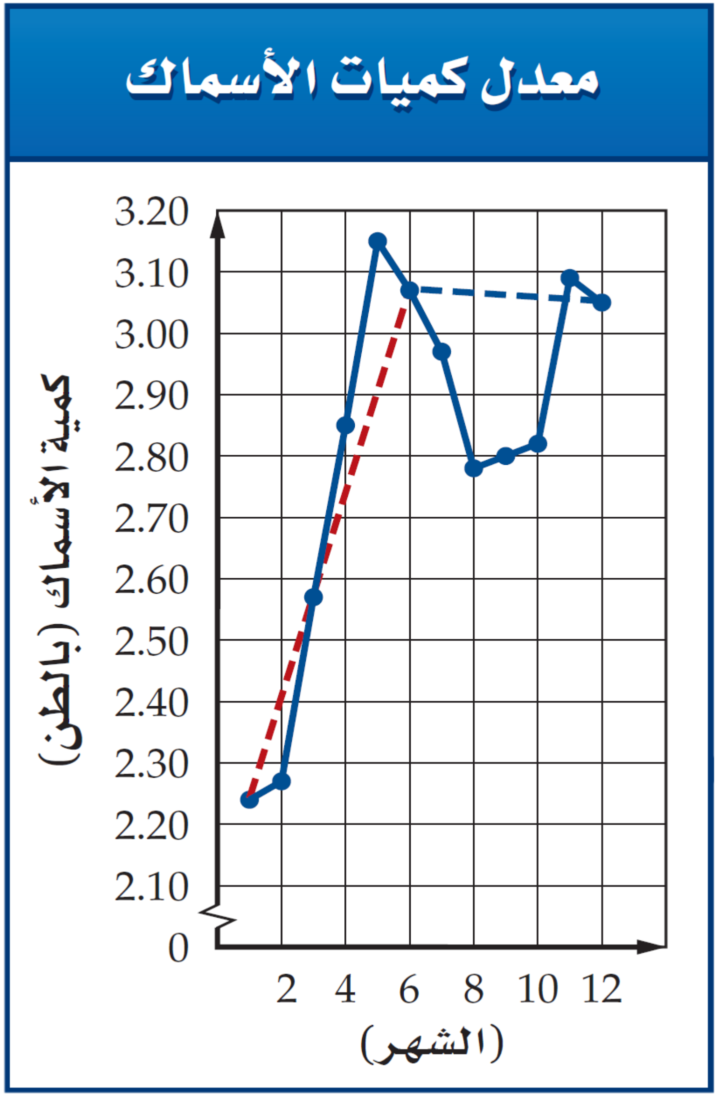
الدرس 4

القيم القصوي و متوسط معدل التغير

EXTREMA AND AVERAGA RATES OF CHANGE


Welcome

لماذا ؟



يبين التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431هـ.

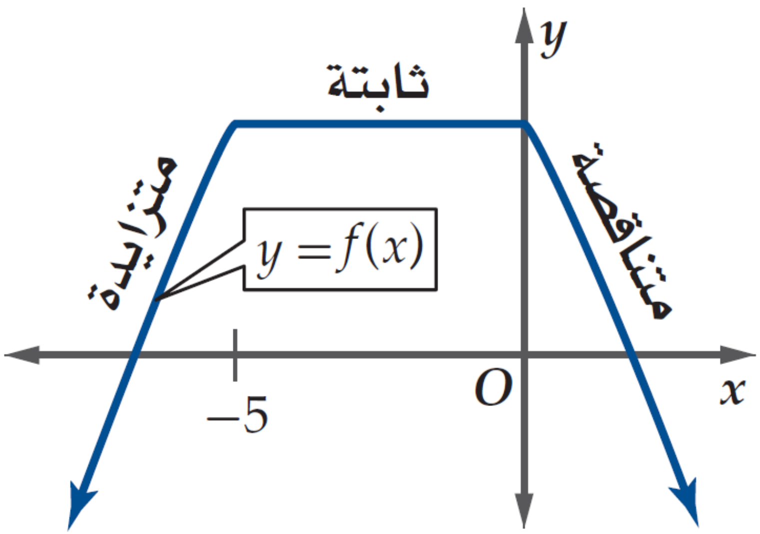
يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلاً بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغير في النصف الأول من عام 1431هـ أكثر منه ف النصف الثاني.

التزايد و التناقص : خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور، إذا تتبعت منحنى الدالة f(x)، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن :

- f(x) متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$



يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًّا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

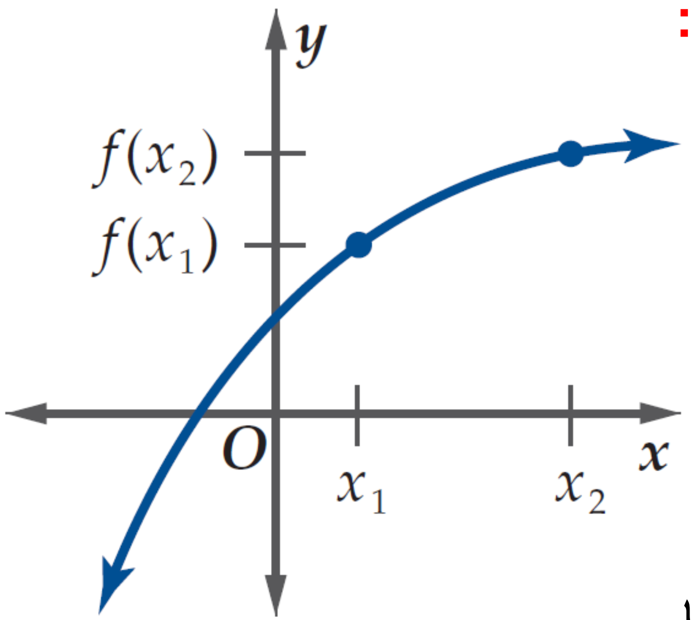
مفهوم اساسي

الدوال المتزايدة ، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي :

تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم f(x) كلما زادت قيم x في الفترة .

النموذج :



الرموز :

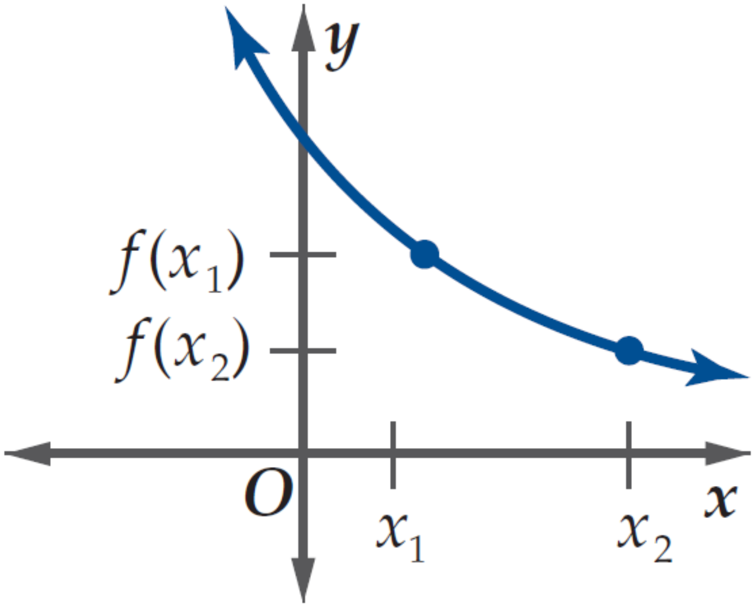
لكل x_1 x_2 **في الفترة ، فإن** $f(x_1) < f(x_2)$ **عندما**

تكون $x_1 < x_2$

التعبير اللفظي :

تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم f(x) كلما زادت قيم x في الفترة .

النموذج :



الرموز :

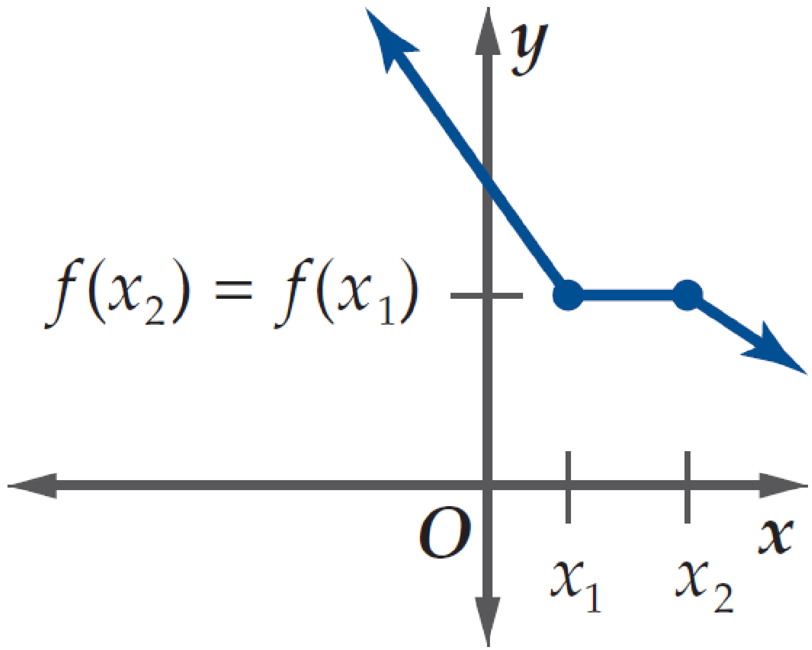
لكل x_1 x_2 في الفترة ، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما

تكون $x_1 < x_2$

التعبير اللفظي :

تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم f(x) لأي قيم x في الفترة .

النموذج :



الرموز :

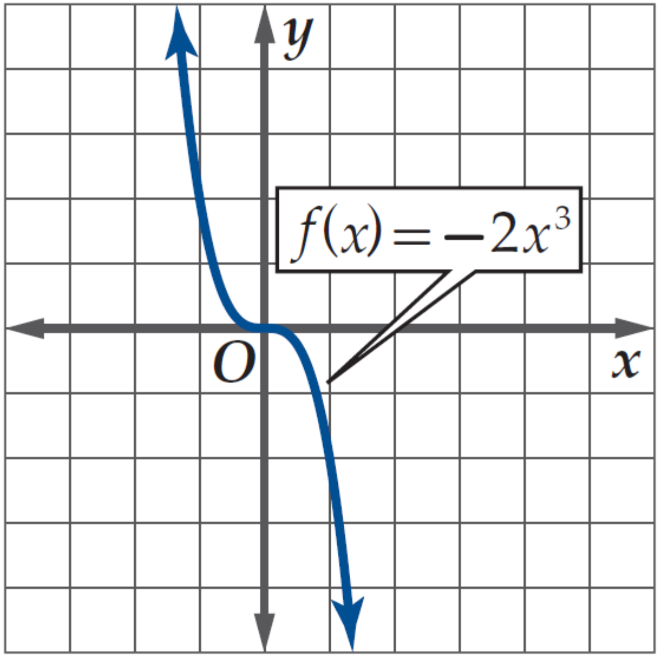
لكل x_1 x_2 في الفترة ، فإن $f(x_1)=f(x_2)$ عندما

تكون $x_1 < x_2$

مثال 1

تحديد التزايد و التناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



a) $f(x) = -2x^3$

التحليل بيانياً :

يبين التمثيل البياني أن قيم **f(x)** تتناقص كلما ازدادت قيم **x**؛ لذا فإن الدالة متناقصة

في الفترة $(-\infty, \infty)$

التحليل بيانياً :

كوّن جدولاً يتضمن قيمًا للمتغير **x** في الفترة .

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم **x**، تتناقص قيم **f(x)**، وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

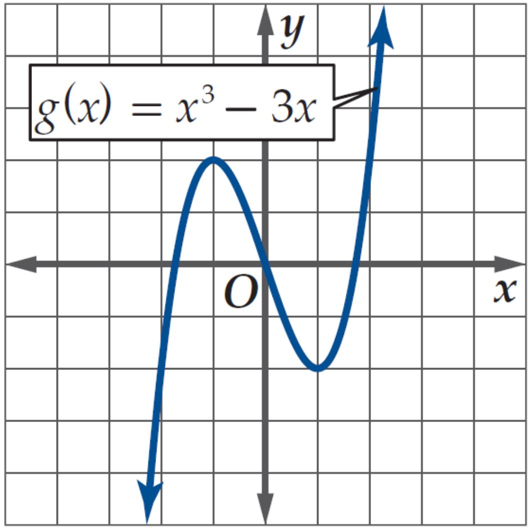
$g(x) = x^3 - 3x$ (b

التحليل بيانياً :

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$

، ومتناقصة في الفترة (- 1 , 1)

و متزايدة في الفترة $(1, \infty)$



التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولاً يتضمن قيمًا للمتغير xفي كل فترة من الفترات الثلاث السابقة

$(-\infty, -1)$

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$g(x)$	-1298	-702	-322	-110	-18	2

$(-1, 1)$

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	-1.375	-2

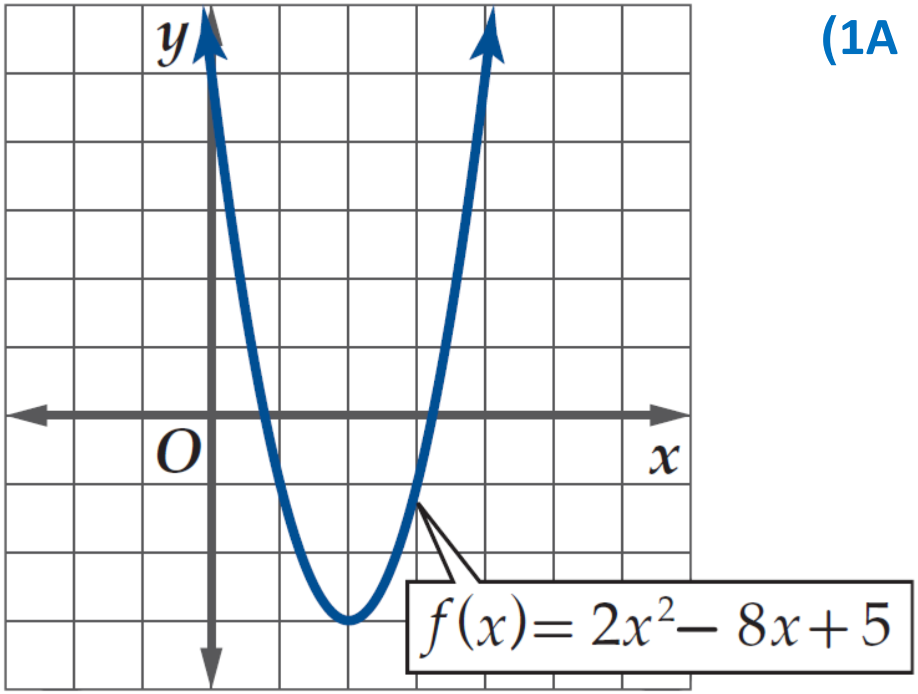
$(1, \infty)$

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	-2	18	110	322	702	1298

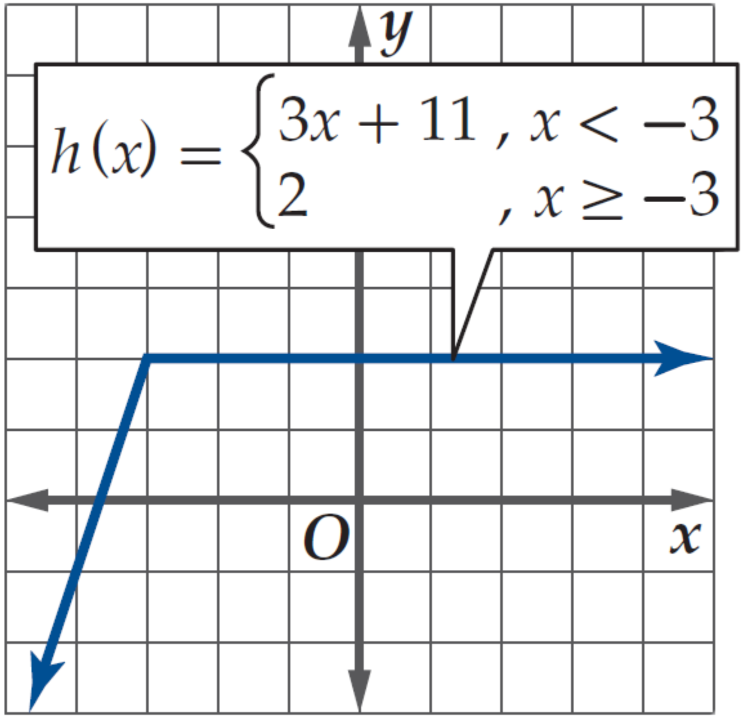
توضيح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى 1 –، فإن g(x) تزداد، وعندما تزداد x من 1 – إلى 1، فإن g(x) تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1، فإن g(x) تزداد، وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

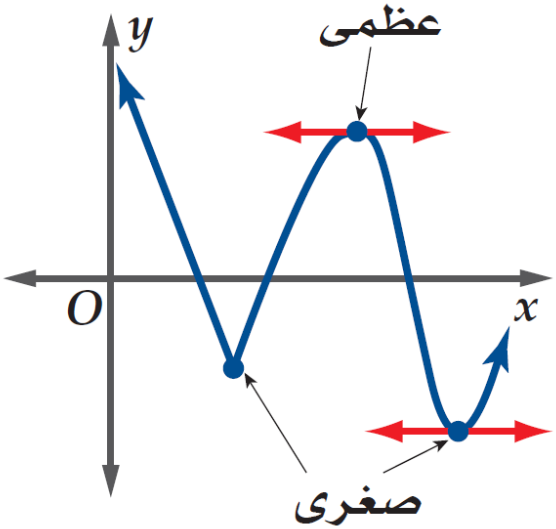
(1A



(1B



بينما يستعمل التمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة، ويمكن تعزيز ذلك عدديًّا، إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل لإثبات صحة هذه الخصائص.



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قيمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمى نقاطًا حرجة. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًّا أو عموديًّا (أي أن ميله صفر أو غير معرّف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (القيم القصوى).

مفهوم اساسي

القيم القصوى المحلية والمطلقة

التعبير اللفظي :

إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُميت قيمة عظمى محلية.

الرموز :

تكون f(a) قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.

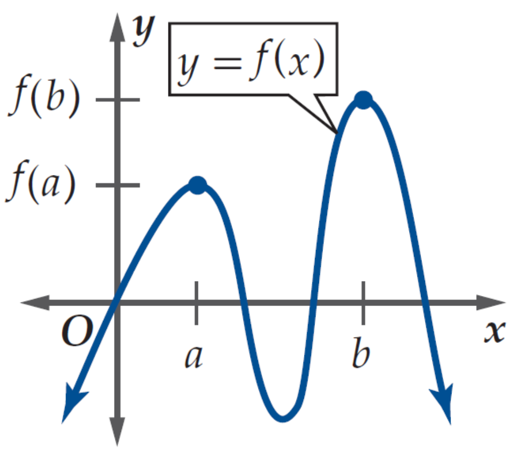
التعبير اللفظي :

إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُميت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز :

تكون f(b) قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

التعبير اللفظي :

إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُميت قيمة صغرى محلية.

الرموز :

تكون f(a) قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \le f(x)$.

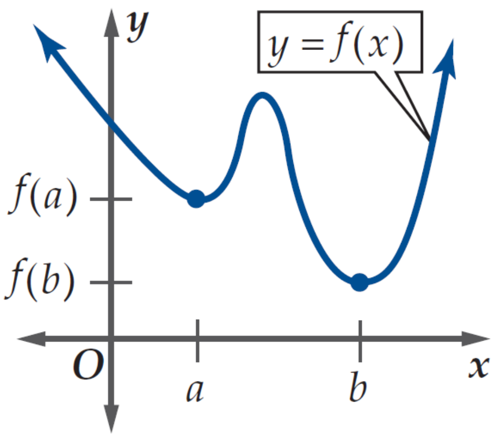
التعبير اللفظي :

: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُميت قيمة صغرى مطلقة.

الرموز :

تكون f(b) قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \le f(x)$.

النموذج:

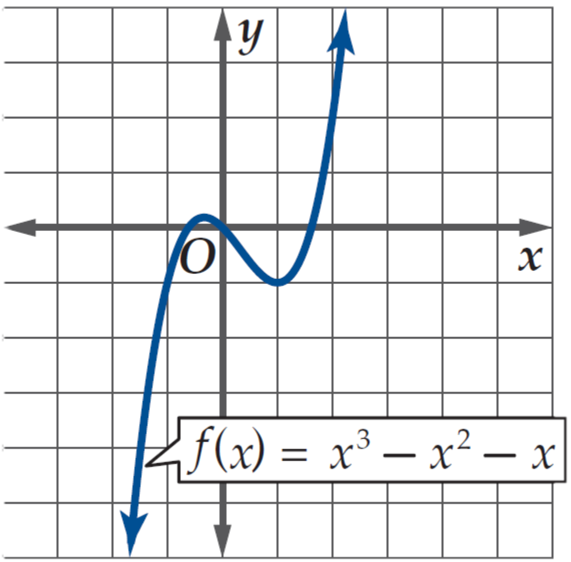


$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

مثال 2

تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها :



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة f(x) عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب ٠,٥ وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانياً :

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند x = -0.5، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند x = 1، ومقدارها 1 –. لاحظ كذلك أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ ، و عليه لا يوجد قيم قصوي مطلقة للدالة .

التعزيز عددياً :

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثم اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

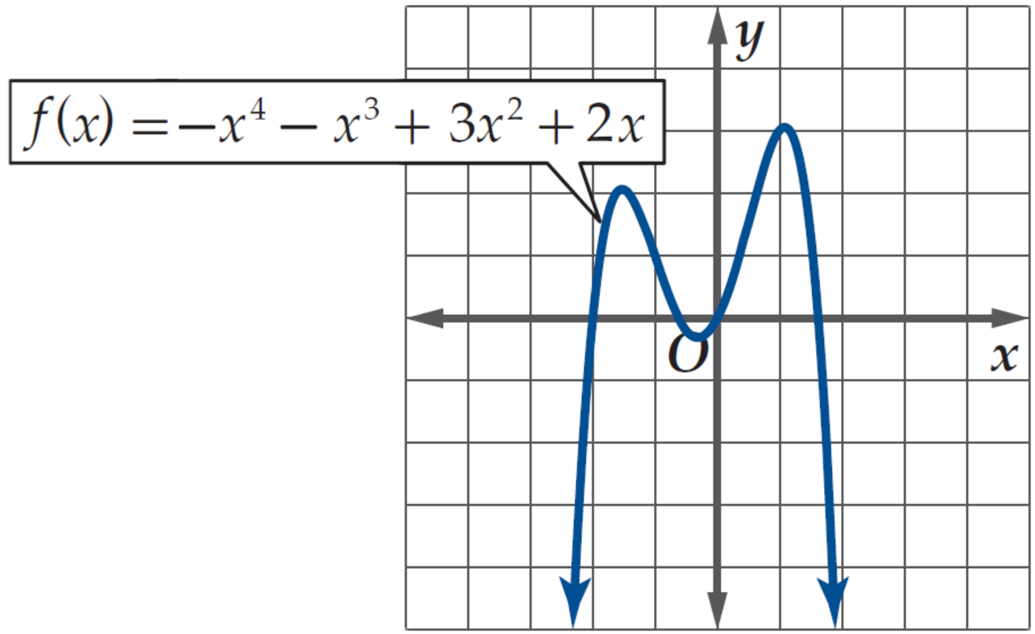
بما أن $f(-0.5) > f(-1), f(-0.5) > f(0)$ فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من 0.5- في الفترة (1, 0 -). وبما أن f(-0.5) = 0.13 فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يُعد معقولاً.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5), f(1) < f(0.5)$ ، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة (0.5, 1.5) وبما أن f(1) = - 1، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة 1 – يعد معقولاً.

بما أن $f(1) > f(-100), f(-0.5) > f(100)$ ، فهذا يعزّز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

تحقق من فهمك

(2A

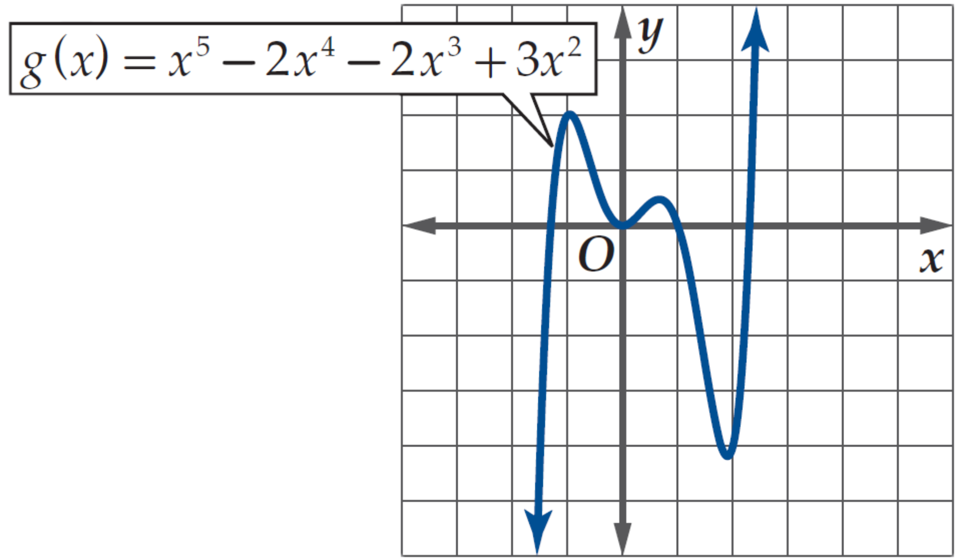


يوضح التمثيل البياني ان الدالة $f(x)$ قيمة عظمي محلية عند $x = -15$ و مقدارها 2 .

كما توجد قيمة صغري محلية عند $x = 0.5$ و مقدارها -0.3

و قيمة عظمي مطلقة عند $x = 1$ و مقدارها 3

(2B



يوضح التمثيل البياني ان الدالة $g(x)$ قيمة عظمي محلية عند $x=-1$ و مقدارها 2 .

وقيمة صغري محلية عند $x=0$ و مقدارها 0

و قيمة عظمي مطلقة عند $x=0.5$ و مقدارها 0.5

وقيمة صغري محلية عند $x=2$ و مقدارها -4

و سلوك طرفي التمثيل البياني يدل علي عدم وجود قيم قصوي مطلقة للدالة .

نحتاج إلى حساب التفاصيل لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، ونحتاج إليه أيضًا لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة والذي ستتم دراستها في الفصل الثامن (النهايات والاشتقاق). كما يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتحدي مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمتها.

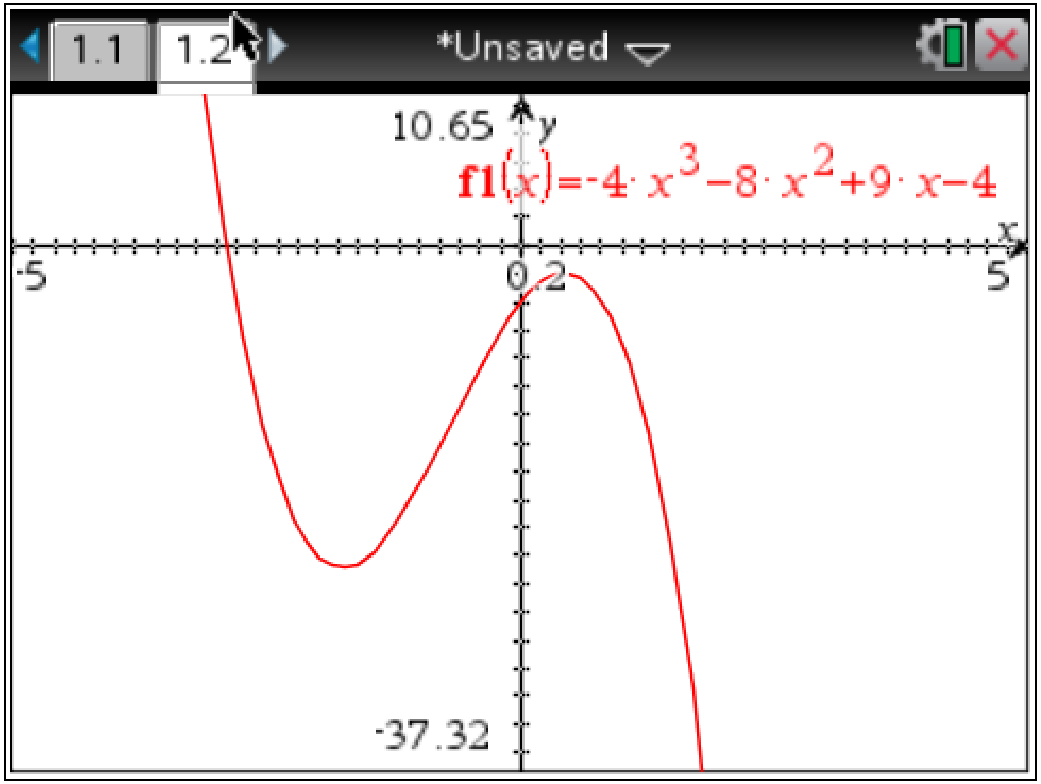
مثال 3

استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوي

الحاسبة البيانية : استعمل الحاسبة البيانية لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة

$f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربةً إلى أقرب جزء من مئة، وحدّد قيم **x** التي تكون عندها هذه القيم.

مثّل الدالة بيانيًّا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

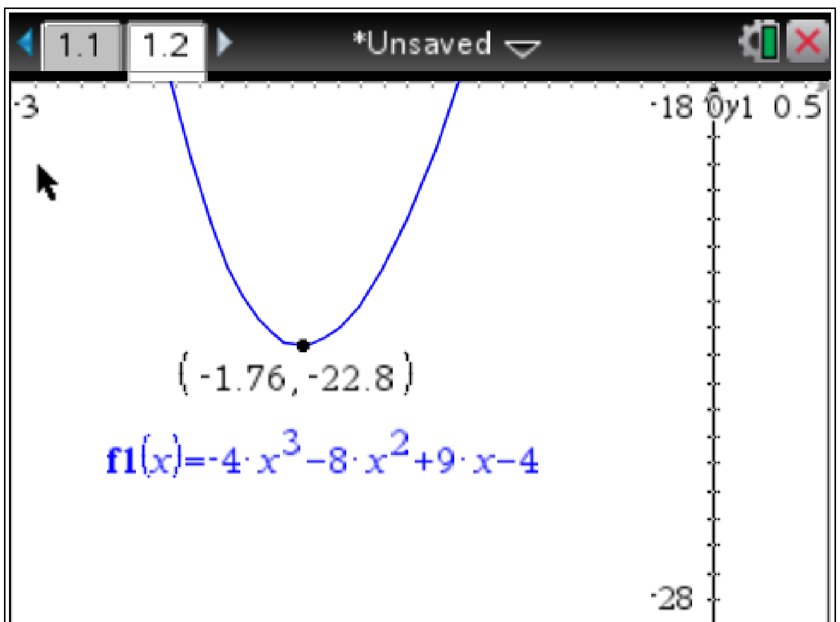


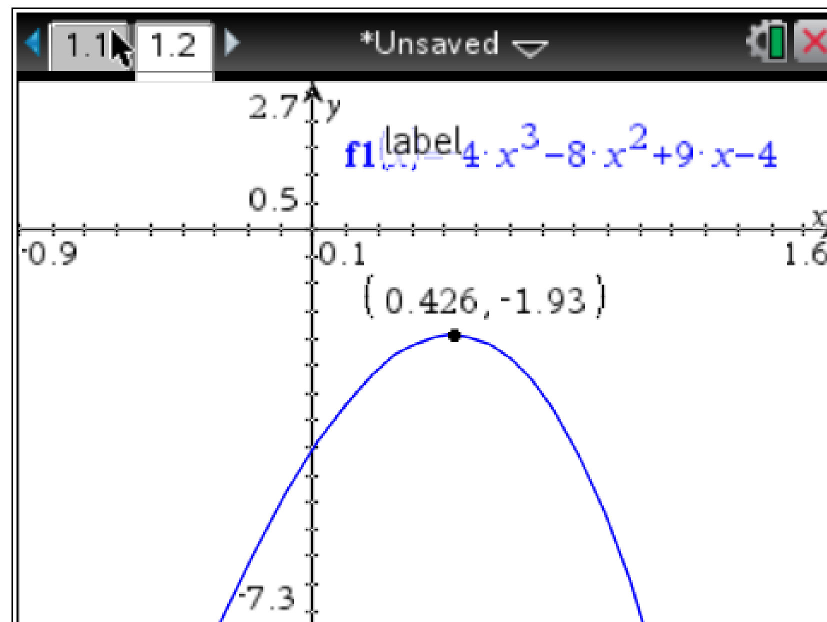
يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة (1- ,2-)، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة (0, 1)، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدل على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط المفاتيح menu ثم 6:Analyze Graph

و اختر منها 3:Maximum أو 2:Minimum

ثم مرّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ 22.81 - وتكون عند x = - 1.76، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ 1.93- وتكون عند x = 0.43.





تحقق من نفسك

(3A $h(x) = 7 - 5x - x^2$

قيمة عظمي مطلقة : $(-0.1, 5.06)$

(3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

قيمة عظمي محلية : $(-0.1, 5.06)$

قيمة صغري محلية : $(1.49, 1.24)$

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

مثال 4 من واقع الحياة

تطبيقات القيم القصوى

زراعة : يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة، فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين، فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة f(x) لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

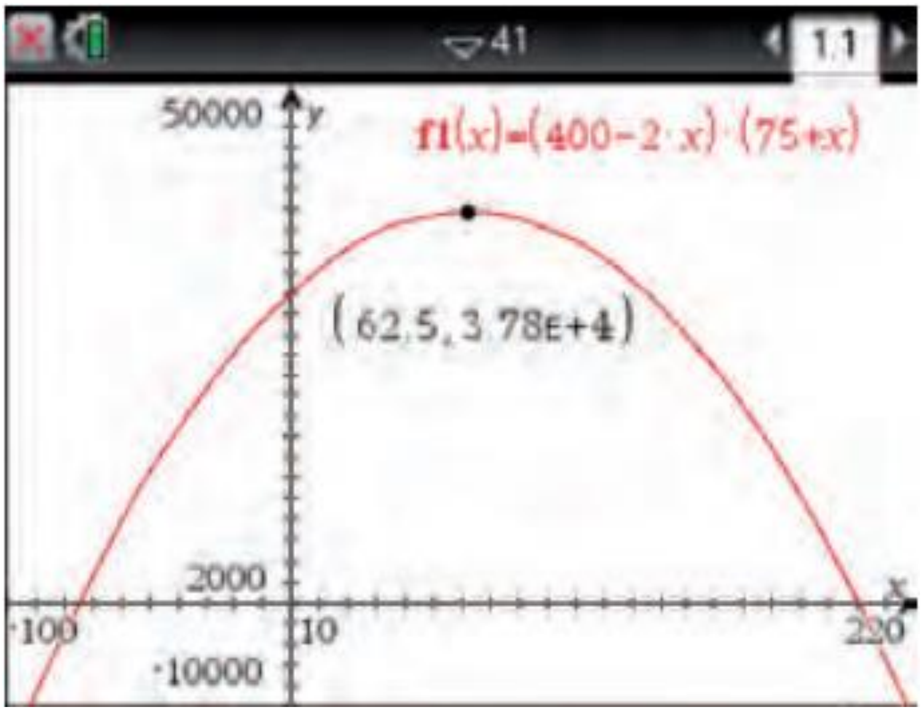
الانتاج الكلي للبستان = عدد الأشجار في البستان × إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال

$$f(x) = (400-2x) \times (400-2x)$$

المطلوب: هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة **f(x)**. لذا مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح

3:Maximum 6:Analyze Graph menu لإيجاد قيمة **x** التي يكون الدالة .

عندها قيمة عظمي .



يبين التمثيل وجود قيمة عظمي للدالة هي 37812.5

و تكون عند $x \approx 62.5$

؛ لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة ، و يكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريباً .

تحقق من فهمك

4) صناعة : يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi\, in^2$ أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

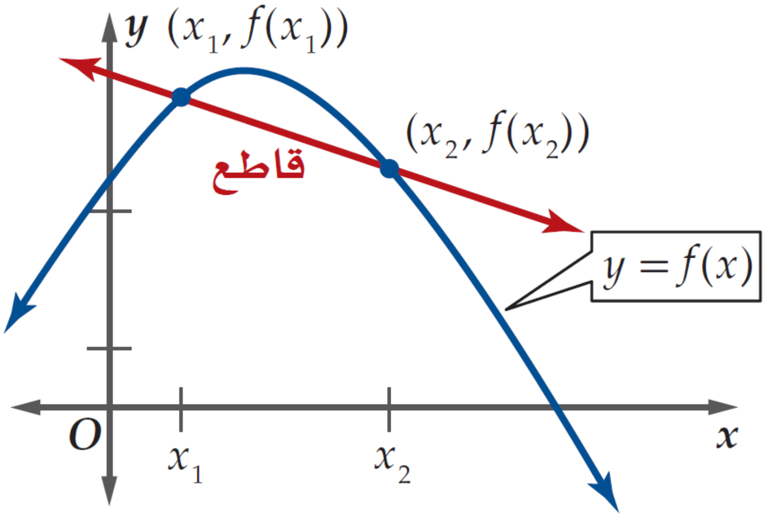
نصف القطر $\approx 1.83\, in$

الأرتفاع $\approx 1.83\, in$

متوسط معدل التغير :

تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا، إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

مفهوم أساسي **متوسط معدل التغير**



التعبير اللفظي :

متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسياً :

يُسمى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا،

ويرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}

الرموز :

متوسط معدل تغير الدالة f(x) في الفترة $[x_1, x_2]$

هو
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

إذا كان متوسط معدل التغير على فترة موجبا، ً فإن الدالة تكون متزايدة في المتوسط على الفترة. وأما إذا كان سالبا، فإن الدالة تكون متناقصة في المتوسط على الفترة

مثال 5

إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

(a $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$

بتعويض -1 مكان x_2 , -2 مكان x_1

$$= \frac{\left[-(-1)^3 + 3(-1)\right] - \left[-(-2)^3 + 3(-2)\right]}{-1 - (-2)}$$

بتعويض $f(-2), f(-1)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$

بالتبسيط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو 4 −.

(b $[0,1]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

بتعويض 1 مكان $0, x_2$ مكان x_1

$$=\frac{2-0}{1-0}=2$$

بتعويض $f(0), f(1)$ و بالتبسيط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة **f** في الفترة $[0,1]$ هو **2.**

تحقق من فهمك

(5A $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

6

(5B $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

-220

يُستعمل متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها السرعة المتوسطة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

مثال 6 من واقع الحياة

إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء : إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة d(t) = 16t2، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم. d(t) المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-x_1}=\frac{d(2)-d(0)}{2-0}$$

بتعويض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$=\frac{64-0}{2}=32$$

بتعويض $d(2), d(0)$ و بالتبسيط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32ft/s. وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسط في أول ثانيتين من السقوط هو **32ft/s** .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-x_1}=\frac{d(4)-d(2)}{4-2}$$

بتعويض 4 مكان t_2, 2 مكان t_1

$$=\frac{256-64}{2}=96\,ft/\sec$$

بتعويض $d(2), d(4)$ و بالتبسيط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96ft/s، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96ft/s.

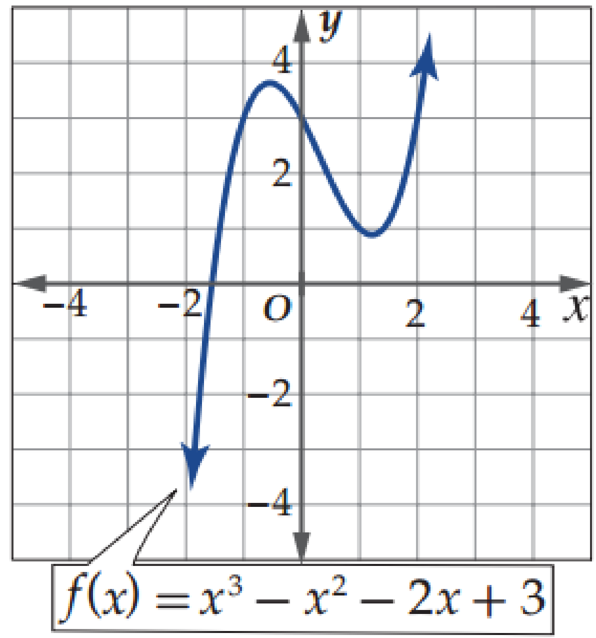
تحقق من فهمك

٦) فيزياء : قذف جسم إلى أعلى من ارتفاع ٤ ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يعطى بالدالة ، $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من ٠,٥ إلى ١ ثانية .

$4\,ft\,/\sec$ سرعة الجسم المتوسطة يتناقص في الفترة من 0.5 إلي 1 ثانية .

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزّز إجابتك عدديًّا: (مثال 1)

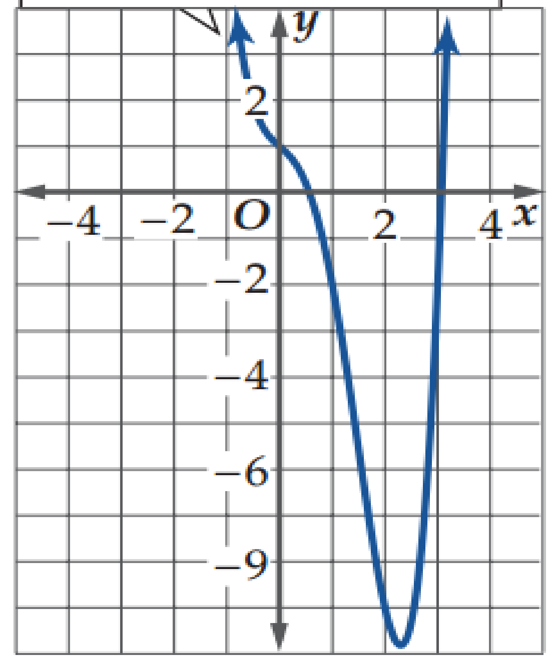
(1



f متزايدة في الفترة، $(-\infty, -0.5)$،
ومتناقصة في الفترة $(-0.5, 1)$،
ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

(2

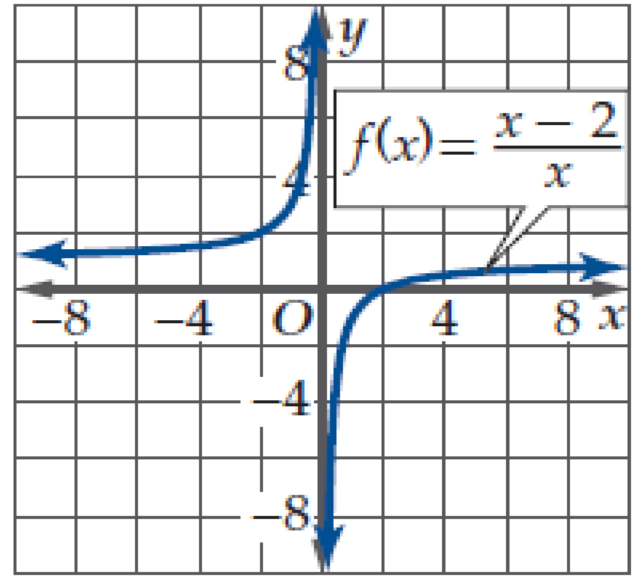
$f(x) = x^4 - 3x^3 - x + 1$



f متناقصة في الفترة، $(-\infty, 2.5)$،

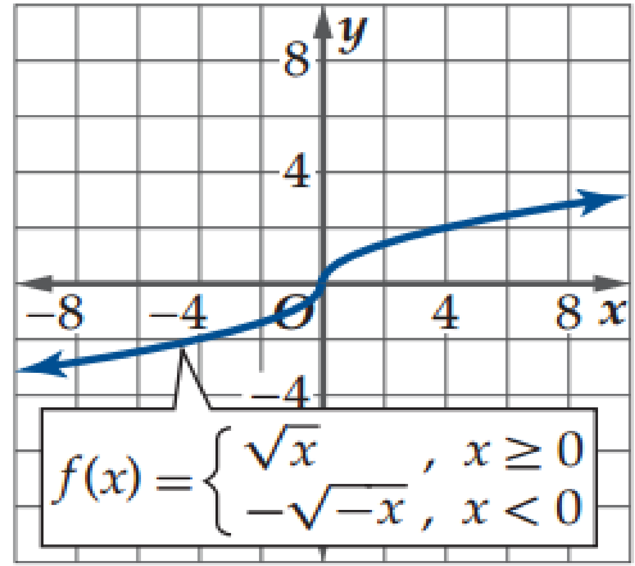
ومتزايدة في الفترة $(2.5, \infty)$.

(3



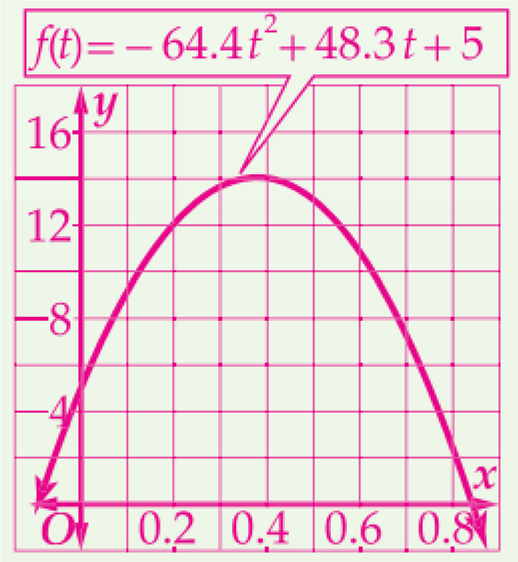
f متزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

(4



f متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

5) كرة سلة: يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t) = -64.4t^2 + 48.3t + 5$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. **(مثال 2)**



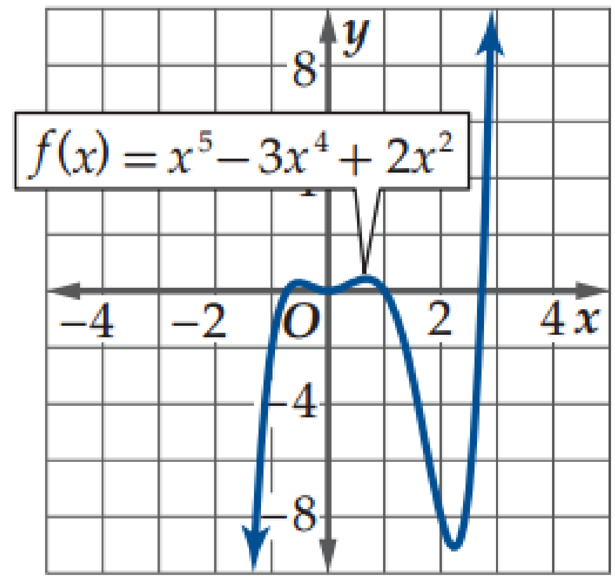
a) مَثِّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًّا.

14 ft

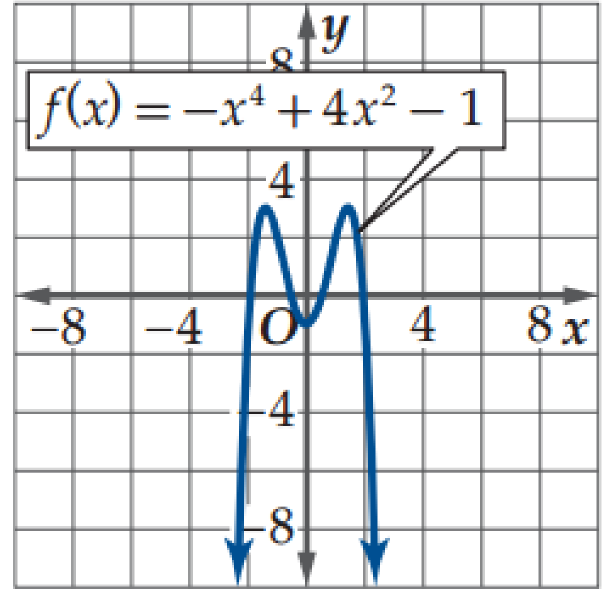
قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًا. (مثال 2)

6)



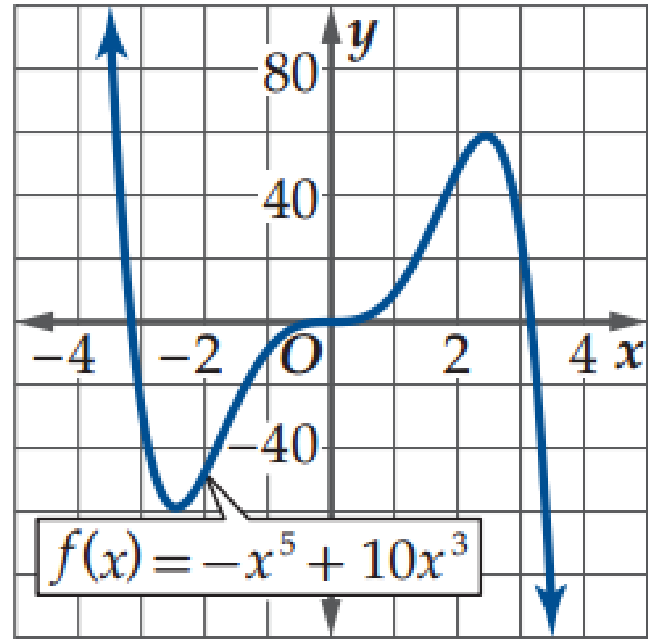
يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0.25 عند $x = -0.5$ و 0.5، وقيمة صغرى محلية مقدارها -9 عند $x = 2.5$، ولها قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ ومقدارها 0.

(7



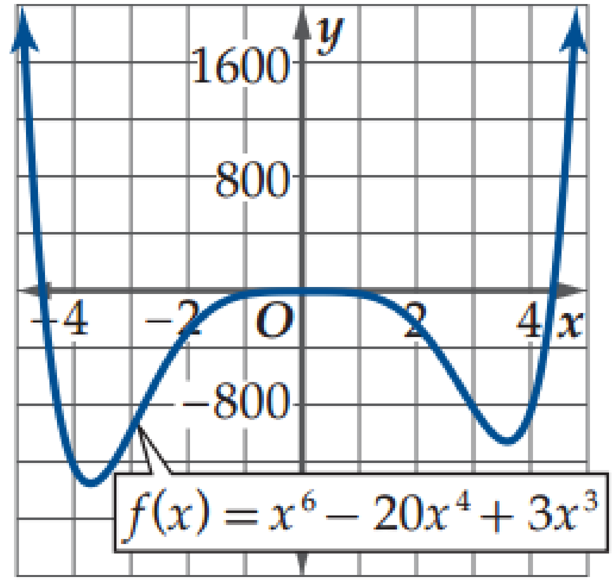
واضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 3 عند $x = -1.5 , 1.5$ ، ولها قيمة صغرى محلية مقدارها -1 عند $x = 0$.

(8



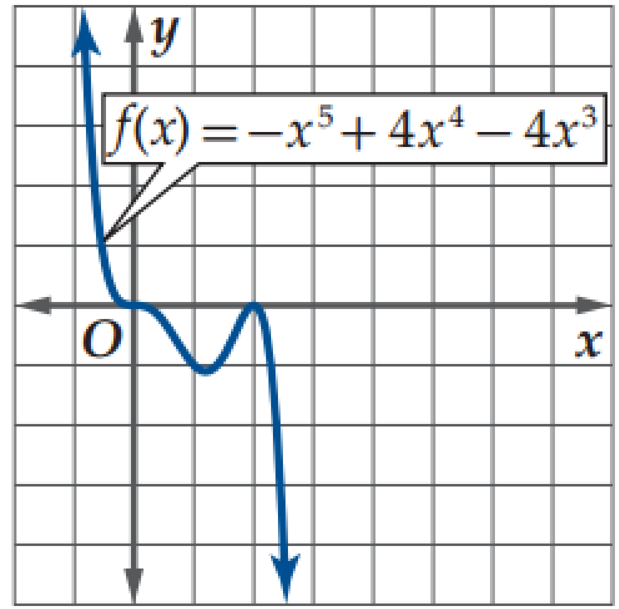
يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -60 عند $x = -2.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 60 عند $x = 2.5$.

(9



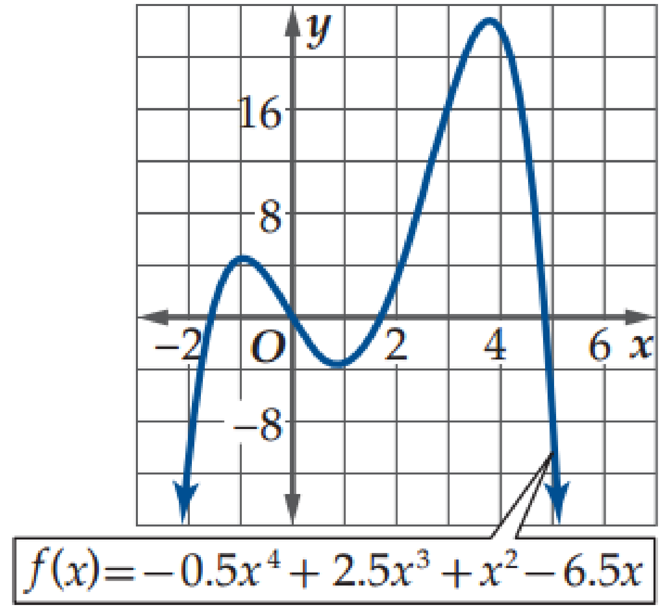
يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1100 عند $x = 3.5$، ولها قيمة صغرى مطلقة مقدارها -1300 عند $x = -3.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$.

(10



يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 2$.

(11



يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -4 عند $x = 1$ ، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 4 عند $x = -1$ ، ولها قيمة عظمى مطلقة مقدارها 22 عند $x = 4$.

الحاسبة البيانية : أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)

12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

عظمى محلية عند $(1.08, 0.04)$؛ وصغرى محلية عند $(-1.08, -10.04)$.

13) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

صغرى مطلقة عند $(-1.38, -7.08)$.

14) $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

عظمى محلية عند $(1.11, 2.12)$؛ صغرى محلية عند $(-0.17, -1.08)$.

15) $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$

عظمى محلية عند $(0.41, 0.30)$؛ صغرى محلية عند $(1.62, -7.85)$؛ صغرى مطلقة عند $(-1.64, -11.12)$.

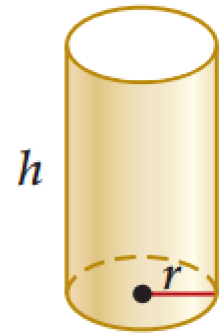
16) $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$

عظمى محلية عند $(-3.72, 14.23)$، $(2.49, 1.45)$؛
صغرى محلية عند $(5.90, -6.83)$، $(0.32, -0.11)$.

17) $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

عظمى محلية عند $(-1.66, 3.43)$؛ صغرى محلية عند $(0.93, -3.82)$.

18) هندسة : أوجد كلاً من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة) . (مثال) ٤



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
تساوي 20.5π بوصة مربعة

نصف القطر = 2.6 بوصة، الارتفاع = 2.6 بوصة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة.   (مثال 5)

19) $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$ 28

20) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$ 4430

21) $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$ −309

22) $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9, [3, 6]$ −2550

23) $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$ 0.05

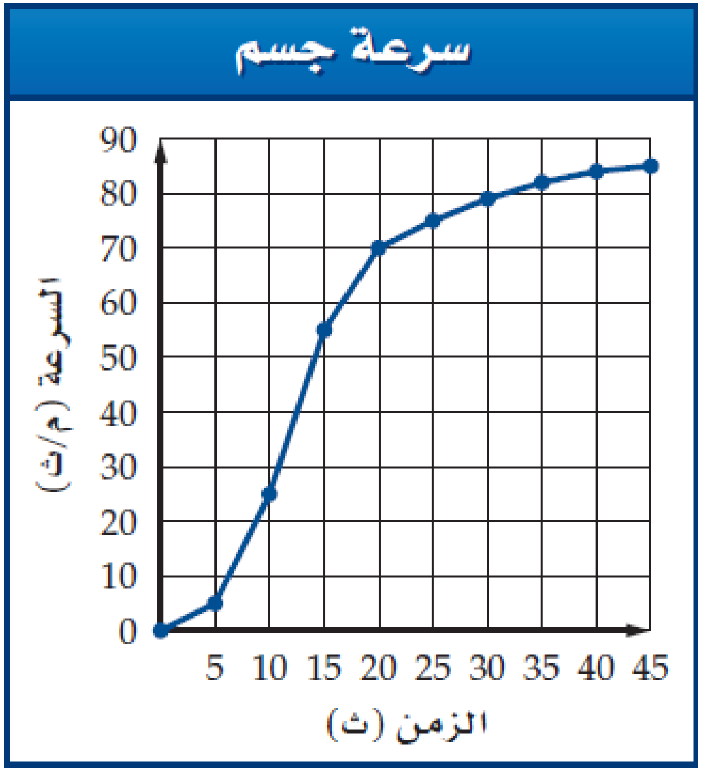
24) $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$ 0.183

25) **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة:
$f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$ ، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر يناير، فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك. **(مثال 6)**

a) من أبريل إلى مايو. 2.18

b) من يوليو إلى أكتوبر. −2.18

26) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات [5, 15] , [15, 20] , [25, 45].

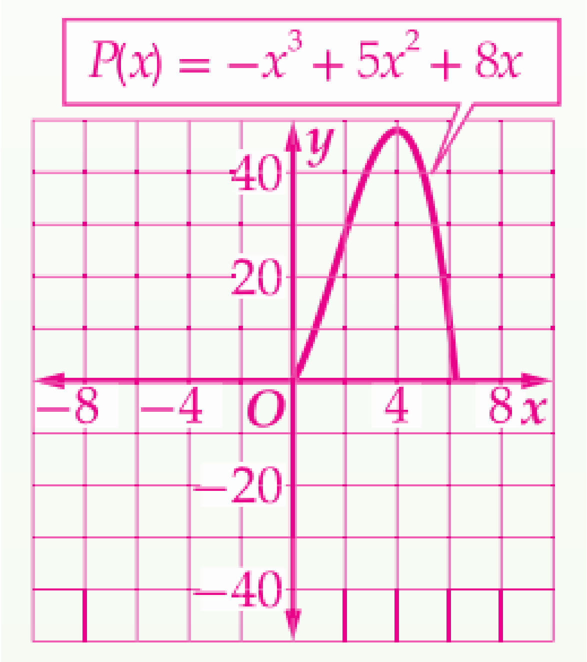
5 3 0.5

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية.

تتزايد سرعة الجسم أو يتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأكبر معدّل تسارع للجسم في الفترة [5, 15].
ويبطئ التسارع في الفترة [25, 45]، لكن تبقى سرعة الجسم في تزايد .

27) تكنولوجيا: تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$ ، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \leq x \leq 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.



b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

400 ريال.

c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

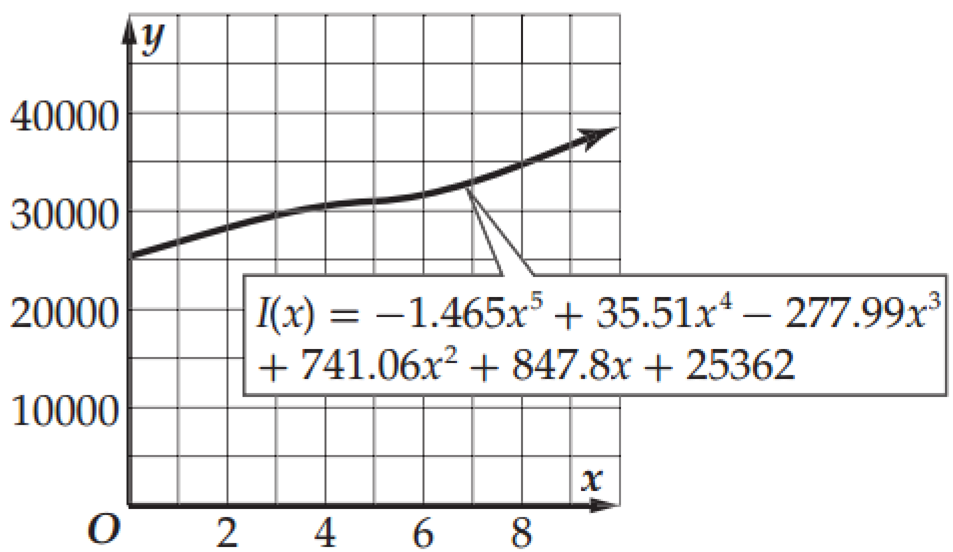
48 ريالًا.

28) **دخل:** افترض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1420هـ وحتى عام 1430 هـ يعطى بالدالة:

$$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362,\ 0 \le x \le 10$$

حيث x رقم السنة.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.



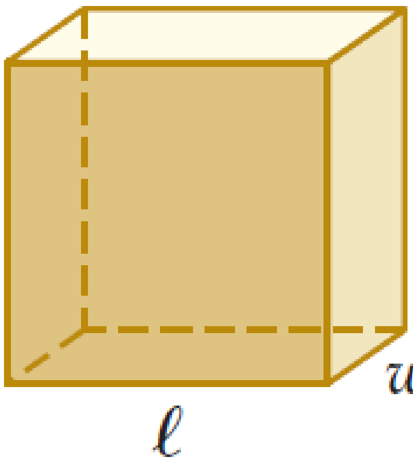
b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1423 إلى عام 1430 هـ . وماذا تعني قيمة متوسط معدل التغير في هذه الفترة؟

1280.93 ريالًا؛ إجابة ممكنة : متوسط معدّل التغير في دخل الفرد من عام 1423 إلى عام 1430 لهذا الشخص 1280.90 ريالًا.

c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

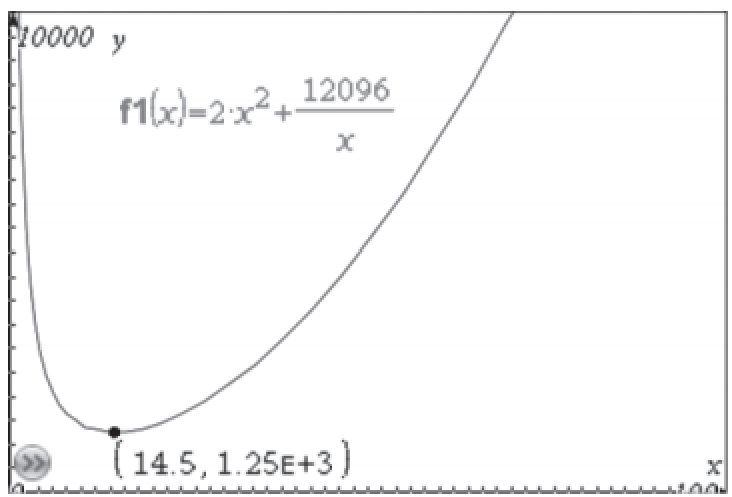
متوسط التغير أقل ما يمكن في الفترة من عام 1420 إلى عام 1424 ومقداره 826.43 ريالًا، وكان أعلى ما يمكن في الفترة من عام 1423 إلى عام 1427 ومقداره 1711.44 ريالًا.

29) **صندوق:** يرغب سالم في عمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. وضِّح إجابتك.



$14.5 \text{ ft} \times 14.5 \text{ ft} \times 14.5 \text{ ft}$؛ إجابة ممكنة: الدالة التي تعطي مساحة السطح الخارجي للصندوق بدلالة طول ضلع القاعدة هي

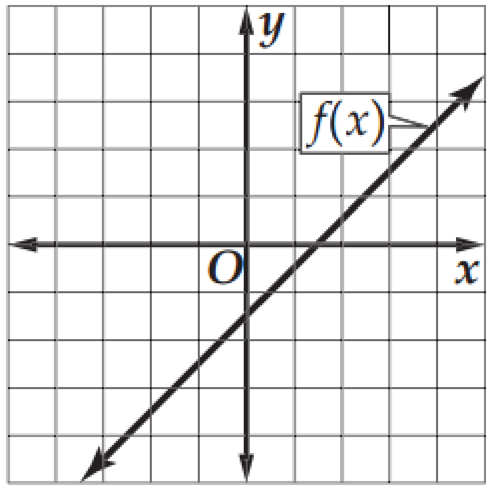
$f(w) = 2w^2 + \dfrac{12.096}{w}$. يظهر تمثيل الدالة أن القيمة الصغرى المطلقة تكون عندما $w = 14.5$ ft.



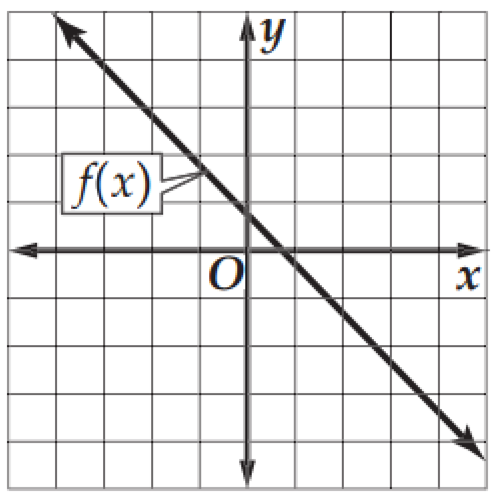
مثّل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

إجابة ممكنة:

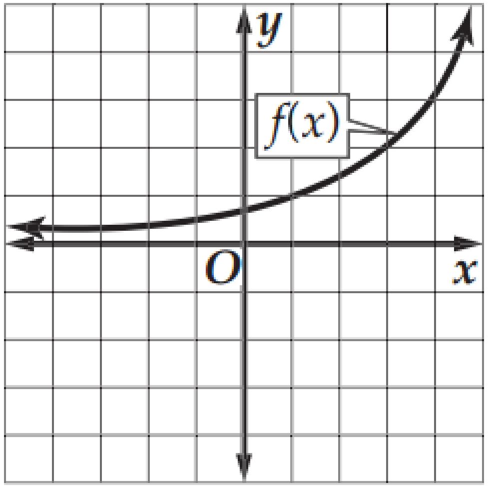
30) $f(x)$ متصلة ومتزايدة.



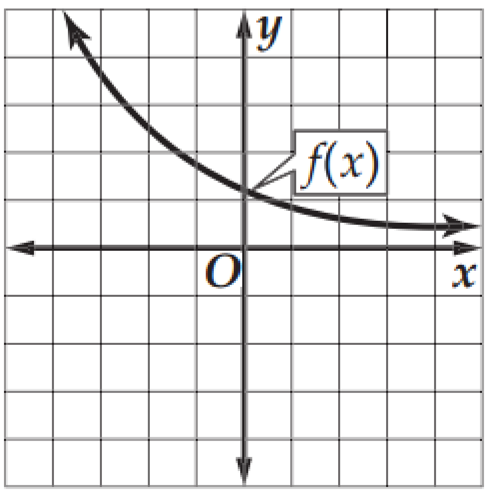
31) $f(x)$ متصلة ومتناقصة.



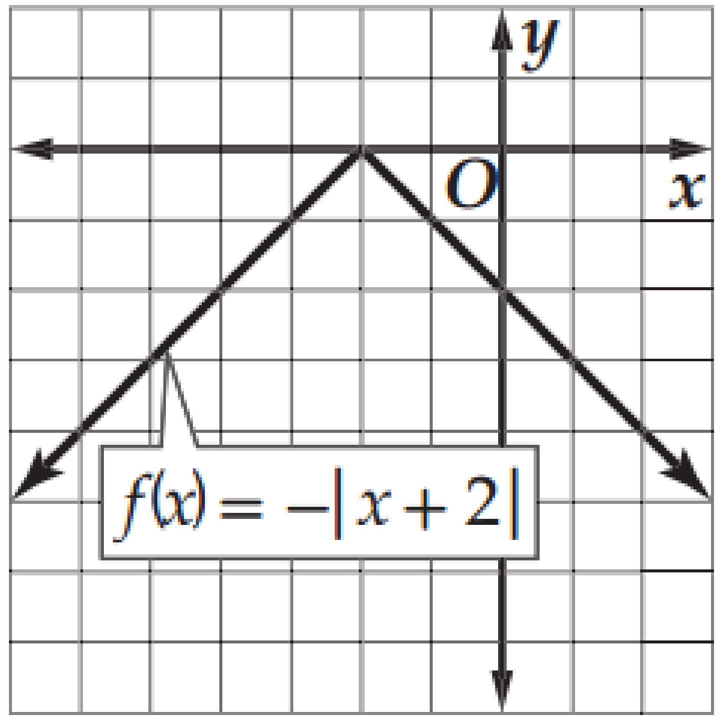
(32 $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.



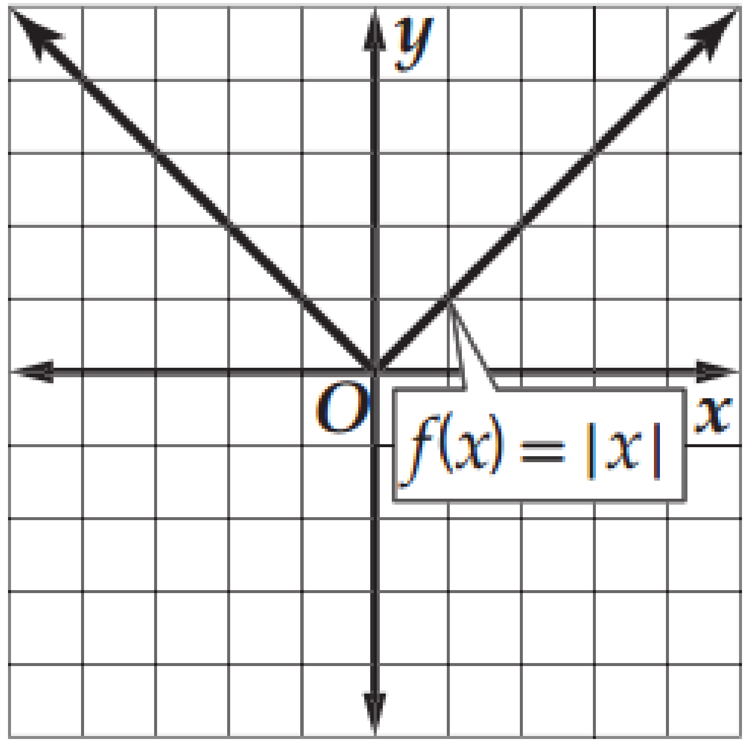
(33 $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.



34) $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$ ، و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.



35) $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.



الحاسبة البيانية : حدّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبيِّن نوعها:

36) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ $(3, 5)$ ، صغرى

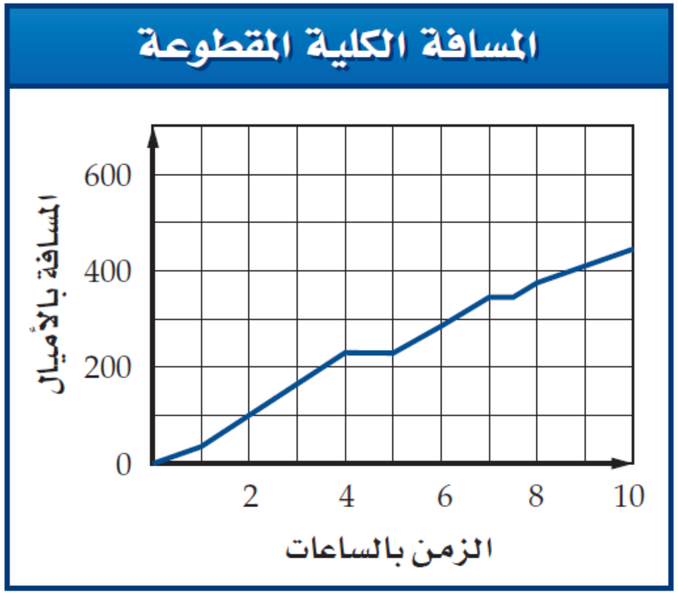
37) $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$ $(-5, -1)$ ، عظمى

38) $f(x) = -4|x-22| + 65$ $(22, 65)$ ، عظمى

39) $f(x) = (36-x^2)^{0.5}$ $(0, 6)$ ، عظمى

40) $f(x) = x^3 + x$ لا توجد قيم قصوى

41) **سفر:** قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعها في إحدى الرحلات ومثّلها بيانيًّا. أعطِ أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟



إجابة ممكنة: أحد أسباب الاختلاف في متوسط معدّل التغير هو أن عبدالله قد واجهته إشارات ضوئية في أثناء مسيره، مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة، وسبب آخر أنه سلك طرقًا فرعية في الساعة الأولى من الرحلة قبل أن يدخل طريقًا سريعًا في الساعات الثلاث اللاحقة. الفترتان اللتان يبدو فيهما أنه لم يتحرك قد تكونان فترتي استراحة أو لتناول الطعام، وربما كان سبب التوقف وجود حادث أدى إلى توقف حركة السير.