الأعداد العقدية

- فرضية أويلر: $(i)^2 = -1$
- مجموعة الأعداد العقدية:

كل عدد يكتب بالشكل

$$\boxed{Z = x + iy}$$

نسمي هذا الشكل بالشكل الجبري للعدد العقدي

- نسمي x: بالقسم الحقيقي لـ Z نرمز له بـ $Re(Z)$
- نسمي y: بالقسم التخيلي لـ Z ونرمز له بـ $Im(Z)$.

• أمثلة:

أعداد عقدية مركبة:

$Z_1 = 5 + 2i$

$Z_2 = -3 + 4i$

$Z_3 = -5 - 7i$

أعداد عقدية تخيلية بحتة:

$Z_4 = 3i$

$Z_5 = -\frac{1}{2} i$

أعداد عقدية حقيقية:

$Z_6 = 3$

$Z_7 = -\frac{1}{2}$

$Z_8 = 0$

$Z_9 = \sqrt{3}$

• مرافق عدد عقدي:

إذا كان $Z = x + iy$

فإن مرافقه $\overline{Z} = x - iy$

أمثلة:

Z	$\overline{Z}$
$3+4i$	$3-4i$
$-2-5i$	$-2+5i$
$3-i$	$3+i$
$2i-4$	$-2i-4$
$5i$	$-5i$
2	2
0	0

• مرافق مقدار:

أوجد مرافق المقدار:

1) $w = Z + 2i - 3$

$\overline{w} = \overline{Z} - 2i - 3$

2) $w = \dfrac{Z^2 - 2Z}{\overline{Z} + 3}$

$\overline{w} = \dfrac{\overline{Z}^2 - 2\overline{Z}}{Z + 3}$

3) $w = \dfrac{\overline{Z} - i}{iZ + 1}$

$\overline{w} = \dfrac{Z + i}{-iZ + 1}$

• طويلة عدد عقدي:

إذا كان $Z = x + iy$

فإن $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$

أمثلة:

Z	$\lvert Z\rvert$
$Z = 3+4i$	$\lvert Z\rvert = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$Z = 1-\sqrt{3}\,i$	$\lvert Z\rvert = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
$Z = 3-i$	$\lvert Z\rvert = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
$Z = 3i$	$\lvert Z\rvert = \sqrt{9} = 3$
$Z = 4$	$\lvert Z\rvert = \sqrt{16} = 4$

• خواص الطويلة والمرافق:

1. $Z + \bar{Z} = 2x$
2. $Z - \bar{Z} = 2iy$
3. $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2 = x^2 + y^2$
4. $\bar{Z} = Z \iff$ Z حقيقي
5. $\bar{Z} = -Z \iff$ Z تخيلي بحت
6. $\bar{Z} = \frac{1}{Z} \iff |Z| = 1$

بعده عن المبدأ (1) يقع على دائرة مركزها (O) ونصف قطرها (1).

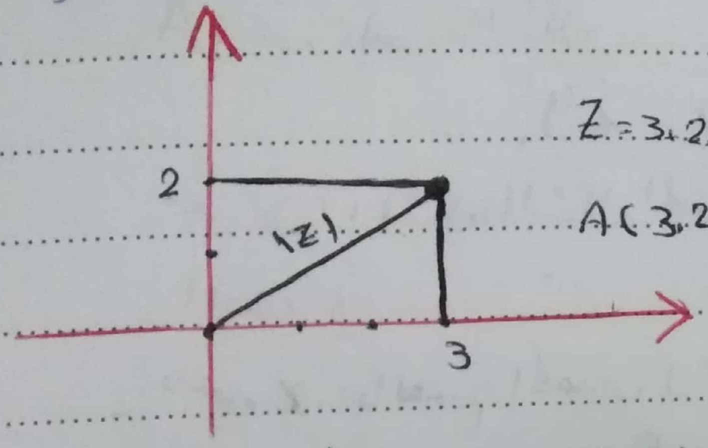
• تمثيل العدد العقدي:

إذا كان $Z = x + iy$

نمثل العدد العقدي بالنقطة $A(x,y)$

$Z = 3+2i$

$A(3,2)$



$|Z|$ هو البعد عن المبدأ.

تمرين (1): ليكن u عدد عقدي طويلته (1)، وليكن Z عدد عقدي

$$w = \frac{Z + u\bar{Z}}{1+}$$

أثبت أن w حقيقي

$$\bar{w} = \frac{\bar{Z} + \bar{u}Z}{1+\bar{u}}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{u} \Longleftarrow$$ لأن $|u| = 1$

$$\bar{w} = \frac{\bar{Z} + \frac{Z}{u}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{u}}$$

$$= \frac{\frac{u\bar{Z}+Z}{u}}{\frac{u+1}{u}}$$

$$= \frac{u\bar{Z}+Z}{u+1}$$

لما $\bar{w} = w$ فإن w حقيقي

حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

① $Z^2 + 9 = 0$

$Z^2 = -9$

$Z = 3i \qquad Z = -3i$

② $Z^3 + Z = 0$

$Z(Z^2 + 1) = 0$

إما $Z = 0$

أو $Z^2 + 1 = 0 \Rightarrow Z^2 = -1$

$Z = \mp i$

③ $Z^2 + 4Z + 5 = 0$

$a = 1 \quad b = 4 \quad c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 16 - 20 = -4$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2i}{2}$

$= -2 + i$

$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2i}{2}$

$= -2 - i$

تمرين ②: [illegible] Z [illegible]

M و Z' [illegible] M'

[illegible] M

$Z' = \frac{Z + 2i}{1 - 2iZ}$ (1)

بيّن أنه إذا كانت M [illegible] M' [illegible]

$\overline{Z'} = \frac{\overline{Z} - 2i}{1 + 2i\overline{Z}}$

$M \in \Gamma \Rightarrow |Z| = 1 \Rightarrow \overline{Z} = \frac{1}{Z}$

$= \frac{\frac{1}{Z} - \frac{2i}{1}}{\frac{1}{1} + \frac{2i}{Z}} = \frac{\frac{1 - 2iZ}{Z}}{\frac{Z + 2i}{Z}}$

$\overline{Z'} = \frac{1 - 2iZ}{Z + 2i} = \frac{1}{Z'}$

$M' \in \Gamma \Leftarrow |Z'| = 1$ إذن

تمرين

W, Z عددان مركبان أثبت أن

$|W + Z|^2 + |W - Z|^2 = 2|W|^2 + 2|Z|^2$

$L_1 = |W + Z|^2 + |W - Z|^2$

$= (W + Z)(\overline{W} + \overline{Z}) + (W - Z)(\overline{W} - \overline{Z})$

$= W\overline{W} + \cancel{W\overline{Z}} + \cancel{Z\overline{W}} + Z\overline{Z} + W\overline{W} - \cancel{W\overline{Z}}$

$- \cancel{Z\overline{W}} + Z\overline{Z}$

$= 2W\overline{W} + 2Z\overline{Z}$

$= 2|W|^2 + 2|Z|^2$

$= L_2$

/ /

$4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$-2y = 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

$Z = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} i$

تمرين

$\frac{Z+3}{\overline{Z}-1} = 2 + i$

$(Z+3)(1) = (2+i)(\overline{Z}-1)$

$Z+3 = 2\overline{Z} - 2 + i\overline{Z} - i$

$Z - 2\overline{Z} - i\overline{Z} = -5 - i$

نفرض $Z = x+iy$, $\overline{Z} = x-iy$

$x+iy - 2(x-iy) - i(x-iy) = -5 - i$

$-x + 3iy - ix - y = -5 - i$

$-x - y + i(3y - x) = -5 - i$

بالمطابقة

$$\begin{cases} -x - y = -5 \quad \cdots (1) \\ 3y - x = -1 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ (-1) ونجمع

$4y = 4 \Rightarrow y = 1$

نعوض في (1) نجد:

$-x - 1 = -5$

$x = 4 \Rightarrow Z = 4 + i$

تمرين

$5Z^2 - 2Z + 1 = 0$

$a = 5 \quad b = -2 \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 - 20$

$\Delta = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i$

$Z_1 = \frac{2+4i}{10} = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} i$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$

$Z_2 = \frac{2-4i}{10} = \frac{2}{10} - \frac{4}{10} i$

$= \frac{1}{5} - \frac{2}{5} i$

تمرين

$Z + 3\overline{Z} = 1 + 3i$

ملاحظة

لما تكون Z و $\overline{Z}$ بنفس المعادلة
نفرض $Z = x+iy$, $\overline{Z} = x-iy$
ثم نشكل معادلتين في x, y

نفرض $Z = x+iy$, $\overline{Z} = x-iy$

$x+iy + 3(x-iy) = 1+3i$

$x+iy + 3x - 3iy = 1+3i$

$4x - 2iy = 1 + 3i$

العمليات على الأعداد العقدية :

① الجمع والطرح : هو جمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي .

مثال :

$Z_1 = 3 - i \quad , \quad Z_2 = 5 + 3i$

احسب : $Z_1 + Z_2 \; , \; Z_1 - Z_2 \; , \; 3Z_1 - 4Z_2$

$Z_1 + Z_2 = 8 + 2i$

$Z_1 - Z_2 = 3 - i - 5 - 3i$

$= -2 - 4i$

$3Z_1 - 4Z_2 = 3(3 - i) - 4(5 + 3i)$

$= 9 - 3i - 20 - 12i$

$= -11 - 15i$

② الضرب : نستخدم الطريقة النشر ولا ننسى i^2

مثال :

$Z_1 = 2 - 3i \quad , \quad Z_2 = 4 + 5i$

احسب $Z_1 . Z_2 \qquad (Z_1)^2$

$Z_1 . Z_2 = (2 - 3i)(4 + 5i)$

$= 8 + 10i - 12i + 15 = 23 - 2i$

$(Z_1)^2 = (2 - 3i)^2$

$= 4 - 12i + (3i)^2$

$= 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

③ القسمة : لقسمة عددين عقديين نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

مثال :

$Z_1 = 3 - 4i \quad , \quad Z_2 = 5 + i$

احسب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(3-4i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}$$

$$= \frac{15 - 3i - 20i - 4}{25 + 1}$$

$$= \frac{11 - 23i}{26} = \frac{11}{26} - \frac{23}{26} i$$

تدريب : $w = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$

اكتب w بالشكل الجبري

$$w = \frac{(\sqrt{3} + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i + i + 1}{1 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1 + i(-\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$w = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}$$

/ /

- الجذر التربيعي لعدد عقدي:

تمرين: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد

$Z = 3+4i$

أولاً نحسب الطويلة

$|3+4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

نفرض الجذر $x+iy$

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 & \text{الحقيقي (1)} \\ x^2+y^2=5 & \text{الطويلة (2)} \\ 2xy=4 & \text{التخيلي (3)} \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

نعوض في (2) نجد:

$4+y^2=5$

$y^2=1 \Rightarrow y=\mp 1$

حسب (3) $x, y > 0$ من نفس الإشارة

الجذر الأول هو:

$Z_1 = 2+i$

الجذر الثاني هو:

$Z_2 = -2-i$

ت 2: حل المعادلة:

$Z^2+(1-i)Z+4i=0$

الحل:

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (1-i)^2-4(1)(4i)$

$\Delta = 1-2i-1-16i = -18i$

$\Delta = -18i$

$|\Delta| = \sqrt{0+324} = 18$

نفرض $\sqrt{\Delta} = x+iy$

$x^2-y^2=0$ ...... (1)

$x^2+y^2=18$ ...... (2)

$2xy=-18$ ...... (3)

بجمع (1) و (2)

$2x^2=18$

$x^2=9 \Rightarrow x=\mp 3$

نعوض في (2)

$9+y^2=18$

$y^2=9 \Rightarrow y=\mp 3$

حسب (3) $x, y < 0$ من عكس الإشارة

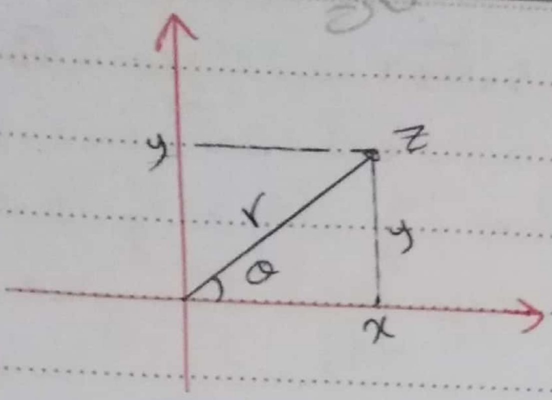
$\sqrt{\Delta} = 3-3i$

$Z_1 = \frac{-1+i+3-3i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$

$Z_2 = \frac{-1+i-3+3i}{2} = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i$

/ /

90 دون تحويل
180 دون تحويل



$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\sin(\theta) = \frac{y}{r}$

$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$

والشكل المثلثي هو:

$Z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

تمارين:

اكتب بالشكل المثلثي:

① $Z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$Z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

• ملاحظة مهمة

إذا كان Z_1 ، Z_2 حلان للمعادلة:

$aZ^2 + bZ + c = 0$

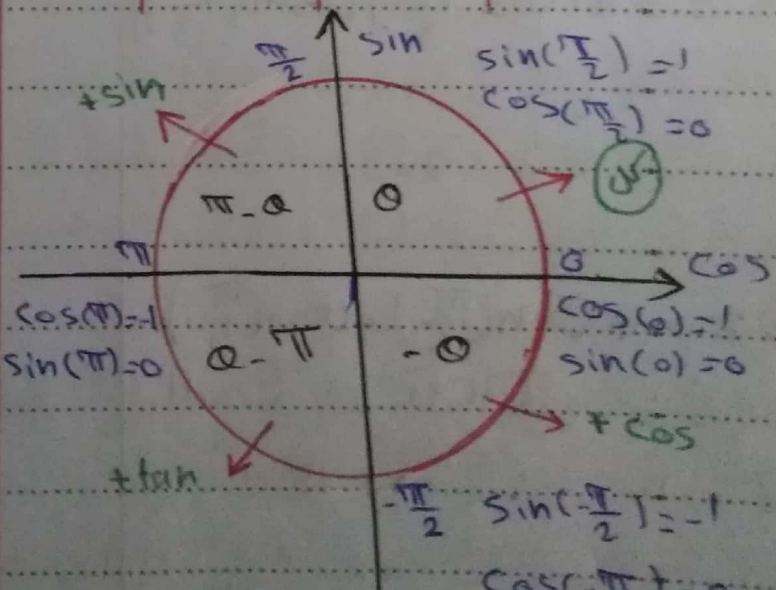
فإن $Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$

$Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a}$

ويكون Z_1 ، Z_2 مترافقان عندما a, b, c أعداد حقيقية

• الشكل المثلثي للعدد العقدي:

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$



Farah Notebook

② $Z = -3 - \sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$

$\cos(\theta) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$Z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

③ $Z = -4 - 4i$

$r = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos(\theta) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4} - \pi$

$\theta = -\frac{3\pi}{4}$

$Z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

④ $Z = -3i$

$r = \sqrt{9} = 3$

$\sin\theta = \frac{-3}{3} = -1$

$\cos\theta = 0$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$

$Z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

تدريب:

اكتب بالشكل الجبري الأعداد:

① $Z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$Z = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

② $Z = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

$Z = 4\left[\left(\frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

$= 2 - 2\sqrt{3}\,i$

③ $Z = 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

اكتب Z بالشكل المثلثي

$Z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right)$

$= 4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)$

/ /

• العمليات على الأعداد المركبة بالشكل المثلثي.

$Z_1 = r_1 (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$

$Z_2 = r_2 (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$

* $Z_1 \mp Z_2$ = لا يوجد قاعدة جمع وطرح مباشرة من الشكل المثلثي.

* $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

نضرب الطويلات — نجمع الزوايا

* $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

نقسم الطويلات — نطرح الزوايا

* $(Z)^n = (r)^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

تدريب: $Z_1 = \sqrt{3} - i$ ، $Z_2 = 1 + i$

1. أوجد Z_1 ، Z_2 بالشكل المثلثي.
2. أوجد $Z_1 \cdot Z_2$ بالشكل المثلثي والجبري.
3. أوجد $(Z_1 \cdot Z_2)^6$ واستنتج أنه تخيلي بحت.
4. استنتج قياس $\cos(\frac{\pi}{12})$ ، $\sin(\frac{\pi}{12})$

$r = \sqrt{3+1} = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ $\quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Z_1 = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

$Z_2 = 1 + i$

$r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$Z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}))$ (2)

$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$

$Z_1 \cdot Z_2$ بالشكل الجبري

$Z_1 \cdot Z_2 = (\sqrt{3} - i)(1 + i)$

$= \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i - i + 1$

$Z_1 \cdot Z_2 = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

(3)

$(Z_1 \cdot Z_2)^6 = (2\sqrt{2})^6 [\cos(6 \times \frac{\pi}{12}) + i\sin(6 \times \frac{\pi}{12})]$

$= 64 \times 8 [\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})]$

$= 512 [0 + i(1)]$

$= 512i$

وهو تخيلي بحت

④ من الشكل الجبري $x = \sqrt{3} - 1$, $y = \sqrt{3} + 1$

من الشكل المثلثي $r = 2\sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{12}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$, $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

• الشكل الأسي للعدد العقدي

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin(\theta) = \frac{y}{r}$ $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$

$Z = r \cdot e^{i(\theta)}$

حيث $e^{i(\theta)} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

مرافقه:

$\overline{Z} = r \cdot e^{i(-\theta)}$

تمرين:

$Z = \sqrt{2} - \sqrt{6}\, i$

اكتب Z بالشكل الأسي واستنتج

$\sqrt{6} + \sqrt{2}\, i$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\sin(\theta) = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$Z = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$\overline{Z} = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

تمرين

$Z = 3 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

اكتب Z بالشكل الجبري.

$Z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$Z = 4 \cdot e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

$= 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$= 4\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$= -2 - 2\sqrt{3}\, i$

• العمليات على الأعداد العقدية بالشكل الأسي:

$Z_1 = r_1 \cdot e^{i(\theta_1)}$

$Z_2 = r_2 \cdot e^{i(\theta_2)}$

$Z_1 \mp Z_2 =$ لا يوجد

Farah Notebook

* $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

* $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

* $(Z)^n = (r)^n \cdot e^{i(n\theta)}$

تمرين:

$W = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$

① اكتب W بالشكل الأسي.

② اكتب W بالشكل الجبري:

③ استنتج $\cos(\frac{\pi}{12})$ ، $\sin(\frac{\pi}{12})$

① $Z_1 = 1+\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{4} = 2 \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$Z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{3})}$

$Z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$r = \sqrt{4} = 2 \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{4})}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{2} e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{12})}$

② $W = \frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}$

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{6}}{2+2}$

$W = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

تمرين: اكتب الأعداد الآتية بالشكل الأسي:

① $Z = (-1-i)^3 \cdot e^{i(\frac{\pi}{3})}$

$Z_1 = -1-i$

$r = \sqrt{2}$

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$

$Z_1 = \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{3\pi}{4})}$

$(Z_1)^3 = (\sqrt{2})^3 . e^{i\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$

$= 2\sqrt{2}\ e^{i\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$

2- $Z = -4 . e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$Z_1 = -4 \qquad r = \sqrt{16} = 4$

$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = -1 \end{array}\right\} \theta = \pi$

$Z_1 = 4 . e^{(\pi)}$

$\Rightarrow Z = 4 . e^{i(\pi)} . e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$= 4 . e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$

$= 4 . e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

/ /

• دستور دي موافر:

$$[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

تمرين:

اكتب بأبسط شكل ممكن:

$$A = \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]^4$$

حسب دي موافر:

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 + i(1)$$

$$= i$$

$$B = \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^3$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right]^3$$

$$= \left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right]^3$$

$$= \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

$$C = \frac{\cos(5x)+i\sin(5x)}{\cos(2x)+i\sin(2x)}$$

$$= \frac{(\cos(x)+i\sin(x))^5}{(\cos(x)+i\sin(x))^2}$$

$$= (\cos(x)+i\sin(x))^3$$

$$= \cos(3x)+i\sin(3x)$$

• دستور أويلر:

$$e^{i(\theta)} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(\theta)-i\sin(\theta)$$

بالجمع:

$$e^{i(\theta)}+e^{i(-\theta)} = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i(\theta)}+e^{i(-\theta)}}{2}$$

بالطرح:

$$e^{i(\theta)}-e^{i(-\theta)} = 2i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i(\theta)}-e^{i(-\theta)}}{2i}$$

تمرين: اكتب بدلالة $\sin(\theta)$، $\cos(\theta)$ كل مما يلي:

$$A = e^{i(\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\pi}{3})} - e^{i(-\frac{\pi}{3})} + e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{4})} + e^{i(-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\pi}{3})} - e^{i(-\frac{\pi}{3})}$$

$$= 2\cos(\frac{\pi}{4}) + 2i\sin(\frac{\pi}{3})$$

$$B = e^{i(\frac{2\pi}{5})} + e^{i(\frac{8\pi}{5})}$$

$$= e^{i(\frac{2\pi}{5})} + e^{i(\frac{10\pi - 2\pi}{5})}$$

$$= e^{i(\frac{2\pi}{5})} + e^{i(2\pi - \frac{2\pi}{5})}$$

$$= e^{i(\frac{2\pi}{5})} + e^{i(-\frac{2\pi}{5})}$$

$$= 2\cos(\frac{2\pi}{5})$$

مسألة مهمة:

$$W = 1 + e^{i(\frac{\pi}{4})}$$

① اكتب W بالشكل الجبري واحسب $|W|$

② احسب $\arg(W)$ واكتب W بالشكل الأسي

③ استنتج قيمة $\cos(\frac{\pi}{8})$ ، $\sin(\frac{\pi}{8})$

①

$$W = 1 + \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})$$

$$W = \frac{1}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|W| = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|W| = \sqrt{\frac{4+4\sqrt{2}+2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$|W| = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

②

$$W = 1 + e^{i(\frac{\pi}{4})}$$

$$= 1 + e^{i(\frac{\pi}{8})} \cdot e^{i(\frac{\pi}{8})}$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{8})}\left[\frac{1}{e^{i(\frac{\pi}{8})}} + e^{i(\frac{\pi}{8})}\right]$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{8})}\left[\underbrace{e^{i(-\frac{\pi}{8})} + e^{i(\frac{\pi}{8})}}_{\text{أويلر}}\right]$$

$$W = 2\cos(\frac{\pi}{8}) \cdot e^{i(\frac{\pi}{8})}$$

$$\Rightarrow \arg(W) = \frac{\pi}{8}$$

و الشكل الأسي لـ W هو:

$$W = \sqrt{2+\sqrt{2}}\, e^{i(\frac{\pi}{8})}$$

3) من الشكل الجبري لـ w :

$$x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{\pi}{8}$$ من الاسي

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

تمرين :

$$w = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i$$

1) اكتب w بالشكل الأسي

2) اوجد الجذور التكعيبية للعدد w .

(1)

$$w = 8\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

(2) نفرض ان الجذر التكعيبي لـ w هو

$$Z = r\, e^{i(\theta)}$$

$$Z^3 = w$$

$$r^3\, e^{i(3\theta)} = 8\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

بالمقارنة :

$$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

فالجذور التكعيبية هي

$$Z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)}$$

حيث $K = 0, 1, 2$

$$K = 0 \Rightarrow Z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$k = 1 \Rightarrow Z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{9\pi}{12}\right)}$$

$$K = 2 \Rightarrow Z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$$