج) = حا (ح ح) + حا (ب ب) = $\frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٦}{١٠٠} + \frac{٤٢}{١٠٠} = \frac{٤٨}{١٠٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

(٤) الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين ولتكن الحادثة د :   [يوجد مساران للمطلوب]

∴ حا (د) = حا (ح ب) + حا (ب ح) = $\frac{٣}{١٠} \times \frac{٨}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٢٤}{١٠٠} + \frac{٢٨}{١٠٠} = \frac{٥٢}{١٠٠} = \frac{١٣}{٢٥}$

(٥) إذا كانت الكرتان المسحوبتان من لون واحد ، فما احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض.

حسب الترميز السابق فإن الاحتمال المطلوب : حا (ب / ج) = $\frac{\text{حا (ب} \cap \text{ج)}}{\text{حا (ج)}} = \frac{\text{حا (ب)}}{\text{حا (ج)}} = \frac{\frac{٢١}{٥٠}}{\frac{٢٤}{٥٠}} = \frac{٧}{٨}$

[حا (ب ∩ ج) = حا (ب) لأن ب ⊂ ج حيث ب = كرتان بيضاوان ، و ج = كرتان بيضاوان وكرتان حمراوان وعليه فإن تقاطعهما يكون كرتان بيضاوان وهو يمثل الفرع(٢) في الإجابة حا (ب) = $\frac{٢١}{٥٠}$]

تمارين محلولة في المخطط الشجري:

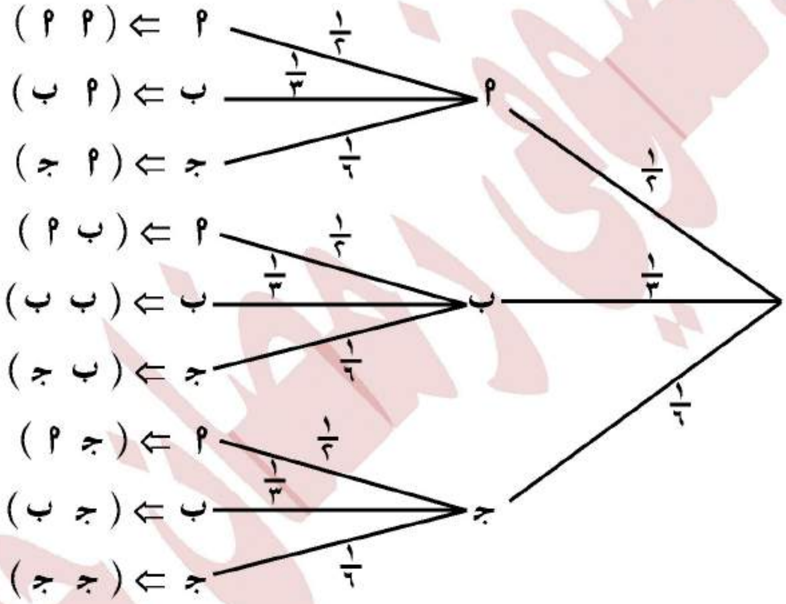
تمرين ١ : تسابق ٣ طلاب في الجري هم أ ، ب ، ج فإذا كان احتمال فوز أ = $\frac{١}{٢}$ واحتمال فوز ب = $\frac{١}{٣}$ واحتمال فوز ج = $\frac{١}{٦}$ ، إذا تسابق الطلاب في الجري مرتين معاً ، فأوجد :

١) فضاء العينة للسباق مرتين .

٢) احتمال فوز الطالب " ج " بالسباق الأول ، " أ " بالسباق الثاني .

الحل: ∵ حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، حا (ج) = $\frac{١}{٦}$ [لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي ١]

نكوّن المخطط الشجري للتجربة حيث أن السباق تم على مرحلتين ومن المخطط الشجري يتم الإجابة على المطلوب :



١) ∴ فضاء العينة ع ={ (أ ، أ) ، (أ ، ب) ، (أ ، ج) ، (ب ، أ) ، (ب ، ب) ، (ب ، ج) ، (ج ، أ) ، (ج ، ب) ، (ج ، ج) } ⇐ ن(ع) = ٩

٢) احتمال فوز الطالب " ج " في السباق الأول ، و " أ " بالسباق الثاني هو :

حا (ج أ) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٢}$ [ج ، أ حادثتان مستقلتان وسيأتي درس الحوادث المستقلة لاحقاً]

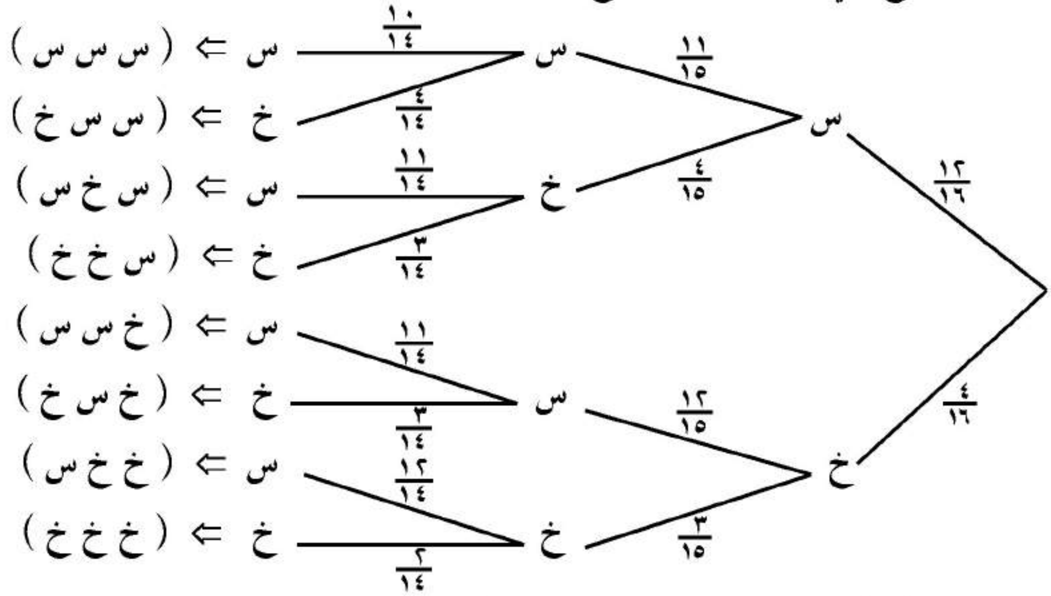
تمرين ٢ : صندوق فيه ١٦ مصباحاً من بينها ٤ مصابيح غير سليمة ، سحبت ٣ مصابيح عشوائياً من الصندوق واحد تلو الآخر ، فما احتمال أن تكون الثلاثة المصابيح سليمة ؟

الحل: من السؤال ن(ع) = ١٦ .

ليكن خ المصابيح غير السليمة (الخربانة) وعددها ن(خ) = ٤ ⇐ حا (خ) = $\frac{٤}{١٦}$

ليكن س المصابيح السليمة وعددها بقية المصابيح ن(س) = ١٢ ⇐ حا (س) = $\frac{١٢}{١٦}$

و ∵ المصابيح التي سحبت ٣ مصابيح فالمخطط الشجري سيكون من ٣ مراحل وكما يلي:



∴ احتمال أن تكون الثلاث المصابيح سليمة تأخذ المسار (س س س)

∴ حا (س س س) = $\frac{١٢}{١٦} \times \frac{١١}{١٥} \times \frac{١٠}{١٤} = \frac{١١}{٢٨}$

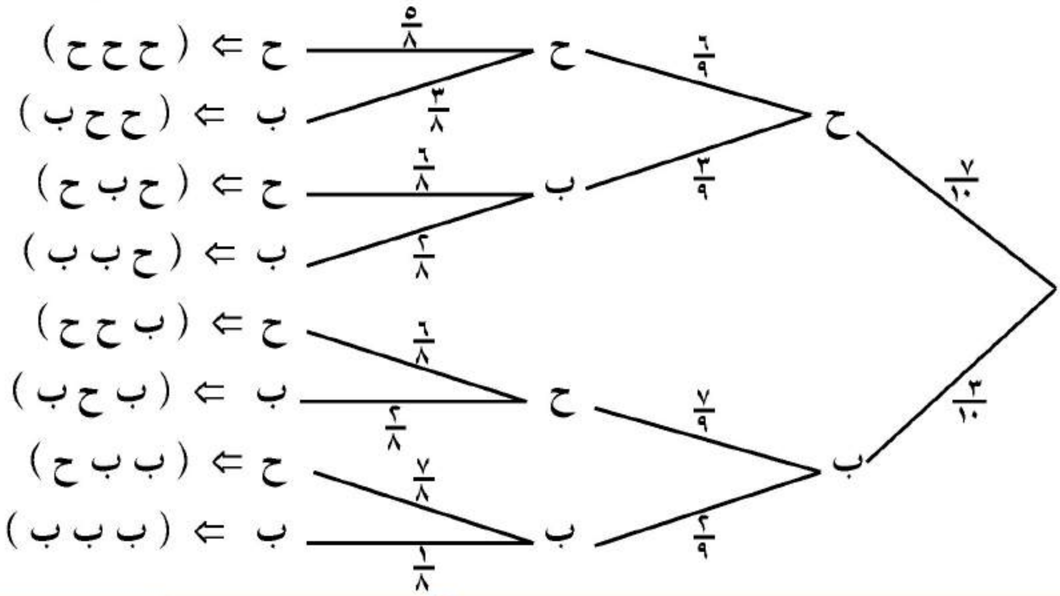
تمرين٣: صندوق يحتوي على ٧ كرات حمراوات ، ٣ كرات بيضاوات . سحبت ٣ كرات من الصندوق عشوائياً واحدة تلو الآخر ، فما احتمال أن تكون : الأولى والثانية حمراوان والثالثة بيضاء؟

الحل: من السؤال ن(ع) = ٧ + ٣ = ١٠ .

ليكن ح الكرات الحمراء وعددها ن(ح) = ٧ ⇐ حا (ح) = $\frac{٧}{١٠}$

وليكن ب الكرات البيضاء وعددها ن(ب) = ٣ ⇐ حا (ب) = $\frac{٣}{١٠}$

و بما أنه سحبت ٣ كرات من الصندوق فالمخطط الشجري سيكون من ٣ مراحل وكما يلي:



∴ احتمال أن تكون الأولى والثانية حمراوان والثالثة بيضاء يعني حا (ح ح ب)

∴ حا (ح ح ب) = $\frac{٧}{١٠} \times \frac{٦}{٩} \times \frac{٣}{٨} = \frac{٧}{٤٠}$

ملاحظات هامة :

١) في التمرين ٢ لاحظ أن العدد الكلي للمصابيح في المرحلة الثانية يقل عن سابقه كونه قد أخذنا أحد المصابيح وكذلك في المرحلة الثالثة فإن عدد المصابيح يقل عن المرحلة الثانية .

٢) في التمرين ٣ لاحظ أن عدد الكرات الكلي يقل في المرحلة الثانية عن المرحلة الأولى لأنه تم أخذ كرة وكذلك العدد الكلي للكرات يقل في المرحل الثالثة عن المرحلة الثانية بكرة وعن المرحلة الأولى بكرتين .

٣) لا تنسى أن المجموع الكلي لاحتمالات المرحلة يساوي واحد دائماً .

الحوادث المستقلة (استقلال الحوادث)

يقال عن حادثتين ٩ ، ب أنهما مستقلتان إذا كان وقوع أحدهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الآخر أي أن حا (٩ / ب) = حا (٩) ، حا (ب / ٩) = حا (ب) . ومن أمثلة الحوادث المستقلة الحوادث الآتية : (١) حوادث الموت . (٢) حوادث الولادة . (٣) حوادث النجاح والرسوب . (٤) حوادث الاصطياد . (٥) حوادث السباق ... وهكذا .

من قانون حاصل الضرب نلاحظ أن : حا (٩ب) = حا (٩) × حا (ب / ٩)

فإذا كان ٩ ، ب حادثتان مستقلتين فإن حا (ب / ٩) = حا (ب)

∴ $\boxed{\text{حا (٩ب) = حا (٩) × حا (ب)}}$ وهو شرط أساسي وكافي لاستقلال الحوادث .

قواعد مهمة:

إذا كانت ٩ ، ب حادثتين مستقلتين فإن :

(١) ٩ ، بَ مستقلتان . (٢) ٩َ ، ب مستقلتان . (٣) ٩َ ، بَ مستقلتان . وعليه فإن :

(١) حا (٩بَ) = حا (٩) × حا (بَ)

(٢) حا (٩َب) = حا (٩َ) × حا (ب)

(٣) حا (٩بَ) = حا (٩) × حا (بَ)

سيتم فيما يلي إثبات هذه القواعد :

الإثباتات :

برهان العلاقة (١) لكي تكون أ ، بَ مستقلتان يجب تحقق : حا (أ بَ) = حا (أ) × حا (بَ)

∵ حا (أ بَ) = حا (أ) − حا (أ ب)

و ∵ أ ، ب مستقلتان أي حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب)

∴ حا (أ بَ) = حا (أ) − حا (أ) × حا (ب) [بسحب حا (أ) عامل مشترك]

= حا (أ) [١ − حا (ب)] [حا (بَ) = ١ − حا (ب)]

= حا (أ) × حا (ب)

∴ أ ، بَ حادثتان مستقلتان (هـ . ط)

برهان العلاقة (٢) لكي تكون أَ ، ب مستقلتان يجب تحقق : حا (ب أَ) = حا (ب) × حا (أَ)

∵ حا (ب أَ) = حا (ب) − حا (أ ب)

و ∵ أ ، ب مستقلتان أي حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب)

∴ حا (أ بَ) = حا (ب) − حا (أ) × حا (ب) [بسحب حا (ب) عامل مشترك]

= حا (ب) [١ − حا (أ)] [حا (أَ) = ١ − حا (أ)]

= حا (ب) × حا (أ)

∴ أَ ، ب حادثتان مستقلتان (هـ . ط)

برهان العلاقة (٣) لكي تكون أَ ، بَ مستقلتان يجب تحقق : حا (أَ بَ) = حا (أَ) × حا (بَ)

∵ حا (أَ بَ) = حا (أ ∪ ب)َ

= ١ − حا (أ ∪ ب)

= ١ − حا (أ) − حا (ب) + حا (أ ب) [∵ أ ، ب مستقلتان فإن حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب)]

= ١ − حا (أ) − حا (ب) + حا (أ) × حا (ب) [حا (أَ) = ١ − حا (أ)]

= حا (أَ) − حا (ب) + حا (أ) × حا (ب) [بسحب − حا (ب) عامل مشترك من الحد الثاني والثالث]

= حا (أَ) − حا (ب) [١ − حا (أ)]

= حا (أَ) − حا (ب) × حا (أَ) [وبسحب حا (أَ) عامل مشترك]

= حا (أَ) [١ − حا (ب)]

= حا (أَ) × حا (بَ)

∴ أَ ، بَ حادثتان مستقلتان (هـ . ط)

مثال: إذا كان الحادثتان ﻫ ، ب مستقلتان ، وكان حا (ﻫ) = ٠,٦ ، حا (ب) = ٠,٥

فأوجد حا (ﻫ ∪ ب) .

الحل: ∴ حا (ﻫ ∪ ب) = حا (ﻫ) + حا (ب) − حا (ﻫ ب)

نوجد حا (ﻫ ب) حيث أن ﻫ ،ب مستقلتان فإن حا (ﻫ ب) = حا (ﻫ)×حا (ب) = ٠,٦ × ٠,٥ = ٠,٣

∴ حا (ﻫ ∪ ب) = حا (ﻫ) + حا (ب) − حا (ﻫ) × حا (ب) = ٠,٦ + ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٨

مثال: في مسابقة للرماية إذا كان احتمال أن يصيب المتسابق الأول الهدف = $\frac{١}{٤}$ واحتمال أن يصيب المتسابق الثاني الهدف = $\frac{٢}{٥}$ ، فإذا أطلق كل منهما نيرانهما في وقت واحد . احسب احتمالات الحوادث الآتية :

(١) أن يصاب الهدف من المتسابقين معاً . (٢) أن يصاب الهدف من المتسابق الأول فقط .

(٣) أن يصاب الهدف . (٤) أن يصاب الهدف من الأول بشرط عدم إصابته من الثاني .

الحل: ليكن ﻫ حادثة إصابة المتسابق الأول للهدف ⇐ حا (ﻫ) = $\frac{١}{٤}$

وليكن ب حادثة إصابة المتسابق الثاني للهدف ⇐ حا (ب) = $\frac{٢}{٥}$

وبما أنه سيتم إصابة الهدف في آن واحد ، فإن الحادثتين ﻫ ، ب مستقلتان وعليه فإن :

(١) أن يصاب الهدف من المتسابقين معاً يعني حا (ﻫ ب)

∴ حا (ﻫ ب) = حا (ﻫ)×حا (ب) = $\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٢٠} = \frac{١}{١٠}$

(٢) أن يصاب الهدف من المتسابق الأول فقط يعني حا (ﻫ $\bar{ب}$)

∴ حا (ﻫ $\bar{ب}$) = حا (ﻫ) − حا (ﻫ ب) = $\frac{١}{٤} - \frac{١}{١٠} = \frac{٥-٢}{٢٠} = \frac{٣}{٢٠}$

(٣) أن يصاب الهدف من المتسابق الأول أو من الثاني أو من كليهما وهذا يعني حا (ﻫ ∪ ب) وعليه

حا (ﻫ ∪ ب) = حا (ﻫ) + حا (ب) − حا (ﻫ ب) = $\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥} - \frac{١}{١٠} = \frac{٥+٨-٢}{٢٠} = \frac{١١}{٢٠}$

(٤) أن يصاب الهدف من الأول بشرط عدم إصابته من الثاني يعني حا (ﻫ / $\bar{ب}$)

∴ حا (ﻫ / $\bar{ب}$) = حا (ﻫ) = $\frac{١}{٤}$ [ﻫ ، $\bar{ب}$ حادثتان مستقلتان]

تدريب: احتمال أن يصيب هشام الهدف = $\frac{١}{٤}$ ، واحتمال أن يصيب محمد الهدف = $\frac{٢}{٥}$ ، ما احتمال إصابة الهدف إذا صوّب كلٍ من هشام ومحمد نحو الهدف في آن واحد ؟ $\boxed{\frac{١}{١٠}}$

....

....

مثال: يطلق الرجل النار على هدف ثابت ، فإذا كان احتمال إصابته للهدف في كل مرة يطلق فيها النار = $\frac{١}{٣}$ ، أطلق الرجل على الهدف ٤ مرات فأوجد :

(١) احتمال أن يصيب الهدف في الرمية الأولى فقط .

(٢) احتمال أن يصيب الهدف في الرميتين الأولى والأخيرة .

(٣) احتمال أن يصاب الهدف .

الحل: نفرض أن ص حادثة أن يصيب الهدف $\Leftarrow$ حا (ص) = $\frac{١}{٣}$

و خ حادثة أن يخطئ الهدف $\Leftarrow$ حا (خ) = $\frac{٢}{٣}$

∵ احتمال أن يصيب الهدف ثابت لجميع الرميات الأربع فإن الحوادث الأربع مستقلة .

(١) احتمال أن يصيب الهدف في الرمية الأولى فقط يعني :

حا (ص خ خ خ) = حا (ص) × حا (خ) × حا (خ) × حا (خ) = $\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٨١}$

(٢) احتمال أن يصيب الهدف في الرميتين الأولى والأخيرة يعني :

حا (ص خ خ ص) = حا (ص) × حا (خ) × حا (خ) × حا (ص) = $\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{٤}{٢٧}$

(٣) احتمال أن يصاب الهدف يعني أن الاحتمال متحقق في جميع الحالات عدا في حالة أن تكون جميع الرميات خاطئة وهي حا (خ خ خ خ) وعليه فإن:

الاحتمال المطلوب = ١ − حا (خ خ خ خ) = ١ − $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤}$ = ١ − $\frac{١٦}{٨١} = \frac{٦٥}{٨١}$

مثال: يحتوي الصندوق أ على ١٠ مصابيح منها ٣ معيبة ، ويحتوي الصندوق ب على ٥ مصابيح منها ٢ معيبة . سحب مصباح عشوائياً من كل صندوق فما احتمال :

(١) أن يكون المصباحين صالحين . (٢) أن يكون احدهما صالح والآخر معيب .

الحل: ∵ السحب تم من صندوقين فإن الحادثتين أ ، ب مستقلتين ولا يوجد داعي لاستخدام المخطط الشجري .

لنفرض الرموز التالية: ص$_{١}$ حادثة مصابيح صالحة من الصندوق الأول (أ) $\Leftarrow$ حا (ص$_{١}$) = $\frac{٧}{١٠}$

م$_{١}$ حادثة مصابيح معيبة من الصندوق الأول (أ) $\Leftarrow$ حا (م$_{١}$) = $\frac{٣}{١٠}$

ص$_{٢}$ حادثة مصابيح صالحة من الصندوق الثاني (ب) $\Leftarrow$ حا (ص$_{٢}$) = $\frac{٣}{٥}$

م$_{٢}$ حادثة مصابيح معيبة من الصندوق الثاني (ب) $\Leftarrow$ حا (م$_{٢}$) = $\frac{٢}{٥}$

(١) أن يكون المصباحين صالحين :

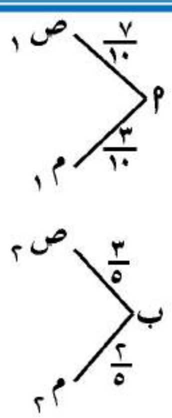
لتكن جـ حادثة المطلوب فإن:

حا (جـ) = حا (ص١ ص٢)

= حا (ص١) × حا (ص٢)

= $\frac{٧}{١٠} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٢١}{٥٠}$

لاحظ أن كلاً من أ،ب حادثتان مستقلتان . لذلك نلاحظ في المخطط الشجري أ مستقلة عن ب .



(٢) أن يكون احدهما صالح والآخر معيب :

لتكن د حادثة المطلوب فإن:

حا (د) = احتمال صالح من الأول ومعيب من الثاني أو معيب من الأول وصالح من الثاني

= حا (ص١ م٢) + حا (م١ ص٢) = حا (ص١) × حا (م٢) + حا (م١) × حا (ص٢)

= $\frac{٧}{١٠} \times \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{١٠} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١٤}{٥٠} + \frac{٩}{٥٠} = \frac{٢٣}{٥٠}$

تذكير : ١) تكون الحادثتان أ ، ب متنافيتان إذا كان حا (أب) = صفر [أ ∩ ب = ∅] .

٢) تكون الحادثتان أ ، ب مستقلتان إذا كان حا (أب) = حا (أ) × حا (ب) .

مثال: إذا كان حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، حا (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$:

(١) هل أ ، ب متنافيتان . (٢) هل أ ، ب مستقلتان .

الحل: (١) لكي تكون أ ، ب متنافيتان يجب تحقق حا (أ ∩ ب) = صفر

∵ حا (أ ∪ ب)= حا (أ) + حا (ب) − حا (أب) ⇐ حا (أب)= حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ∪ ب)

= $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{٥}{٦} = \frac{٣+٢-٥}{٦} = \frac{٠}{٦} = ٠$

∴ أ ، ب حادثتان متنافيتان .

(٢) لكي تكون أ ، ب مستقلتان يجب تحقق حا (أب) = حا (أ) × حا (ب)

بالتعويض في كلاً من الطرف الأيمن والطرف الأيسر وملاحظة الناتج لكل قيمة :

الطرف الأيمن = حا (أب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{٥}{٦} = ٠$

الطرف الأيسر = حا (أ) × حا (ب) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

نلاحظ أن الطرف الأيمن ≠ الطرف الأيسر ⇐ حا (أب) ≠ حا (أ) × حا (ب)

∴ أ ، ب حادثتان غير مستقلتان .

مثال: إذا كانت أ ⊂ ب وكان حا (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، فهل أ ، ب حادثتين مستقلتين .

الحل: لكي تكون أ ، ب حادثتين مستقلتين يجب تحقق الشرط : حا (أب) = حا (أ) × حا (ب)

الطرف الأيمن حا (أب) :

∵ أ ⊂ ب ⇐ أ ∩ ب = أ ⇐ حا (أب) = حا (أ) = $\frac{١}{٤}$

الطرف الأيسر : حا (أ) × حا (ب) = $\frac{١}{٤}$ × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{١٢}$

∵ الطرف الأيمن ≠ الطرف الأيسر ⇐ حا (أب) ≠ حا (أ) × حا (ب) لم يتحقق شرط الاستقلالية.

∴ أ ، ب حادثتان غير مستقلتان .

مثال: إذا كان حا (أ ∪ ب) = حا (أ) حا (بَ) + حا (ب) ، أثبت أن أ ، ب حادثتان مستقلتان .

الحل: نبحث تحقق الشرط : حا (أب) = حا (أ) × حا (ب)

سنمشي في الإثبات بالطرفين مع بعض ابتداءً بالمعطى لين نتوصل إلى الشرط وتحققه :

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حا (أ ∪ ب) = حا (أ) حا (بَ) + حا (ب)

حا (أ) + حا (ب) − حا (أب) = حا (أ) [١ − حا (ب)] + حا (ب)

$\cancel{\text{حا (أ)}}$ + $\cancel{\text{حا (ب)}}$ − حا (أب) = $\cancel{\text{حا (أ)}}$ − حا (أ) حا (ب) + $\cancel{\text{حا (ب)}}$

− حا (أب) = − حا (أ) حا (ب)

∴ حا (أب) = حا (أ) × حا (ب) ⇐ أ ، ب حادثتان مستقلتان . (هـ . ط)

مسائل إضافية :

تمرين محلول: ألقي حجر نرد ، ولوحظ الوجه الظاهر عند استقراره على الأرض . فإذا كان :

أ هي حادثة ظهور العدد " ٤ " ، ب هي حادثة ظهور عدد زوجي ،

جـ هي حادثة ظهور عدد أصغر من " ٣ " . أوجد : (١) حا (ب جـ) . (٢) حا (أ / ب) .

(٣) حا (ب / جـ) . (٤) بيِّن أياً من الحوادث أ ، ب ، جـ مستقلة مثنى مثنى .

الحل: ∵ حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، حا (جـ) = $\frac{١}{٦}$ [لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي ١]

∵ فضاء العينة لهذه التجربة هو : ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ⇐ ن(ع) = ٦

∴ أ = {٤} ⇐ حا (أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ب = {٢ ، ٤ ، ٦} ⇐ حا (ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ،

جـ = {١ ، ٢} ⇐ حا (جـ) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$.

(١) ∵ ب = {٢ ، ٤ ، ٦} ، جـ = {١ ، ٢} ⇐ ب جـ = {٢} ⇐ حا (ب جـ) = $\frac{١}{٦}$.

(٢) حا (أ/ب) = $\frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (ب)}}$

∵ أ = {٤} ، ب = {٢ ، ٤ ، ٦} ⇐ أ ب = {٤} ⇐ حا (أ ب) = $\frac{١}{٦}$.

∴ حا (أ/ب) = $\frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (ب)}}$ = $\frac{\frac{١}{٦}}{\frac{٣}{٦}}$ = $\frac{١}{٣}$.

(٣) حا (ب /جـ) = $\frac{\text{حا (ب جـ)}}{\text{حا (جـ)}}$ = $\frac{\frac{١}{٦}}{\frac{٢}{٦}}$ = $\frac{١}{٢}$.

(٤) لتوضيح أي من الحوادث أ ، ب ، جـ مستقلة مثنى مثنى علينا التحقق من شرط الاستقلالية لكل حادثتين معاً أي حا (أ ب) ، حا (أ جـ) ، حا (ب جـ) .

(أ) التحقق من الشرط حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب)

نلاحظ حا (أ ب) = $\frac{١}{٦}$. و حا (أ) × حا (ب) = $\frac{١}{٦}$ × $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{١٢}$.

∴ حا (أ ب) ≠ حا (أ) × حا (ب) ⇐ أ ، ب غير مستقلتان .

(ب) التحقق من الشرط حا (أ جـ) = حا (أ) × حا (جـ)

نلاحظ أ جـ = ∅ ⇐ حا (أ جـ) = صفر . و حا (أ) × حا (جـ) = $\frac{١}{٦}$ × $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{١٨}$.

∴ حا (أ جـ) ≠ حا (أ) × حا (جـ) ⇐ أ ، جـ غير مستقلتان .

(ج) التحقق من الشرط حا (ب ج) = حا (ب) × حا (ج)

نلاحظ حا (ب ج) = $\frac{١}{٦}$. و حا (ب) × حا (ج) = $\frac{٣}{٦}$ × $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٦}$.

∴ حا (ب ج) = حا (ب) × حا (ج) ⇐ ب ، ج حادثتان مستقلتان .

مسألة ١: قاعدتان لإطلاق صورايخ أرض جو ، فإذا كان احتمال أن تصيب القاعدة الأولى أي هدف جوي = $\frac{١}{٤}$ ، وكان احتمال أن تصيب القاعدة الثانية أي هدف جوي = $\frac{٢}{٥}$ ، فإذا ظهرت طائرة معادية في مجال القاعدة وأطلقت كل قاعدة صاروخاً واحداً على الطائرة المعادية .

فما احتمال إصابة الطائرة المعادية ؟

الحل: لتكن ؁ حادثة إصابة القاعدة الأولى للهدف ⇐ حا (؁) = $\frac{١}{٤}$

لتكن ب حادثة إصابة القاعدة الثانية للهدف ⇐ حا (ب) = $\frac{٢}{٥}$

مع ملاحظة أن إصابة الهدف مستقل لكل قاعدة أي أن الحادثتين ؁ ، ب مستقلتان .

∴ احتمال إصابة الهدف (الطائرة المعادية) يكون من القاعدة الأولى ؁ أو القاعدة الثانية ب

∴ حا (؁ ∪ ب) = حا (؁) + حا (ب) − حا (؁ب) ، و ∵ ؁ ، ب مستقلتان .

= حا (؁) + حا (ب) − حا (؁) × حا (ب) [بسحب حا (ب) عامل مشترك]

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٥}$ [١ − $\frac{١}{٤}$] = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٦}{٢٠}$ = $\frac{٥ + ٦}{٢٠}$ = $\frac{١١}{٢٠}$

∴ حا (؁ ∪ ب) = $\frac{١١}{٢٠}$

مسألة ٢: شركة تأمين تقدر لعائلة مكونة من زوج وزوجته الاحتمالات الآتية :

١) احتمال أن يعيش الرجل أكثر من ١٥ عاماً هو ٠,٢ .

٢) احتمال أن تعيش الزوجة أكثر من ١٥ عاماً هو ٠,٢٥ .

أوجد الاحتمالات الآتية :

١ − أن يعيشا الرجل وزوجته معاً أكثر من ١٥ عاماً .

٢ − أن يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ١٥ عاماً .

٣ − أن تعيش الزوجة فقط أكثر من ١٥ عاماً .

٤ − أن يعيش أحدهما أكثر من ١٥ عاماً .

الحل: لتكن ٩ حادثة الرجل يعيش أكثر من ١٥ عاماً ⇐ حا (٩) = ٠,٢

لتكن ب حادثة الزوجة تعيش أكثر من ١٥ عاماً ⇐ حا (ب) = ٠,٢٥

إن حياة وموت أحدهما مستقل عن حياة وموت الآخر ولذلك يكون :

١– احتمال أن يعيشا معاً يعني حا (٩ب)

∴ حا (٩ب) = حا (٩) × حا (ب) = ٠,٢ × ٠,٢٥ = ٠,٠٥ .

٢– احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ١٥ عاماً يعني حا (٩ ∪ ب)

∴ (٩ ∪ ب) = حا (٩) + حا (ب) – حا (٩ب) = ٠,٢ + ٠,٢٥ – ٠,٠٥ = ٠,٤٠ .

٣– احتمال أن تعيش الزوجة فقط أكثر من ١٥ عاماً يعني حا (ب٩َ)

∴ حا (ب٩َ) = حا (ب) – حا (٩ب) = ٠,٢٥ – ٠,٠٥ = ٠,٢ .

٤– احتمال أن يعيش أحدهما أكثر من ١٥ عاماً يعني احتمال أن يعيش الرجل فقط أو الزوجة فقط

∴ حا (٩بَ) + حا (ب٩َ) = حا (٩) – حا (٩ب) + حا (ب) – حا (٩ب)

= حا (٩) + حا (ب) – ٢حا (٩ب)

= ٠,٢ + ٠,٢٥ – ٢ × ٠,٠٥

= ٠,٤٥ – ٠,١ = ٠,٣٥

(ورقة عمل) أسئلة وزارية من ٢٠١٤-٢٠١٩ في الاحتمالات

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١- إذا كانت ٩ ،ب حادثتين متنافيتين ، فإن حا(٩ ب̄) = حا(٩) ( )

٢- لكل حادثة ٩ من فضاء العينة ع فإن -١ $\leqslant$ حا(٩) $\leqslant$ ١ ( )

٣- إذا كانت ٩ ،ب متنافيتان ، فإن حا(٩ $\cup$ ب) = حا(٩) + حا(ب) ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١- عند رمي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد أولي زوجي = ...

٢- حا(٩َ /ب) + حا(٩ /ب) = ...

٣- إذا كان ٩ ،ب حادثتين غير متنافيتان فإن حا(٩ /٩ ب) = ...

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) حا(٩ /٩ ب) = ... [صفر ، ١ ، حا ٩ ، حا ٩ ب]

٢) عند رمي حجر نرد مرة واحدة احتمال الحصول على عدد زوجي < ٦ = ... [$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٥}{٦}$]

٣) إذا كان حا(٩ /ب) = حا(٩) فإن .... [٩ ب = $\varnothing$ ، ٩ $\supset$ ب ، ٩ ب مستقلتان ، ٩ ب متنافيتان]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١- إذا كان ب $\subset$ ٩ فإن حا(٩ /ب) = ...	$\frac{٢}{٣}$
٢- إذا كان ٩ $\subset$ ب فإن حا(ب/٩) = ...	$\frac{١}{٣}$
٣- إذا كانت ٩ ،ب مستقلتان،حا(٩) = $\frac{١}{٢}$ ،حا(ب) = $\frac{١}{٣}$ فإن حا(٩ $\cup$ ب) = ...	١
٤- إذا كان ٢ حا^{٢}(٩) = ١ ، ٩ $\subset$ ب فإن حا(٩ ب) = ...	١
	$\frac{١}{٣}$

س٥: أطلق صياد (٤) رصاصات نحو هدف معين ، فإذا كان احتمال إصابة الهدف ٠,٦ ما احتمال أن يصيب الهدف مرتين بالضبط .

....

....

....

....

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

س٦: إذا كان حا(أ) = ٠,٤ ، حا(أب) = ٠,٣ أوجد كلاً من :

(١) حا(أ ∪ ب) (٢) حا(أ َ/ ب) حيث أ ،ب مستقلتان .

....

....

....

....

س٧: إذا كان حا(أ) = ٠,٣ حا(ب / أ) = $\frac{١}{٣}$ أوجد :

(١) حا(أب) (٢) حا(أ َ ∪ ب) .

....

....

....

....

س٨: في نهاية العام الدراسي لوحظ نتائج أحد الطلاب في ماديتين دراسيتين (ناجح أو راسب) أكتب مايلي : (١) فضاء العينة . (٢) حادثة نجاح الطالب في مادة واحدة على الأقل .

[اعتبر رمز ناجح (ن) ورمز راسب (ر)] .

....

....

....

....

س٩: إذا كانت أ ،ب حادثتين في فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان حا(أ) = $\frac{١}{٣}$ ، حا(ب) = $\frac{١}{٤}$ ، حا(أب) = $\frac{١}{١٢}$ فأوجد : (١) حا(أ ∪ ب) (٢) حا(أ/ب) (٣) حا(ع) .

....

....

....

....

س١٠: إذا كان حا(أ) = ٠,٣ ، حا(ب) = ٠,٤ ، حا(أ ب̄) = ٠,٢ فأوجد كلاً من :

(١) حا(أ ∪ ب) (٢) حا(أ/ب) .

....

....

....

....

....

س١١: أطلق صياد ٣ رصاصات على هدف ، فإذا كان احتمال إصابة الهدف ٠,٥ ، أحسب احتمال:

(١) إصابة الهدف مرتين فقط . (٢) عدم إصابة الهدف .

....

....

....

....

....

س١٢: إذا كان حا(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، حا(أ ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد كلاً من :

(١) حا(أ ∪ ب) (٢) أولاً: حا(أ̄/ب̄) ، ثانيا: أثبت أن حا(أ ب̄) = ٣حا(أ̄ ب) .

....

....

....

....

....

تم الانتهاء من وحدة الاحتمالات

كل الشكر لمن ساعدني في إتمامه

إعداد وتصميم وطباعة الأستاذ / صوفي رمضان حمادي

شبام – حضرموت – ٢٠٢٠م

soramnet@gmail.com - +٩٦٧-٧٧٠٠٦٠٧٦٦

الجمهورية اليمنية وزارة التربية والتعليم اللجنة العليا للاختبارات لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)	بسم الله الرحمن الرحيم اختبار مادة : الجبر والهندسة لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي) العام الدراسي : ٢٠١٧ / ٢٠١٨م	اليوم: الأربعاء التاريخ: ١١ / ٧ / ٢٠١٨م الزمن: ثلاث ساعات الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية: **يسمح باستخدام الحاسبة العادية**

السؤال الأول — ٥

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، و علامة (x) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

(١) إذا كان ن ∈ ص+ فإن $ت^{٤ن+٢} = ١$ التصحيح $ت^{٤ن+٢} = -١$ (X)

(٢) عدد طرق ترتيب (٥) أخوة في صف بحيث يجلس الأكبر في بداية الصف والأصغر في نهايته ٣| . (✓)

(٣) إذا كانت أ ، ب متنافيتان، فإن ح(أ ∪ ب) = ح(أ) + ح(ب). (✓)

ب) لتكن $ع_١ = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت}$ ، $ع_٢ = \frac{٢ - ت}{٣ - ت}$ ، **أثبت أن** $ع_١$ ، $ع_٢$ **مترافقان.**

$ع_١ = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت} \times \frac{١ + ٣ت}{١ + ٣ت} = \frac{١ + ٣ت - ٢ت - ٦ت^٢}{١ + ٩} = \frac{٧ + ت}{١٠} = \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{١٠}ت$ ...①

$ع_٢ = \frac{٢ - ت}{٣ - ت} \times \frac{٣ + ت}{٣ + ت} = \frac{٦ + ٢ت - ٣ت - ت^٢}{٩ + ١} = \frac{٧ - ت}{١٠} = \frac{٧}{١٠} - \frac{١}{١٠}ت$ ...②

نلاحظ من ① و ② أن $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان .

السؤال الثاني — ٥

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

(١) رتبة الحد الأوسط في مفكوك $(٢ - س)^٥ (٢ + س)^٥$ يساوي ......٦......

(٢) القطع المخروطي الذي بعده البؤري أصغر من البعد بين رأسيه هو قطع ......ناقص......

(٣) إذا كان أ ، ب حادثتين غير متنافيتين فإن ح(أ / أ ب) = ...١......

ب) في مفكوك $(س + ٢)^٨$ إذا كان $ح_٤$ يساوي ٤٤٨ فأوجد قيمة س.

$ح_٤ = ٤٤٨ \Leftarrow {}^{٨}ق_{٣} \times س^٥ \times ٢^٣ = ٤٤٨$

$\Leftarrow \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} \times ٨ \times س^٥ = ٤٤٨$

$\Leftarrow ٤٤٨ س^٥ = ٤٤٨ \Leftarrow س^٥ = ١ \Leftarrow س = ١$

أ) إذا كان حا(أ) = ١/٢ ، حا(ب) = ١/٣ ، حا(أ ب) = ١/٤

أولاً: أوجد كلاً من (١) حا(أ ∪ ب) (٢) حا(أ̅ / ب̅)

ثانياً: اثبت أن حا(أ ب̅) = ٣ حا(أ̅ ب)

أولاً:

① حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب) − حا(أ ∩ ب)

= ١/٢ + ١/٣ − ١/٤ = (٦ + ٤ − ٣)/١٢ = ٧/١٢

② حا(أ̅ / ب̅) = حا(أ̅ ∩ ب̅) / حا(ب̅) = (١ − حا(أ ∪ ب)) / (١ − حا(ب))

= (١ − ٧/١٢) / (١ − ١/٣) = (٥/١٢) / (٢/٣) = ٥/٨

ثانياً: حا(أ ب̅) = حا(أ) − حا(أ ∩ ب)

= ١/٢ − ١/٤ = ١/٤ ..... ①

٣ حا(أ̅ ب) = ٣(حا(ب) − حا(أ ∩ ب))

= ٣(١/٣ − ١/٤) = ٣ × ١/١٢ = ١/٤ ..... ②

من ① و ② ينتج أن حا(أ ب̅) = ٣ حا(أ̅ ب)

:

٥

ب) أوجد قيمتي س و ص التي تحقق المعادلة: س٢ − ص٢ + ت (س + ص) = ٣ + ٣ت

س٢ − ص٢ = ٣ ..... ① ، س + ص = ٣ ..... ②

من ② س = ٣ − ص نعوض في ①

(٣ − ص)٢ − ص٢ = ٣ ⟸ ٩ − ٦ص + ~~ص٢~~ − ~~ص٢~~ = ٣

⟸ −٦ص = −٦ ⟸ $\boxed{ص = ١}$

بالتعويض بقيمة ص في المعادلة ② ينتج

س + ص = ٣ ⟸ س + ١ = ٣ ⟸ $\boxed{س = ٢}$

السؤال الثالث

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

(١) عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط فإن منحنى التقاطع... [قطع مكافئ ، دائرة ، قطع ناقص ، قطع زائد].

(٢) إذا كان ن ل ر = ن٢ − ن فإن ر = ... [٢ ، ٣ ، ١ ، صفر].

(٣) حاصل ضرب جذري المعادلة ٢ع٢ + ع − ٦ = صفر.... [٣ ، −٣ ، −٤ ، ٤].

(٠ ، ٠)

ب) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٤)

محور القطع هو محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٤) التي تقع في الربع الأول

معادلة القطع من الوضع القياسي الأول ص٢ = ٤أس

القطع يمر بالنقطة (٢ ، ٤) ⟸ (٤)٢ = ٤أ × ٢ ⟸ ١٦ = ٨أ ⟸ أ = ٢

∴ معادلة القطع هي ص٢ = ٨س

٥

السؤال الرابع

السؤال الخامس

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب) فيما يأتي:

(أ)		(ب)
إذا كانت النقطة(٠، ٢) تقع على منحنى القطع $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{2ص^2}{ب^2} = 1$ فإن طول المحور الأكبر يساوي..	($4\sqrt{2}$)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
إذا كان $ع = \frac{-1}{\sqrt{3}ت + 1}$ فإن $\|ع\| = \frac{1}{2}$	( )	$4\sqrt{2}$
إذا كان $2حا^2(أ) = 1$ ، أ ⊃ ب فإن حا(أ ب) $= \frac{1}{\sqrt{2}}$	( )	$\frac{1}{2}$
$0 + \frac{2\sqrt{4}}{ب^2} = 1 \Leftarrow ب^2 = 8 \Leftarrow 2ب = 2\sqrt{8}$ ، $2ب = 4\sqrt{2}$		$-\frac{1}{2}$

٥

ب) لدينا س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ } والمطلوب:

(١) عدد التطبيقات المتباينة من س إلى س (٢) عدد الأعداد الزوجية المختلفة من س ذات ٣ أرقام أو ٤ أرقام

① عدد التطبيقات المتباينة من س ← س = $ل^{د.(س)}_{د.(س)} = {}^4ل_4 = \underline{|4} = 24$ تطبيق.

② عدد الأعداد الزوجية المختلفة التي تكونت من س ذات ٣ أرقام أو ٤ أرقام

$= 3 \times 4 \times 4 + 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 48 + 192 = 240$ عدداً زوجياً مختلفاً.

$\boxed{ملاحظة}$ هنا طلب أعداد زوجية مختلفة وهذا لا يعني اختلاف أرقام منازلها، بل الأعداد نفسها مختلفة عن بعضها والجدول يوضح ذلك

ذات الثلاثة أرقام		
آحاد	عشرات	مئات
٣	٤	٤

\+

ذات الأربعة أرقام			
آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٣	٤	٤	٤

السؤال السادس

أ) إذا كان ع = ٢+ ٢ $\sqrt{3}$ ت فأوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من:

(١) $\bar{ع}$ (٢) $ع^3$ وبين أنه حقيقي صرف

$ع = 2 + 2\sqrt{3}ت$ ، $|ع| = ر = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

جتاهـ $= \frac{س}{ر} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ، جاهـ $= \frac{ص}{ر} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftarrow هـ = \frac{\pi}{3}$

$\therefore ع = [4 ، \frac{\pi}{3}]$

① $\bar{ع} = [4 ، -\frac{\pi}{3}]$

② $ع^3 = [4 ، \frac{\pi}{3}]^3 = [4^3 ، 3 \times \frac{\pi}{3}] = [64 ، \pi] = -64$ هو حقيقي صرف

٥

ب) قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوره الأصغر المحور السيني طوله ٤ سم وبعده البؤري ٦ سم أوجد:

(١) معادلة القطع (٢) تخالفه المركزي

∵ مركز القطع (٠، ٠) ومحوره الأصغر محور السينات

∴ معادلة القطع من الوضع القياسي الثاني $\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = 1$

$2ب = 4 \Leftarrow ب = 2 \Leftarrow ب^2 = 4$ ، $2جـ = 6 \Leftarrow جـ = 3 \Leftarrow جـ^2 = 9$

$أ^2 = ب^2 + جـ^2 = 4 + 9 = 13 \Leftarrow أ = \sqrt{13}$

∴ ① معادلة القطع هي: $\frac{ص^2}{13} + \frac{س^2}{4} = 1$ ② التخالف المركزي $ي = \frac{جـ}{أ} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)

بسم الله الرحمن الرحيم
اختبار مادة : الجبر والهندسة
لإتمام شهادة الثانوية العامة (القسم العلمي)
العام الدراسي : ٢٠١٨ / ٢٠١٩م

اليوم: الأربعاء
التاريخ: ٢٦ / ٦ /٢٠١٩م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية: **يسمح باستخدام الحاسبة العادية**

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، و علامة (×) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

(١) $ل^{٩}_{٤} : ل^{٩}_{٢} = \frac{٧}{٢}$ (✓)

(٢) $\frac{٧}{ت} = ٧ ت$ (X)

(٣)المنحنى الذي ترسمه النقطة(س،ص)بحيث يكون الفرق بين بعديهاعن نقطتين ثابتتين يساوي طولاً ثابتاًهو قطع ناقص.(X)

ب) إذا كان ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، أوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من: ع ، $ع^{٢}$

ر = $\sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$ ، جتا هـ = $\frac{س}{ر} = \frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$
الزاوية في الربع الأول ، ∴ هـ = $\frac{\pi}{٣}$

∴ بالصورة [ر،هـ] تكون ع = [٢ ، $\frac{\pi}{٣}$]
و $ع^{٢}$ = [$٢^{٢}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$] = [٤ ، $\frac{٢\pi}{٣}$]

ممتاز

٥

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

(١) إحداثي البؤرة للقطع المكافئ $س^{٢} = -٣٢$ ص هو (٠ ، −٨)

(٢) عدد طرق ترتيب حروف كلمة اليمن يساوي ١٢٠ طريقة (١، ١، ١، ١، ١) $\frac{٥!}{١!١!١!١!١!} = ١٢٠$

(٣) ع = ٦ (− جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$) = [٦ ، $\frac{٥\pi}{٦}$]

ب) في المفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٠}$ ، أوجد الحد الذي يحوي $س^{٢}$

$ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$ ، أ = $س^{٢}$ ، ب = $\frac{١}{س}$ ، ن = ١٠
∴ $ح_{ر+١} = ق^{١٠}_{ر} (س^{٢})^{١٠-ر} \times (\frac{١}{س})^{ر}$
$= ق^{١٠}_{ر}\ س^{٢٠-٢ر} \times س^{-ر}$
$= ق^{١٠}_{ر} \times س^{٢٠-٣ر}$
∴ $س^{٢٠-٣ر} = س^{٢}$ ⟸ ٢٠ − ٣ر = ٢ ⟸ −٣ر = −١٨ ⟸ ر = ٦
∴ الحد الذي يحوي $س^{٢}$ هو $ح_{٦+١} = ح_{٧} = ق^{١٠}_{٦} \times س^{٢٠-٣\times٦} = \frac{١٠!}{٦!\ ٤!} \times س^{٢}$
$= ٢١٠\ س^{٢}$

٥

السؤال الثالث — ٥

أ) بكم طريقة يمكن أن يجلس ٤ طلاب و ٣ مدرسين في خط مستقيم في الحالتين:

(١) بدون شروط.

(٢) بالتناوب.

① بدون شرط العدد (٧) ولذلك عدد الطرق = ل٧ = ٥٠٤٠ طريقة

② بالتناوب عدد الطرق = ل٤ × (ل٣) = ٤ × ٦ × ٦ = ١٤٤ طريقة

حل آخر عدد الطرق = ل٤ × ل٣ = ٤ × ٣ × ٢ × ٣ × ٢ = ١٤٤ طريقة

ب) كون معادلة من الدرجة الثانية ذات المعاملات الحقيقية إذا كان أحد جذريها $\frac{١+ت}{١-ت}$

∵ أحد الجذرين $\frac{١+ت}{١-ت}$ نبسط بالضرب $\frac{١+ت}{١-ت} \times \frac{١+ت}{١+ت} = \frac{\cancel{١+٢ت-١}}{١+١} = \frac{٢ت}{٢} = ت$

∵ المعاملات حقيقية ∴ الجذر الآخر المرافق = −ت

∴ المعادلة هي ع² − (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ ع² − (ت + (−ت)) ع + (ت × −ت) = ٠

ع² − (٠) ع + ١ = ٠ ⟸ ع² + ١ = ٠

السؤال الرابع — ٥

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

(١) في مفكوك (س + ص)$^{ن+١}$ ، مجموع أسي س وَ ص في كل حد يساوي...[ن ، ن+١ ، ن − ١ ، ن + ٢].

(٢) طول المحور المرافق للقطع ٤ص² − ٣س² = −١ يساوي [$\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$].

ب = ½ × ٢ = ١

(٣) ت$^{-٦٤}$ = ... [١ ، −١ ، ت ، −ت].

ب) إذا كانت معادلة القطع ٩س² + ٢٥ ص² = ٢٢٥ ، أوجد: (١) إحداثي الرأسين. (٢) التخالف المركزي.

٩س² + ٢٥ص² = ٢٢٥

$\frac{٩س^٢}{٢٢٥} + \frac{٢٥ص^٢}{٢٢٥} = ١$

$\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

أ² = ٢٥ ⟸ أ = ٥

ب² = ٩ ⟸ ب = ٣

∵ ب² = أ² − جـ²

∴ جـ² = أ² − ب²

جـ² = ٢٥ − ٩

جـ² = ١٦

جـ = ٤

∴ إحداثي الرأسين (±٥ ، ٠)

والتخالف المركزي (ل) = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٥}$

السؤال الخامس

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب) فيما يأتي:

(أ)	(ب)
البعد بين البؤرة والدليل للقطع المكافئ $ص^2 = -12س$ يساوي ...٦...	٧
إذا كان ${}^{ن}ل_{ن} = 5040$ ، فإن قيمة ن = ..٧....	٣
إذا كان ع = ٢ت ، فإن مقياسه يساوي ...٢....	٦
	٩
	٢

٥

ب) إذا كان ${}^{7}ق_{2س-5} = {}^{7}ق_{س+3}$ ، فما قيمة س.

إما $ر_1 = ر_2$ ⟸ ٢س − ٥ = س + ٣ ⟸ ٢س − س = ٣ + ٥ ⟸ $\boxed{س = ٨}$
مرفوض

أو $ر_1 + ر_2 = ن$ ⟸ ٢س − ٥ + س + ٣ = ٧

⟸ ٣س − ٢ = ٧ ⟸ ٣س = ٧ + ٢

⟸ ٣س = ٩ ⟸ $\boxed{س = ٣}$

٢ درجة

السؤال السادس

أ) أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي الدليلين للقطع المخروطي $20ص^2 - 16س^2 = 320$

٢٠ص² − ١٦س² = ٣٢٠ ÷ ٣٢٠

$\frac{20ص^2}{320} - \frac{16س^2}{320} = 1$

$\frac{ص^2}{16} - \frac{س^2}{20} = 1$ (القطع زائد)

$أ^2 = 16$ ، $ب^2 = 20$ ، $جـ^2 - أ^2$

∴ $جـ^2 = ب^2 + أ^2 = 20 + 16 = 36$

∴ جـ = ٦

∴ البؤرتان هما (٠ ، ±٦)

ومعادلتا الدليلين هما

$ص = \pm \frac{أ^2}{جـ} = \pm \frac{16}{6} = \pm \frac{8}{3}$

٥

ب) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (١ + ت) بالصورة الجبرية.

نفرض $\sqrt{ع} = س + ت ص$

$ع = س^2 - ص^2 + 2 ت س ص$

∴ ع = ١ + ت

∴ $س^2 - ص^2 = 1$ ...... ①

$2س ص = 1$ ...... ②

$س^4 - 2س^2ص^2 + ص^4 = 1$ ...... ③ وبالتعويض بدل س

$4س^2ص^2 = 1$ ...... ④ جمع ③ و ④

$س^4 + 2س^2ص^2 + ص^4 = 2$

$(س^2 + ص^2)^2 = (\sqrt{2})^2$

⟸ $س^2 + ص^2 = \sqrt{2}$ ...... ⑤

جمع ① و ⑤ : $2س^2 = 1 + \sqrt{2}$

نربع ① و ② ∴ $س = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

عندما $س = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

⟸ $ص = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}$

∴ ع (الجذر الأول) $= \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}ت$

عندما $س = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ⟸ $ص = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}$

∴ ع (الجذر الثاني)

$= -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}ت$

انتهت الأسئلة ... نسأل الله لكم النجاح والتفوق...

٣١٦٦٢٦