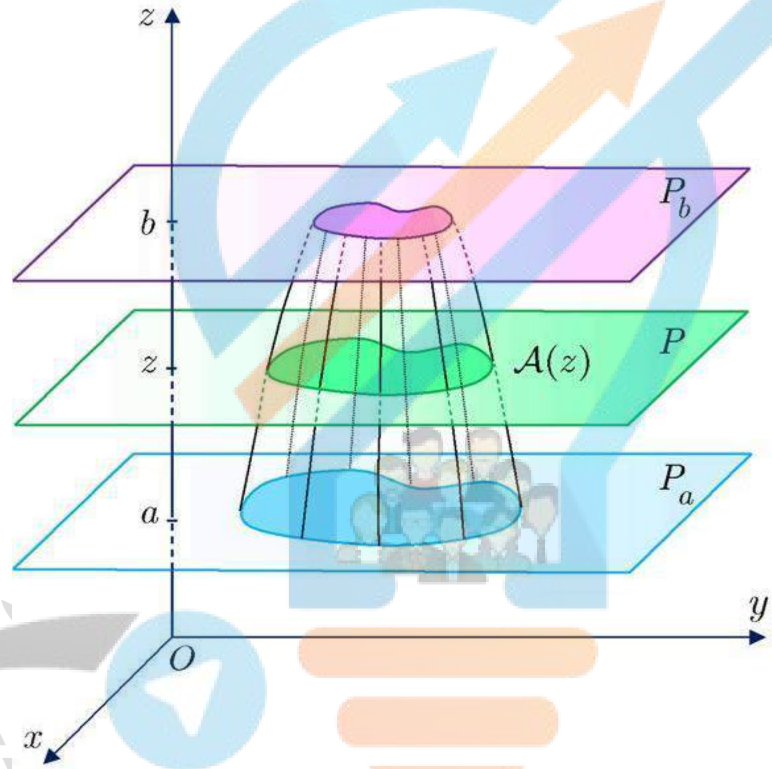
اختبارات الرياضيات

لطلاب الثالث الثانوي العلمي



منهاج جديد / اختبار كل وحدة

مع الحلول

الثالث الثانوي العلمي

إعداد : أيهم الشاعر

الجزء الأول	اختبار وحدة المتتاليات	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي		الدرجة : 300

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \frac{4n+1}{2}$ والمطلوب:

1) برهن أن المتتالية حسابية ، عيّن أساسها وحدها الأول.

2) احسب المجموع $u_1 + u_2 + ... + u_{50}$.

3) هل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة ؟ برر إجابتك.

التمرين الثاني: لتكن المتتالية المعرّفة بالعلاقة التدريجية $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$ والمطلوب:

1) أوجد الحدود u_1, u_2, u_3, u_4 ، ثم خمّن عبارة u_n بدلالة n.

2) أوجد الحد العام للمتتالية u_n بدلالة n أياً كان العدد الطبيعي n .

التمرين الثالث: $(u_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرّفة بالتدريج وفق $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ والمطلوب:

1) احسب u_1, u_2, u_3 ثم استنتج أن المتتالية u_n ليست هندسية وليست حسابية.

2) أثبت أن $0 < u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n .

3) نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - 3$ والمطلوب:

i) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية ، عيّن حدها الأول وأساسها.

ii) اكتب الحد العام لـ v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n،

iii) احسب المجموع S حيث : $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، ثم استنتج المجموع $S' = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الأول	حل اختبار	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	وحدة المتتاليات	الدرجة : 300

التمرين الأول:

1) لدينا $u_{n+1}=\frac{4n+5}{2}$, $u_n=\frac{4n+1}{2}$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n=\frac{4n+5}{2}-\frac{4n+1}{2}=2$

أي أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$.

2) وجدنا $u_1=\frac{5}{2},u_{50}=\frac{201}{2}$ فيكون المجموع $u_1+u_2+...+u_{50}=n.\frac{a+\ell}{2}=(50).\frac{\frac{5}{2}+\frac{201}{2}}{2}=2575$.

3) المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ ليست متقاربة (متباعدة) لأن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$.

التمرين الثاني:

1) نوجد الحدود: $u_4=\frac{16}{17}$, $u_3=\frac{8}{9}$, $u_2=\frac{4}{5}$, $u_1=\frac{2}{3}$, $u_0=\frac{1}{2}$

نلاحظ أن البسوط عبارة عن متتالية هندسية حدها الأول (1) وأساسها (2) فيمكن تخمين البسط بالشكل 2^n أما المقامات فهي تزيد بسوطها بمقدار (1) فيمكن تخمين المقام بالشكل 2^n+1

وبالتالي أصبح تخمين الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ بالشكل: $u_n=\frac{2^n}{2^n+1}$

2) نثبت بالتدريج أن الحد العام للمتتالية u_n بدلالة n هو $u_n=\frac{2^n}{2^n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n :

- ✓ نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$: $u_0=\frac{2^0}{2^0+1}=\frac{1}{2}$ والعلاقة صحيحة من أجل $n=0$.
- ✓ نفرض صحة العلاقة من أجل n: $u_n=\frac{2^n}{2^n+1}$ صحيحة.
- ✓ نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}$؟

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n+1}=\frac{2\left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)}{\frac{2^n}{2^n+1}+1}=\frac{\frac{2.2^n}{2^n+1}}{\frac{2^n+2^n+1}{2^n+1}}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}$$

والعلاقة صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

التمرين الثالث:

1) نوجد الحدود: $c=u_3=\frac{80}{27}$, $b=u_2=\frac{26}{9}$, $a=u_1=\frac{8}{3}$ ثلاث حدود متوالية.

نجد أن: $a+c=\frac{8}{3}+\frac{80}{27}=\frac{152}{27}\neq 2b=\frac{52}{9}$ أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ليست حسابية.

و $ac=\frac{8}{3}.\frac{80}{27}=\frac{640}{81}\neq b^2=\frac{676}{81}$ أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ليست هندسية.

2) نثبت أن $0<u_n\leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

- ✓ نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$: $0<u_0\leq 3$ صحيحة.
- ✓ نفرض صحة العلاقة من أجل n: $0<u_n\leq 3$ صحيحة.
- ✓ نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $0<u_{n+1}\leq 3$ صحيحة؟

$$0<u_n\leq 3\Rightarrow 0<\frac{1}{3}u_n\leq 1\Rightarrow 0<2<\frac{1}{3}u_n+2\leq 3\Rightarrow 0<u_{n+1}\leq 3$$

والعلاقة صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

3) i) لدينا $v_n=u_n-3$ و $v_{n+1}=u_{n+1}-3$ وبالتالي:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n \quad \text{أي أن} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{3}$$

وبالتالي المتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0-3=2-3=-1$.

ii) وبالتالي نجد $v_n=\frac{-1}{3^n}$ ومنه $u_n=v_n+3=3-\frac{1}{3^n}$.

iii) نجد بسهولة المجموع $S=a.\frac{1-q^n}{1-q}=-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

$$S'=u_0+u_1+...+u_n=v_0+3+v_1+3+...+v_n+3=(v_0+v_1+...+v_n)+3(n+1)$$

وبالتالي $S'=-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+3(n+1)$

بالتوفيق للجميع	انتهى الحل	أيهم الشاعر

الجزء الأول	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التوابع: النهايات والاستمرار	الدرجة : 300

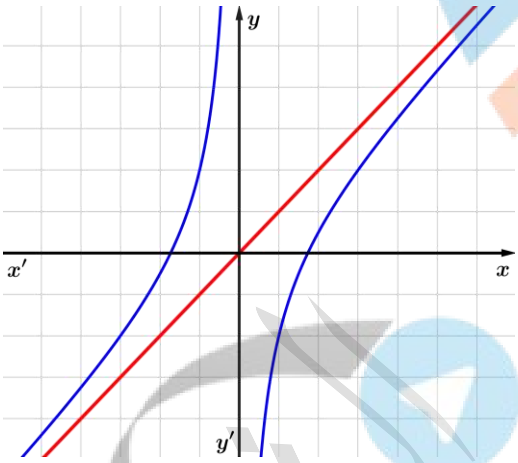
التمرين الأول: حل التمرينات التالية:

1) أوجد كل من النهايتين: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x\sin x}$

2) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة: $f(x)=\dfrac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$ أثبت أن منصف الربع الأول هو مقارب للخط C في جوار $\pm\infty$

3) ليكن التابع: $f(x)=\begin{cases}-x+2A : x\le 0\\ \dfrac{\sin 2x}{x}+A : x>0\end{cases}$ المعرّف على $\mathbb{R}$، عيّن A ليكون التابع f مستمر على $\mathbb{R}$.

4) أوجد معادلة المستقيم Δ المقارب للخط البياني للتابع $f(x)=\sqrt{1+4x^2}$ في جوار $-\infty$.



التمرين الثاني: الشكل المجاور هو C الخط البياني للتابع f والمطلوب:

1) أوجد مجموعة تعريف التابع f.

2) أوجد النهايات ثم نظم جدول تغيرات التابع.

3) حدد مقاربات الخط C.

4) ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة للمقارب المائل.

التمرين الثالث: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث a,b أعداد حقيقية والمطلوب:

I) عيّن a,b إذا علمت أن الخط C يمر بالنقطتين: $A(-1,0),B(3,8)$.

II) إذا علمت أن $a=1,b=2$:

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثم دل على المقارب الشاقولي.

2) أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط C في جوار $\pm\infty$، وادرس وضعه النسبي.

3) أثبت أن للمعادلة $f(x)+2=0$ حلين وفقط حلين حقيقيين.

4) ارسم مقاربات C ثم ارسم C.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الأول	حل اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التوابع: النهايات والاستمرار	الدرجة : 300

التمرين الأول:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x\sin x}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-4\cos^3 x+3\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x\,(1-\cos^2 x)}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x.\sin^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x.\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{2x}=4$$

$$or\quad=\lim_{x\to 0}4\cos x.\frac{\sin x}{x}=4(1)(1)=4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}.\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}.\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3}.\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}=\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_{\Delta})=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-4\cos x}{x^2}$$

$$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 4\ge -4\cos x\ge -4\Rightarrow 8\ge 4-4\cos x\ge 0\Rightarrow\frac{8}{x^2}\ge\frac{4-4\cos x}{x^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x^2}\ge\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-4\cos x}{x^2}\ge 0\Rightarrow 0\ge\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-4\cos x}{x^2}\ge 0\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-4\cos x}{x^2}=0$$

وبالتالي $\Delta: y=x$ (منصف الربع الأول) هو مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$.

3) $$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Rightarrow\begin{cases}f(0)=2A\\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\sin 2x}{2x}+A\right)=2+A\end{cases}\Rightarrow 2A=2+A\Rightarrow A=2$$

4) $$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}\right)=-2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)}{\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)}=0$$

وبالتالي $y=-2x$ هو مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

التمرين الثاني:

1) $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) $x=0$ مقارب منطبق على yy' في جوار $\pm\infty$ ، $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

4) على المجال $]-\infty,0[$: C فوق المقارب ، على المجال $]0,+\infty[$: C تحت المقارب ،

التمرين الثالث:

$(I$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=0\Rightarrow\dfrac{a-b+1}{-2}=0\Rightarrow a-b=-2 \\ f(3)=8\Rightarrow\dfrac{9a+3b+1}{2}=8\Rightarrow 3a+b=5 \end{array}\right\}\Rightarrow a=1,b=2$$

$(II$ 1) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

فيكون $x=1$ مقارب شاقولي يوازي xx' في جوار $\pm\infty$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}\quad,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=-1,x=3\Rightarrow f(-1)=0,f(3)=8$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

2) يمكن كتابة التابع بالشكل $f(x)=x+3+\dfrac{4}{x-1}$ فيكون المقارب $y=x+3$ لأن:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)=0$$

3) $-2\in f(]-\infty,-1])=]-\infty,0]$ والتابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,-1]$ وبالتالي للمعادلة $f(x)=-2$ ، وبالتالي للمعادلة حل وحيد على هذا المجال.

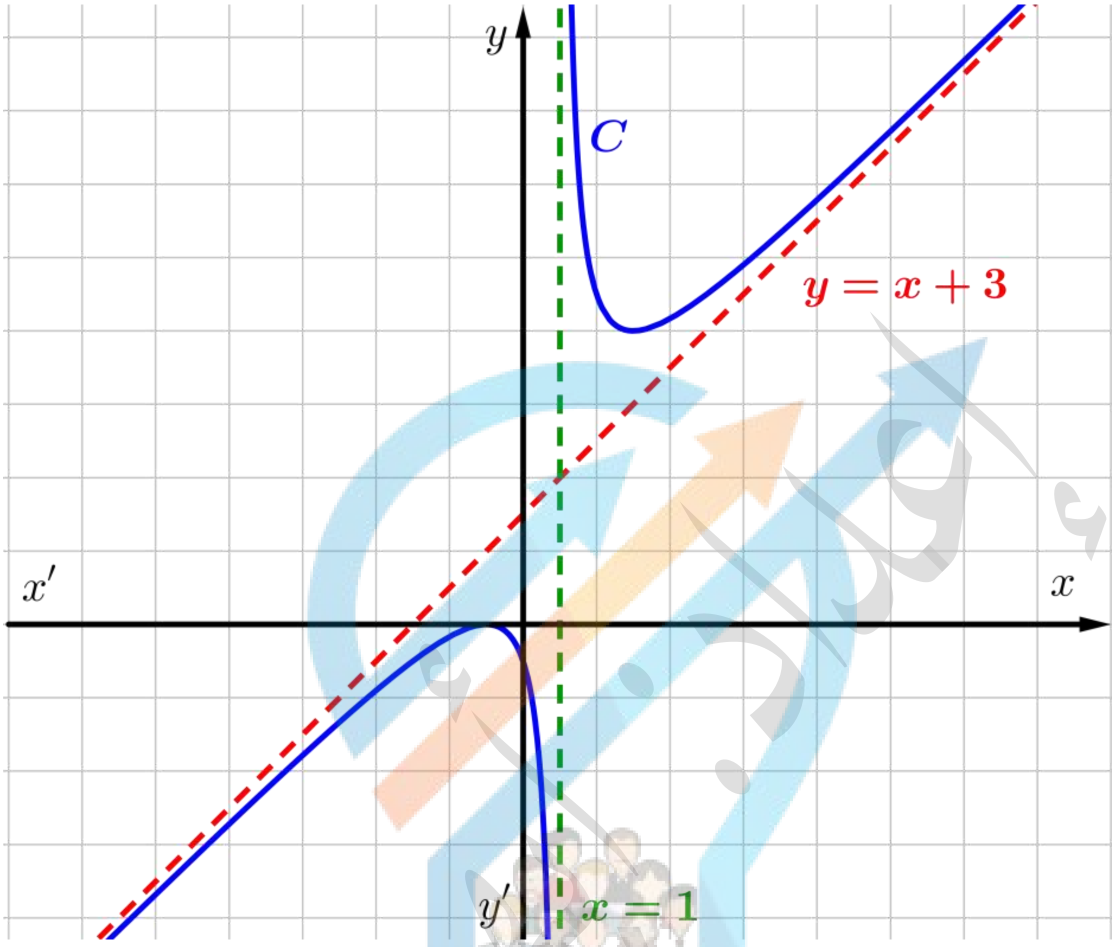
$-2\in f([-1,1[)=]-\infty,0]$ والتابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[-1,1[$ وبالتالي للمعادلة $f(x)=-2$ ، وبالتالي للمعادلة حل وحيد على هذا المجال.

$-2\notin f(]1,3])=[8,+\infty[$ وبالتالي ليس للمعادلة حل على هذا المجال.

$-2\notin f([3,+\infty[)=[8,+\infty[$ وبالتالي ليس للمعادلة حل على هذا المجال.

ومنه نجد أن للمعادلة $f(x)+2=0$ حلين وفقط حلين حقيقيين.

4) الرسم:



أيهم الشاعر	**انتهى الحل**	**بالتوفيق للجميع**

الجزء الأول	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التوابع ، الاشتقاق	الدرجة : 300

<u>حل المسألة التالية:</u>

❶ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ بالعلاقة: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ والمطلوب:

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، محدداً المقاربات والقيم الحديّة.

② عيّن الأعداد الحقيقية a,b,c التي تحقق: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

③ أوجد معادلة المقارب للخط C في جوار $\pm\infty$ ، وادرس وضعه النسبي.

④ أثبت أن $I(1,2)$ مركز تناظر للخط البياني.

⑤ ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

⑥ حدد هندسياً عدد حلول المعادلة $x^2-mx+m=0$

⑦ أثبت أنه مهما تكن $n\geq 2$ فإن: $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$

❷ نعرّف التابع $g(x)=f'(x)$ خطه البياني C' ، والمطلوب:

① أثبت أن C' يقبل مقاربين أحدهما شاقولي والآخر أفقي.

② اكتب معادلة المماس d' للخط C' في نقطة منه فاصلتها 2.

❸ نعرّف التابع $h(x)=f(\cos x)$ خطه البياني C_1 ، والمطلوب:

① أوجد مجموعة تعريفه ، وأثبت أنه دوري ودوره 2π ، وزوجي.

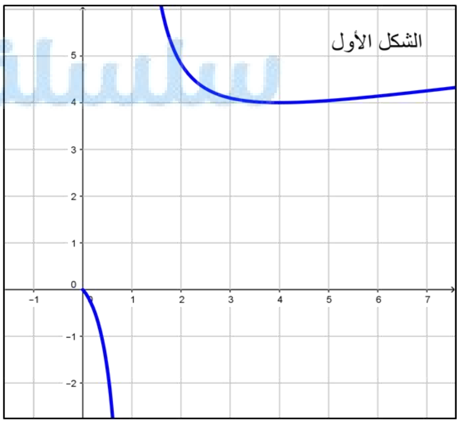
② نظّم جدولاً بتغيرات h على المجال $]0,\pi[$.

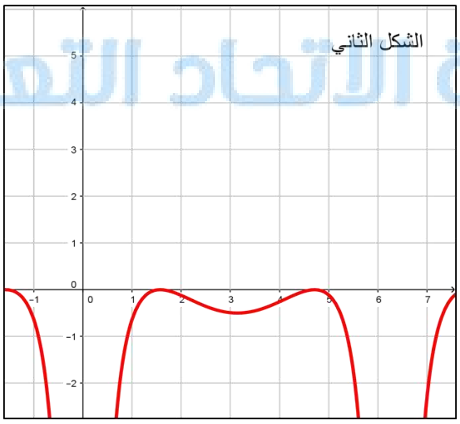
❹ نعرّف التابع $k(x)=f(\sqrt{x})$ خطه البياني C_2 والمطلوب:

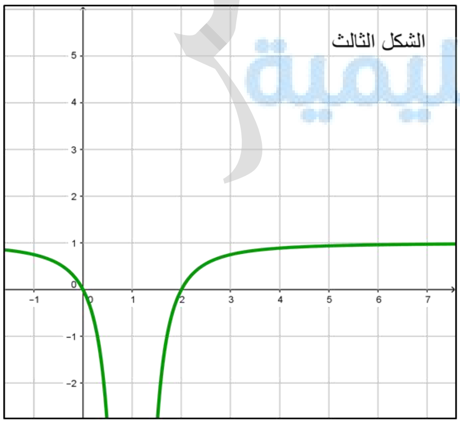
① هل k اشتقاقي عند الصفر .

② احسب قيمة تقريبية للمقدار $k(9,3)$.

❺ الأشكال التالية تمثل الخطوط البيانية للتوابع: g,h,k دل على الخط البياني لكل تابع <u>مع التعليل</u>


الشكل الأول


الشكل الثاني


الشكل الثالث

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الأول	حل اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التوابع ، الاشتقاق	الدرجة : 300

1 ① التابع معرّف ومستمر واشتقاقي على كل من المجالين $]1,+\infty[\,,\,]-\infty,1[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

وبالتالي $x=1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $\pm\infty$.

$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ ومنه $f'(x)=0$ إذا كان $\left.\begin{matrix}x=0\\x=2\end{matrix}\right\}$ فيكون $\left.\begin{matrix}f(0)=0\\f(2)=4\end{matrix}\right\}$

ويكون جدول تغيرات التابع f:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

القيم الحدية: $f(0)=0$ قيمة كبرى محلياً ، $f(2)=4$ قيمة صغرى محلياً

② $\frac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1}=f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ بالمطابقة نجد: $a=b=c=1$

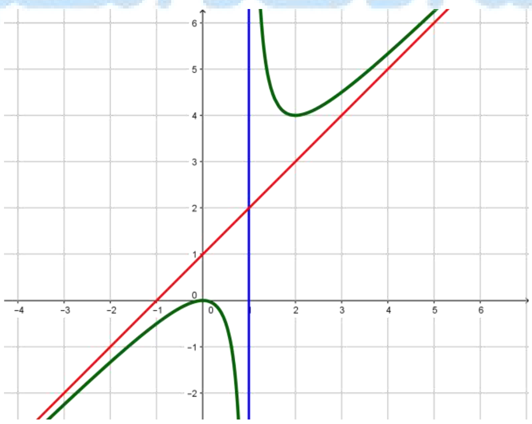
وبالتالي : $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$

③ معادلة المقارب للخط C هو $y=x+1$ ، حيث: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0$

على المجال $]-\infty,1[$: C تحت المقارب ، على المجال $]1,+\infty[$: C فوق المقارب

④ لدينا $f(1+h)+f(1-h)=\frac{(1+h)^2}{h}+\frac{(1-h)^2}{-h}=\frac{4h}{h}=4=2(2)$ وبالتالي مركز تناظر.

⑤



⑥ المعادلة $x^2 - mx + m = 0$ تكافئ $m = f(x)$ وبالتالي:

- ✓ على المجال $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ للمعادلة حلان.
- ✓ عندما $x = \{0,4\}$ للمعادلة حل وحيد.
- ✓ على المجال $]0,4[$ ليس للمعادلة حل.

⑦ نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 2$: $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ و $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

$f^{(2)}(x) = \frac{(-1)^2.2!}{(x-1)^{2+1}} = \frac{2}{(x-1)^3}$ والعلاقة صحيحة من أجل $n = 2$

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}\right)' = \frac{(-1)^n.n!(-1)(n+1)(x-1)^n}{(x-1)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

والعلاقة صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$.

❷ $g(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ معرّف على $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

① $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$

وبالتالي C' يقبل مقاربين أحدهما شاقولي معادلته $x = 1$ والآخر أفقي معادلته $y = 1$

② $g(2) = 0$ وبالتالي نقطة التماس $(2,0)$ وميل المماس $m = g'(2) = 2$ ومنه معادلة المماس: $y = 2x - 4$.

❸ $$h(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x - 1}$$

① التابع معرف بشرط $\cos x \neq 1$ وبالتالي $x \neq 2\pi k$ ومنه $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\pi k\}$

$$h(x+2\pi) = \frac{\cos^2(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)-1} = \frac{\cos^2 x}{\cos x - 1} = h(x)$$

ومنه التابع $h(x)$ دوري ودوره 2π

$$h(-x) = \frac{\cos^2(-x)}{\cos(-x)-1} = \frac{\cos^2 x}{\cos x - 1} = h(x)$$

ومنه التابع $h(x)$ زوجي ، خطه البياني متناظر بالنسبة للمحور yy'

② $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = -\infty$ ، $h(\pi) = -\frac{1}{2}$ ، $h'(x) = -\sin x . f'(\cos x) = -\sin x . \left(1 - \frac{1}{(\cos x - 1)^2}\right)$

$$h'(x)=0 \Rightarrow \sin x\left(1-\frac{1}{(\cos x-1)^2}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ \cos x=0 \Rightarrow x=\pi \Rightarrow h(\pi)=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

4

$$k(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

① $\lim_{x\to 0}\frac{k(x)-k(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}-1}=-1$ ومنه k اشتقاقي عند الصفر

② لدينا $k(9,3)\approx k(9)+k'(9).(0,3)$ حيث $k'(9)=\frac{1}{8}$, $k(9)=\frac{9}{2}$ فيكون:

$$k(9,3)\approx 4,5+(0,125)(0.3)=4,5375$$

5 الشكل الأول يمثل الخط البياني $k(x)$ لأنه غير معرّف عندما $x<0$ وهذا مخالف لمجموعة تعريف كل من التابعين $g(x), h(x)$.

الشكل الثاني يمثل الخط البياني للتابع $h(x)$ لأنه دوري ومتناظر بالنسبة لمحور التراتيب وبالتالي الشكل الثالث يمثل الخط البياني للتابع $g(x)$.

بالتوفيق للجميع	انتهى الحل	أيهم الشاعر

الجزء الأول	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	نهاية متتالية	الدرجة : 300

حل المسألة التالية:

❶ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالصيغة التدريجية $u_0=-1$ ، $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{5u_n+8}{u_n+3}$ والمطلوب:

① C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]-3,+\infty[$ بالعلاقة : $f(x)=\frac{5x+8}{x+3}$

- ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها.
- أثبت أن $-1\leq f(x)\leq 5$ أياً كانت $-1\leq x\leq 5$.
- ارسم C ثم ارسم المستقيم d الذي معادلته $y=x$ ، عيّن نقطة تقاطع الخط C مع المستقيم d.

② مثّل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، ثم أثبت أنها محدودة وادرس اطرادها.

③ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

❷ نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_0=5$ ، $v_{n+1}=f(v_n)$ والمطلوب:

① أثبت أن $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{7(v_n-u_n)}{(v_n+3)(u_n+3)}$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أن $v_n\geq 4$, $u_n\geq -1$ و $v_n-u_n\geq 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

③ أثبت أن $v_{n+1}-u_{n+1}\leq \frac{1}{2}(v_n-u_n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

④ استنتج أن $v_n-u_n\leq \frac{7}{2^n}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (v_n-u_n).

⑤ أثبت أن المتتاليتين u_n,v_n متجاورتين.

❸ نعرّف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $w_n=\frac{v_n-4}{v_n+2}$ والمطلوب:

① أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية ، عيّن حدها الأول وأساسها.

② أوجد عبارة w_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n ، ثم ادرس نهاية المتتالية w_n.

❹ نعرّف المتتالية $y_n=f(n)$ اعطِ متتاليتين $(x_n)_{n\geq 0},(z_n)_{n\geq 0}$ تحقق $x_n<y_n<z_n$.

❺ أثبت أن المتتالية المعرّفة بالعلاقة التدريجية $t_0=4$, $t_{n+1}=f(t_n)$ ثابتة.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

المدة : ساعة ونصف	حل اختبار وحدة	الجزء الأول
الدرجة : 300	نهاية متتالية	الثالث الثانوي العلمي

حل المسألة التالية:

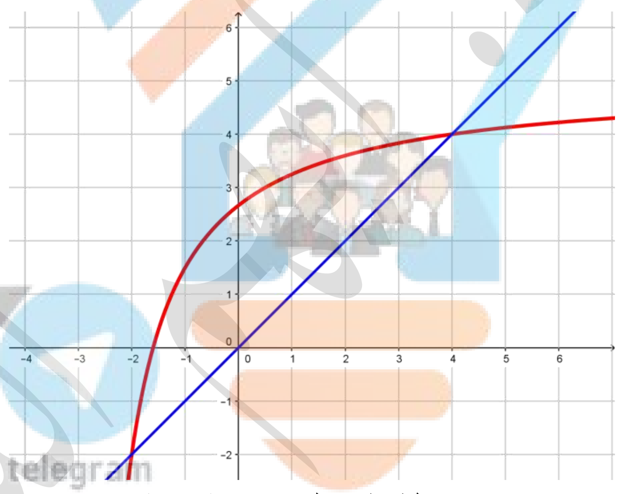
❶ ① $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

$f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2} > 0$ والتابع متزايد تماماً على المجال $]-3,+\infty[$

x	-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5

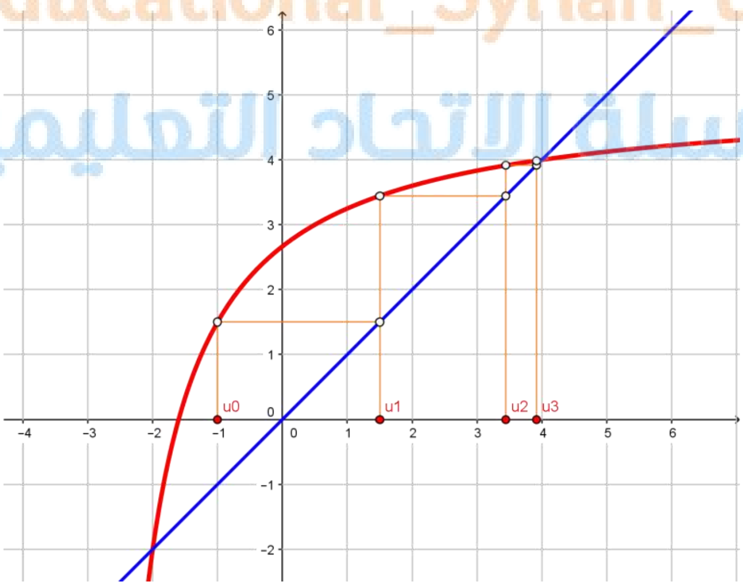
$-1 \le x \le 5$

وبما أن التابع متزايد تماماً على هذا المجال فإن $-1 \le \dfrac{3}{2} \le f(-1) \le f(x) \le f(5) = \dfrac{33}{8} \le 5$



نقطة التقاطع هي $(4,4)$.

②



إثبات أن المتتالية متزايدة ، نثبت بالتدريج أن $u_{n+1} > u_n$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 0$: $\frac{3}{2} = u_1 > u_0 = -1$ وبالتالي العلاقة صحيحة.

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $u_{n+1} > u_n$.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $u_{n+2} > u_{n+1}$

لدينا $u_{n+1} > u_n$ وبما أن التابع متزايد تماماً فإن $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ وبالتالي $u_{n+2} > u_{n+1}$ أي أن العلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n ، وبالتالي المتتالية متزايدة.

إثبات أن المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 4 ، نثبت بالتدريج أن $4 > u_n$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 0$: $4 > u_0 = -1$ وبالتالي العلاقة صحيحة.

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $4 > u_n$.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $4 > u_{n+1}$

لدينا $4 > u_n$ وبما أن التابع متزايد تماماً فإن $f(4) > f(u_n)$ وبالتالي $4 > u_{n+1}$ أي أن العلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n ، وبالتالي المتتالية محدودة من الأعلى.

③ بما أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ أي أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

❷ ①
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{5u_n+8}{u_n+3} - \frac{5v_n+8}{v_n+3} = \frac{7(v_n-u_n)}{(v_n+3)(u_n+3)}$$

② بما أن المتتالية u_n متزايدة و $u_0 = -1$ وبالتالي $u_n \geq -1$ و لنثبت بالتدريج أن $v_n \geq 4$:

نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 0$: $4 \leq v_0 = 5$ وبالتالي العلاقة صحيحة.

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $4 \leq v_n$.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $4 \leq v_{n+1}$

لدينا $4 \leq v_n$ وبما أن التابع متزايد تماماً فإن $f(4) \leq f(v_n)$ وبالتالي $4 \leq v_{n+1}$ أي أن العلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

نثبت بالتدريج أن $v_n - u_n \geq 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 0$: $v_0 - u_0 = 6 \geq 0$ وبالتالي العلاقة صحيحة.

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $v_n - u_n \geq 0$.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $v_{n+1}-u_{n+1}\geq 0$

لدينا $v_n-u_n\geq 0$ و $\left.\begin{matrix} u_n+3\geq 2\geq 0 \Leftarrow u_n\geq -1 \\ v_n+3\geq 7\geq 0 \Leftarrow v_n\geq 4 \end{matrix}\right\}$ وبالتالي فإن $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{7(v_n-u_n)}{(v_n+3)(u_n+3)}\geq 0$

وبالتالي $v_n-u_n\geq 0$ أي أن العلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

③ لدينا:

$$\frac{7(v_n-u_n)}{(u_n+3)(v_n+3)}\leq\frac{7(v_n-u_n)}{14}=\frac{1}{2}(v_n-u_n)\Leftarrow\frac{1}{u_n+3}.\frac{1}{v_n+3}\leq\frac{1}{2}.\frac{1}{7}=\frac{1}{14}\Leftarrow\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{u_n+3}\leq\dfrac{1}{2}\Leftarrow u_n+3\geq 2\\ \dfrac{1}{v_n+3}\leq\dfrac{1}{7}\Leftarrow v_n+3\geq 7\end{matrix}\right\}$$

وبالتالي $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)$.

④ نثبت بالتدريج أن $v_n-u_n\leq\dfrac{7}{2^n}$:

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$: $v_0-u_0=6\leq 7$ وبالتالي العلاقة صحيحة.

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $v_n-u_n\leq\dfrac{7}{2^n}$.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{7}{2^{n+1}}$

$v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)\leq\frac{1}{2}.\frac{7}{2^n}\leq\frac{7}{2^{n+1}}$ وبالتالي العلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

$0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{2^n}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

⑤ أثبتنا أن المتتالية u_n متزايدة ولنثبت بالتدريج أن المتتالية v_n متناقصة ، $v_{n+1}<v_n$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$: $5=v_0<v_1=\dfrac{33}{8}$ وبالتالي العلاقة صحيحة.

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $u_{n+1}<u_n$.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $u_{n+2}<u_{n+1}$

لدينا $u_{n+1}<u_n$ وبما أن التابع متزايد تماماً فإن $f(u_{n+1})<f(u_n)$ وبالتالي $u_{n+2}<u_{n+1}$ أي أن العلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n ، وبالتالي المتتالية متناقصة ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

وبالتالي المتتاليتين v_n,u_n متجاورتين.

❸ ① لدينا $w_n=\frac{v_n-4}{v_n+2}$ و $w_{n+1}=\frac{v_{n+1}-4}{v_{n+1}+2}$ وبالتالي:

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}-4}{v_{n+1}+2}=\frac{\frac{5v_n+8}{v_n+3}-4}{\frac{5v_n+8}{v_n+3}+2}=\frac{\frac{v_n-4}{v_n+3}}{\frac{7v_n+14}{v_n+3}}=\frac{v_n-4}{7v_n+14}=\frac{1}{7}\left(\frac{v_n-4}{v_n+2}\right)=\frac{1}{7}w_n$$

وبالتالي المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية حدها الأول $w_0=\frac{v_0-4}{v_0+2}=\frac{1}{7}$ وأساسها $q=\frac{1}{7}$.

② وبالتالي يكون $w_n=w_0.q^n=\frac{1}{7}.\frac{1}{7^n}=\frac{1}{7^{n+1}}$ و $q=\frac{1}{7}\leq 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(w_n)=0$

لدينا $w_n=\frac{v_n-4}{v_n+2}$ وبالتالي $v_n=\frac{-2w_n-4}{w_n-1}$.

❹ لدينا $y_n=\frac{5n+8}{n+3}$ وبالتالي يمكن اختيار المتتاليتين $z_n=\frac{5n+8}{n}$, $x_n=\frac{5n}{n+3}$ تحقق المطلوب.

(يوجد عدد غير محدد من المتتاليات التي تحقق المطلوب)

❺ نثبت بالتدريج أن المتتالية $t_0=4$, $t_{n+1}=f(t_n)$ ثابتة ، $t_n=4$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$: $t_0=4$ وبالتالي العلاقة صحيحة.

نفرض صحة العلاقة من أجل n : $t_n=4$.

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $t_{n+1}=4$

لدينا $t_n=4$ وبما أن التابع متزايد تماماً فإن $f(t_n)=f(4)$ وبالتالي $t_{n+1}=4$ أي أن العلاقة

صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n ، أي أن المتتالية ثابتة.

بالتوفيق للجميع	انتهى الحل	أيهم الشاعر

الجزء الأول	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التابع اللوغاريتمي	الدرجة : 300

حل المسألتين التاليتين:

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=x+1-\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|$ والمطلوب:

① عيّن D_f مجموعة تعريف التابع f ، ثم ادرس تغيراته ونظّم جدولاً بها ، محدداً مقاربات C.

② أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C ، وادرس وضعه النسبي.

③ أوجد معادلة المستقيم Δ المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=1$.

④ عيّن A نقطة تقاطع المستقيمين Δ, d ، ثم أثبت أن A مركز تناظر للخط C.

⑤ عيّن B, E نقطتي تقاطع المستقيمين Δ, d مع محور الفواصل ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABE.

⑥ ارسم المستقيمين Δ, d ، ثم ارسم C.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة $f(x)=\ln(x+2)+\ln(x+1)$ والمطلوب:

① عيّن D_f مجموعة تعريف التابع f ، ثم ادرس تغيراته ونظّم جدولاً بها ، محدداً مقاربات C.

② أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد أياً كانت x من D_f، ثم أوجد القيمة الحقيقية لهذا الجذر.

③ أثبت أن $-\frac{1}{2}\le f(x)\le 3$ أياً كانت $-\frac{1}{2}\le x\le 3$.

④ ارسم المستقيم d الذي معادلته $y=x$ ، و ارسم مقاربات C ثم ارسم C.

⑤ لتكن $(u_n)_{n\ge 0}$ المتتالية المعرّفة بالعلاقة $u_{n+1}=\ln(u_n+2)+\ln(u_n+1)\,,u_0=0$ ، مثّل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n ، ثم استنتج أنها متقاربة.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الأول	حل اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التابع اللوغاريتمي	الدرجة : 300

المسألة الأولى:

① التابع f معرّف بشرط $\frac{x}{x-2}\neq 0$ & $x-2\neq 0$ وبالتالي $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=-\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي منطبق على yy' في جوار $+\infty$

$x=2$ مقارب شاقولي يوازي yy' في جوار $-\infty$

$f'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$ ، $x^2-2x+2>0$ أي أن إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-2x

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	‖ $+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $-\infty \nearrow +\infty$	

② $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_d)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)=0$

وبالتالي المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$ ، وضعه النسبي:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$-\ln\left\lvert\frac{x}{x-1}\right\rvert$	$+$	$+$	$-$	$-$	
الوضع النسبي	C فوق المقارب	C فوق المقارب	C تحت المقارب	C تحت المقارب	

③ $f(1)=2$ وبالتالي نقطة التماس $(1,2)$ ، $f'(1)=-1$ وبالتالي ميل المماس $m=-1$

ومنه معادلة المماس : $\Delta: y=-x+3$

④ نقطة تقاطع المستقيمين Δ, d هي $A(1,2)$:

$$f(1+h)+f(1-h)=1+1+h-\ln\left|\frac{1+h}{h-1}\right|+1+1-h-\ln\left|\frac{h-1}{1+h}\right|=4$$

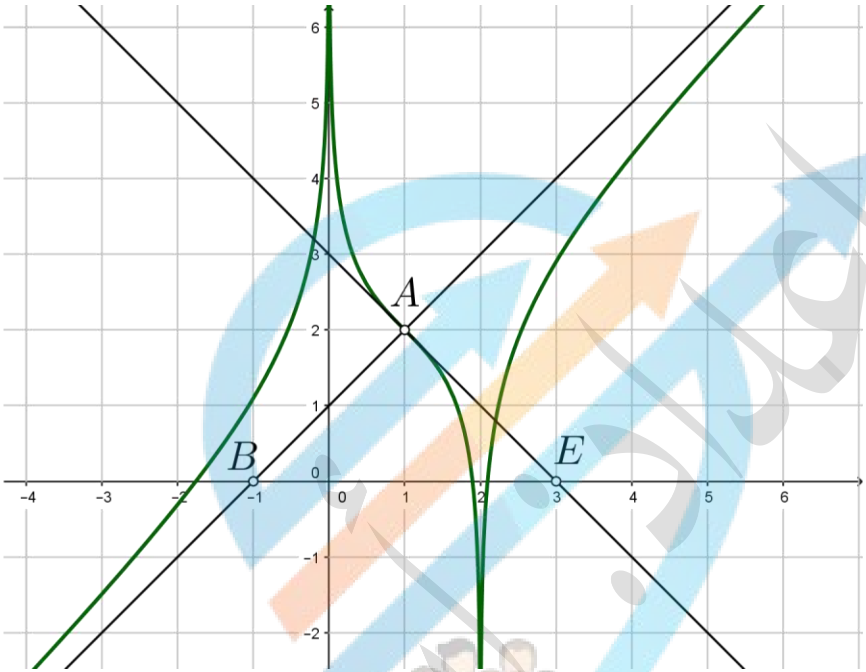
وبالتالي النقطة A هي مركز تناظر للخط C.

⑤ نقطتي تقاطع المستقيمين Δ, d مع محور الفواصل هي $B(-1,0), E(3,0)$:

$AB = AE = 2\sqrt{2}$, $BE = 4$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-2,-2)$, $\overrightarrow{AE}(2,-2)$, $\overrightarrow{BE}(4,0)$

حسب عكس فيثاغورث يكون المثلث ABE قائم ومتساوي الساقين رأسه A.

⑥



المسألة الثانية:

① التابع f معرّف بشرط $x+1>0$, $x+2>0$، وبالتالي f معرّف على $]-1,+\infty[$

$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $x=-1$ مقارب شاقولي يوازي yy' في جوار $-\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} > 0$ وبالتالي التابع متزايد تماماً على مجموعة تعريفه ، وجدول تغيراته:

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

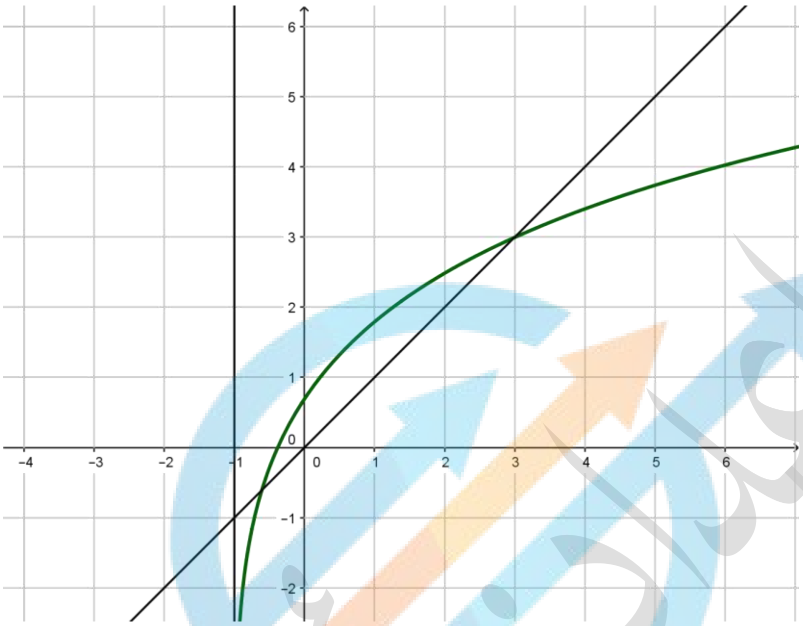
② التابع مستمر ومتزايد تماماً على D_f و $0 \in f(D_f)$ وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد أياً كانت x من D_f ، والقيمة الحقيقية لهذا الجذر هي:

$\ln(x+2)+\ln(x+1)=0=\ln(1)$ أي أن $\ln\big((x+2)(x+1)\big)=\ln(1)$ فيكون:

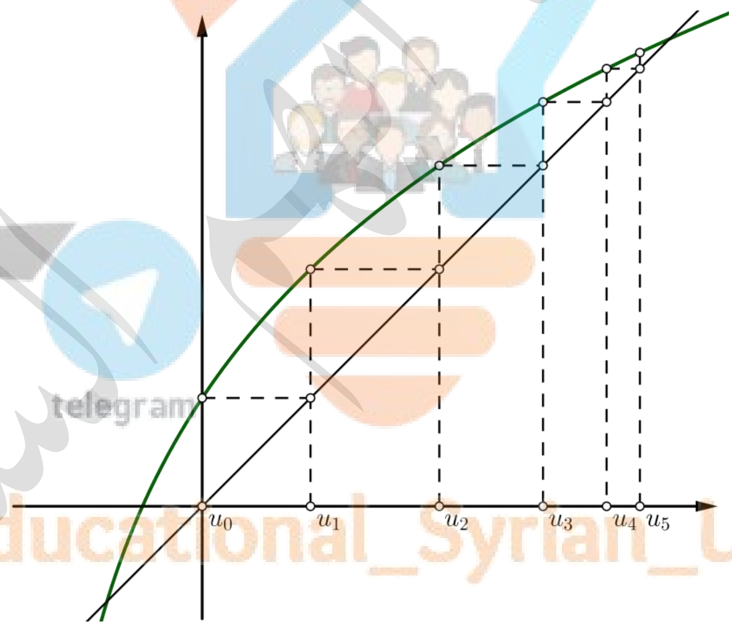
$x^2+3x+1=0$ ومنه $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}>-1$ (مقبول) ، $x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<-1$ (مرفوض)

③ لدينا $-\frac{1}{2}\le x\le 3$ وبما أن التابع متزايد تماماً $-\frac{1}{2}\le f\left(-\frac{1}{2}\right)\approx -0.28\le f(x)\le f(3)=2.99\le 3$

④



⑤ التمثيل الهندسي للحدود الأولى للمتتالية u_n ، ثم استنتج أنها متقاربة.



يمكن التخمين من الرسم أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3

نثبت بالتدريج أن $u_n < u_{n+1} < 3$ ، من أجل $n = 0$ نجد أن $0<\ln 2<3$ والعلاقة صحيحة ز

نفرض صحة العلاقة من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$f(u_n)<f(u_{n+1})<f(3)$ ومنه $u_{n+1}<u_{n+2}<3$ وبالتالي نستنتج أن المتتالية متقاربة..

بالتوفيق للجميع	انتهى الحل	أيهم الشاعر

المدة : ساعة ونصف	اختبار وحدة	الجزء الأول
الدرجة : 300	التابع الأسي	الثالث الثانوي العلمي

السؤال الأول: ❶ نعتبر المعادلة التفاضلية $(E):\quad y'-y=-\frac{e^x}{x^2}$

① حل المعادلة التفاضلية $(E'):\quad y'-y=0$

② ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $g(x)=\frac{e^x}{x}$ ، أثبت أن g حل للمعادلة (E)

❷ ليكن h تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

① بيّن أن $(h-g)$ حلاً للمعادلة (E') إذا وفقط إذا كان h حلاً للمعادلة (E)

② استنتج جميع حلول المعادلة (E)

السؤال الثاني: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x)=9^x-4.3^x+3$

① أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم حدد مقاربات C_f.

② أوجد $f'(x)$ ثم استنتج أن إشارة f' من إشارة (3^x-2) ، حدد إشارة f'.

③ نظّم جدولاً بتغيرات التابع f.

④ حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع C_f مع محور الفواصل.

⑤ ارسم ما وجدته من مقاربات ، ثم ارسم C_f.

السؤال الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x)=x+\frac{4}{e^x+1}$

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

② احسب $f(x)+f(-x)$ ثم استنتج أن النقطة $A(0,2)$ مركز تناظر للخط C.

③ أثبت أن C يقبل مماساً d يوازي محور الفواصل ، أوجد معادلته.

④ أثبت أن C يقبل منصف الربع الأول مقارباً مائلاً له في جوار $+\infty$.

⑤ أوجد $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+4))$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

④ ارسم d ومقاربات C ، ثم ارسم C.

أيهم الشاعر	انتهت الأسئلة	بالتوفيق للجميع

المدة : ساعة ونصف	حل اختبار وحدة	الجزء الأول
الدرجة : 300	التابع الأسي	الثالث الثانوي العلمي

السؤال الأول: 1 ① الحل هو $y=ke^{x}$

② لدينا $y=g(x)=\frac{e^{x}}{x}, y'=g'(x)=\frac{xe^{x}-e^{x}}{x^{2}}$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد أن g حل للمعادلة التفاضلية (E)

2 ① نفرض أن $(h-g)$ حلاً للمعادلة (E') ونبرهن أن h حلاً للمعادلة (E)

بما أن $(h-g)$ حلاً للمعادلة (E') يكون: $(h-g)'-(h-g)=0$ أي $h'-h=g'-g$

ولدينا g حل للمعادلة (E) أي أن $h'-h=-\frac{e^{x}}{x^{2}}$ ومنه h حلاً للمعادلة (E)

وبالعكس نفرض أن h حلاً للمعادلة (E) ونبرهن أن $(h-g)$ حلاً للمعادلة (E')

بما أن h حلاً للمعادلة (E) فإن $h'-h=-\frac{e^{x}}{x^{2}}$ ولدينا أيضاً $g'-g=-\frac{e^{x}}{x^{2}}$

وبالتالي $h'-h=g'-g$ أي $(h-g)'-(h-g)=0$ ومنه $(h-g)$ حلاً للمعادلة (E')

② ومنه جميع حلول المعادلة (E) هي: $h-g=ke^{x}$ أي أن $h=g+ke^{x}=\frac{e^{x}}{x}+ke^{x}$

السؤال الثاني:

① $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty , \lim_{x\to-\infty} f(x)=3$

ومنه نجد أن المستقيم $y=3$ مقارب أفقي يوازي محور الفواصل في جوار $+\infty$

② $f(x)=9^{x}-4.3^{x}+3=e^{x\ln 9}-4e^{x\ln 3}+3$

$f'(x)=\ln 9e^{x\ln 9}-4\ln 3e^{x\ln 3}=2\ln 3.3^{2x}-4\ln 3.3^{x}=2\ln 3.3^{x}(3^{x}-2)$

ومنه إشارة f' من إشارة $(3^{x}-2)$

③ وبالتالي جدول تغيرات التابع f :

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{\ln 3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$- - -$	0	$+ + +$
$f(x)$	$3 \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

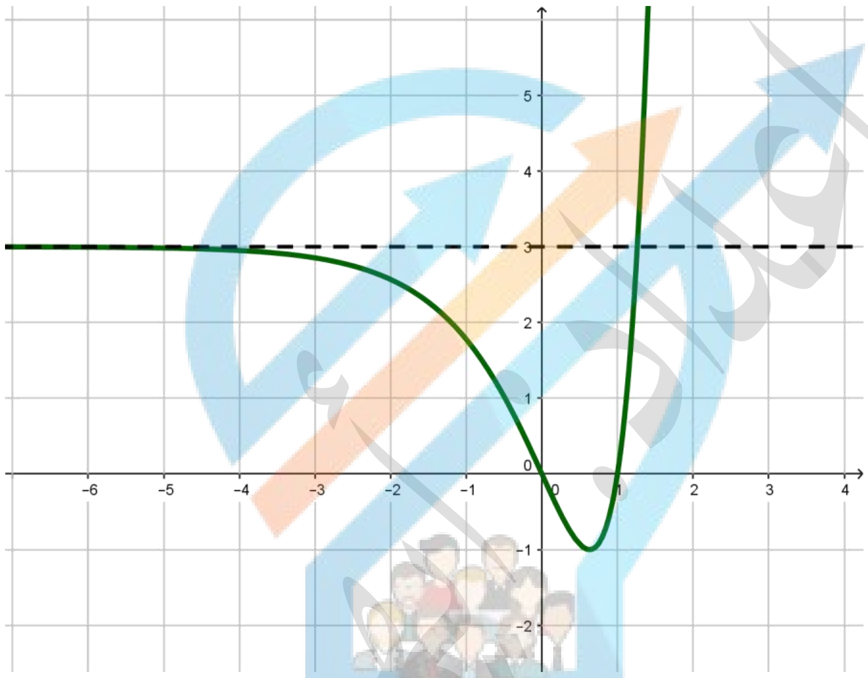
④ المعادلة $f(x) = 0$ تكافئ $9^x - 4.3^x + 3 = 0$ .. نفرض $3^x = X$ فتصبح المعادلة بالشكل

$X^2 - 4X + 3 = 0$ أي أن $(X-3)(X-1) = 0$ أي أن:

$$X = 3 \Longrightarrow 3^x = 3 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow (1,0)$$

$$X = 1 \Longrightarrow 3^x = 1 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$$

⑤ الرسم:



السؤال الثالث:

① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ولدينا $f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$ والتابع متزايد تماماً

ومنه جدول تغيرات التابع f:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

② $$f(x) + f(-x) = x + \frac{4}{e^x+1} - x + \frac{4}{e^{-x}+1} = \frac{4}{e^x+1} + \frac{4e^x}{e^x+1} = 4$$

ومنه النقطة $A(0,2)$ مركز تناظر للخط C.

③ لدينا $f'(x) = \frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}$ وبالتالي $f'(x) = 0$ عندما $x = 0$ وبالتالي C يقبل مماس أفقي معادلته

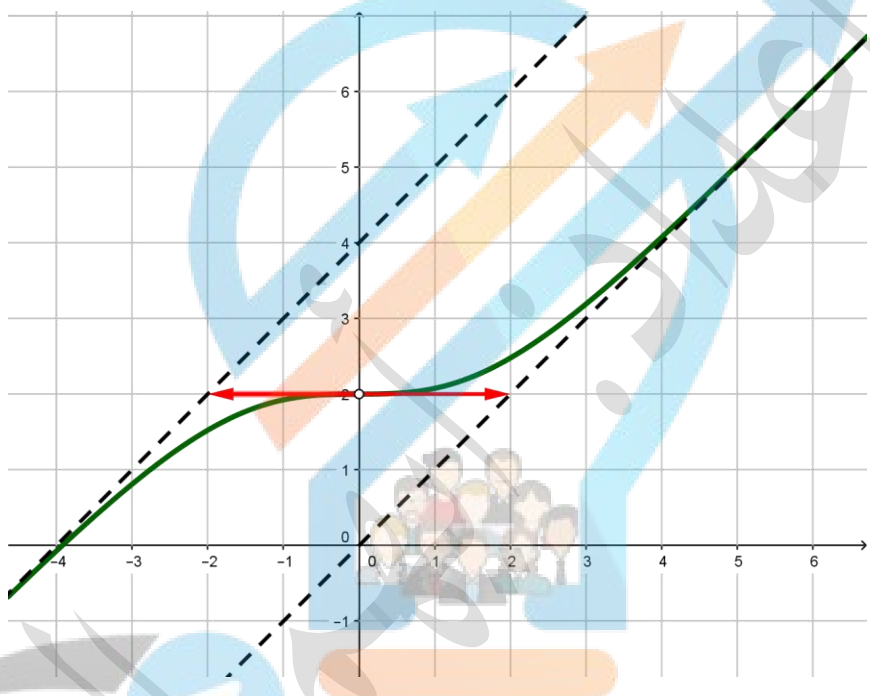
$$y = 2$$

④ $\lim_{x \to +\infty}(f(x)-x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right) = 0$ وبالتالي C يقبل منصف الربع الأول مقارباً مائلاً له في جوار $+\infty$.

⑤ $$\lim_{x \to -\infty}(f(x)-(x+4)) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}-4\right) = 0$$

وبالتالي C يقبل المستقيم $y = x + 3$ مقارباً مائلاً له في جوار $+\infty$.

⑥ الرسم:



بالتوفيق للجميع	انتهت الحل	أيهم الشاعر

الجزء الأول	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التكامل والتوابع الأصلية	الدرجة : 300

السؤال الأول: حل التمرينات التالية:

① عيّن تابعاً أصلياً لكل من التوابع التالية: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+6}}$ ، $g(x)=\sin x.\cos^2 x$ ، $h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

② هات تابعاً أصلياً F للتابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ على مجال I يطلب تعيينه ويحقق $F(27)=0$.

③ احسب مايلي: $I=\int_1^3 x\,|x-2|\,dx$ ، $J=\int_1^e x^5 \ln x\,dx$.

السؤال الثاني: حل المسألتين التاليتين:

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x+2-xe^x$ والمطلوب:

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، محدداً قيمته الحدية.

② أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للخط C ، وادرس وضعه النسبي.

③ ارسم المستقيم d ، ثم ارسم C.

④ أوجد مساحة السطح المحصور بين C ومقاربه المائل والمستقيم $x=1$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $[0,2]$ بالعلاقة $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ والمطلوب:

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، محدداً قيمته الحدية.

② ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند 0 و 2 ، اكتب معادلة المماسين d_1,d_2 في هاتين النقطتين.

③ ارسم المستقيمين d_1,d_2 ثم ارسم C.

④ أوجد مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل.

⑤ أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق حول xx' دورة كاملة.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الأول	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التكامل والتوابع الأصلية	الدرجة : 300

السؤال الأول:

① $f(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+6}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$ أي $F(x)=\sqrt{x^2+6}$ ، $g(x)=-(\cos x)'.\cos^2 x$ أي $G(x)=\frac{1}{3}\cos^3 x$.

$$h(x)=\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1}=x+\frac{1}{2}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}$$

وبالتالي $H(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)=\frac{1}{2}x^2+\ln\sqrt{x^2-1}$

② $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ وبالتالي $F(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+k$ حيث $I=]0,+\infty[$

$k=F(27)=\frac{3}{5}\sqrt[3]{27^5}=\frac{3}{5}.243=\frac{729}{5}$ ومنه $F(x)=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{729}{5}$

③ $$I=\int_1^3 x|x-2|dx=\int_1^2 x(2-x)dx+\int_2^3 x(x-2)dx=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$

$$=\left[\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=2$$

$$J=\int_1^e x^5\ln x\,dx \quad \begin{cases} u=x^5\Rightarrow u'=5x^4 \\ v'=\ln x\Rightarrow v=\frac{1}{x}\end{cases}$$

$$=\left[x^4\right]_1^e-5\int_1^e x^3dx=e^4-1-5\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^e=e^4-1-5\left(\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}\right)=\frac{1-e^4}{4}$$

السؤال الثاني:

المسألة الأولى:

① $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=1-e^x-xe^x$ ، نفرض التابع $g(x)=1-e^x-xe^x$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$ و

$g'(x)=-e^x-e^x-xe^x=-(x+2)e^x$ أي $g'(x)=0$ و $x=-2$ و $g(-2)=1+e^{-2}$ وبالتالي:

x	$+\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		++++	0	----	
$g(x)$	1		$1+e^{-2}$		$-\infty$

من جدول تغيرات التابع $g(x)$ نجد أنه ينعدم عند قيمة واحدة هي $x=0$

وبالتالي $f'(x)=0$ عندما $x=0$ و $f(x)=2$.

وبالتالي جدول تغيرات التابع f هو:

x	$+\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$

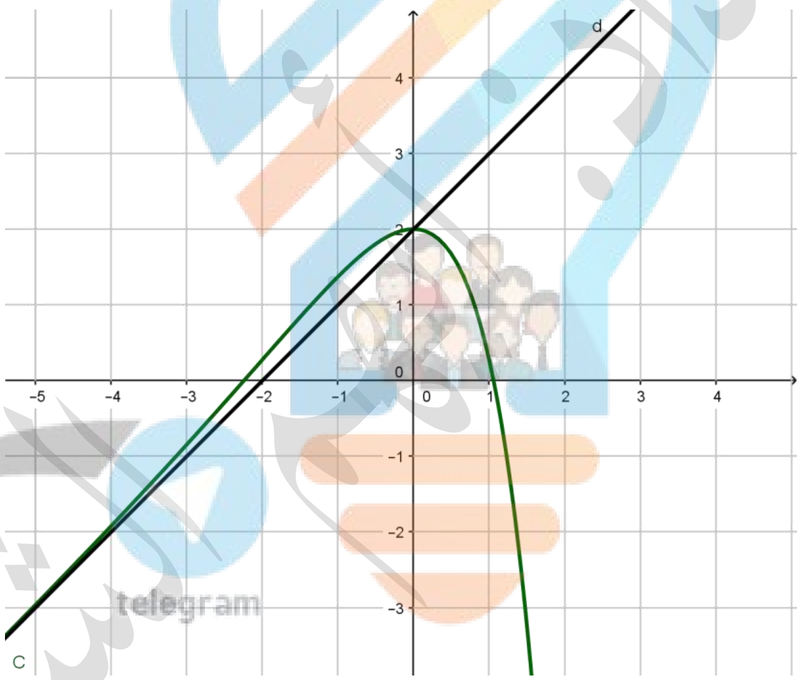
و $f(0)=2$ قيمة كبرى حدية.

② لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_d\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^x\right)=0$ وبالتالي $y=x+2$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

عندما $x>0$ يكون $\left(f(x)-y_d\right)<0$ وبالتالي الخط البياني تحت المقارب

عندما $x<0$ يكون $\left(f(x)-y_d\right)>0$ وبالتالي الخط البياني فوق المقارب

③



④ $S=\int_0^1\left(y_d-f(x)\right)dx=\int_0^1\left(xe^x\right)dx$ $\begin{cases}u=x\Rightarrow u'=1\\ v'=e^x\Rightarrow v=e^x\end{cases}$

$=\left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1=e-e+1=1$

<u>المسألة الثانية:</u>

① $f(0)=0\,,\,f(2)=2$ و $f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ ومنه $f'(x)=0$ أي $x=\sqrt{2}$

وبالتالي $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\sqrt{4-2}=\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$

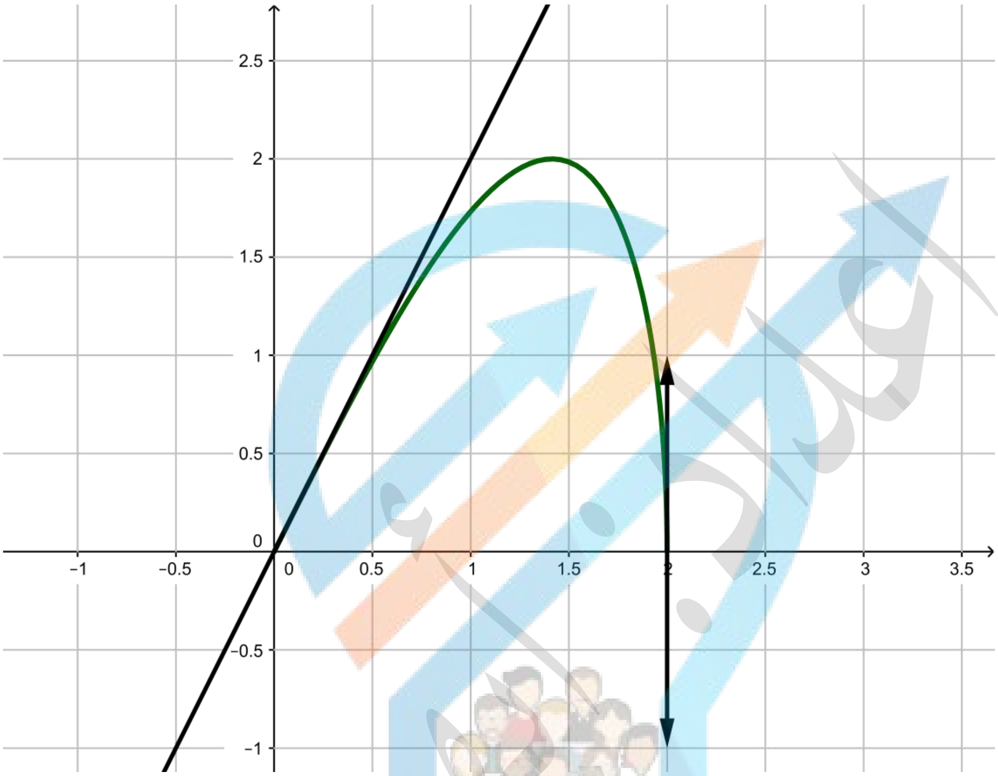
② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{4-x^2}=2$ أي أن f اشتقاقي عند 0 ومعادلة المماس:

$$y=f'(x)(x-0)+f(0)=2x$$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x.\sqrt{2-x}.\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}.\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to2}\frac{x.\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}=\infty$ أي أن f غير اشتقاقي عند 2

ويقبل مماساً شاقولياً معادلته : $x=2$

③



④ $S=\int_0^2 f(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^2 -2x\sqrt{4-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\left[\sqrt{(4-x^2)^3}\right]_0^2=-\frac{1}{2}[(0)-8]=4$

⑤ $V=\pi\int_0^2 (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^2 (4x^2-x^4)dx=\pi\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\pi\left[\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)-0\right]=\frac{64\pi}{15}$

بالتوفيق للجميع	**انتهت الأسئلة**	**أيهم الشاعر**

الجزء الثاني	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	الأشعة في الفراغ	الدرجة : 300

التمرين الأول: نتأمل في معلم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط التالية:

$A\left(0,2,-2\right)$, $B\left(-1,2,-1\right)$, $C\left(-2,1,1\right)$, $D\left(0,3,-3\right)$ والمطلوب:

1) أثبت أن النقاط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد.

2) أثبت أن النقاط B,C,D على استقامة واحدة ، وعيّن β,γ لتكون D مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,\beta),(C,\gamma)$.

3) أثبت أن المثلث ABD متساوي الساقين ، احسب مساحته.

4) I منتصف AD ، هل المستقيمين $(AC),(BI)$ متقاطعين ؟ برر إجابتك.

التمرين الثاني: $ABCDEFGH$ مكعّب فيه I تحقق $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ، J تحقق $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BG}$ و K منتصف EH والمطلوب:

1) عيّن α,β,γ لتكون J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(F,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$.

2) أثبت أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (AGK).

3) أوجد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق: $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MB}\|$.

التمرين الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه والمطلوب:

1) أثبت وجود نقطة وحيدة M تحقق: $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ ، مالصفة الهندسية للنقطة M.

2) هل النقطة N التي تحقق $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{MN}$ تقع على أحد رؤوس رباعي الوجوه.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

المدة : ساعة ونصف	حل اختبار وحدة	الجزء الثاني
الدرجة : 300	الأشعة في الفراغ	الثالث الثانوي العلمي

<u>التمرين الأول:</u>

1) حتى تقع النقاط A,B,C,D في مستوٍ واحد ، يجب أن تتحقق العلاقة:

$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ، حيث α,β أعداد حقيقية

$$\overrightarrow{AC}(-2,-1,3) \quad , \quad \overrightarrow{AB}(-1,0,1) \quad , \quad \overrightarrow{AD}(0,1,-1)$$

$$(0,1,-1)=\alpha(-1,0,1)+\beta(-2,-1,3)=(-\alpha-2\beta,-\beta,\alpha+3\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} -\alpha-2\beta&=0\\ -\beta&=1\\ \alpha+3\beta&=-1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \beta=-1\Rightarrow\alpha=2$$

أي أن $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

والنقاط A,B,C,D على استقامة واحدة.

2) $\begin{cases}\overrightarrow{DC}(-2,-2,4)\\ \overrightarrow{DB}(-1,-1,2)\end{cases} \Leftarrow 2\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}$ والشعاعين مرتبطين خطياً والنقاط على استقامة واحدة.

ومنه نجد $2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2),(C,-1)$.

3) نوجد أطوال أضلاع المثلث ABD:

$$\overrightarrow{AB}(-1,0,1)\Rightarrow[AB]=\sqrt{2}\ ,\ \overrightarrow{AD}(-1,0,1)\Rightarrow[AD]=\sqrt{2}\ ,\ \overrightarrow{BD}(-1,0,1)\Rightarrow[BD]=\sqrt{6}$$

وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A ، نفرض J منتصف $[BD]$: $J\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},-2\right)$

فتكون مساحة المثلث : $S(ABD)=\frac{1}{2}([BD].[AJ])=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $[AJ]=\frac{1}{\sqrt{2}}$

4) I منتصف AD $\Leftarrow$ $I\left(0,\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$ والنقاط A,B,C,I تقع في مستوٍ واحد

$\begin{cases}\overrightarrow{BI}\left(1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)\\ \overrightarrow{AC}(-2,-1,3)\end{cases} \Leftarrow \overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BI} \Leftarrow$ الشعاعين مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمين متوازيين.

التمرين الثاني:

1) $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}\Rightarrow 3\overrightarrow{BJ}=2(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JC})+2(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JF})\Rightarrow \overrightarrow{BJ}-2\overrightarrow{CJ}-2\overrightarrow{FJ}=\vec{0}$

وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(F,-2),(B,1),(C,-2)$.

2) لدينا $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ وبالتالي الشعاعين مرتبطين خطياً والمستقيمين $(IJ),(AG)$ متوازيان فيكون المستقيم (IJ) يوازي المستوي (AGK) لأنه يوازي مستقيم محتوى في المستوي. **(يمكن استخدام الإحداثيات لإثبات توازي المستقيمين)**

3) J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(F,-2),(B,1),(C,-2)$ وبالتالي يكون لدينا:

$$||2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MB}||=||3\overrightarrow{MJ}||$$

ولدينا $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftarrow 2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ أي أن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2),(B,1)$ أي:

$$||2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}||=||3\overrightarrow{MI}||$$

وبالتالي : $||2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}||=||2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MB}||\Rightarrow||3\overrightarrow{MI}||=||3\overrightarrow{MJ}||\Rightarrow[MI]=[MJ]$

أي أن مجموعة النقاط M تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الثالث:

1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}$ ومنه توجد نقطة وحيدة M تجعل الشعاعين متساويين ، الصفة الهندسية لها هي صورة D بالنسبة إلى A.

2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}$ أي ان N تنطبق على B

بالتوفيق للجميع	انتهى الحل	أيهم الشاعر

الجزء الثاني	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	الجداء السلمي في الفراغ	الدرجة : 300

التمرين الأول: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$$A(-1,0,2)\ ,\ B(0,0,1)\ ,\ C(2,-1,1)$$

d المستقيم المار من A ويقبل $\vec{u}(4,1,-2)$ شعاع توجيه له ، d' المستقيم المار من B ويقبل $\vec{v}(3,1,-1)$ شعاع توجيه له ، والمطلوب:

1) أثبت أن d,d' متقاطعان في نقطة I يطلب تعيينها.
2) أوجد معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل $\vec{u},\vec{v}$ شعاعي توجيه له.
3) أوجد معادلة المستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على المستوي $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A,B.
4) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها I وتمس المستوي $\mathcal{Q}$.
5) أوجد إحداثيات C' المسقط القائم للنقطة C على الفصل المشترك لتقاطع المستويين $\mathcal{P},\mathcal{Q}$.

التمرين الثاني: $ABCDEFGH$ مكعّب فيه O مركز الوجه $EFGH$ ، نختار معلماً متجانساً $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ ، والمطلوب:

1) اعطِ إحداثيات جميع رؤوس المكعب وإحداثيات O.
2) احسب دون استخدام المعلم : $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CG}\ ,\ \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AE}\ ,\ \overrightarrow{OE}.\overrightarrow{FB}$.
3) أوجد نسبة مثلثية للزاوية $\theta=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$.
4) أثبت أن المستقيمان $(OC),(AG)$ متعامدان.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الثاني	حل اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	الجداء السلمي في الفراغ	الدرجة : 300

التمرين الأول:

1) $\frac{4}{3}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{-1}$ المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً ، $\overrightarrow{AB}(1,0,-1)$

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\Longrightarrow(1,0,-1)=(4\alpha+3\beta,\alpha+\beta,-2\alpha-\beta)$$

$$\left.\begin{array}{r}4\alpha+3\beta=1\\ \alpha+\beta=0\\ -2\alpha-\beta=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha=1,\beta=-1$$

وبالتالي فإن الأشعة $\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}$ تقع في مستوٍ واحد ، ومنه المستقيمين d,d' متقاطعين في $I(x,y,z)$

$\overrightarrow{AI},\vec{u}$ مرتبطين خطياً فيكون $\overrightarrow{AI}=k\vec{u}$ حيث $\begin{pmatrix}\overrightarrow{AI}(x+1,y,z-2)\\ k\vec{u}(4k,k,-2k)\end{pmatrix}$ ومنه: $\left.\begin{array}{r}x=4k-1\\ y=k\\ z=-2k+2\end{array}\right\}$

$\overrightarrow{BI},\vec{v}$ مرتبطين خطياً فيكون $\overrightarrow{BI}=k'\vec{v}$ حيث $\begin{pmatrix}\overrightarrow{AI}(x,y,z-1)\\ k\vec{u}(3k',k',-k')\end{pmatrix}$ ومنه: $\left.\begin{array}{r}x=3k'\\ y=k'\\ z=-k'+1\end{array}\right\}$

مما سبق نجد $k=k'$ وبالتالي $4k-1=3k$ فتكون $k=1$ و $I(3,1,0)$

2) نفرض ناظم المستوي $\mathcal{P}$ هو: $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(a,b,c)$ فيكون: $\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\perp\vec{u}\\ \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\perp\vec{v}\end{array}\right\}$ ومنه: $\left.\begin{array}{r}4a+b-2c=0\\ 3a+b-c=0\end{array}\right\}$

بفرض $a=1$ وطرح العلاقتين نجد $b=-2,c=1$ فيكون ناظم المستوي $\mathcal{P}$ هو: $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-2,1)$

أما معادلة المستوي تعطى بالعلاقة: $\mathcal{P}: x-2y+z-1=0$ حيث $d=-1$

3) نفرض ناظم المستوي Q هو: $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ فيكون: $\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\\ \overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{AB}\end{array}\right\}$ ومنه: $\left.\begin{array}{r}a-2b+c=0\\ a-b=0\end{array}\right\}$

بفرض $a=1$ نجد $b=1$ فتكون $c=1$ ومنه ناظم المستوي Q هو: $\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$

أما معادلة المستوي تعطى بالعلاقة $Q: x+y+z-1=0$ حيث $d=-1$

4) نصف قطر الكرة هو بعد I عن المستوي Q ، أي: $R=dist(I,Q)=\frac{|3+1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$

فتكون معادلة الكرة: $(x-3)^2+(y-1)^2+(z)^2=3$

5) نفرض $C'(a,b,c)$ المسقط القائم للنقطة C على الفصل المشترك لتقاطع المستويين $\mathcal{P},Q$ ، فيكون:

C' نقطة من $\mathcal{P}$ فهي تحقق معادلته : $a-2b+c-1=0 \;\dots\; (1)$

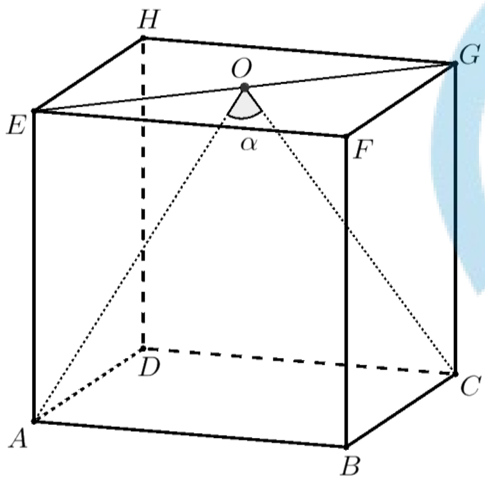
C' نقطة من Q فهي تحقق معادلته : $a+b+c-1=0 \;\dots\; (2)$

لدينا A,B نقطتين من $\mathcal{P},Q$ (فرضاً) فإن $\overrightarrow{AB}(1,0,-1)$ شعاع توجيه للفصل المشترك و:

$CC' \perp AB$ حيث $\overrightarrow{CC'}(a-2,b+1,c-1)$ فيكون: $a-c-1=0 \;\dots\; (3)$

بطرح (1) من (2) نجد: $b=0$ ومنه : $\left.\begin{matrix} a+c-1=0 \\ a-c-1=0 \end{matrix}\right\}$ بالجمع نجد $a=1$ فتكون $c=0$

وبالتالي $C'(1,0,0)$



التمرين الثاني:

1) $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1)$

$F(1,0,1), G(1,1,1), H(0,1,1), O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

2) $FB \perp (EFGH)$ لأن $\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{FB}=0$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=0$ لأن $AB \perp AE$ ومنه: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AE}=-1$ ، $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}=\left(\overrightarrow{AE}\right)^2=1$

$\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CG}=\left(\overrightarrow{CG}\right)^2=1$

3) $\overrightarrow{OA}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right), \overrightarrow{OB}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ ومنه $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$ و $\|\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{\frac{3}{2}}$

وبالتالي: $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OB}\|}=\frac{1}{3}$

4) لدينا $\overrightarrow{OC}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right), \overrightarrow{AG}(1,1,1)$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{OC}=0$ وبالتالي:

المستقيمان $(OC),(AG)$ متعامدان.

توزيع الدرجات : (130 , 170)

بالتوفيق للجميع	**انتهى الحل**	**أيهم الشاعر**

الجزء الثاني	اختبار وحدة المستقيمات والمستويات في الفراغ	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي		الدرجة : 300

حل المسألة التالية:

❶ $ABCD$ رباعي وجوه ، النقاط P,Q,R,K,I تحقق: $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}\,,\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

R منتصف CD و K تحقق $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و I منتصف AB و G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2),(B,2),(C,1),(D,1)$ والمطلوب:

① أثبت أن المستقيمان $(PK),(IR)$ متقاطعان.

② أثبت أن GQ يقطع AC في J ، عيّن موضع J ، واستنتج أن الرباعي $PQKJ$ متوازي أضلاع.

③ عيّن المجموعة ε المكونة من النقاط M التي تحقق: $\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\|=\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\|$

❷ نزوّد الفضاء بمعلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ونفرض إحداثيات النقاط A,B,C,D معطاة بالشكل: $A(1,2,0),B(1,1,2),C(3,4,1),D(-8,1,2)$ والمطلوب:

① أثبت أن النقاط A,B,C تعيّن مستوٍ $\mathcal{P}$ ، اكتب معادلته.

② اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ المار من D والعمودي على $\mathcal{P}$.

③ أوجد إحداثيات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي $\mathcal{P}$.

④ استنتج طبيعة المثلث ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

⑤ احسب نصف قطر الدائرة الناتجة عن تقاطع الكرة التي مركزها D وتمر من A مع المستوي $\mathcal{P}$.

❸ تأكد بالحساب أن إحداثيات النقاط P,Q,R المعرّفة سابقاً تعطى بالشكل: $P\left(-2,\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)\,,Q(-2,1,2)\,,R\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ والمطلوب:

① استنتج أن مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(P,1-x-y)(Q,x)(R,y)$ هي نفسها المستوي $\mathcal{P}_1$ الذي يقبل $\vec{n}(5,2,1)$ ناظماً له ويمر بالنقطة Q.

② أثبت أن المستويين $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}$ متقاطعين ، اكتب المعادلات الوسيطية لفصلهما المشترك d.

③ عيّن نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي $\mathcal{P}_1$.

④ ادرس وضع المستقيمين d,Δ.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الثاني	حل اختبار وحدة المستقيمات والمستويات في الفراغ	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي		الدرجة : 300

حل المسألة التالية:

❶ $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ وبالتالي Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2),(D,1)$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ وبالتالي P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2),(D,1)$

$\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2),(C,1)$

R منتصف CD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1),(D,1)$

I منتصف AB فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2),(B,2)$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2),(B,2),(C,1),(D,1)$

① ومنه G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4),(R,2)$ فهي تقع على المستقيم (IR)

وهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,3),(K,3)$ فهي تقع على المستقيم (PK)

وبالتالي المستقيمين $(PK),(IR)$ متقاطعين.

② بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2),(B,2),(C,1),(D,1)$ و Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2),(D,1)$ فإن GQ يقطع AC في J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2),(C,1)$.

③ العلاقة $\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\|=\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\|$ تكافئ $\|3\overrightarrow{QM}\|=\|3\overrightarrow{JM}\|$

وبالتالي المجموعة ε تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[QJ]$.

❷ ① $\overrightarrow{AB}(0,-1,2),\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً والنقاط ليست على استقامة واحدة فهي تمثل مستوٍ ، تعطى معادلته بالعلاقة: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$

$$\left.\begin{aligned} x-1&=2\beta\\ y-2&=-\alpha+2\beta\\ z&=2\alpha+\beta\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \boxed{\mathcal{P}:5x-4y-2z+3=0}$$

② شعاع توجيه المستقيم Δ هو ناظم المستوي $\mathcal{P}$ ومنه: $\Delta:\begin{cases}x=5t-8\\ y=-4t+1\\ z=-2t+2\end{cases}$

③ نعوّض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي $\mathcal{P}$ فنجد:

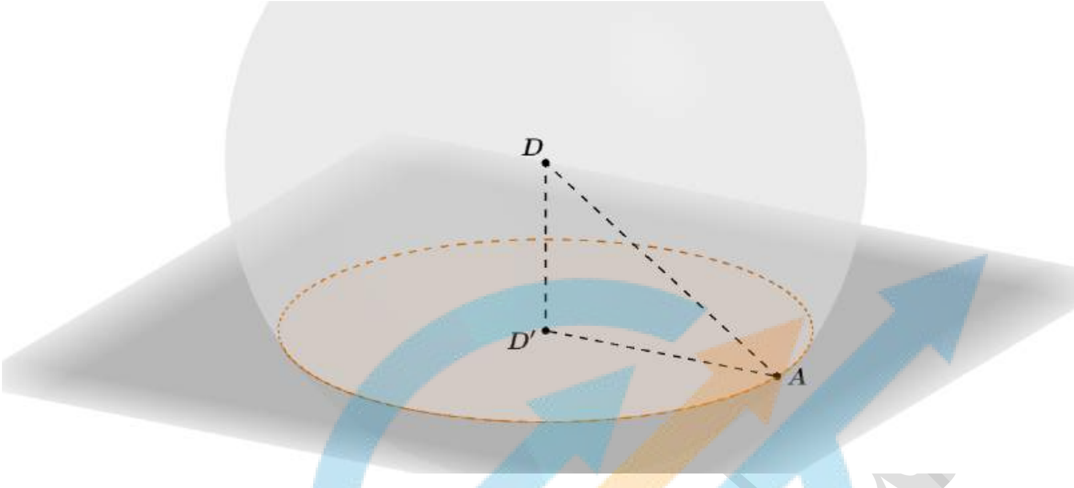
$$5(5t-8)-4(-4t+1)-2(-2t+2)+3=0\Longrightarrow t=1\Longrightarrow \boxed{D'(-3,-3,0)}$$

④ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A مساحته: $S(ABC)=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

ارتفاع رباعي الوجوه هو $DD'=3\sqrt{5}$ فيكون حجم رباعي الوجوه: $V=7{,}5$.

⑤ $DD' \perp \mathcal{P}$ وبالتالي D' مركز الدائرة الناتجة عن التقاطع ، A نقطة من الكرة ومن المستوي

وبالتالي نصف قطر الدائرة الناتجة عن التقاطع هو القطعة المستقيمة $AD' = \sqrt{41}$



❸ بإعتبار النقاط P, Q, R مراكز أبعاد متناسبة: $P\left(-2, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right), Q(-2,1,2), R\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

① مجموعة النقاط M تمثل المستوي المار بالنقاط P, Q, R.

معادلة المستوي $\mathcal{P}_1$ هي: $\boxed{5x + 2y + z + 6 = 0}$ نلاحظ أن: $P \in \mathcal{P}, R \in \mathcal{P}$

وبالتالي مجموعة النقاط M هي ذاتها المستوي $\mathcal{P}_1$.

② ناظم المستوي $\mathcal{P}$ هو $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(5,-4,-2)$ ، ناظم المستوي $\mathcal{P}_1$ هو $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}(5,2,1)$ ومنه الشعاعين

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}, \overrightarrow{n_{\mathcal{P}_1}}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويين متقاطعين وبالحل المشترك لمعادلتي المستويين:

$$\left.\begin{matrix} 5x - 4y - 2z + 3 = 0 \\ 5x + 2y + z + 6 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 5t \\ z = -10t - 1 \end{cases}$$

③ نعوّض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ بمعادلة المستوي $\mathcal{P}_1$:

$$5(5t - 8) + 2(-4t + 1) - 2t + 2 + 6 = 0 \Longrightarrow t = 2 \Longrightarrow (2, -7, -2)$$

④ شعاعي توجيه المستقيمين Δ, d غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

وبالتالي المستقيمين غير متوازيين (إما متقاطعين أو متخالفين) وبالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين

$$\begin{pmatrix} 5t - 8 = -1 \\ -4t + 1 = 5s \\ -2t + 2 = -10s - 1 \end{pmatrix}$$

من المعادلة الأولى نجد: $t = \frac{7}{5}$ نعوّض في المعادلة الثانية نجد $s = -\frac{23}{25}$

نعوّض في المعادلة الثالثة نجدها غير محققة وبالتالي المستقيمين متخالفين.

بالتوفيق للجميع	انتهى الحل	أيهم الشاعر

الجزء الثاني	**اختبار وحدة**	**المدة : ساعة ونصف**
الثالث الثانوي العلمي	**الأعداد العقدية**	**الدرجة : 300**

حل المسألة التالية:

❶ حل معادلة من الدرجة الثالثة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:

$$z^3 + (2-2i)z^2 - 2z + 8 + 4i = 0$$

❷ التطبيق الهندسي للمعادلة

إذا كانت A, B, C النقاط التي تمثل الأعداد العقدية a, b, c حلول السابقة :

① ارسم في جملة متعامدة نظامية النقاط A, B, C ، استنتج طبيعة المثلث ABC.

② أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق : $(z+1)(\bar{z}+2i)$ عدداً حقيقياً بحتاً تمثل مستقيم d ، اكتب معادلته وارسمه.

③ أثبت أن d يمثل محور أحد أضلاع المثلث ABC.

❸ التطبيق الجبري للمعادلة

① اختصر المقدار $t = \dfrac{e^{2\theta i} - e^{-2\theta i}}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}$ ، وحدد متى يكون المقدار موجوداً ،

هل يمكن أن يكون t أحد حلول المعادلة السابقة.

② اختصر المقدار $w = \sqrt{2}.\left(\dfrac{1+\cos\varphi - i\sin\varphi}{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}\right)$ ، وحدد متى يكون المقدار موجوداً ،

ثم عيّن φ ليكون w أحد حلول المعادلة السابقة.

③ في حالة : $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ، اكتب w بالشكل الأسي ، ثم احسب w^{100}.

بالتوفيق للجميع	**انتهت الأسئلة**	**أيهم الشاعر**

الجزء الثاني	حل اختبار وحدة الأعداد العقدية	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي		الدرجة : 300

حل المسألة التالية:

❶ حل معادلة من الدرجة الثالثة

$$z^3+(2-2i)z^2-2z+8+4i=0 \quad \dots(1)$$

بما أن المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإن $\bar{z}=-z$ ، نوجد مرافق المعادلة السابقة:

$$\overline{z^3+(2-2i)z^2-2z+8+4i}=\bar{0}$$

$$\overline{z^3}+(2+2i)\overline{z^2}-2\bar{z}+8-4i=0$$

$$-z^3+(2+2i)z^2+2z+8-4i=0 \quad \dots(2)$$

بجمع (1) و(2) نجد: $4z^2+16=0$ وبالتالي $\boxed{z=2i}$ الحل التخيلي للمعادلة.

بإستخدام القسمة الإقليدية نجد أن المعادلة (1) تكتب بالشكل: $(z-2i)(z^2+2z+4i-2)=0$

وبالتالي $z^2+2z+4i-2=0$ ...

$$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(4i-2)=4-16i+8=12-16i$$

نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي Δ فنجد : $\begin{cases} x^2-y^2=12 \\ 2xy=-16 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ أي أن $x^2=16$ فتكون $x=\pm 4$

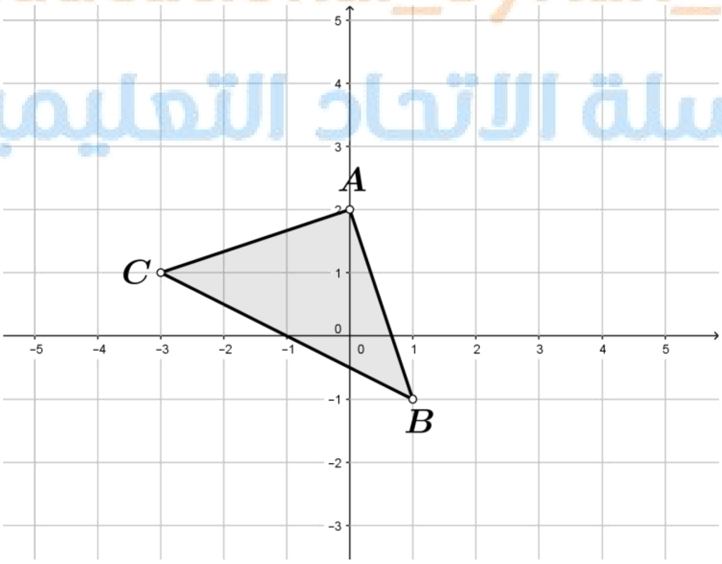
ومنه $y^2=4$ فتكون $y=\pm 2$ وبما أن $x.y<0$ فإن $\Delta=(4-2i)^2$ وبالتالي تكون الحلول:

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+4-2i}{2}=1-i\,,z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-4+2i}{2}=-3+i$$

وبالتالي فإن حلول المعادلة (1) هي: $\{2i,1-i,-3+i\}$

❷ التطبيق الهندسي للمعادلة

① لدينا $A(0,2),B(1,-1),C(-3,1)$ تمثل بالشكل:



$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{AB}(1,-3)\\ \overrightarrow{AC}(-3,-1)\\ \overrightarrow{BC}(-4,2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c}AB=\sqrt{10}\\ AC=\sqrt{10}\\ BC=\sqrt{20}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{smallmatrix}AB=AC\\ BC^2=AB^2+AC^2\end{smallmatrix}\right)$$

فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين رأسه A.

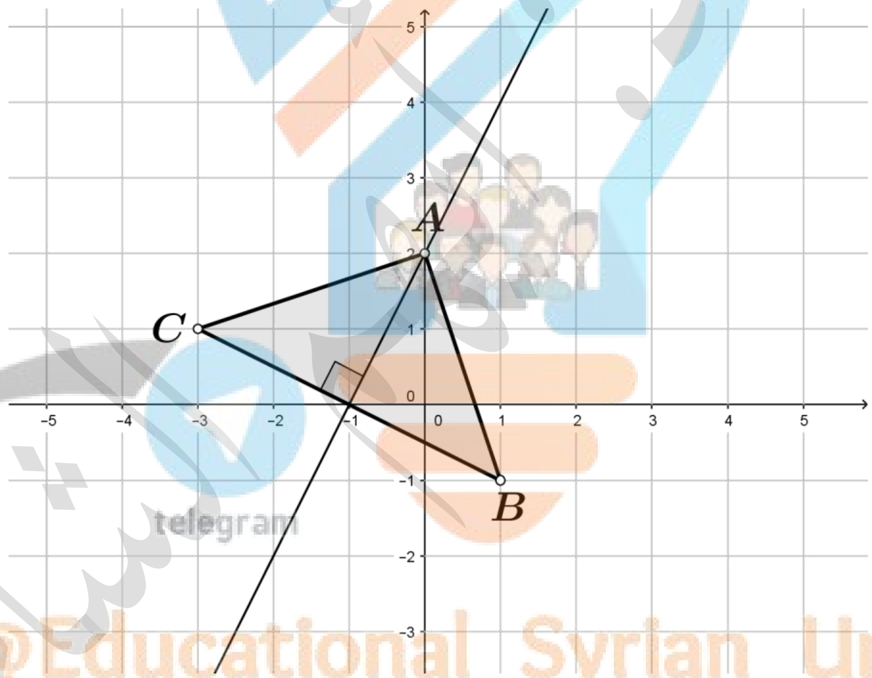
② $$(z+1)(\bar{z}+2i)=(x+iy+1)(x-iy+2i)$$

$$=x^2-xyi+2xi+xyi+y^2-2y+x-iy+2i$$

يكون $(z+1)(\bar{z}+2i)$ عدداً حقيقياً بحتا إذا كان $2x-y+2=0$ وهي معادلة المستقيم d.

③ لدينا $m_{BC}=-\frac{1}{2}$ و $m_d=2$ ومنه $m_{BC}.m_d=-1$ وبالتالي $d\perp BC$ ..

منتصف $[BC]$ هي النقطة $(-1,0)$ وهي تحقق معادلة d وبالتالي فإن d محور الضلع $[BC]$.



❸ التطبيق الجبري للمعادلة

① $$t=\frac{e^{2\theta i}-e^{-2\theta i}}{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}=\frac{2i\sin 2\theta}{2\cos\theta}=i\,\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}=2i\sin\theta$$

المقدار معرّف بشرط $\cos\theta\neq 0$ ومنه $\theta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

بما أن t عدداً تخيلياً بحتاً فهو يجب يطابق حل المعادلة $2i$ وبالتالي فإن $\sin\theta=1$ ومنه

$\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ وهذا مرفوض ، وبالتالي t لا يمكن أن يكون حل للمعادلة (1).

②

$$w=\sqrt{2}.\left(\frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}\right)=\sqrt{2}.\left(\frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}\right)\left(\frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}\right)$$

$$=\sqrt{2}.\frac{(1+\cos\varphi)^2-2\sin\varphi(1+\cos\varphi)i-\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}$$

$$=\sqrt{2}.\frac{(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-2i(\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)}{2(1+\cos\varphi)}$$

$$=\sqrt{2}.\frac{(1+2\cos\varphi+2\cos^2\varphi-1)-2i\sin\varphi(1+\cos\varphi)}{2(1+\cos\varphi)}$$

$$=\sqrt{2}.\frac{2\cos\varphi(1+\cos\varphi)-2i\sin\varphi(1+\cos\varphi)}{1+\cos\varphi}$$

$$=\sqrt{2}.(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

يكون المقدار

موجوداً بشرط $1+\cos\varphi+i\sin\varphi\neq 0$ أي أن:

$$\left.\begin{array}{r}1+cos\,\varphi\neq 0\\ sin\,\varphi\neq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow \varphi\neq\pi+2\pi k$$

لا يمكن أن يكون w مساوياً $2i$ لأنه ليس تخيلياً بحتاً ، وإذا كان مساوياً $-3+i$ لا يمكن تعيين φ لأنها ليست نسب لزاوية شهيرة ، أما إذا كان مساوياً $1-i$ فإن $\varphi=\frac{\pi}{4}$

③ في حالة : $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ، فإن w يكتب بالشكل: $w=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ وبالتالي:

$$w^{100}=2^{50}.\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{100}=2^{50}.e^{25\pi i}=-2^{50}$$

بالتوفيق للجميع	انتهى الحل	أيهم الشاعر

المدة : ساعة ونصف	اختبار وحدة	الجزء الثاني
الدرجة : 300	تطبيقات الأعداد العقدية	الثالث الثانوي العلمي

حل المسائل التالية:

المسألة الأولى: في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد العقدية التالية: $a = -1 + i \ , \ b = 2 - i \ , \ c = 1 + 4i$ ، والمطلوب:

① اكتب العدد العقدي $\dfrac{c-a}{b-a}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي ، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

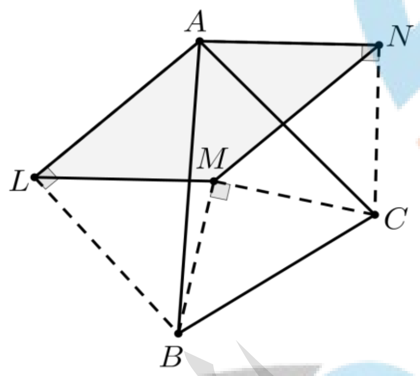
② عيّن ε مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل $\dfrac{c-m}{b-m}$ عدداً تخيلياً بحتاً ، حيث $z \neq b$.

③ عيّن $\mathcal{F}$ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل $\dfrac{c-m}{b-m}$ عدداً حقيقياً ، حيث $z \neq b$.

المسألة الثانية: ABC مثلث مباشر التوجيه

النقاط N, M, L التي تجعل المثلثات المباشرة التوجيه ACN, BCM, BAL قائمة ومتساوية الساقين

أثبت أن الرباعي $ALMN$ متوازي أضلاع.

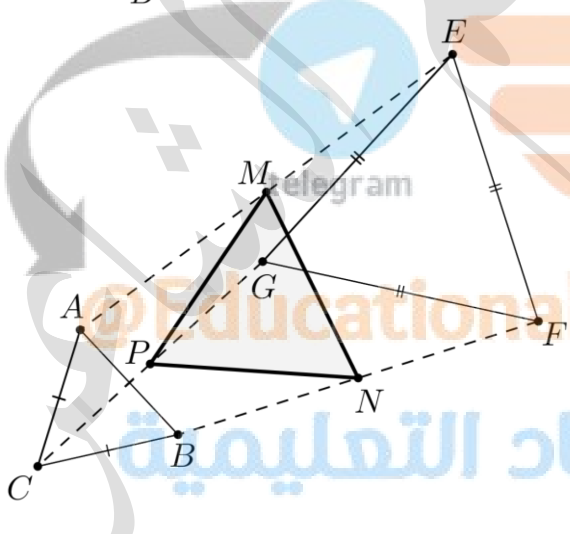


المسألة الثالثة: في الشكل المجاور:

$ABC \ , EFG$ مثلثان متساويي الأضلاع

النقاط M, N, P منتصفات الأضلاع $[AE], [BF], [CG]$ بالترتيب

أثبت أن المثلث MNP متساوي الأضلاع.



أيهم الشاعر	انتهت الأسئلة	بالتوفيق للجميع

الجزء الثاني	**اختبار وحدة**	**المدة : ساعة ونصف**
الثالث الثانوي العلمي	**تطبيقات الأعداد العقدية**	**الدرجة : 300**

حل المسائل التالية:

المسألة الأولى:

① $$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1+4i+1-i}{2-i+1-i}=\frac{2+3i}{3-2i}=\frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{6+4i+9i-6}{9+4}=i$$

$\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1$, $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

② الشرط هو $\frac{c-m}{b-m}=-\frac{\bar{c}-\bar{m}}{\bar{b}-\bar{m}}$ ومنه $(c-m)(\bar{b}-\bar{m})=-(b-m)(\bar{c}-\bar{m})$ وبالتالي

$$c\bar{b}-c\bar{m}-m\bar{b}+m\bar{m}=-b\bar{c}+b\bar{m}+m\bar{c}-m\bar{m}$$

$$(1+4i)(2+i)-(1+4i)(x-iy)-(x+iy)(2+i)+(x+iy)(x-iy)=$$
$$-(2-i)(1-4i)+(2-i)(x-iy)+(x+iy)(1-4i)-(x+iy)(x-iy)$$

$$-2+9i-x+iy-4ix-4y-2x-xi-2iy+y+x^2+y^2=$$
$$2+9i+2x-2iy-ix-y+x-4ix+iy+4y-x^2-y^2$$

$$-2-x-4y-2x+y+x^2+y^2=2+2x-y+x+4y-x^2-y^2$$

$$2x^2+2y^2-6x-6y-4=0$$

$$x^2+y^2-3x-3y-2=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

وهي معادلة دائرة مركزها $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{13}{2}}$ محذوف منها النقطة $(2,-1)$

③ الشرط هو $\frac{c-m}{b-m}=\frac{\bar{c}-\bar{m}}{\bar{b}-\bar{m}}$ ومنه $(c-m)(\bar{b}-\bar{m})=(b-m)(\bar{c}-\bar{m})$ وبالتالي

$$c\bar{b}-c\bar{m}-m\bar{b}+m\bar{m}=b\bar{c}-b\bar{m}-m\bar{c}+m\bar{m}$$

$$(1+4i)(2+i)-(1+4i)(x-iy)-(x+iy)(2+i)=(2-i)(1-4i)-(2-i)(x-iy)-(x+iy)(1-4i)$$

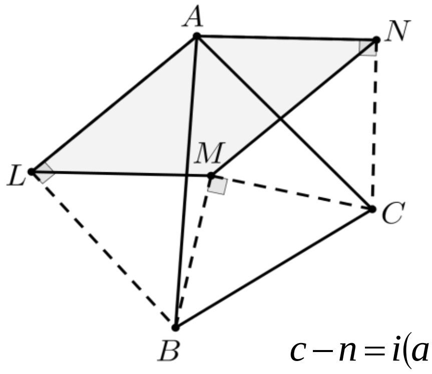
$$-2+9i-x+iy-4ix-4y-2x-xi-2iy+y=-2-9i-2x+2iy+ix+y-x+4ix-iy-4y$$

$$9i+iy-4ix-xi-2iy=-9i+2iy+ix+4i-iy$$

$$(2y+10x-18)i=0\Rightarrow y+5x-9=0$$

وهي معادلة مستقيم محذوف منه النقطة $(2,-1)$

المسألة الثانية:



نفرض $(A,\vec{u},\vec{v})$ معلم كيفي :

في المثلث القائم والمتساوي الساقين ACN لدينا C صورة A

وفق دوران مركزه N وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والصيغة العقدية للدوران:

$$c-n=i(a-n)\Rightarrow c-n=-in\Rightarrow n=\frac{c}{1-i}=\frac{c}{2}(1+i)$$

في المثلث القائم والمتساوي الساقين ABL لدينا A صورة B وفق دوران مركزه L وزاويته $\frac{\pi}{2}$

والصيغة العقدية للدوران:

$$a-l=i(b-l)\Rightarrow -l=ib-il\Rightarrow l(-1+i)=ib\Rightarrow l=\frac{ib}{-1+i}=\frac{b}{2}(1-i)$$

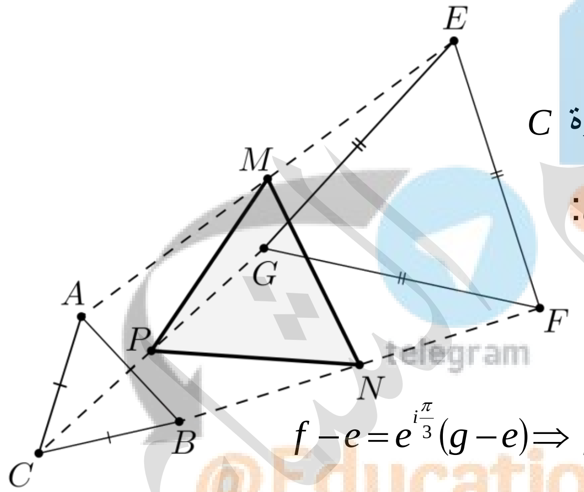
في المثلث القائم والمتساوي الساقين BCM لدينا C صورة B وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$

والصيغة العقدية للدوران:

$$c-m=i(b-m)\Rightarrow c-m=ib-im\Rightarrow m(-1+i)=ib-c\Rightarrow m=\frac{ib-c}{-1+i}=\frac{b}{2}(1-i)+\frac{c}{2}(1+i)$$

لدينا: $m-l=\frac{c}{2}(1+i)=n-a$ وبالتالي $\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{AN}$ أي أن الرباعي $ANML$ متوازي أضلاع.

المسألة الثالثة:



نفرض $(A,\vec{u},\vec{v})$ معلم كيفي :في المثلث ABC لدينا B صورة C

وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ والصيغة العقدية للدوران:

$$b-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)\Rightarrow b=e^{i\frac{\pi}{3}}c$$

في المثلث EFG لدينا F صورة G وفق دوران مركزه

E وزاويته $\frac{\pi}{3}$ والصيغة العقدية للدوران: $f-e=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-e)\Rightarrow f=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-e)+e$

لدينا M منتصف AE أي : $m=\frac{e}{2}$ و P منتصف CG أي : $p=\frac{c+g}{2}$

و N منتصف BF أي : $n=\frac{b+f}{2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(c+g-e)+e}{2}$ وبالتالي نجد أن:

$$n-m=\frac{b+f-e}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{c+g-e}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}(p-m)$$

وبالتالي نستنتج أن المثلث MNP متساوي الأضلاع

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

الجزء الثاني	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	التحليل التوافقي	الدرجة : 300

السؤال الأول: حل التمرينات التالية:

1) مضلع محّدب عدد أضلاعه n حيث $n \geq 3$، ما عدد المثلثات التي تمر من رؤوس المضلع.

2) إذا كان n,m عددين طبيعيان يحققان $n \geq m$ أثبت أن $n\binom{m}{n} = m\binom{m-1}{n-1}$.

3) عيّن الحد المختلف عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ ، ما هي أمثال x^3 في هذه المنشور؟

4) أوجد قيمة العدد الطبيعي n الذي تحقق $\binom{n}{3}+\binom{2n}{2}=8n$

السؤال الثاني: حل المسألتين التاليتين:

المسألة الأولى: تتكون مجموعة من الأشخاص من أربع نساء وثمانية رجال بين شخص يسمى أحمد نريد اختيار لجنة مكونة من ثلاث أشخاص ، والمطلوب:

1) ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها من هذه المجموعة.

2) ما عدد اللجان التي التي تحوي ثلاث رجال.

3) ما عدد اللجان التي تحوي رجل واحد على الأقل.

4) ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث يكون أحمد رئيس اللجنة.

المسألة الثانية: صندوق يحوي أربع كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء وكرتين خضراء ، نسحب ثلاث كرات معاً من الصندوق ، والمطلوب:

1) بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث كرات من لون واحد.

2) بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث كرات مختلفة اللون.

3) بكم طريقة يمكن اختيار كرة خضراء واحدة على الأكثر.

4) أعد حل الطلبات السابقة في حال كان السحب **مع إعادة.**

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

المدة : ساعة ونصف	اختبار وحدة	الجزء الثاني
الدرجة : 300	التحليل التوافقي	الثالث الثانوي العلمي

السؤال الأول:

① $$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

② $$n\binom{m}{n}=n.\frac{m!}{(m-n)!.n!}=n.\frac{m.(m-1)!}{(m-n)!.n.(n-1)!}=m.\frac{(m-1)!}{(m-n)!.(n-1)!}=m\binom{m-1}{n-1}$$

③ لدينا $T_r=\binom{12}{r}(x^2)^{12-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{12}{r}.x^{24-3r}$ وبالتالي الحد المختلف عن x يحقق $24-3r=0\Rightarrow r=8$

وهو $T_8=\binom{12}{8}=\binom{12}{4}=\frac{12.11.10.9}{4.3.2.1}=495$

أما أمثال x^3 فتحقق $24-3r=3\Rightarrow r=7$ وهو: $T_7=\binom{12}{7}=\binom{12}{5}=\frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1}=792$

④ $\binom{n}{3}+\binom{2n}{2}=8n$ محققة بشرط $n\geq 3$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{2n(2n-1)}{2}=8n\Rightarrow\frac{(n-1)(n-2)}{6}+(2n-1)=8\Rightarrow\frac{n^2-3n+2}{6}=9-2n$$
$$\Rightarrow n^2-3n+2=54-12n\Rightarrow n^2+9n-52=0\Rightarrow(n+13)(n-4)=0\Rightarrow n=4$$

السؤال الثاني:

المسألة الأولى:

① $\binom{12}{3}=\frac{12.11.10}{3.2.1}=220$

② $\binom{8}{3}=\frac{8.7.6}{3.2.1}=56$

③ $\binom{8}{3}+\binom{8}{2}.\binom{4}{1}+\binom{8}{1}.\binom{4}{2}=56+112+48$

④ $\binom{1}{1}.\binom{11}{2}=55$

المسألة الثانية:

① $\binom{4}{3}+\binom{3}{3}=4+1=5$

② $\binom{4}{1}.\binom{3}{1}.\binom{2}{1}=24$

③ $\binom{2}{1}.\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=42+35=77$

④

① $4.4.4+3.3.3+2.2.2=64+27+8=99$

② $4.3.2.3!=24.6=144$

③ $2.7.7.\binom{3}{1}+7.6.5=294+210=504$

بالتوفيق للجميع	**انتهت الأسئلة**	**أيهم الشاعر**

الجزء الثاني	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	الاحتمالات	الدرجة : 300

السؤال الأول: A,B حدثين حيث $P(A)=\frac{3}{8}, P(B)=\frac{5}{8}, P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ والمطلوب:

① احسب: $P(A\cap B), P(A\setminus B), P(A'|B')$.

② تأكد أن الحدثين A,B غير مستقلين احتمالياً.

③ إذا كان $P(A\cup B)=\alpha$ ، عيّن α ليكون الحدثين A,B مستقلين احتمالياً.

السؤال الثاني: ليكن لدينا صندوقين U_1 يحوي ست كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء و U_2 يحوي أربع كرات بيضاء وخمس كرات حمراء ، نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه كرة والمطلوب:

① ارسم تمثيلاً شجرياً يمثل التجربة السابقة.

② ما احتمال سحب كرة بيضاء.

③ إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_1.

السؤال الثالث: يحوي صندوق 8 كرات ثلاث منها حمراء مرقمة 0,1,1 وثلاث خضراء مرقمة 0,1,2 وكرتين بيضاء مرقمة 0,1 ، نسحب عشوائياً ثلاث كرات معاً من الصندوق ونعرّف الحدثين:

A: سحب كرة من كل لون ، B: الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته والمطلوب:

① احسب احتمال كل من الأحداث: $A\cap B$, B , A.

② إذا علمت أن الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته ، ما احتمال أن تكون كل منها من لون مختلف.

③ ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات التي تحمل الرقم واحد ، اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X وتوقعه الرياضي $E(X)$.

④ ليكن Y المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الألوان المختلفة عند كل سحب ، اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y وتوقعه الرياضي $E(Y)$.

⑤ هل المتحولان العشوائيان X,Y مستقلان؟.

السؤال الرابع: أثبتت دراسة أن 60% من سكان مدينة يدخنون و 80% من السكان غير المدخنين يمارسون الرياضة بينما فقط 30% من السكان المدخنين يمارسون الرياضة ، والمطلوب:

① نختار عشوائياً شخصاً من المدينة احسب احتمال كل من الأحداث:
مدخن ، مدخن ويمارس الرياضة ، غير مدخن ولا يمارس الرياضة.

② إذا أردنا اختيار n شخص ونعرّف $p_n=P(S_n)$ احتمال أن يكون الشخص عند الاختيار n يمارس الرياضة ، فإذا كان عند هذا الاختيار الشخص يمارس الرياضة فإن احتمال أن يكون الشخص التالي ممن يمارسون الرياضة 0.75 بينما إذا كان هذا الشخص ممن لا يمارسون الرياضة فإن احتمال أن يكون الشخص التالي ممن يمارسون الرياضة 0,5 والمطلوب:

❶ أثبت أن $p_{n+1}=\frac{1}{4}(p_n+2)$.

❷ نعرّف المتتالية $u_n=3p_n-2$ أثبت أن المتتالية u_n هندسية ، عيّن حدها الأول وأساسها.

❸ اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n\to\infty} p_n$.

بالتوفيق للجميع	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

المدة : ساعة ونصف	**اختبار وحدة**	**الجزء الثاني**
الدرجة : 300	**الاحتمالات**	**الثالث الثانوي العلمي**

السؤال الأول:

① $$P(A\cup B)=\frac{3}{4},P(B)=\frac{5}{8},P(A)=\frac{3}{8}$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(A'\mid B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{1-P(A\cup B)}{P(B')}=\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$$

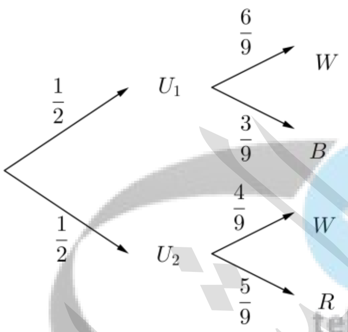
② $P(A)P(B)=\frac{15}{64}\neq P(A\cap B)$ وبالتالي الحدثين A,B غير مستقلين احتمالياً.

③ إذا كان الحدثين A,B مستقلين احتمالياً فإن $P(A\cap B)=\frac{15}{64}$ وبالتالي:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-\frac{15}{64}=\frac{49}{64}$ ومنه $\alpha=\frac{49}{64}$

السؤال الثاني:

①



② $$P(W)=P(W\cap U_1)+P(W\cap U_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

③ $$P(U_1|W)=\frac{P(U_1\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{3}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

السؤال الثالث:

①

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{18}{56}\quad,\quad P(B)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{5}{56}\quad,\quad P(A\cap B)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}+\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{3}{56}$$

② $$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{56}}{\frac{5}{56}}=\frac{3}{5}$$

③

$$X=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4}{56} \quad , \quad P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{24}{56} \quad , \quad P(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{24}{56} \quad , \quad P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4}{56}$$

ومنه

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

وبالتالي: $E(X)=\frac{0+24+48+12}{56}=\frac{84}{56}=1,5$

④ $Y=\{1,2,3\}$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{2}{56} \quad , \quad P(X=3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{18}{56} \quad , \quad P(X=2)=1-(P(X=1)+P(X=3))=\frac{36}{56}$$

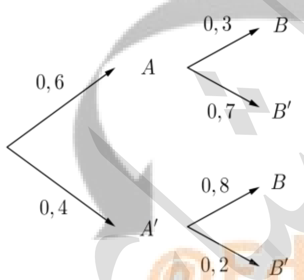
ومنه

k	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{2}{56}$	$\frac{36}{56}$	$\frac{18}{56}$

وبالتالي: $E(X)=\frac{2+72+54}{56}=\frac{128}{56}\approx 2,3$

⑤ $P((X=3)\cap(Y=1))=0\neq P(X=3).P(Y=1)$ وبالتالي المتحولان العشوائيان $X\,,Y$ غير مستقلان

السؤال الرابع:



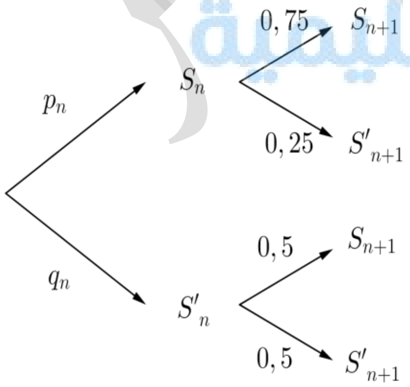
① نفرض الحدث A الشخص مدخن

الحدث B الشخص يمارس الرياضة وبالتالي:

$P(A)=0,6 \quad , \quad P(A\cap B)=(0,6)(0,3)=0,18$

$P(A'\cap B')=(0,4)(0,2)=0,08$

② ❶



$p_{n+1}=P(S_{n+1})$

$=P(S_{n+1}\cap S_n)+P(S_{n+1}\cap S'_n)$

$=0,75p_n+0,5q_n=0,75p_n+0,5(1-p_n)$

$=0,25p_n+0,5=\frac{1}{4}(p_n+2)$

❷ $u_{n+1}=3p_{n+1}-2=3\left(\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}\right)-2=\frac{3}{4}p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(3p_n-2)=\frac{1}{4}u_n$

وبالتالي المتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $u_1=3p_1-2$

❸ $u_n=u_1.q^n=(3p_1-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه $p_n=\frac{1}{3}(u_n+2)=\frac{1}{3}\left((3p_1-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\right)$

وبما أن أساس المتتالية u_n يحقق $q=\frac{1}{4}<1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}u_n=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}p_n=\frac{2}{3}$

بالتوفيق للجميع	**انتهت الأسئلة**	**أيهم الشاعر**

انتهى حل جميع الاختبارات

بالعلم تبنى الأوطان

بالتوفيق للجميع

أيهم الشاعر 2017/05/30