محاضرات في ميكانيكا الكم 2

الدكتور محمد أحمد آلجلالي

المحاضرة الرابعة

AL-Jalali

1429/07/24

تمثيل هايزنبرغ في ميكانيكا الكم

Heisenberg approach of quantum mechanics

أو

(التمثيل المصفوفي في ميكانيكا الكم)

(Matrix formulation of quantum mechanics)

المحتوى:

- مقدمة
- موجز عن المصفوفات
- التمثيل المصفوفي للمعادلات في ميكانيكا الكم
- أمثلة ونتائج

1. **مقدمة:**

يدرس ميكانيكا الكم من خلال تمثيلين أحدهما ميكانيكا شرودينجر من خلال المعادلة التفاضلية المسماة معادلة شرودينجر التفاضلية ،والآخر من خلال ميكانيكا هايزنبرغ التي تكافئ تمثيل شرودينجر ولكن بلغة المصفوفات،تمثل الدالة الموجية في هذا التمثيل بمصفوفة ذات عمود واحد ،وتوصف الدالة الموجية المرافقة بمصفوفة ذات صف واحد،ويمثل المؤثر بمصفوفة مربعة تتوافق مع عدد عناصر المصفوفة ذات العمود وذات الصف المذكورين أعلاه.وبما أننا نتعامل مع الدوال الكم بلغة المصفوفات(ميكانيكا هايزنبرغ)،وفي الممارسة الحقيقة لميكانيكا الكم فإننا نستخدم التمثيلين في آن واحد.

2. **موجز عن المصفوفات:**

يشترط بالطالب أن يكون على معرفة مسبقة بجبر المصفوفات ولذلك سأسرد أهم النقاط لتي نحتاجها هنا من المصفوفات:

1) شكل المصفوفة من المرتبة m x n حيث m الصفوف(الاسطر) و n الأعمدة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ a_{31} & & a_{33} & & a_{3n} \\ . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{jk} \right)$$

2) الجمع والطرح

$$A + B = C$$
$$(a_{jk}) + (b_{jk}) = (a_{jk} + b_{jk}) = (C_{jk})$$
$$A - B = D$$
$$(a_{jk}) - (b_{jk}) = (a_{jk} - b_{jk}) = (D_{jk})$$

3) ضرب المصفوفة بعدد

$$\lambda A = \lambda (a_{jk}) = (b_{jk})$$

4) ضرب(جداء) المصفوفات شريطة أن يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية،حيث يتم ضرب السطر الأول من المصفوفة الأولى في العمود الاول من المصفوفة الثانية للحصول على العنصر الأول في المصفوفة الجديدة(ضرب كل عنصرين متقابلين ثم الجمع مع مضروب العنصرين الآخرين حتى تتم كامل العملية للحصول على العنصر الأول في المصفوفة الجديدة)وهكذا لبقية العناصر.

$$AB = C = (a_{jk})(b_{ki}) = (c_{ki})$$

كل عنصر من عناصر المصفوفة الجدية يخضع للعلاقة:

$$c_{ki} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} b_{\ell i}$$

5) القوانين التالية محققة:

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$
$$A(BC) = (AB)C$$
$$AA = A^2$$
$$A^2 A = A^3 \quad A^4 = ...$$

6) مدور (Transposed)المصفوفة هو تبديل الصفوف إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف بالكامل في المصفوفة المدروسة ويرمز لها عادة A^T إلا إذا أشير إلى غير ذلك في بعض الكتب.

7) المصفوفات المتماثلة (symmetrical) والمتخالفة التماثل (skew –symmetrical) :
المصفوفة المتماثلة يكون: $A=A^T$ أما المتخالفة تجب أن تحقق الشرط $a_{jk}=-a_{kj}$ والمتخالفة التماثل يكون عناصر قطرها الرئيس صفرا.مثل هذه المصفوفات يجب أن تكون مربعة.

8) المرافق المركب (العقدي) لمصفوفة (conjugate matrices) يتم فيها استبدال كل عنصر مركب(عقدي) بمرافقه العقدي ويرمز للمصفوفة الناتجة عادة $\bar{A}$ حيث يستبدل كل i بـ -i .

9) المصفوفة الهرميتية (Hermitian) شرطها أن يكون مدور مرافق المصفوفة يساوي المصفوفة الأصلية.

$$A = \overline{A}^T$$

و الهرميتية المتخالفة شرطها:

$$A = -\overline{A}^T$$

10) القطر الرئيس في المصفوفة هو الذي يحتوى العناصر التي يكون فيها j=k .

11) أثر المصفوفة هو مجموع عناصر القطر الرئيس.

12) مصفوفة الوحدة هي المصفوفة التي عناصر قطرها الرئيس يساوي الواحد وباقي العناصر صفر ورمزها I .

13) المصفوفة الصفرية وفيها كل عناصر المصفوفة تساوي الصفر .

14) المحددة هي القيمة العددية للمصفوفة وتعرف قيمة المحددة Δ بأنها مجموع حاصل ضرب عناصر صف(عمود)في المعامل المرافق للعنصر المصفوفي A_{jk} وتحسب عادة وفق مفكوك لابلاس :

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk}$$

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \left| \min or\ of\ \ the\ element\ a_{jk} \right|$$

15) معكوس(مقلوب) مصفوفة:وتتم عبر عدة خطوات :

a) نوجد مصفوفة المعاملات المرافقة للمصفوفة الأصلية (A_{jk}).

b) نأخذ مدور مصفوفة المعاملات المرافقة $(A_{jk})^T$.

c) نحسب محدد المصفوفة الأصلية Δ.

d) عندئذ يكون معكوس المصفوفة معطى بالعلاقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\Delta}$$

e) جداء معكوس المصفوفة في المصفوفة الأصلية يساوي مصفوفة الوحدة $A^{-1} A = I$.

16) المصفوفة المتعامدة شرطها مدور المصفوفة يساوي معكوسها أو جداء مدور المصفوفة في المصفوفة الاصلية يساوي مصفوفة الوحدة.

$$A^T = A^{-1} \Rightarrow A^T A = I$$

17) المصفوفة الوحدية (unitary)شرطها مدور مرافقها يساوي إلى معكوسها أي:

$$\bar{A}^{T} = A^{-1} \Rightarrow \bar{A}^{T} A = I$$

ويبدو أنها تخص المصفوفة المركبة وإذا كانت المصفوفة الوحدية حقيقية فإنها تكون متعامدة.

18) يمكن تمثيل المصفوفات كمتجهات وخصوصا عندما نطبق شرط تعامد المتجهات(وهو يهمنا في ميكانيكا الكم) مثال :

اذا كان لدينا متجهتان متعمدتان فان :

$$\vec{A}\vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{T} B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

or

$$\bar{X}_{j}^{T} X_{k} = \delta_{jk}$$

$$j = k \Rightarrow \delta_{jk} = 1$$

$$j \neq k \Rightarrow \delta_{jk} = 0$$

19) حلول مجموعة من المعادلات الخطية ذات n معادلة و n مجهول

$$AX = R \Rightarrow X = A^{-1} R$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots\ldots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

20) القيم الذاتية (المسموحة) والمتجهات الذاتية لمصفوفة(مهمة جدا في ميكانيكا الكم):

عندما يكون لدينا مصفوفة A من المرتبة n x n ومصفوفة عمودية x فإننا نستطيع كتابة الجداء كما يلي:

$$AX = \lambda X$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & & a_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

or

$$\left(A - \lambda I\right)X = 0 \Rightarrow if \;\; X \neq 0 \Rightarrow \left(A - \lambda I\right) = 0$$

حل المعادلة الأخيرة $\left(A - \lambda I\right) = 0$ يعطي معادلة كثير حدود من المرتبة n ،وجذور تلك المعادلة تسمى القيم الذاتية (المسموحة) للمصفوفة ،ويناظر كل قيمة ذاتية حلا ليس صفريا لـ $X \neq 0$ يسمى متجها ذاتيا ينتمي للقيمة المميزة،والمعادلة التي تعطي قيم λ تسمى بالعادلة المميزة.

مثال:

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & -3\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}5-\lambda & 7 & -5\\ 0 & 4-\lambda & -1\\ 2 & 8 & -3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 7 & -5\\ 0 & 4-\lambda & -1\\ 2 & 8 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0\Rightarrow$$

$$\lambda=1,2,3$$

ولإيجاد المتجهات الذاتية نحل المعادلة العامة ونعوض فيها القيم الذاتية كل على حدة لنحصل على المتجهة الذاتية الموافقة لكل قيمة ذاتية كما يلي:

i. عندما $\lambda=1$ نجد:

$$\lambda=1$$

$$\begin{pmatrix}5-\lambda & 7 & -5\\ 0 & 4-\lambda & -1\\ 2 & 8 & -3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}5-1 & 7 & -5\\ 0 & 4-1 & -1\\ 2 & 8 & -3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$4x_1+7x_2-5x_3=0$$

$$0+3x_2-x_3=0$$

$$2x_1+8x_2-4x_3=0\Rightarrow$$

$$x_3=3x_2$$

$$x_1=2x_2$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2\\ x_2\\ 3x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow u_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

.ii عندما λ=2 نجد:

$$\lambda = 2$$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 7 & -5 \\ 0 & 4-2 & -1 \\ 2 & 8 & -3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0$$

$$0 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$x_3 = 2x_2$$

$$x_1 = 2x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.iii عندما λ=3 نجد :

$$\lambda = 3$$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & 7 & -5 \\ 0 & 4-3 & -1 \\ 2 & 8 & -3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0$$

$$0 + x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$x_3 = x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ولتعيين مصفوفة المتجهات الذاتية المعايرة(المنظمة) نأخذ مربع أعداد كل متجهة ذاتية ثم نجمعها ونقسم كل عنصر من عناصر المتجهة على الجذر التربيعي للجمع فنحصل على مصفوفة المتجهات الذاتية كما يلي:

$$U=\begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

21. تحويل المصفوفات وجعلها قطرية:

نتبع الخطوات التالية:

- نوجد مصفوفة القيم الذاتية U كمصفوفة تحويل(المثال السايق)
- نوجد معكوس مصفوفة القيم الذاتية U^{-1}
- ثم نحصل على المصفوفة القطرية من العلاقة التالية:

$$U^{-1}AU=A'$$

3. التمثيل المصفوفي للمعادلات في ميكانيكا الكم:

نبدأ من شرط المعايرة والتعامد المعروف ليدينا بالعلاقة:

$$\begin{aligned} &\left\langle \psi_i \middle| \psi_j \right\rangle = \langle i \mid j \rangle = \delta_{ij} \\ &when \\ &i=j \Rightarrow \delta_{ij}=1 \\ &i \neq j \Rightarrow \delta_{ij}=0 \qquad (1-3) \end{aligned}$$

ان دلتا كرونيكر يمكن تمثيلها بمصفوفة عناصر قطرها الرئيس تساوي الواحد وباقي العناصر تساوي الصفر وفق المصفوفة التالية:

$$\delta_{ij}=\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & .... & \delta_{1N}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & .... & \delta_{2N}\\ . & & & .... & .\\ . & & & .... & .\\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \delta_{N3} & .... & \delta_{NN}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & .... & 0\\ 0 & 1 & 0 & .... & 0\\ . & & & .... & .\\ . & & & .... & .\\ 0 & 0 & 0 & .... & 1\end{pmatrix}\qquad(2-3)$$

وهذا التمثيل يعطينا كافة القيم دفعة واحدة ويساعد في حل معادلة القيم المسموحة تسمى المصفوفة (3-2)مصفوفة الوحدة.

ولننطلق ألان في استنتاج معادلة القيم الذاتية (المسموحة) وفقا للتمثيل المصفوفي كما يلي:

لتكن لدينا المعادلة التالية وفق نظام المؤثرات:

$$\psi_b=\hat{Q}\psi_a$$

$$where$$

$$\psi_a=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\psi_j$$

$$\psi_b=\sum_{k=1}^{N}\beta_k\psi_k$$

$$\psi_b=\sum_{k=1}^{N}\beta_k\psi_k=\hat{Q}\psi_a=\hat{Q}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\psi_j$$

$$\sum_{k=1}^{N}\beta_k\psi_k=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\hat{Q}\psi_j\qquad(3-3)$$

بضرب الطرفين من اليسار بالدالة ψ_i نجد ما يلي:

$$\left\langle \psi_i \sum_{k=1}^{N} \beta_k \psi_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \hat{Q} \psi_j \rangle$$

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k \left\langle \psi_i \middle| \psi_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left\langle \psi_i \middle| \hat{Q} \middle| \psi_j \right\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k \left\langle i \middle| k \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left\langle i \middle| \hat{Q} \middle| j \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} Q_{ij} \alpha_j$$

$$where \quad \left\langle i \middle| \hat{Q} \middle| j \right\rangle = Q_{ij}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{N} Q_{ij} \alpha_j$$

$$when \qquad i = k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k = \sum_{j=1}^{N} Q_{ij} \alpha_j \qquad (4-3)$$

يمكن تمثيل العلاقة(4-3) بلغة المصفوفات من العلاقة الأصلية $\hat{Q}\psi_a = \psi_b$ ،حيث تمثل الدوال بمصفوفة ذات عمود واحد ومساقط قيم المؤثر على مختلف الدوال الأساسية بمصفوفة مربعة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & . & . & Q_{1N} \\ Q_{21} & Q_{22} & . & . & Q_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ Q_{N1} & Q_{N2} & . & . & Q_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad (5-3)$$

وعند اختيار الدوال المسموحة والقيم المسموحة تكون قيم العناصر غير القطرية في مصفوفة مساقط القيم العامة للمؤثر تساوي الصفر، وتمثل عناصر القيم المسموحة قطر المصفوفة كما في المعادلة التالية:

$$Q_{ii} = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & Q_{22} & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & Q_{NN} \end{pmatrix}$$

or

$$Q_{ij} = Q_{ij}\delta_{ij} \qquad (6-3)$$

4. أمثلة ونتائج:

- في دراسة جسيم موجود بئر جهد غير محدود الارتفاع (راجع كم 1) تم استنتاج الدالة الموجية وقيم الطاقة المسموحة بالعلاقتين التاليتين:

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\pi n}{a} x$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 = c^2 n^2 = n^2 E_1$$

أدرس هذه الحالة وفق تمثيل المصفوفات.

الحل:

$$\hat{H}\phi_n = E_n \phi_n$$

$$\hat{H}\left|n\right\rangle = E_n \left|n\right\rangle \Longrightarrow$$

$$\left\langle m\right|\hat{H}\left|n\right\rangle = \left\langle m\right|E_n\left|n\right\rangle = E_n \delta_{mn}$$

$$H_{mn} = E_n \delta_{mn}$$

العلاقة الأخيرة تكتب بلغة المصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & . & . & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & . & . & H_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ H_{N1} & H_{N2} & . & . & H_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \\ \\ E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & . & . & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & . & . & \delta_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & . & . & \delta_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & . & . & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & . & . & H_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ H_{N1} & H_{N2} & . & . & H_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ 4E_1 \\ \\ \\ n^2E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & . & . & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & . & . & H_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ H_{N1} & H_{N2} & . & . & H_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 4E_1 & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & n^2E_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & H_{22} & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & H_{NN} \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 4 & . & . & 0 \\ . & & 9 & & . \\ . & & & 16 & . \\ 0 & 0 & . & . & n^2 \end{pmatrix}$$

$$H_{11} = E_1, H_{22} = 4E_1, H_{33} = 9E_1, ..., H_{nn} = n^2E_1$$

$$H_{ij} = 0 \quad when\ i \neq j$$

مثال: تعطى معادلة القيم المسموحة لطاقة المذبذب التوافقي البسيط بالعلاقة:

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

اكتب هذه العلاقة بلغة المصفوفات.

الحل:

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$$
$$\hat{H}\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle \Rightarrow$$
$$\left\langle m\right|\hat{H}\left|n\right\rangle = \left\langle m\right|E_n\left|n\right\rangle = E_n\delta_{mn}$$
$$H_{mn} = E_n\delta_{mn}$$

والشكل المصفوفي يعطى بالشكل:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & . & . & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & . & . & H_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ H_{N1} & H_{N2} & . & . & H_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \\ . \\ . \\ E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & . & . & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & . & . & \delta_{2N} \\ . & & \delta_{33} & & . \\ . & & & & . \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & . & . & \delta_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & . & . & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & . & . & H_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ H_{N1} & H_{N2} & . & . & H_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{2} \\ \frac{3\hbar\omega}{2} \\ \frac{5\hbar\omega}{2} \\ \\ \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & & 1 & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & . & . & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & . & . & H_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ H_{N1} & H_{N2} & . & . & H_{NN} \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 3 & . & . & 0 \\ . & & 5 & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & 2(n+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$H_{11} = \frac{\hbar\omega}{2}, H_{22} = \frac{3\hbar\omega}{2}, H_{33} = \frac{5\hbar\omega}{2}, \ldots\ldots, H_{nn} = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$$

$$H_{ij} = 0 \quad when\ i \neq j$$

مثال:

تعطي معادلة القيم المسموحة لمسقط كمية الحركة الزاوية على المحور z بالعلاقة التالية:

$$L_z = m_\ell \hbar$$
$$m_\ell = -\ell, -\ell+1, ..., 0, ..., +\ell-1, +\ell$$

مثل العلاقة بلغة المصفوفات بفرض أن العدد الكمي المداري يساوي الواحد $\ell=1$

الحل:

$$\hat{L}u_m = m_\ell \hbar u_m$$
$$\hat{L}\left|m\right\rangle = m_\ell \hbar \left|m\right\rangle \Rightarrow$$
$$\left\langle m'\right|\hat{L}\left|m\right\rangle = \left\langle m'\right| m_\ell \hbar \left|m\right\rangle = m_\ell \hbar \delta_{m'm}$$
$$L_z = L_{m'm} = m_\ell \hbar \delta_{m'n}$$

والعلاقة الأخيرة تكتب بلغة المصفوفات:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & . & . & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & . & . & L_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ L_{N1} & L_{N2} & . & . & L_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\ell\hbar \\ (\ell-1)\hbar \\ . \\ . \\ -\ell\hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & . & . & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & . & . & \delta_{2N} \\ . & & \delta_{33} & & . \\ . & & & & . \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & . & . & \delta_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & . & . & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & . & . & L_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ L_{N1} & L_{N2} & . & . & L_{NN} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} +\ell & \delta_{12} & . & . & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & (\ell-1) & . & . & \delta_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & . & . & -\ell \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & . & . & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & . & . & L_{2N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ L_{N1} & L_{N2} & . & . & L_{NN} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} +\ell & 0 & . & . & 0 \\ 0 & (\ell-1) & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & -\ell \end{pmatrix}$$

وعندما $\ell=1$ فان :

$$\boldsymbol{L_z = m_\ell \hbar}$$
$$\boldsymbol{m_\ell = -1, 0, 1}$$

وتصبح مصفوفة المؤثر كما يلي: في تشكيل عناصر المصفوفة نعتبر 1 من قيم m يقابل 1 في المصفوفة ثم 0 يقابل 2 ثم -1 يقابل 3

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{L}|1\rangle & \langle 1|\hat{L}|0\rangle & \langle 1|\hat{L}|-1\rangle \\ \langle 0|\hat{L}|1\rangle & \langle 0|\hat{L}|0\rangle & \langle 0|\hat{L}|-1\rangle \\ \langle -1|\hat{L}|1\rangle & \langle -1|\hat{L}|0\rangle & \langle -1|\hat{L}|-1\rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\langle 1|1\rangle & 0\langle 1|0\rangle & -\hbar\langle 1|-1\rangle \\ \hbar\langle 0|1\rangle & 0\langle 0|0\rangle & -\hbar\langle 0|-1\rangle \\ \hbar\langle -1|1\rangle & 0\langle -1|0\rangle & -\hbar\langle -1|-1\rangle \end{pmatrix}$$

$$L_z = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

أو نأخذ الطرف الأيمن مباشرة أي:

$$\hbar \begin{pmatrix} +\ell & 0 & . & . & 0 \\ 0 & (\ell-1) & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & -\ell \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 \end{pmatrix}$$

طبق ما سبق في حال العدد الكمي المداري يساوي 2 و3 و........

مثال :اكتب الشكل المصفوفي الكامل لكل من مؤثر كمية الحركة الزاوية المدارية ومسقطه على المحور z

$$\left\langle Y_{\ell'}^{m'} \middle| \hat{L}^2 \middle| Y_{\ell}^{m} \right\rangle = \ell(\ell+1+\hbar^2\delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$$

$$\left\langle Y_{\ell'}^{m'} \middle| \hat{L}_z \middle| Y_{\ell}^{m} \right\rangle = m\hbar\delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$$

$$\left(L^2_{m'm}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & & & & 0 \\ 0 & 2 & & & & & & & & 0 \\ . & & 2 & & & & & & & . \\ . & & & 2 & & & & & & . \\ & & & & 6 & & & & & \\ & & & & & . & & & & \\ & & & & & & . & & & \\ & & & & & & & 12 & & \\ & & & & & & & & . & \\ 0 & 0 & . & . & & & & & & . \end{pmatrix}$$

$$\left(L_z\right) = \begin{pmatrix} (0) & & & \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & . & . & & 0 \\ 0 & 2 & & & & & . \\ 0 & & 1 & & & & . \\ . & & & 0 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -2 & 0 \\ 0 & . & . & & & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

مثال:

يوجد نوع من المؤثرات تسمى مؤثرات الإحداث(الرفع لحالة أعلى) والإفناء(الخفض لحالة أدنى) (the annihilation and creation operators)ففي كمية الحركة الزاوية يعطيان بالعلاقتين التاليتين:

$$\hat{L}_{+} = \hat{L}_{x} + i\hat{L}_{y}$$
$$\hat{L}_{-} = \hat{L}_{x} - i\hat{L}_{y}$$

إذا أثر هذين المؤثرين على الدالة الموجية لكمية الحركة الزاوية تكون النتيجة كما يلي:

$$\hat{L}_{\pm} Y_{\ell}^{m} = \hbar\sqrt{\left(\ell \mp m\right)\left(\ell \pm m + 1\right)}\, Y_{\ell}^{m\pm 1}$$

اكتب الشكل المصفوفي لهذين المؤثرين في حال العدد الكمي المداري يساوي الواحد.

الحل:

$$\left\langle Y_{\ell'}^{m'} \middle| \hat{L}_{\pm} \middle| Y_{\ell}^{m} \right\rangle = \hbar\sqrt{\left(\ell \mp m\right)\left(\ell \pm m + 1\right)}\left\langle \ell' m' \middle| \ell m \pm 1 \right\rangle$$
$$\left\langle Y_{\ell'}^{m'} \middle| \hat{L}_{\pm} \middle| Y_{\ell}^{m} \right\rangle = \hbar\sqrt{\left(\ell \mp m\right)\left(\ell \pm m + 1\right)}\delta \ell' \ell, \delta_{m', m\pm 1}$$

$$\left(L_{\pm}\right) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{L}_{\pm}|1\rangle & \langle 1|\hat{L}_{\pm}|0\rangle & \langle 1|\hat{L}_{\pm}|-1\rangle \\ \langle 0|\hat{L}_{\pm}|1\rangle & \langle 0|\hat{L}_{\pm}|0\rangle & \langle 0|\hat{L}_{\pm}|-1\rangle \\ \langle -1|\hat{L}_{\pm}|1\rangle & \langle -1|\hat{L}_{\pm}|0\rangle & \langle -1|\hat{L}_{\pm}|-1\rangle \end{pmatrix}$$

$$\left(L_{+}\right) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(L_{-}\right) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حل في حال العدد الكمي المداري يساوي 2.

الجواب:

$$\left(L_{+}\right)=\hbar\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(L_{-}\right)=\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

نتائج:

لدينا:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right)$$

$$when \quad \ell = 1$$

$$\left(L_x\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$when \quad \ell = 2$$

$$\left(L_x\right) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_y = \frac{1}{2i}\left(\hat{L}_+ - \hat{L}_-\right)$$

$$when \quad \ell = 1$$

$$\left(L_y\right) = \frac{i\,\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$when \quad \ell = 2$$

$$\left(L_y\right) = \frac{i\,\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال:

احسب القيمة المتوقعة لطاقة المذبذب التوافقي بتمثيل هايزنبرغ ،إذا كانت الدالة الموجية للمذبذب معطاة بالعلاقة التالية:

$$\psi(x,t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_0t/\hbar} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

الحل:

معادلة القيمة المتوقعة كما هو معلوم هي :

$$\langle E\rangle=\langle\psi_n|\hat{E}|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|E_{nn}|\psi_n\rangle$$

$$\langle E\rangle=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iE_0t/\hbar} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iE_1t/\hbar} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\frac{\hbar\omega}{2} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 3\frac{\hbar\omega}{2} & . & . & 0 \\ . & & 5\frac{\hbar\omega}{2} & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & 2(n+\frac{1}{2})\frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_0t/\hbar} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar} \\ 0 \\ 0 \\ . \end{pmatrix}$$

$$\langle E\rangle=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iE_0t/\hbar} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iE_1t/\hbar} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_0t/\hbar} \\ 3\frac{\hbar\omega}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar} \\ 0 \\ 0 \\ . \end{pmatrix}$$

$$\langle E\rangle=\frac{\hbar\omega}{4}+\frac{3\hbar\omega}{4}=\hbar\omega$$

مثال:

يعطى تمثيل هايزنبرغ لمؤثري الإحداث والإفناء للمذبذب التوافقي بالعلاقتين التاليتين :

$$\langle n|\hat{a}_+|k\rangle = \sqrt{k+1}\langle n|k+1\rangle = \sqrt{k+1}\delta_{n,k+1}$$
$$\langle n|\hat{a}_-|k\rangle = \sqrt{k}\langle n|k-1\rangle = \sqrt{k}\delta_{n,k-1}$$

اثبت أن مصفوفتي المؤثرين تعطيان بالعلاقة التالية:

$$(a_+) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

$$(a_-) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال:

إذا علمت أن القيم المتوقعة للموضع في المذبذب التوافقي يعطى بالعلاقة أدناه،اكتب مصفوفة مؤثر الموضع.

$$\langle n|\hat{x}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left[\sqrt{k}\,\delta_{n,k-1} + \sqrt{k+1}\delta_{n,k+1}\right]$$

$$where \quad \alpha = \frac{\omega m}{\hbar} \quad and \;\; \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$$

الجواب:

$$(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

مثال: إذا علمت أن القيم المتوقعة لكمية الحركة في المذبذب التوافقي يعطى بالعلاقة أدناه،اكتب مصفوفة مؤثر كمية الحركة.

$$\langle n|\hat{p}|k\rangle = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{k}\,\delta_{n,k-1} - \sqrt{k+1}\delta_{n,k+1}\right]$$

$$where \quad \alpha = \frac{\omega m}{\hbar} \quad and \;\; \hat{p}_x = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)$$

$$\left[\hat{a}_-, \hat{a}_+\right] = 1 \quad and \quad \hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2})$$

الحل:

$$(p)=\frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{4} & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

واجب:

- في حال الدالة للمذبذب التوافقي تأخذ الشكل التالي :

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{10}}\psi_0(x,t)+\frac{2}{\sqrt{10}}\psi_1(x,t)+\frac{2}{\sqrt{10}}\psi_2(x,t)+\frac{1}{\sqrt{10}}\psi_3(x,t)$$

أوجد القيمة المتوقعة لكل من $\langle x\rangle,\langle p_x\rangle,\langle E\rangle$ بلغة هايزنبرغ.

- **<u>من المصفوفات الهامة تلك التي تخص كمية الحركة الذاتية الذاتية(المغزلية) أو ما يسمى سبين الإلكترون(spin) والتي يمكن ايجازها كما يلي:</u>**

من المعلوم أن :

$$S^2=s(s+1)\hbar^2=\frac{3}{4}\hbar^2$$

$$where \quad s=\frac{1}{2}$$

$$S_z=m_s\hbar$$

$$m_s=\pm\frac{1}{2}$$

وبلغة المصفوفات نحصل على العلاقات التالية:

$$\langle m_s' | \hat{S}^2 | m_s \rangle = \hbar^2 [s(s+1)] \delta_{m_s', m_s} = \frac{3}{4} \hbar^2 \delta_{m_s', m_s}$$

$$\langle m_s' | \hat{S}_z | m_s \rangle = \hbar m_s \delta_{m_s', m_s}$$

$$\langle m_s' | \hat{S}_\pm | m_s \rangle = \hbar \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm m_s\right)\left(\frac{3}{2} \pm m_s\right)} \delta_{m_s', m_{s\pm1}}$$

وبالتالي فان مصفوفة كمية الحركة الزاوية الذاتية تشكل مصفوفة مربعة عدد صفوفها وأعمدتها 2s+1=2 أي 2x2 ومنه نجد:

$$\left(\hat{S}^2\right) = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{S}_z\right) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{S}_+\right) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{S}_-\right) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{S}_x\right) = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{\hbar}\left(\hat{S}_x\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x'$$

$$\left(\hat{S}_y\right) = \frac{i}{2}(S_- + S_+) = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{\hbar}\left(\hat{S}_y\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_y'$$

$$\left(\hat{S}_z\right) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{\hbar}\left(\hat{S}_z\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z'$$

تسمى المقادير التالية بمصفوفات السبين لباولي واختصارا مصفوفات باولي وهي:

$$\hat{\sigma}'_x = \frac{2}{\hbar}\left(\hat{S}_x\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}'_y = \frac{2}{\hbar}\left(\hat{S}_y\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}'_z = \frac{2}{\hbar}\left(\hat{S}_z\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

أمثلة:

- تأكد من صحة مايلي:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- تأكد من صحة مايلي:

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+i & 0+0 \\ 0+0 & -i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\,\hat{\sigma}_z$$

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-i & 0+0 \\ 0+0 & i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\,\hat{\sigma}_z$$

$$\left[\hat{\sigma}_x , \hat{\sigma}_y\right] = \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i\,\hat{\sigma}_x$$

$$\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = i\,\hat{\sigma}_x$$

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$