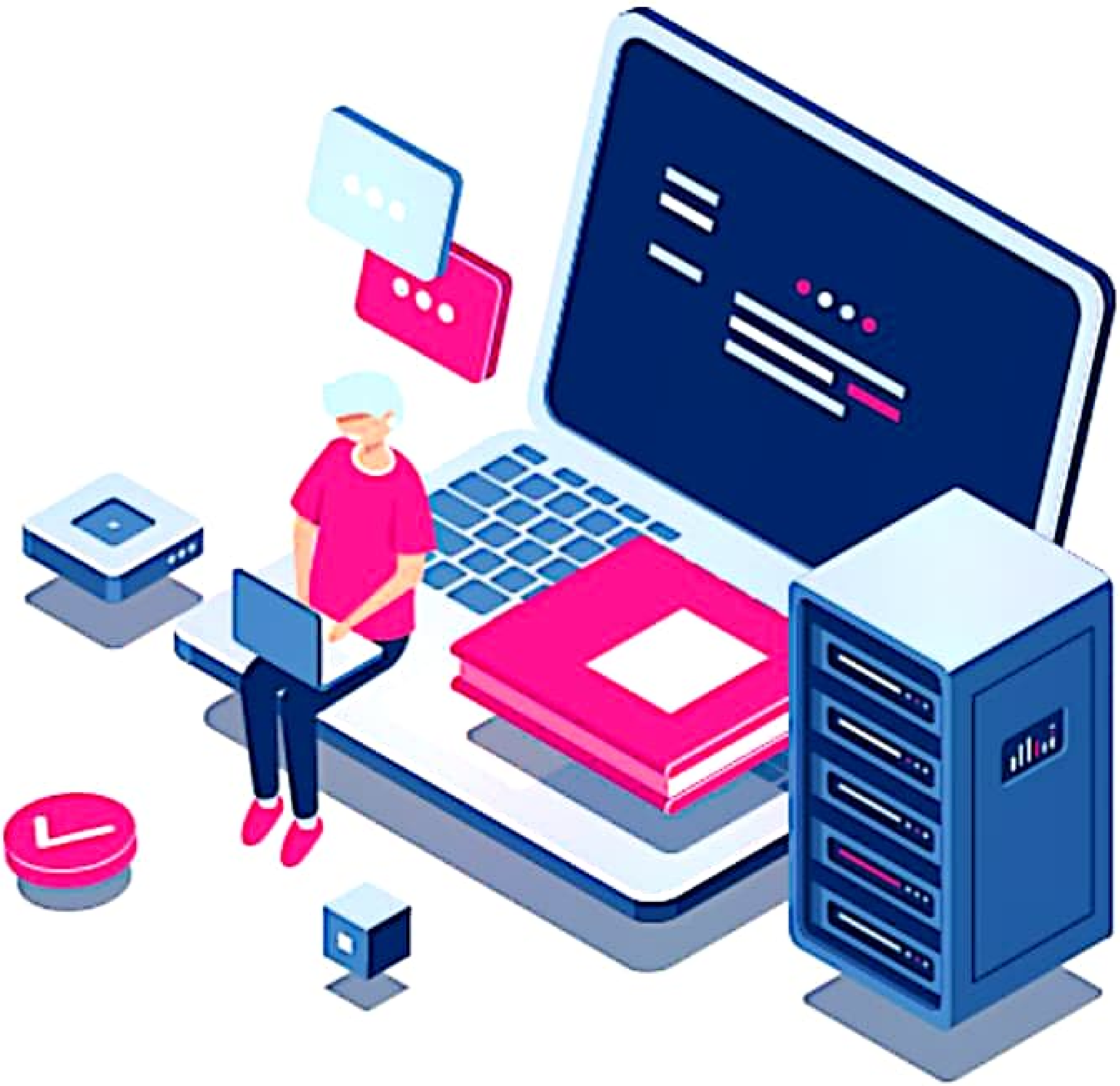
سلسلة
التجمع التعليمي



التجمع التعليمي

القناة الرئيسية: t.me/BAK111

بوت التواصل: @BAK1117_bot

الوحدة الأولى : مجموعات الأعداد

مجموعة الأعداد	رمزها	تعريفها
الطبيعة	$\mathbb{N}$	تحوي الأعداد الموجبة فقط دون فواصل أي هي: $\{0,1,2,\dots\}$
الصحيحة	$\mathbb{Z}$	تحوي الأعداد الموجبة والسالبة دون فواصل أي هي: $\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$
العشرية	$\mathbb{D}$	تحوي أي عدد يمكن كتابته بالشكل $a\times 10^n$ حيث n عدد صحيح. أو هي الأعداد الصحيحة بالإضافة إلى الأعداد مع فواصل بحيث تكون منتهية.
العادية	$\mathbb{Q}$	تحوي أي عدد يمكن كتابته $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و $b\neq 0$ عدد طبيعي. أو هي الأعداد العشرية بالإضافة إلى الأعداد مع فواصل غير منتهية ولكن دورية.
الحقيقية	$\mathbb{R}$	هي الأعداد العادية والغير عادية (الأعداد مع الفواصل غير منتهية وغير دورية).

- عند تحديد طبيعة عدد نختار أصغر مجموعة ينتمي إليها.
- أي عدد ليس له إشارة إشارته موجب.

تدريبات: اختر الإجابة الصحيحة:

1) العدد π هو عدد:

A	عادي	B	صحيح	C	غير عادي

2) الشكل العشري للكسر $\frac{8}{5}$ هو:

A	0.16	B	1.6	C	0.016

3) العدد $\frac{11}{12}$ هو عدد:

A	عشري	B	غير عادي	C	غير عشري

4) عيّن طبيعة الأعداد التالية:

$\boxed{1}$ $$\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{1}=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

غير عادي

$\boxed{2}$ $$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}=0.916..$$

دوري – غير عشري

$\boxed{3}$ $$\frac{7}{2}-\frac{8}{5}=\frac{35}{10}-\frac{16}{10}=\frac{19}{10}=1.9$$

عشري

$\boxed{4}$ $$\sqrt{2.25}=\sqrt{\frac{225}{100}}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}}=\frac{15}{10}=1.5$$

عشري

② القاسم المشترك الأكبر GCD:

هو أكبر عدد يقسم في ذات الوقت العددين معاً بدون باقي.

خواص هامة:

$\boxed{1}$ $GCD\,(a,a)=a$

$\boxed{2}$ $GCD\,(a,b)=1 \Leftrightarrow$ a, b عددان أوليان فيما بينهما

$\boxed{3}$ $\frac{a}{b}$ ناتج عدد صحيح $\Leftrightarrow$ a قاسم لـ b

$\boxed{4}$ $\mathrm{GCD}\,(a,b)=b \Leftrightarrow$ a قاسم لـ b

---

هناك خوارزميتان لتحديد الـ GCD :

1) الطرح المتتالي:

① نحدد الكبير a، نحدد الصغير b.

② نوجد $a-b$

③ نخفي a ونطرح العددين الباقيين مع مراعاة الكبير والصغير.

④ نتابع عملية الطرح إلى أن نصل إلى آخر ناتج طرح غير معدوم $\boxed{\Leftarrow \text{ يكون هو GCD}}$

2) القسمة الإقليدية "إقليدس":

① نحدد الكبير a ونسميه المقسوم.

② نحدد الصغير b ويكون المقسوم عليه.

③ نأخذ باقي قسمتها.

④ في الخطوة التالية يصبح المقسوم عليه هو المقسوم والباقي هو المقسوم عليه ونوجد باقي قسمتهما.

⑤ نكرر العملية إلى أن نصل إلى آخر باقي غير معدوم $\boxed{\Leftarrow \text{ يكون هو GCD}}$.

مثال: **أوجد القاسم المشترك الأكبر GCD للأعداد $(312\ ,546)$ بالطريقتين:**

1) باستخدام خوارزمية الطرح المتتالي:

الكبير a	الصغير b	ناتج الطرح $a-b$
546	312	$546-312=234$
312	234	$312-234=78$
234	78	$234-78=156$
156	78	$156-78=78$
78	78	$78-78=0$
آخر ناتج طرح غير معدوم هو 78		
$GCD\ (312\ ,546)=78$		

2) باستخدام خوارزمية إقليدس:

المقسوم a	المقسوم عليه b	باقي القسمة
546	312	234
312	234	78
234	78	0
آخر باقي قسمة غير معدوم هو **78**		
$GCD\ (312\ ,546)=78$		

---

③ الكسور المختزلة:

نقول عن $\frac{a}{b}$ أنه كسر مختزل عندما يكون (a,b) عددان أوليان فيما بينهما أي أن: $GCD\ (a,b)=1$

سؤال: **اختزل الكسر (اكتب الكسر بأبسط صورة) كيف يُحل؟**

1) نخرج GCD بين بسط ومقام الكسر.

2) نقسم كلاً من البسط والمقام عليه فنحصل على الكسر المختزل.

مثال: **اختزل الكسر $\frac{312}{546}$ ؟**

الحل: نعيد الخطوات المثال السابق بإيجاد GCD بين البسط (312) والمقام (546) بإحدى الطريقتين.

$\boxed{1}$ $GCD\ (546,312)=78$

$\boxed{2}$ $\dfrac{312\div 78}{546\div 78}=\dfrac{4}{7}$

تدريبات: **اختر الإجابة الصحيحة:**

1) أحد الكسور الآتية مختزلة:

A	$\frac{11}{31}$	B	$\frac{15}{33}$	C	$\frac{11}{33}$

2) قيمة a التي تحقق أن $GCD\ (39,a)=1$:

A	39	B	13	C	4

3) الكسر المختزل للكسر $\frac{80}{104}$ يساوي:

A	$\frac{40}{52}$	B	$\frac{10}{13}$	C	$\frac{4}{13}$

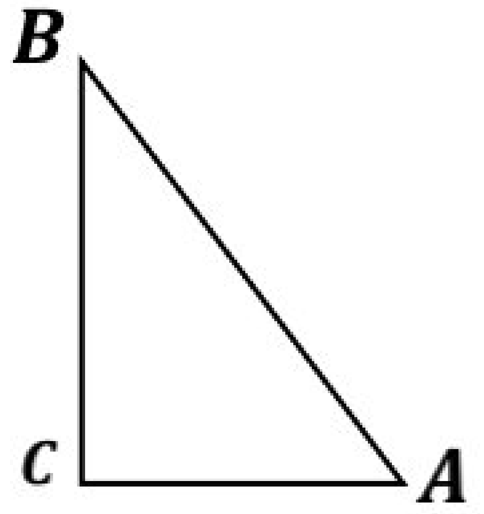
*** ABC مثلث قائم في C فيه:**

$AC=384\ \ ,BC=512$

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين: $(512\ ,384)$

2) احسب $\tan(\widehat{ABC})$ واكتب النتيجة بشكل كسر مختزل.

الحل:



المقسوم a	المقسوم عليه b	باقي القسمة
512	384	**128**
384	128	**0**
آخر ناتج طرح غير معدوم هو **128**		
$GCD(512\ ,384)=128$		

$$tan(ABC)=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}=\frac{AC}{BC}$$

$$=\frac{384\div 128}{512\div 128}=\frac{3}{4}$$

---

④ الجذر التربيعي لعدد موجب:

الجذر التربيعي لعدد موجب a ويرمز له $\sqrt{a}$ وهو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

خواص هامة:

في حال a عدد طبيعي موجب:

$\boxed{1}\ (\sqrt{a})^2=a \quad , \quad \boxed{2}\ \sqrt{a^2}=a$

$\boxed{3}\ \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}\ , \quad \boxed{4}\ \sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

✍ مثال:

$$A = \sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{48}$$
$$B = 5\sqrt{3} + \sqrt{108} - \sqrt{147}$$

1) اكتب كلاً من المقادير الآتية (A , B) بأبسط شكل ممكن (اختزل المقادير الآتية)

2) احسب $A * B$

3) احسب $B - A$

الحل:

$\boxed{1}$ $A = \sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{48}$

$B = 5\sqrt{3} + \sqrt{108} - \sqrt{147}$

$\boxed{2}$ $A \times B =$

$\boxed{3}$ $B - A =$

🗁 **تدريبات: اختر الإجابة الصحيحة:**

1) ثلث العدد $\sqrt{48}$ هو:

A	$2\sqrt{3}$	B	$\sqrt{5}$	C	$4\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2) أربع أضعاف العدد $\sqrt{5}$:

A	$5\sqrt{4}$	B	$4\sqrt{5}$	C	$\sqrt{\dfrac{5}{4}}$

3) المقدار $\sqrt{3}\,.\,\frac{3}{\sqrt{3}}$ يساوي:

A	0	B	3	C	$\sqrt{3}$

4) العدد $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ هو عدد:

A	عشري	B	غير عادي	C	صحيح

5) العدد $\left|\frac{\sqrt{27}-\sqrt{3}}{2}\right|$ هو عدد:

A	عادي	B	غير عادي	C	صحيح

✍ مثال: لدينا العددان:

$$A = \frac{117}{63} \quad , B = \left(3 - \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right)$$

1) اختزل الكسر A

2) اختزل B

3) احسب $A - B$

الحل:

1) لاختزال الكسر A نوجد GCD بين بسط ومقام الكسر أي بين $117 , 63$

المقسوم a	المقسوم عليه b	باقي القسمة
117	63	**54**
63	54	**9**
54	9	**0**

$$GCD(117 , 63) = 9$$
$$A = \frac{117 \div 9}{63 \div 9} = \frac{13}{7}$$

2) لاختزال B

$$B = \left(\frac{3}{1} - \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{6}{2} - \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{3}{2} - \frac{8}{7} = -\frac{21}{16}$$

3) لحساب $A - B$

$$\frac{13}{7} - \left(-\frac{21}{16}\right) = \frac{13}{7} + \frac{21}{16}$$
$$= \frac{208}{112} + \frac{147}{112} = \frac{355}{112}$$

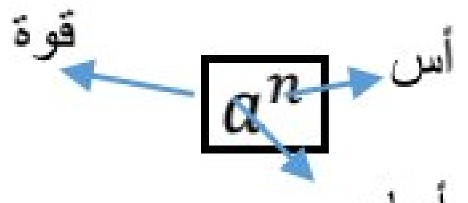
التجمع_التعليمي

انتهت الوحدة الأولى

الوحدة الثانية

① قوة عدد عادي:

تمهيد إذا كان a عدداً عادياً موجباً وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:



a أس n

قواعد أساسية:

-1 $a^0 = 1 \quad , \; a \neq 0$

-2 $a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$

-3 (a^{-n} مقلوب a^n) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

مثال:

① $17^0 = 1$

② $5^2 = 5 \times 5 = 25$

③ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

④ $3^{-4} = \frac{1}{3^{+4}} = \frac{1}{81}$

ملاحظة أساسية (قوة العدد 10):

(1 $10^n = 10 \ldots \ldots 0 \longrightarrow$ (n صفراً)

(2 $10^{-n} = 0.0 \ldots \ldots 1 \longrightarrow$ (n صفراً)

$10^3 = 1000 \qquad , 10^{-3} = 0.001$

مثال: قواعد حساب القوى:

- ضرب القوى (جمع الأسس) بشرط لها ذات الأساس.

$$\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$$

- قسمة القوى (طرح الأسس) بشرط لها ذات الأساس.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

- قوة القوى ضرب الأسس

$$\boxed{(a^m)^n = a^{n.m}}$$

- قوة جداء:

$$\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$$

- قوة قسمة:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

أمثلة: اكتب ما يلي بصورة قوة عدد واحد:

① $4^3 \times 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$

② $(\sqrt{2})^3 . (\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^8 = 2^4$

③ $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$

④ $\frac{3^5}{3^{-2}} = 3^{5-(-2)} = 3^{5+2} = 3^7$

⑤ $\left[(\sqrt{3})^3\right]^2 = (\sqrt{3})^{3\times2} = (\sqrt{3})^6 = 3^3$

⑥ $(3\sqrt{2})^2 = (3)^2 . (\sqrt{2})^2 9 \times 2 = 18^1$

⑦ $\frac{16}{3^2} = \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

⑧ $\frac{30^4}{3^4} = \left(\frac{30}{3}\right)^4 = (10)^4$

ملاحظة: في الأمثلة السابقة إذا طلب منا إيجاد أبسط صورة نقوم بفك القوة (إيجاد الناتج النهائي).

مثال: احسب قيمة (A) بأبسط صورة:

$$A = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 15^2}$$

الحل:

$$A = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times (3 \times 5)^2} : \begin{cases} 15^2 = (3 \times 5)^2 \\ \quad = 3^2 \times 5^2 \end{cases}$$

$$A = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 3^2 \times 5^2}$$

$$= 2^8 \times 2^{-3} \times 5^7 \times 5^{-2}$$

$$= 2^{8-3} \times 5^{7-2}$$

$$= 2^2 \times 5^5$$

$$= (2 \times 5)^5 = (10)^5 = 100000$$

تدريب: أكتب المقدار $P = \frac{3^7 \times 4^8 \times 5^4}{2^5 \times 5^{-7} \times 9^3}$

بالصيغة : $P = 2^a \times 3^b \times 5^c$

الحل:

$$P = \frac{3^7 \times (2^2)^8 \times 5^4}{2^5 \times (5)^{-7} \times (3^2)^3}$$

$$= 3^7 \times 2^{16} \times 5^4 \times 2^{-5} \times 5^7 \times 3^{-6}$$

$$= 2^{16-5} \times 3^{7-6} \times 5^{7+4}$$

$$P = 2^{11} \times 3^1 \times 5^{11}$$

النشر: هو عملية تحويل من جداء إلى مجموع $(X \longrightarrow \mp)$

أمثلة : انشر ما يلي / احسب ما يلي:

① $A = -3(2x+5)$

$$= (-3 \times 2x) + (-3 \times 5) = 6x - 15$$

② $B = 2x(x-1)$

$$= (2x \times x) + (2x \times -1) = 2x^2 - 2x$$

③ $E = (2x-3)(x+2) - 5(2x-3)$

$$= (2x \times x) + (2x \times 2) + (-3 \times x) + (-3 \times 2) + (-5 \times 2x) + (-5 \times -3)$$

$$= 2x^2 + 4x - 3x - 6 - 10x + 15$$

نجمع الحدود المتشابهة: $= 2x^2 - 9x + 9$

نشر المطابقات التربيعية:

1) مربع مجموع = مربع أول + ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني

$$(a+b)^2 = a^2 + 2(a)(b) + b^2$$

2) مربع فرق = مربع الأول – ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني.

$$(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

3) جداء ضرب مجموع حدين بفرقهما = مربع الأول – مربع الثاني

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

مثال: انشر ما يلي / احسب ما يلي:

① $(x+3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$$= x^2 + 6x + 9$$

② $(2x-2)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(2) + (2)^2$

$$= 4x^2 - 8x + 4$$

③ $(t+5)(t-5) = (t)^2 - (5)^2$

$$= t^2 - 25$$

تدريب: انشر ثم اختزل / احسب كلاً مما يلي:

① $A = (4x-2)^2 - (x+3)^2$

$$= [(4x)^2 - 2(4x)(2) + (2)^2] - [(x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2]$$

$$= [16x^2 - 16x + 4] - [x^2 + 6x + 9]$$

☜ **انتبه إشارة السالب قبل القوس تقلب جميع إشارات القوس**

$$= 16x^2 - 16x + 4 - x^2 - 6x - 9$$

نجمع الحدود المتشابهة:

$$= 15x^2 - 22x - 5$$

② $B = (2y-3)(2y+3) - (y+2)(2y-4)$

$$= [(2y)^2 - (3)^2] - [2y^2 - 4y + 4y - 8]$$

$$= [4y^2 - 9] - [2y^2 - 8]$$

$$= 4y^2 - 9 - 2y^2 + 8 = 2y^2 - 1$$

* احسب قيمة B عندما $y = 1 + \sqrt{2}$

$$B = 2y^2 - 1 = 2\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2\left[(1)^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2\right] - 1$$

$$B = 2[1 + 2\sqrt{2} + 2] - 1$$

$$= 2[3 + 2\sqrt{2}] - 1$$

$$B = 6 + 4\sqrt{2} - 1 = 5 + 4\sqrt{2}$$

التحليل: هو عملية تحويل من مجموع إلى جداء $(x \longrightarrow \pm)$

① التحليل بإخراج عامل مشترك:

ملاحظة مهمة:

....

مثال: حلل كثير الحدود:

① $5x^2 + 10x = 5x(x+2)$

② $9xy^2 - 3x^2y^2 = 3xy^2(3-x)$

③ $8x^2y + 20xy^2 - 40x^2y^2 = 4xy(2x + 5y - 10xy)$

④ $x^2(x+1) + 5(x+1) = (x+1)(x^2+5)$

⑤ $(x-2)^2 + 3(x-2) = (x-2)(x-2+3)$

$$= (x+2)(x+1)$$

② التحليل باستخدام المطابقات التربيعية:

ملاحظة مهمة:...
....

مثال: حلل ما يلي:

① $x^2-9=(x+3)(x-3)$

② $x^2-16=(x^2+4)(x^2-4)$
$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

③ $x^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

④ $x^2+8x+16=(x+4)^2$

⑤ $x^2-6x+9=(x-3)^2$

⑥ $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$

⑦ $25Z^2+30Z+9=(5Z+3)^2$

ملاحظة (1):
بالنسبة للأمثلة (3 + 2 + 1) يجب أن يكون إشارة سالبة بين الحدين فنأخذ:
(جذر الثاني – جذر الأول) (جذر الثاني + جذر الأول)
ملاحظة (2):
بالنسبة للأمثلة (7 + 5 + 4) نأخذ:
^{2}(جذر الثالث، إشارة الثاني، جذر الأول)

⑧ $3x^3-12x=3x(x^2-4)$
$=3x(x+2)(x-2)$

⑨ $-3x^3-30x^2-75x$
$=-3x(x^2+10x+25)=-3x(x+5)^2$
$=-3x(x+5)^2$

③ التحليل بالطريقة المباشرة:

مثال: حلل مايلي:

① $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

② $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

③ $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$

④ $2x^3+20x^2+48x=2x(x^2+10x+24)=$
$2x(x+6)(x+4)$

ملخص طرق التحليل هام:

حدين $\{$ ثلاث حدود $\{$

مثال نموذج: لدينا المقدار

$$L=(3x-1)(2x+5)-(3x-1)^2$$

1) انشر ثم اختزل L **2) حلل L**

3) احسب قيمة L في حالة $(x=-\sqrt{3})$

الحل:1)

$L=[(3x\times 2x)+(3x\times 5)+(-1\times 2x)+(-1\times 5)]$
$-[(3x)^2-2(3x)(1)+(1)^2]$

$L=[6x^2+15x-2x-5]-[9x^2-6x+1]$

$L=6x^2+15x-2x-5-9x^2+6x-1$

$L=-3x^2+19x-6$

2) $L=(3x-1)(2x+5)-(3x-1)^2$

$L=(3x-1)[(2x+5)-(3x-1)]$

$L=(3x-1)(2x+5-3x+1)$

$L=(3x-1)(-x+6)$

3) نعوض $(x=-\sqrt{3})$ في قيمة L بعد النشر أو التحليل:

$L=-3x^2+19x-6$

$L=-3(-\sqrt{3})^2+19(-\sqrt{3})-6$

$L=-3(3)-19\sqrt{3}-6$

$L=-9-19\sqrt{3}-6=15-19\sqrt{3}$

إزالة الجذر من المقام:

* لإزالة الجذر من مقام الكسر $\frac{a}{\sqrt{b}}$ نضرب البسط والمقام بـ $\sqrt{b}$

* لإزالة الجذر من مقام الكسر $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام $(\sqrt{b}-\sqrt{c})$

مثال: أزل الجذر من مقامات الكسور:

① $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{9}{\sqrt{21}}=\frac{9\times\sqrt{21}}{\sqrt{21}\times\sqrt{21}}=\frac{9\sqrt{21}}{21}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

③ $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$
$=\frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$
$=4(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

انتهت الوحدة الثانية

الوحدة الثالثة: المعادلات

مقدمة:

المعادلة: هي مساواة بين طرفين تحتوي مجهولاً (أو أكثر)

حل المعادلة:

* هو إيجاد جميع قيم المجهول التي تجعل المعادلة صحيحة.
* نسمي كل قيمة تحقق المعادلة ⟸ جذراً للمعادلة، أو حل المعادلة.
* نقول أن معادلتين متكافئتين (إذا كان لهما الحلول نفسها)

توضيح لما سبق: نسمي $6x+2=4$ ⟸ (معادلة)

- إن حل المعادلة

حل المعادلات (حل المسائل): السؤال يكون حل المعادلة التالية: أوجد حلول المعادلة: أوجد قيمة مجهول:

① المعادلة من الدرجة الأولى:

$(a \neq 0) ax+b=c$

الشكل العام $hx+m=cx+d$

مثال : حل المعادلات التالية:

$5x-4=3x+2$

الحل: $5x-3x=2+4$

$\Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2} \Rightarrow x=3$

تدرب: حل المعادلة التالية:

$\frac{y}{3}+4=\frac{y}{4}-1$

ملاحظة: * إذا كانت المعادلة تحوي $\longleftarrow$ ( )

* إذا كانت المعادلة تحتوي تناسب $\longleftarrow$ ( )

② المعادلة من الدرجة الثانية: حلول المعادلة من الشكل

$(1)(ax \pm b)(cx \pm d)=0$

نقول أن إما $(ax \pm b)=0$ ومنه: $x=\pm\frac{b}{a}$

أو $(cx \pm d)=0$ ومنه: $x=\pm\frac{d}{c}$

فيكون $\begin{cases} x^2=a^2 \\ x^2=\pm\sqrt{a} \end{cases}$

في سؤال حل المعادلة (درجة ثانية) إما أن يكون لدينا أقواس مضروبة ببعضها أو معادلة على شكل حدود جبرية:

الحالة الأولى: الأقواس جاهزة

$(\square \pm \square)(\square \pm \square)=0$

خاصة الجداء الصفري.

ملاحظة: أو من الشكل(2)

في حالة $a=0$ (للمعادلة لها حل وحيد هو $x=0$)

في حالة: $\boxed{a<0}$ أي (a سالب) فالمعادلة مستحيلة الحل

مثال:

$x^2=-9 \longleftarrow$ (مستحيلة الحل في R) مثال $x^2=5$

$x^2-5=0 \Rightarrow x^2-(\sqrt{5})^2=0$

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$

إما $x=+\sqrt{5}$ أو $x=-\sqrt{5}$

مثال: $(2x-5)(x+1)=0$

إما $(2x-5)=0$

$2x=+5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2.5$

أو: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

2) الحالة الثانية:

المعادلة على شكل حدود: ننقل الحدود جميعها إلى طرف واحد ثم نحولها إلى جداء صفري.

المعادلة على شكل حدود جبرية (الأقواس غير جاهزة)

② $\mathbf{(4x-1)(x+3)=11x+13}$

$4x^2+12x-x-3=11x+13$

$4x^2+12x-x-11x=13+3$

$4x^2=16$

$(\div 4)x^2=4 \longrightarrow x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

إما $x-2=0 \longleftarrow 4=+2$

أو $x+2=0 \longleftarrow 4=-2$

③ $\mathbf{9x^2=25}$

$9x^2-25=0$

$(3x+5)(3x-5)=0$

إما $3x-5=0 \longrightarrow +\frac{5}{3}$

أو $3ء-5=0 \longrightarrow x=+x^2$

تدرب على حل المعادلات التالية:

① $\left(\frac{y}{2}+2\right)\left(3y-\frac{5}{3}\right)=0$

....

....

② $3x(x-3)(3x+1)=0$

....

....

③ $3(x+5)^2-4x^2=0$

....

....

④ $(2x+3)(x-5)=2x(x-2)$

....

....

⑤ $5-3(y+1)=(4y+3)^2$

....

....

⑥ $\frac{12x}{5}=3x-1$

....

....

تمرين: ليكن لدينا المقدارين:

$$\boldsymbol{A=(4x+5)(x-2)-x(x+4)}$$
$$\boldsymbol{B=(3x-10)(x+1)}$$

المطلوب: أثبت أن $\boldsymbol{A=B}$

الحل:

لكي نعرف فيما إذا كان $A=B$، يجب أن نحسب A ثم نحسب B ثم نقارن النتائج.

$$A=(4x+5)(x-2)-x(x+4)$$
$$=[4x^2-8x+5x-10]-x(x+4)$$
$$=4x^2-8x+5x-10-x^2-4x$$
$$\Rightarrow A=3x^2-7x-10$$
$$B=(3x-10)(x+1)$$
$$=3x^2+3x-10x-10$$
$$B=3x^2-7x-10$$

بالمقارنة بين نواتج A, B نجد أن: $A=B$

تدريب: ليكن لدينا المقدار:

$$\boldsymbol{E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)}$$

1) انشر واختزل E، ثم حلل المقدار E واحسب قيمته عند $x=\frac{1}{2}$

2) حل المعادلة $E=0$

الحل: 1) نشر واختزال E

$$E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$$
$$E=9x^2+12x+4-3x^2-21x-2x-14$$
$$E=6x^2-11x-10$$

نحلل E

$$E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$$
$$=(3x+2)[(3x+2)-(x+7)]$$
$$=(3x+2)(3x+2-x-7)$$
$$=(3x+2)(2x-5)$$

لنحسب قيمة E عندما $x=\frac{1}{2}$

$$=\left[3\left(\frac{1}{2}\right)+2\right]\left[2\left(\frac{1}{2}\right)-5\right]$$
$$=\left[\frac{3}{2}+2\right][1-5]$$
$$=\left(\frac{7}{2}\right)(-4)=\frac{-28}{2}=-14$$

2) حل المعادلة $E=$ ⟸ $(3x+2)(2x-5)=0$

إما $3x+2=0\Rightarrow\boxed{x=\frac{-2}{3}}$

أو $2x-5=0\Rightarrow\boxed{x=\frac{5}{2}}$

التعبير عن نص مسألة بمعادلة: "المسألة الكلامية":

ملاحظات للحل:

✍ تحليل المسألة: ....
....

✍ تشكيل المعادلة: ....
....

تمرين (1): في أحد المجالس عددٌ من الأشخاص، ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20 سنة و30 سنة، وثلثهم تنقص أعمارهم عن 20 سنة، ومنهم 20 شخصاً تزيد أعمارهم عن 30 سنة، ما عدد الأشخاص في هذا المجلس؟

الحل: نحل المسألة ونرمز المجاهيل:

في أحد المجالس عدد من الأشخاص

⟵ نرمز لعدد الأشخاص في المجلس (x)

ربعهم : $\frac{x}{4}$ ، ثلثهم $\frac{x}{3}$

العدد الكلي : $20+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}$

تشكيل المعادلة: إن عدد الأشخاص في المجلس هو نفسه الكلي

$$x=20+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}$$

$$x=20+\frac{3x}{12}+\frac{4x}{12}\longrightarrow x=20+\frac{7x}{12}$$

بحل المعادلة: نطرح $\frac{7x}{12}$ من كلا طرفي المعادلة:

$$\mathrm{x}-\frac{7x}{12}=20+\frac{7x}{12}-\frac{7x}{12}$$

$$\mathrm{x}-\frac{7x}{12}=20\left(\text{نوحد المقامات}\right)\longrightarrow\frac{5x}{12}=20$$

$$\mathrm{x}=20\times\frac{12}{5}=48$$

فعدد الأشخاص 48 (في المجلس)

تمرين (2): ما العدد الذي إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خمسيه حصلنا على 460؟

الحل: نفرض أن العدد الذي نريد إيجاده هو (x)

تحليل المسألة
$$\begin{cases}\frac{3x}{4}=\left(\frac{3}{4}\times x\right) & \text{ثلاثة أرباعه}\\ \frac{2x}{5}=\left(\frac{2}{5}\times x\right) & \text{خمسية}\end{cases}$$

(نشكل المعادلة): إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خمسية =460؟

إذا : $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{5}=460$

$$\frac{15x+8x}{20}=460\longrightarrow\frac{23x}{20}=460$$

$$23x=20\times460\longrightarrow x=\frac{9200}{23}\longrightarrow \mathrm{x}=400$$

تمرين (3): ليكن عمر خالد الآن 11 سنة وعمر غيث 26 سنة، بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر خالد؟

الحل: <u>تحليل المسألة: ما الذي نريد حسابه؟</u>

نريد حساب (بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر خالد)

<u>الآن</u>: عمر خالد 11 سنة، عمر غيث 26

بعد كم سنة ⟵ أي يجب أن نحسب عدد (السنوات): نرمزه x بعد x سنة، سيكون: عمر خالد: $11+x$ ، عمر غيث: $26+x$

<u>السؤال هو:</u> (بعد كم سنة) يصبح عمر غيث (مساوياً) ضعفي عمر خالد $2(11+x)=26+x$

$$22+2x=26+x$$

$$2\mathrm{x}-\mathrm{x}=26-22\Longrightarrow \mathrm{x}=4 \text{ سنوات}$$

تدريب (1):

قطعة أرض مربعة الشكل طول ضلعها $x+4$ ومساحتها 64 أوجد قيمة x

2) أوجد عددين طبيعيين متتاليين مجموع مربعهما (181)

3) تضم مكتبة رولا أربعة أصناف من الكتب، نصف كتبها مدرسية، ربعها روايات، وخمسها علمية بالإضافة إلى معجمين، احسب عدد كتب رولا؟

مسألة: اشترك عدد من الأصدقاء لتنظيم عشاء مشترك يتقاسمون التكلفة بالتساوي، إذا دفع كل منهم 900 ليرة، زاد المبلغ عن التكلفة بمقدار 800 ليرة، وإذا دفع كل منهم 600 ليرة، نقص المبلغ عن الكلفة بمقدار 1300 ليرة، فما عدد هؤلاء الأصدقاء؟

الحل: لنفرض عدد الأصدقاء x ، ونفرض ثمن الطعام y:

في الحالة الأولى (إذا دفع كل منهم 900 ليرة)

$$(x)\times 900 - y = 800 \dots \quad (1)$$

في الحالة الثانية (إذا دفع كل منهم 600 ليرة)

$$(x)\times 600 + 1300 = y \ \dots (2)$$

ملاحظة:

بتعويض المعادلة (2) في (1):

$$900x - (600x + 1300) = 800$$
$$900x - 600x - 1300 = 800$$
$$300x = 800 + 1300$$
$$300x = 2100$$
$$(\text{عدد الأصدقاء})x = \frac{2100}{300} = 7$$

المتراجحات:

① المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x، هي كل متراجحة من النمط:

$$ax + b(<,>,\leq,\geq)cx + d$$

حيث: a , c , b , d أعداد $(a \neq c)$

حلول المتراجحة: هي قيم x التي تجعل المتراجحة صحيحة

مثال: حل المتراجحة الآتية:

$$\frac{1}{3}x - 1 \geq 2$$

الحل:

$$\frac{1}{3}x - 1 + 1 \geq 2 + 1$$
$$\frac{1}{3}x \geq 3 \longrightarrow x \geq 3 \times \frac{3}{1}$$

مجموعة حلول المتراجحة هي قيم $x \geq 9$، (x) الأكبر أو تساوي (9)، $[9, +\infty[$

كيف نكتب حلول المتراجحة على شكل مجالات "أقواس":

* تفتح المجالات دوماً عند: $-\infty$, $+\infty$

تفتح المجالات عند: $>$ أو $<$ (أكبر أو أصغر تماماً)

تغلق المجالات عند: $\leq$ أو $\geq$ (أكبر أو يساوي، أصغر أو يساوي)

جدول مساعد:

شكل المتراجحة	$x >$ عدد	$x \geq$ عدد	$x <$ عدد	$x \leq$ عدد
حلول المتراجحة	$]$عدد$, +\infty[$	$[$عدد$, +\infty[$	$]-\infty,$عدد$[$	$]-\infty,$عدد$]$

الإشارة (أكبر) نبدأ بالعدد وننتهي بـ $+\infty$

الإشارة (أصغر) نبدأ بـ $-\infty$ وننتهي بالعدد.

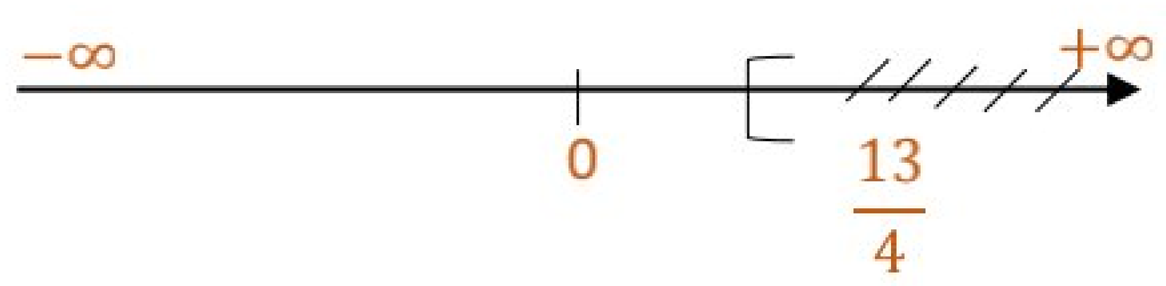
حل المتراجحات الآتية ومثل الحلول على خط الأعداد:

$$\frac{4x+2}{5} < 3$$

نضرب طرفي المعادلة بالعدد (5) : $4x + 2 < 3 \times 5$

$$4x + 2 < 15$$
$$4x < 15 - 2 \longrightarrow 4x < 13$$

مجموعة الحلول $x < \frac{13}{4} \longrightarrow s = \left]-\infty, \frac{13}{4}\right[$



② $3(y-1) - 2(4y-1) \geq 0$

$$3y - 3 - 8y + 2 \geq 0$$
$$3y - 8y \geq +3 - 2$$
$$\Longrightarrow -5y \geq +1$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ (-1) ولكن يجب أن نتذكر أنه إذا ضربنا أو قسمنا المتراجحة على عدد سالب (نقلب إشارة المتراجحة)

$$(\times -1) \quad 5y \leq -1$$
$$y \leq -\frac{1}{5}$$
$$S = \left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$$

③ $\frac{1}{8}\ x - 3 \leq 5$

④ $4x - (22x - 1) > 3x + 2$

⑤ $5x + 1 \leq (2x + 1)$

ملاحظات حول المتراجحات:

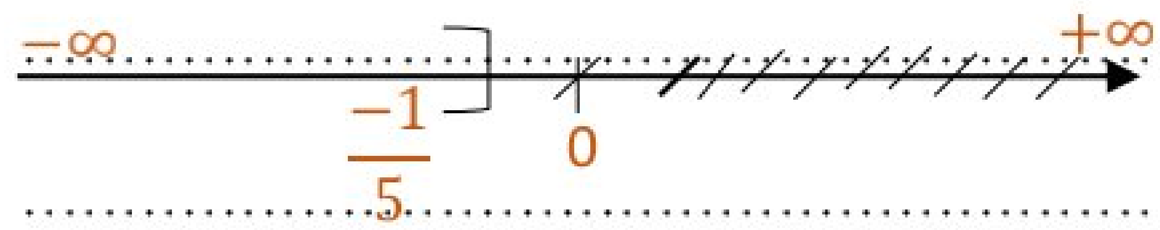
....

....

تمرين إضافي:

ليكن $A = \frac{4x+2}{5}$ ، احسب قيمة A عند $x = \frac{3}{4}$

أوجد حلول المتراجحة $\frac{4x+2}{5} < 3$ ومثل الحل على محور الأعداد.



حل المسائل الكلامية باستخدام المتراجحات:

كيف نعرف أنه يجب علينا تشكيل متراجحة (وليس معادلة) بحل مسألة.

إذا قرأنا في نص المسألة أي كلمة أو جملة تدل على (مقارنة) مثال:

(أوفر، أربح، أكثر، أقل، أكبر، أصغر،...)

مسألة (1): هناك عرضان في محل لتأجير الأفلام:

استعارة: يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً، ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره.

شراء: يدفع الزبون 800 ليرة عن كل فلم يشتريه.

بدءً من كم فلماً يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول الأوفر له؟

الحل: لنفترض أن عدد الأفلام هو x

استعارة: $550x + 6000$

شراء: $800\,x$

بما أن المطلوب هو معرفة بدءً من أي عدد من الأفلام يكون العرض (أوفر له): فالعملية الحسابية تكون (متراجحة).

$$550x + 6000 < 800x$$
$$550x - 800x < -6000$$
$$-250x < -6000$$
$$x > \frac{-6000}{-250}$$
$$x > 24$$

فإذا كان الشخص يشاهد أكثر من 24 فلماً في السنة فيكون العرض الأول أوفر له.

مسائل إضافية: تدرب على الحل:

ليكن لدينا المتراجحة $3x + 7 \leq -8$

والمطلوب:

1) أي من الأعداد الآتية: -6 , -4 حل لهذه المتراجحة.

2) حل هذه المتراجحة ثم مثل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل:

....

....

....

انتهت الوحدة الثالثة

الوحدة الرابعة : جمل المعادلات

الحل المشترك معادلتين خطيتين (جبرياً):

- من إحدى المعادلتين: نعزل أحد المجاهيل ونسميه بمعادلته (3).
- نعوض المجهول المعروف أي المعادلة (3) بالمعادلة الأخرى.
- بعد إيجاد قيمة المجهول الأول، نعوض بإحدى المعادلات لإيجاد الثاني.

مثال: حل جملة المعادلتين الخطيتين (جبرياً):

$$\begin{cases} x + y = 1 & ① \\ 3x + y = 5 & ② \end{cases}$$

الحل: من (1) نعزل أحد المجاهيل $x = 1 - y \ldots (3)$

نعوض (3) الناتجة في المعادلة (2)

$$3(1 - y) + y = 5$$
$$-3y + 3 + y = 5 \Rightarrow -3y + y = 5 - 3$$
$$\Rightarrow -2y = 2$$
$$y = \frac{2}{-2} = -1 \text{ إذا } y = -1$$

نعوض قيمة y في (3):

$$x = 1 - (-1) \Rightarrow x = 2$$

فيكون الحل المشترك لجملة المعادلتين هو الثنائية $(2 , -1)$

تدرب على الحل:

$$\begin{cases} 2x + y = -4 & \ldots (1) \\ x - y = 1 & \ldots (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 32 \\ 3x + 5y = 124 \end{cases}$$

---

1) طريقة الحذف بالجمع احذف أحد المجاهيل:

☜ طريقة الحل:

* نجعل أمثال x أو أمثال y في كلا المعادلتين نفسه (ومختلف بالإشارة).
* نجمع المعادلتين، فينتج لدينا قيمة أحد المجاهيل.
* نعوض قيمة المجهول في إحدى المعادلات لنحسب المجهول الآخر.

مثال: حل جملة المعادلتين الخطيتين (جبرياً):

$$2x + 3y = 1 \quad \ldots (1)$$
$$x + y = -2 \quad \ldots (2)$$

الحل: نضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد (-2) فينتج:

$$(-2)x + (-2)y = (-2) \times (-2)$$
$$-2x - 2y = +4$$

نجمع المعادلة الناتجة (المكافئة لـ2) مع المتبقية (1):

$$2x + 3y = 1$$
$$\underline{-2x - 2y = 4}$$
$$\text{بالجمع} \Rightarrow y = 5$$

نعوض في أحد المعادلات لإيجاد x من (2):

$$x + (5) = -2$$
$$x = -2 - 5 \Rightarrow x = -7$$

إذاً الثنائية $(-7,5)$ هي حل للجملة السابقة.

تدرب على الحل:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \ldots (1) \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 8 \ \ldots (2) \end{cases}$$

كيف نتنقل من نص مسألة إلى جملة معادلتين خطيتين، ثم نحلها:

1) نختار المجاهيل ونرمزها
2) نؤلف جملة معادلتين ونحلها.
3) نجيب عن طلبات المسألة.

مسألة (1): مسألة نموذجية – الفحص الموحد:

زارت مها وسوسن مؤسسة استهلاكية لبيع الأدوات المدرسية، واشترت مها (مسطرتين وخمسة أقلام بمبلغ 600 ليرة سورية)، واشترت سوسن (أربعة مساطر وثلاثة أقلام بمبلغ 500 ليرة سورية)، إذا رمزنا إلى سعر المسطرة بـ x وإلى سعر القلم بـ y كانت المعادلة المعبرة عما اشترته مها بدلالة x , y هي $2x + 5y = 600$، والمطلوب:

1) اكتب المعادلة المعبرة عما اشترته سوسن بدلالة x , y

2) احسب سعر كل من المسطرة والقلم بحل جملة المعادلتين.

3) استنتج سعر أربعة مساطر وعشرة أقلام.

الحل: لنفرض أن سعر المسطرة x ، وسعر القلم y

1) المعادلة المعبرة عن مشتريات سوسن بدلالة x , y:

$4x + 3y = 500$

2) حساب سعر كل من المسطرة x، القلم y:

مها $2x + 5y = 600 \;...(1)$

سوسن $4x + 3y = 500 \;...(2)$

نضرب المعادلة الأولى بـ (-2) :

$$\begin{array}{r} -4x - 10y = -1200 \;...(1) \\ + \quad 4x + 3y = 500 \;...(2) \\ \hline -7y = -700 \end{array}$$

بالجمع

$y = 100 \longrightarrow$ (سعر القلم الواحد)

حساب سعر المسطرة:

نعوض قيمة y في إحدى المعادلات: ولتكن (1):

$2x + 5(100) = 600$

$2x + 500 = 600$

$2x = 600 - 500$

$2x = 100 \longrightarrow x = \dfrac{100}{2}$

ثمن المسطرة الواحدة $x = 50 \longrightarrow$

3) سعر أربع مساطر:

$4 \times (x) = 4 \times 50 = 200$ ليرة

سعر عشرة أقلام:

$10 \times (y) = 10 \times 100 = 1000$ليرة

مسألة (2):

عُمر أحمد 37 عاماً، لدى أحمد أخ اسمه خالد، وأخت اسمها ريم، مجموع عُمري خالد وريم يساوي (17 عاما)، إذا علمت أن ثلاثة أضعاف عُمر خالد مضافاً إلى عُمر ريم يساوي عُمر أحمد، فكم عُمر كل من خالد وريم؟

الحل:

لنفرض عُمر خالد: x وريم y مجموع عمريهما:

$x + y = 17 \;...(1)$

ثلاثة أضعاف عُمر خالد مضافاً إلى عُمر ريم $= 37$

$3x + y = 37 \;...(2)$

من (1): (3): $x = 17 - y \;...$

نعوض (3) في (2):

$3(17 - y) + y = 37$

$51 - 3y + y = 37$

$-2y = -51 + 37$

$-2y = -14$

$y = \dfrac{-14}{-2} = 7$

$y = 7 \longrightarrow$ عُمر ريم

فيكون عُمر خالد: نعوض y في (1):

$x + (7) = 17$

$x = 17 - 7$

$x = 10 \longrightarrow$ عمر خالد

تدرب على الحل:

1) مجموع ما يقتني الصديقان ماهر وعامر 144 طابعاً بريدياً، إذا أعطى ماهر اثنين من طوابعه لعامر أصبح لدى عامر مثلي ما لدى ماهر.
ما عدد الطوابع التي لدى كل من الصديقين.

معادلة المستقيم:

كل معادلة من الشكل: $ax + by = c$

حيث: $(a, b) \neq (0.0)$

ملاحظات حول المتراجحات:

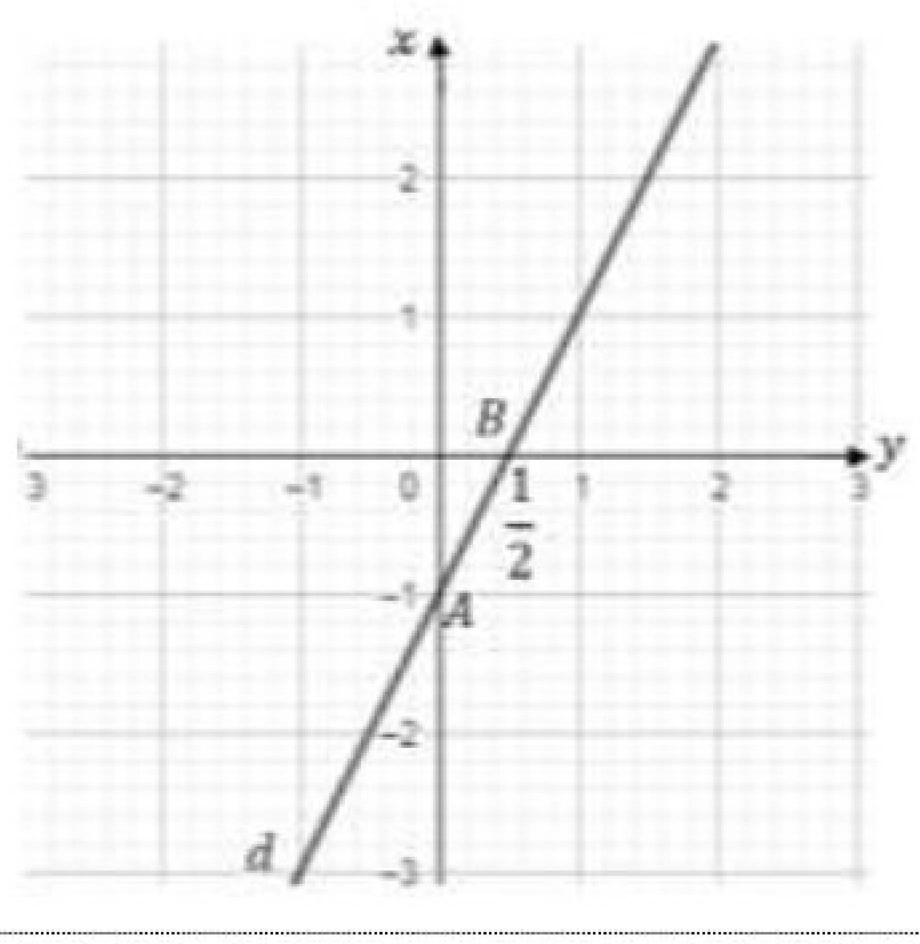
1) كل معادلة من الدرجة الأولى سواء كانت بمجهول واحد أو بمجهولين، تمثل بيانياً (بالرسم) معادلة مستقيم.
2) لرسم مستقيم نحتاج نقطتين منه.
3) كل مستقيم يمر بمبدأ الإحداثيات ولا يوازي محور التراتيب $0y$ يمكن كتابة المعادلة بالشكل $y = mx$

تمرين:

ليكن لدينا المستقيم (d) الذي معادلته $2x - y = 1$

1) ارسم المستقيم (d):

النقطة	x	y
$A(0, -1)$	0	-1
$B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{1}{2}$	0



تدرب على الحل: ارسم المستقيم في الممثل للمعادلة:

ارسم المستقيم (d) الممثل بالمعادلة:

$$\begin{cases} y = x + 3 & (1 \\ 2x + y = 0 & (2 \\ x = 3 & (3 \\ y = -x & (4 \end{cases}$$

5) ليكن لدينا المعادلة:

$3x + y = 1$ (5) الممثلة للمستقيم (d)

ارسم (d) ثم تحقق فيما إذا كانت النقاط التالية تنتمي إلى (d) (جبرياً):

$A(2,5), B(1,-1), C(1,-2)$

حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً:

*** طريقة الحل:**

☺ نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الأولى

☺ نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الثانية

إذا تقاطع المستقيمين في نقطة ⟵ [يوجد حل]

☺ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع ⟵ (نسقط النقطة) على المحور $0x$، نسقط على المحور $0x$

مثال:

حل جملة المعادلتين الخطيتين التالتين (بيانياً): (تأكد من الحل جبرياً) :

$$\begin{aligned} 3x + y = 5 \quad &... \quad (1) \\ x + 2y = 0 \quad &... \quad (2) \end{aligned}$$

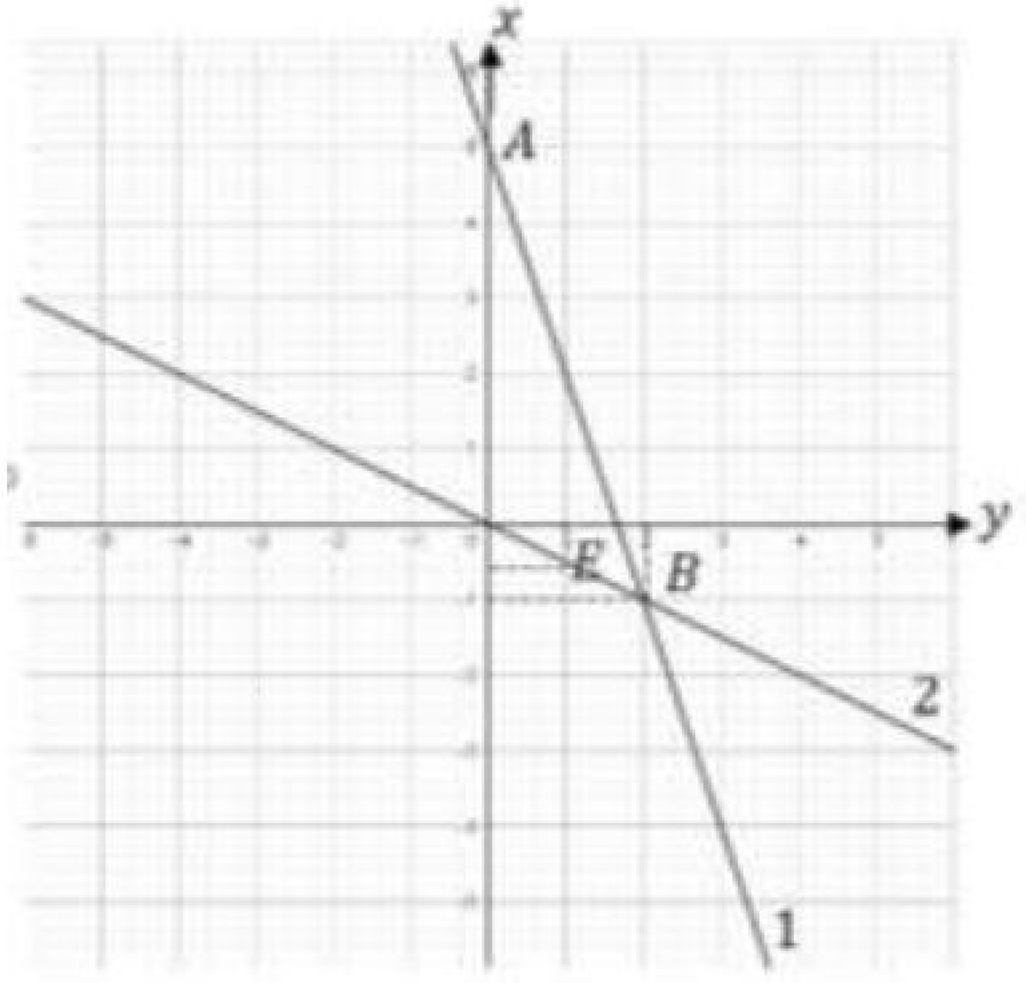
الحل:

$3x + y = 5 \quad ... \quad (1)$

النقطة	x	y
$A(0,5)$	0	5
$B(2,-1)$	2	-1

$x + 2y = 0 \quad ... \quad (2)$

النقطة	x	y
$E\left(1,-\frac{1}{2}\right)$	1	$-\frac{1}{2}$
$D(0,0)$	0	0



نلاحظ أن المستقيمين تقاطعهما في النقطة $(2,-1)$

طلب إضافي:

احسب مساحة المثلث المشكل بين المستقيم (1) والمحورين $0x$, $0y$ (لقد أوجدناها سابقاً بالصيغة)

حل جملة المعادلة الخطية التالية "جبرياً" ثم تأكد من حلها بيانياً:

① $\begin{cases} 5x + 2y = 12 & ... \quad (1) \\ x + y = 8 & ... \quad (2) \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x - y = 4 & ... \quad (1) \\ x + 3y = 1 & ... \quad (2) \end{cases}$

انتهت الوحدة الرابعة

الوحدة الخامسة: التابع

مقدمة: التابع:

التابع f هو إجرائية تربط بكل قيمة للمتحول x عدداً واحداً $f(x)$، يُسمى $f(x)$ صورة x وفق التابع $f(x)$

مثال: ليكن لدينا التابع f المعرفة بقاعدة الربط:

$f(x) = x + 1$

لو عوضنا (1) بدل من:

$x \Leftarrow f(1) = (1) + 1 \Leftarrow f(1) = 2$

* نقول أن: 2 هي صورة العدد (1) وفق التابع f

(أي أن قيمة التابع f عند العدد (1) هي العدد 2)

* نسمي (1) هو سلف للعدد (2).

* نسمي $[f(x) = x + 1]$ ⟸ قاعدة ربط التابع (صيغة التابع) ونسمي x متحولاً (أي يأخذ قيم مختلفة).

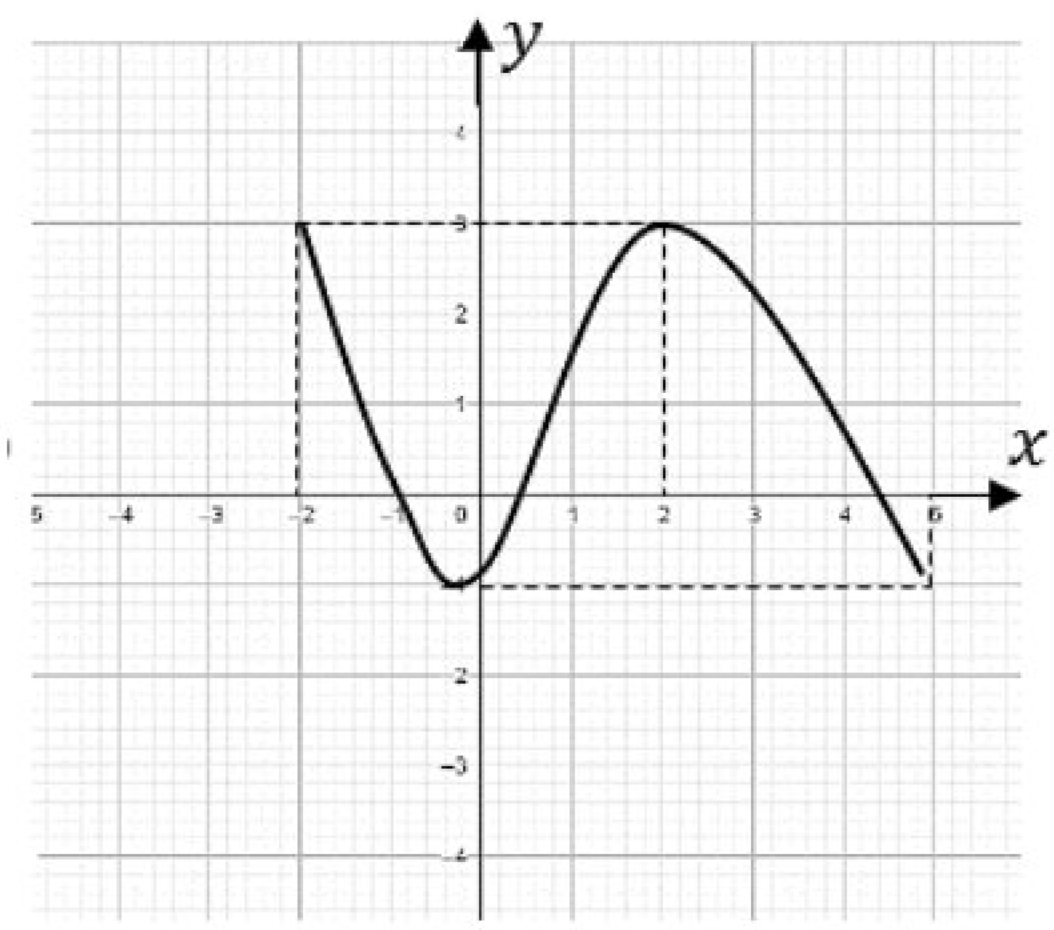
* منطلق التابع (مجموعة تعريفه): (هي مجموعة القيم التي نسمح بمتحول x أن يأخذها)

طريقة تعيين التابع:

1) التعيين بخط بياني:

بهذه الطريقة نتعرف على التابع من خلال الرسم البياني:

مثال:



تعيين مجموعة تعريف التابع بهذه الطريقة:

نرسم عمودين على محور الفواصل وذلك من بداية ونهاية الخط البياني للتابع، فتكون مجموعة التعريف هي المجال المحصور بين هذين العددين (كما في الرسم أعلاه)

⟵ مجموعة التابع $[-2,5]$

إيجاد أسلاف العدد بهذه الطريقة:

نرسم من العدد الذي نريد إيجاد أسلافه مستقيم يوازي محور الفواصل، النقاط التي يتقاطع فيها مع الخط البياني نسقطها على محور الفواصل (فتكون هي أسلافا العدد)

أسلاف العدد (3) هي: (3) و (-2)

* تعيين أكبر قيمة يبلغها التابع وأصغر قيمة منه:

أكبر قيمة يبلغها التابع هي (3) عندما:

$x = -2 , x = 3$ أي $f(-2) = f(3) = 3$

* أصغر قيمة يبلغها التابع هي (-1) عندما:

$x = 0 , x = 5$ أي $f(0) = f(5) = -1$

2) التعيين بجدول:

* بهذه الطريقة نتعرف على التابع من خلال جدوله.

* الجدول يعرف التابع يربط كل عدد من السطر الأول عدداً من السطر الثاني.

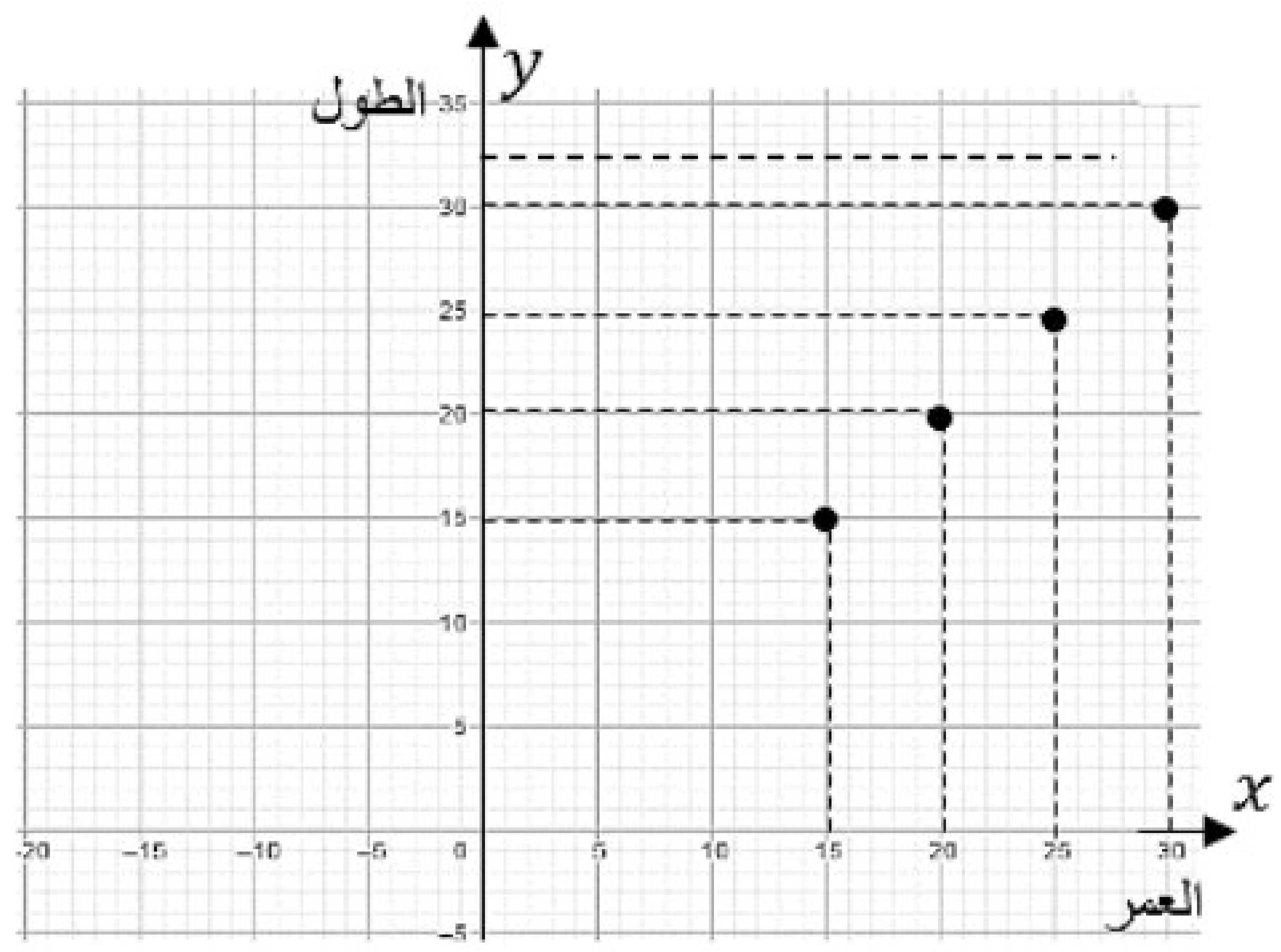
مثال: الجدول المرافق يعرف تابعاً h يقرن طول شجرة بعمرها.

العمر	15	20	25	30
الطول	14	18	27	29

الجدول يتضح أن:

* عندما كان عمر الشجرة (15) عاماً كان طولها (14) متراً، أي: $f(15) = 14$

* وعندما كان عمر الشجرة (25) عاماً كان طولها (27) متراً، أي: $f(25) = 27$



3) التعيين بإعطاء الصيغة:

بهذه الطريقة نتعرف على التابع من خلال قاعدة تسمى (علاقة) الربط:

مثال: $h(x) = 3(x-1)^2$

احسب $h(1)$: اوجد صورة العدد (1)

نقول: $h(1) = 3(1-1)^2 = 0$

إيجاد أسلاف عدد ما بهذه الطريقة:

تساوي بين علاقة ربط التابع والقيمة التي نريد إيجاد أسلافها ونحل المعادلة (ونناقش حلول المعادلة)

مثال:

$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

عين أسلاف العدد (4) أي قيم x التي تحقق $f(x) = 4$

$3x^2 - 5x + 4 = 4$

$3x^2 - 5x = 0$

$x(3x - 5) = 0$

إما: $x = 0$ أو: $x = \frac{5}{3}$

أسلاف العدد 4 هما (0) $\left(\frac{5}{3}\right)$

ملاحظة:

* قد يأتي أسئلة من هذا البحث على شكل اختيار من متعدد أو إجابة صح أو خطأ حيث نناقش هذه الأسئلة فهمك لمفهوم التابع.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كان التابع h المعرف بالقاعدة

$x \longrightarrow (x-2)(x+1)$

نعوض العدد (-1) في قاعدة ربط التابع:

① $k(-1) = 0$ صحيحة

② $k(-1) = 6$ خاطئة

③ $k(-1) = 2$ خاطئة

قل إذا كنت موافق أو غير موافق على الادعاء التالي واشرح رأيك:

f هو التابع: $x \longrightarrow (x+3)(x-4)$ صورة (-3) وفق هذا التابع (42)؟

الحل:

$(0)(-7) = 0 \longleftarrow ((-3)+3)((-3)-4)$

إذاً الادعاء خاطئ.

مسألة (1): ليكن لدينا التابع المعرف بقاعدة الربط التالية:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 4}$$

المطلوب:

1) اكتب التابع بالشكل $f(x) = (x-a)^2$

2) أوجد $f(1)$ ، $f(-2)$

3) أوجد أسلاف العدد (4)

4) أوجد قيم x التي تجعل قيمة التابع معدومة.

الحل:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

نحلل: $= (x-2)^2$

2) $f(1) = (1)^2 - 4(1) + 4$

$= 1 - 4 + 4 \longrightarrow = 1$

إذاً $f(1) = 1$

$f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 4$

$= 4 + 8 + 4 = 16$

إذاً $f(-2) = 16$

3) $f(x) = 4$

$x^2 - 4x + 4 = 4$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

إما: $x = 0$

أو: $x = 4 \longleftarrow x - 4 = 0$

إذاً أسلاف العدد (4): (0) ، (4)

4) أوجد قيم x التي تجعل قيمة التابع معدومة أي أجد:

$f(x) = 0$

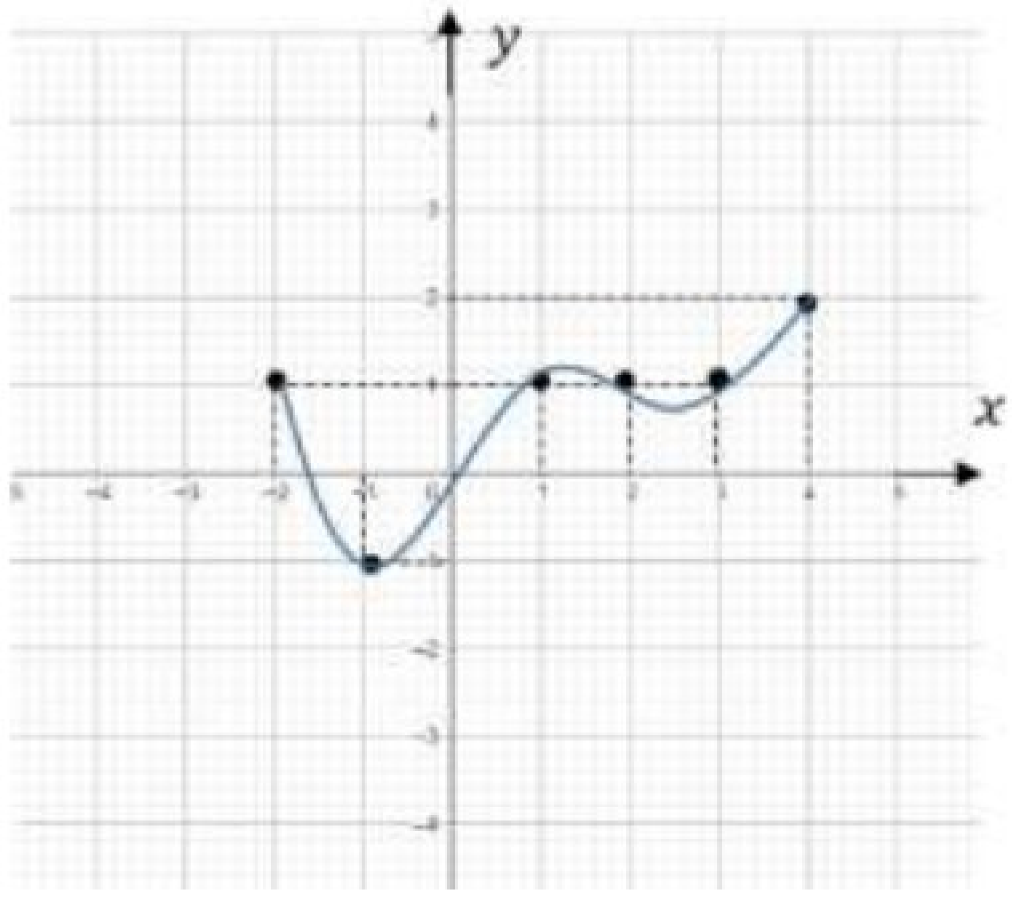
$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$(x-2) = 0$

$x = +2$

مسألة (2): ليكن لدينا التابع المعرف بالحد البياني:



1) أوجد صورة كل من الأعداد: $(1,0)$

2) أوجد أسلاف العدد (1)

3) أوجد مجموعة تعريف التابع f

4) عين أصغر قيمة وأكبر قيمة يبلغها التابع.

تدرب (1): ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة:

$$f(x) = (x-2)(x+1)$$

1) أوجد صورة العدد (2)

2) أوجد $f(-1)$

3) ما هي قيم x التي تجعل قيمة التابع معدوم؟

الحل: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدرب (2):

الجدول الآتي يعرّف تابعاً f يربط بكل ساعة من ساعات أحد أيام شهر تموز درجة حرارة الطقس $(°C)$ في مدينة دمشق:

الساعة	12	1	2	3	4	5	6
درجة	36	37	38	39	38	37	36

1) ماذا تعني الكتابة $f(1) = 37$

2) أوجد $f(6)$

3) مثل بيانياً هذا التابع.

الحل: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

انتهت الوحدة الخامسة

الوحدة السادسة الاحتمال والإحصاء:

1) مفهوم الاحتمال:

* نقول عن تجربة أنها تجربة احتمالية عندما يكون لها عدد من النتائج أو الإمكانات لا نفرق بداية أي تلك النتائج هي التي ستقع.

* ونسمي مجموعة نتائج التجربة (فضاء العينة π)

* نسمي كل نتيجة لهذه التجربة بالحدث البسيط ومجموع احتمالات الأحداث البسيطة في أي تجربة احتمالية يساوي (1).

* نسمي كل مجموعة من نتائج التجربة حدثاً، واحتمال كل حدث (A) عدد محصور بين الصفر والواحد.

$$P(A) = \frac{(A)\text{عدد عناصر}}{(\pi)\text{عدد عناصر}} : \text{حيث } [0 \leq p(A) \leq 1]$$

الحدث الغير قابل للتحقق نسميه الحدث المستحيل واحتماله يساوي الصفر ونرمز له بـ $(\emptyset)$ فيكون $[p(\emptyset) = 0]$

* الحدث الذي لا بد أن يتحقق نسميه الحدث الأكيد واحتماله يساوي الواحد ونرمز له بـ (π) فيكون $[p(\pi) = 1]$

* احتمال الحدث (D) الدال على وقوع الحدثين (B, A) معاً: $P(D) = P(A).P(B)$

* احتمال الحدث (C) الدال على وقوع الحدثين على الأقل (A أو B) معاً: $P(C) = P(A) + P(B)$

مثال (1): نرمي حجر نرد متزن مرة واحدة ونسجل مجموعة النتائج الظاهرة:

1) أوجد فضاء العينة (π)

2) أوجد احتمال (A) الحدث الدال على سحب عدد فردي.

3) أوجد احتمال (B) الحدث الدال على سحب عدد زوجي.

4) أوجد احتمال ظهور عدد (n): $(1 \leq n \leq 6)$ ماذا نسمي هذا الحدث؟

5) أوجد احتمال ظهور عدد (m) : $(m > 6)$ ماذا نسمي هذا الحدث؟

الحل:

1) $\pi = \{1,2,3,4,5,6\}$

2) $A = \{1,2,5\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) $B = \{2,4,6\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ملاحظة: نسمي الحدثين A , B حدثان متعاكسان

4) $(1 \le n \le 6) \Leftrightarrow \pi \Rightarrow P(\pi) = \frac{6}{6} = 1$

وهو الحدث الأكيد

5) $(m > 6) \Leftrightarrow \emptyset = [\quad] \Rightarrow P(\emptyset) = \frac{6}{6} = 0$

وهو الحدث المستحيل.

---

2) أحداث متنافية وأحداث متعاكسة:

* نقول أن حدثين متنافيان إذا استحال تحققهما في آن معاً.

* نقول عن الحدث المعاكس لحدث A هو الحدث الذي يتحقق إن لم يتحقق A ونرمز له بـ $(\overline{A})$، ومجموع احتمالي حدثين متعاكسين يساوي (1) $\left[P(A) + P(\overline{A}) = 1\right]$

ملاحظة: الفرق بين الحدثين المتنافيان والمتعاكسان.

*** الحدثان المتنافيان يتحقق فيها الشرطان:**

1) تقاطعهما $(\emptyset)$ 2) اجتماعهما ليس (π)

*** الحدثان المتعاكسان يتحقق فيها الشرطان:**

1) تقاطعهما $(\emptyset)$ 2) اجتماعهما هو (π)

مثال (2): في تجربة الدولاب المرافق:

ندور الدولاب حتى يتوقف عند السهم:

1) ارسم شجرة الإمكانات ووضع الاحتمالات على فروعها.

2) الحدث A: ظهور الرقم (1).

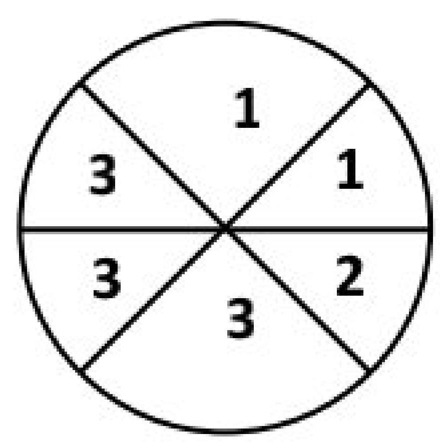
الحدث B: ظهور عدد زوجي.

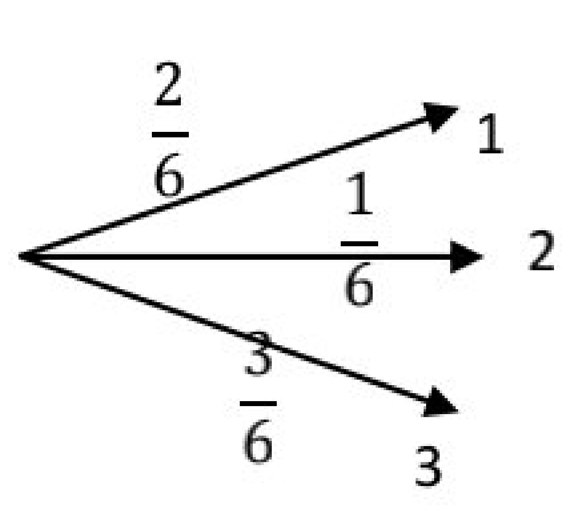
الحدث C: ظهور عدد أكبر من 1.

هل B, A متنافيان أو متعاكسان ولماذا؟

هل C, A متنافيان أو متعاكسان ولماذا؟

الحل:





$\pi = [1,2,3]$

2) $A = [1] \quad, B[2], C[2,3]$

* إن B, A متنافيان وليس متعاكسان لأن تقاطعهما $(\emptyset)$ واجتماعهما ليس (π)

$$P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \neq 1$$

* إن A, C متعاكسان لأن تقاطعهما $(\emptyset)$ واجتماعهما هو (π).

$$P(A) + P(C) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

مثال (3): نلقي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة نعرف الأحداث:

T: ظهور الوجه ذات الكتابة

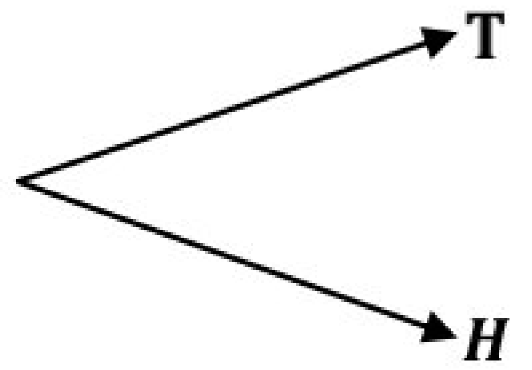
H: ظهور الوجه ذات الشعار.

1) راسم شجرة الإمكانات

2) H, T حدثان متعاكسان لماذا؟ احسب احتمال T ثم احتمال H بطريقتين.

الحل:

1)



2) إن H, T متعاكسان لأن تقاطعهما $(\emptyset)$ واجتماعهما هو (π)

$$P(T) = \frac{1}{2}$$

حساب احتمال H:

طريقة 1): $P(H) = \frac{1}{2}$

طريقة 2): لأن H, T متعاكسان $P(T) + P(H) = 1$

$$\frac{1}{2} + P(H) = 1$$

$$P(H) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

التجارب العشوائية المركبة:

نقول عن تجربة عشوائية أنها مركبة إذا كانت تتم على أكثر من مرحلة (مرحلتين وأكثر).

* على شجرة الإمكانات لتجربة عشوائية نسمي فرعين متتاليين مساراً.

* احتمال حدث في نهاية أي مسار يساوي جداء ضرب احتمالات المسار.

مثال (3): صندوق يحوي (3) كرات بيضاء اللون (W) و (5) كرات سوداء اللون (B) نسحب كرة من الصندوق عشوائياً ثم نضيفها إلى الصندوق ثم نسحب منه كرة مرة ثانية ونسجل لوني الكرتين المسحوبتين.

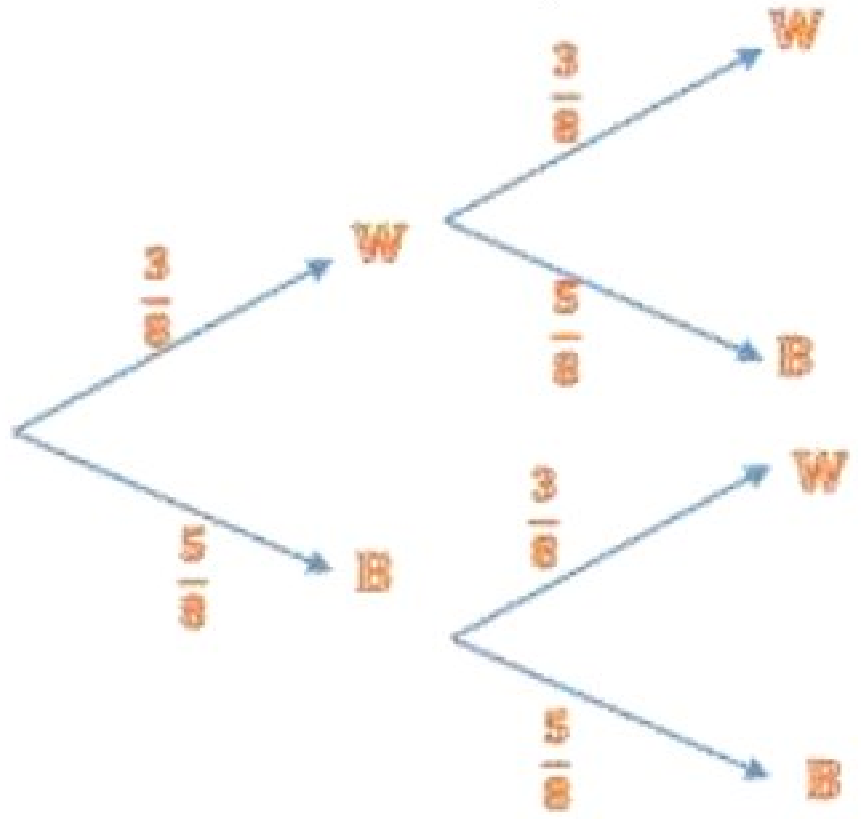
1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها باحتمالات النتائج.

2) احسب احتمال الحدث (سحب كرتين بيضاويتين).

3) احسب احتمال الحدث (سحب كرتين من ذات اللون)

4) احسب احتمال الحدث (سحب كرتين من لونين مختلفين)

الحل: 1)



(W,W)

(W,B)

(B,W)

(B,B)

2) سنرمز للحدث المطلوب بـ **A**:

$$P(A)=P(W,W)=P(W).P(W)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$$

3) سنرمز للحدث المطلوب بـ E:

$$P(E)=P(W,W)=P(B,B)$$
$$=P(W).P(W)+P(B).P(B)$$
$$=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}$$
$$=\frac{9}{64}+\frac{25}{64}=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$$

4) سنرمز للحدث المطلوب بـ (F):

$$P(F)=P(W,B)=P(B,W)$$
$$=P(W).P(B)+P(B).P(W)$$
$$=\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}$$
$$=\frac{15}{64}+\frac{15}{64}=\frac{30}{64}=\frac{15}{32}$$

ملاحظة: يمكن حل الطلب (4) بملاحظة أن الحدثين $E\ ,F$ متعاكسين أي:

$$P(E)+P(F)=1$$

$$\frac{34}{64}+P(F)=1\Rightarrow P(F)=1-\frac{34}{64}=\frac{30}{64}=\frac{15}{64}$$

مثال (4): الجدول التالي يبين مجموعة من الطلاب عددهم (50) (ذكور وإناث) والتي تلعب أو لا تلعب كرة السلة.

	ذكور M	إناث F
ممن يلعبون كرة سلة L	**18**	**6**
ممن لا يلعبون كرة السلة `L	**12**	**14**
المجموع	**30**	**20**

نسأل عشوائياً أحد الطلبة:

1) ما احتمال أن يكون ذكر، ما احتمال أن يكون أنثى.

2) ما احتمال أن يكون ممن يلعبون كرة السلة.

3) ما احتمال أن يكون يلعب كرة سلة ومن الذكور.

4) نعلم أنها طالبة، ما احتمال أنها لا تلعب كرة السلة.

5) أوجد شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات.

الحل:

1)

$$P(M)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

$$P(F)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$$

2)

$$P(L)=\frac{24}{50}=\frac{12}{25}$$

3) D: حدث أن يكون يلعب كرة السلة من الذكور

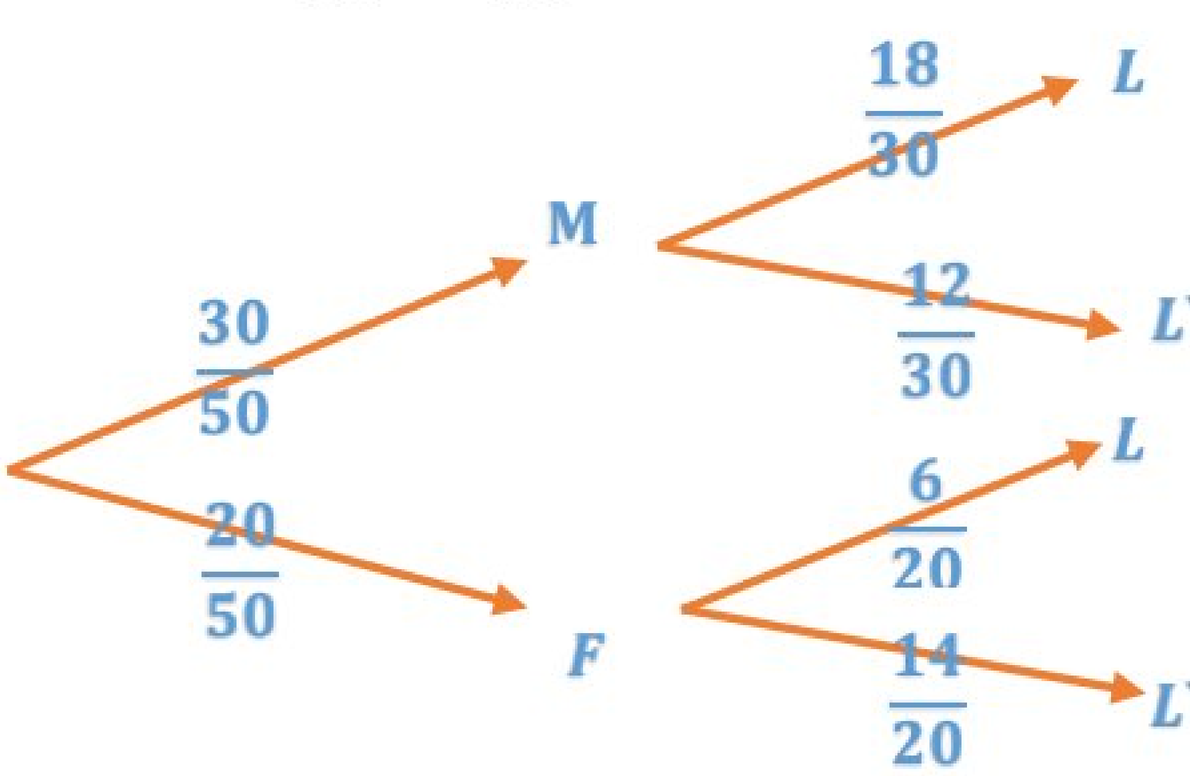
$$P(D)=\frac{30}{50}\times\frac{18}{30}=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$$

بما أنها طالبة (F) يصبح فضاء عينة F:

4)

$$P(L')=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

5)



(M,L)

$(M,L`)$

(F,L)

$(F,L`)$

الوسيط والربيعات:

تذكر:

* **المدى (E):** هو الفرق بين أكبر مفردات العينة وأصغرها

* **المتوسط الحسابي** $\overline{x}$ هو ناتج جمع المفردات تقسيم عددها

* **الوسيط (D):** بعد ترتيب المفردات تصاعدياً يمكن تحديد رتبة الوسيط:

1) إذا كان عدد المفردات (n فردي)

فإن مكان الوسيط يعطى بالعلاقة

$$\frac{n+1}{2}$$

2) إذا كان عدد المفردات (n زوجي)

فإن مكان المفردتين الوسيطتين يعطى بالعلاقة:

$$\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}\right)$$

ملاحظة لإيجاد الربيعات:

الربيع الثاني: $Q_2 = D$:

الربيع الأول Q_1 (وسيط النصف الأول) (الأدنى)

الربيع الثالث Q_3 (وسيط النصف الثاني) (الأعلى)

مثال (1): البيان الإحصائي التالي يدل على درجات عدد من الطلاب:

$$\{6,7,9,9,9,10,12,12,14,15\}$$

1) احسب مدى هذه الدرجات.

2) احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

3) ما هي الدرجة الوسيط، أوجد الربيع الأول والثاني.

الحل: المفردات مرتبة

$$\underbrace{6,7,9,9,(9}, \underbrace{10),12,\boxed{12},14,15}$$

(1 $E = 15 - 6 = 9$

(2

$$\overline{x} = \frac{6+7+9+9+9+10+12+12+14+15}{10}$$

$$= \frac{103}{10} = 10.3$$

$$n = 10 \begin{Bmatrix} \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{n}{2}+1 = 6 \end{Bmatrix}$$

$$D = \frac{9+10}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$$

$$Q_2 = D = 9.5$$

حساب Q_1 : عدد مفردات النصف الأول.

$$n = 5 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow Q_1 = 9$$

حساب Q_2 : عدد مفردات النصف الثاني.

$$n = 5 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow Q_3 = 12$$

مثال (2): البيان الإحصائي التالي يبين عدد حالات الإسعاف لعدد من المشافي

$$\{2,8,4,11,16,7,19,3,11\}$$

1) احسب المدى والمتوسط الحسابي.

2) احسب الوسيط والربيع الأول والثالث.

الحل: نرتب المفردات تصاعدياً

(1 $$\underbrace{2,3,4,7}, \boxed{8}, \underbrace{11,11,16,19}$$

$$E = 19 - 2 = 17$$

$$\overline{x} = \frac{2+3+4+7+8+11+11+16+19}{9}$$

$$= \frac{81}{9} = 9$$

$$n = 9 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow Q_2 = D = 8$$

حساب Q_1 : عدد مفردات النصف الأول.

$$n = 4 \begin{Bmatrix} \frac{n}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{n}{2}+1 = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Q_1 = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

حساب Q_3 : عدد مفردات النصف الأول.

$$n = 4 \begin{Bmatrix} \frac{n}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{n}{2}+1 = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Q_3 = \frac{11+16}{2} = 13.5$$

انتهت الوحدة السادسة