

مراجع لكافة طلاب الجامعات السورية

محاضرات - سلايدات - اختبارات

مناهج عربية



arabeducationsite.com

بحوث العمليات في المحاسبة

تأليف

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| أ.د. عبد المنعم فليح عبد الله | أ.د. خالد عبد المنعم زكي لبيب |
| أستاذ محاسبة التكاليف | أستاذ المراجعة |
| كلية التجارة - جامعة القاهرة | كلية التجارة - جامعة القاهرة |
| د. طه الطاهر إبراهيم | د. محمد عبد العظيم حسن |
| أستاذ المحاسبة المساعد | مدرس المحاسبة |
| كلية التجارة - جامعة القاهرة | كلية التجارة - جامعة القاهرة |

الطبعة الثانية : الإصدار الأول

الناشر: جهاز الكتب - كلية التجارة - جامعة القاهرة

١٤٣٩ هـ - ٢٠١٨ م.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَنَضَعُ الْمَوَازِينَ الْقِسْطَ لِيَوْمِ الْقِيَامَةِ فَلَا
تُظْلَمُ نَفْسٌ شَيْئًا وَإِنْ كَانَ مِثْقَالَ حَبَّةٍ مِنْ
خَرْدَلٍ أَتَيْنَا بِهَا وَكَفَى بِنَا حَاسِبِينَ

سورة الأنبياء: آية رقم ٤٧

مقدمة:

الحمد لله رب العالمين، نحمده ونستعينه ونستغفره، ونعوذ بالله من شرور أنفسنا ومن سيئات أعمالنا؛ إنه من يهده الله فلا مضل له، ومن يضلل فلا نجاد له. ولياً مرشداً. والصلاة والسلام الأتمان الأكملان على سيد ولد آدم، وخير البشر، وخير خلق الله تعالى، ومصطفاه، سيدنا ونبينا وقره أعيننا سيدنا محمد بن عبد الله، بلغ الرسالة، وأدى الأمانة، وجاهد في سبيل ربه حتى أتاه اليقين، فاللهم اجزه عنا وعن الديننا وعن الإسلام والمسلمين خير ما جزيته به نبياً عن أمته، ورسولاً عن قومه، واجمع بيننا وبينه، كما آمانا به ولم نره، ولا تفرق بيننا وبينه حتى تدخلنا مدخله، وأوردنا حوضه الطاهر المورود، واسقنا من يده الشريفة شربةً هنيئةً لا نظماً بعدها أبداً، اللهم أحيينا على سنته وأمتنا على ملته، واجعل صلاتنا ونسكنا وسائر أعمالنا وخواتمنا خالصةً مخلصاً لوجهك الكريم، وتقبلها منا في الصالحين.

أما بعد؛ فلقد أصبح استخدام النماذج - خاصة الرياضية منها - أمراً ضرورياً، في أغراض اتخاذ القرارات، نتيجة لتعدد مشكلات اتخاذ القرارات، وتعدد المتغيرات التي تتضمنها، وعلاقات الارتباط المتشابكة بين هذه المتغيرات، بالإضافة إلى ظروف عدم التأكد التي تسود معظم حالات اتخاذ القرارات.

هذا، وتهتم بحوث العمليات بتطبيق المنهج العلمي في حل المشكلات واتخاذ القرارات. وهي تعتمد في ذلك على الله تعالى، ثم على مجموعة من النماذج الرياضية والإحصائية. ولذلك فلقد أصبح من الضروري أن يكون المحاسب ملماً بنماذج بحوث العمليات، حتى يمكن توفير المعلومات الملائمة، كمدخلات لهذه النماذج. وذلك بالإضافة إلى أنه يمكن استخدام العديد من نماذج بحوث العمليات في حل المشكلات المحاسبية، كالتخطيط المالي، وإعداد الموازنات التخطيطية، وتسعير التحويلات الداخلية، وكذلك في أغراض الرقابة المحاسبية.

ويهدف هذا الكتاب إلى دراسة مجموعة منتقاة من نماذج وأساليب بحوث العمليات، بما يخدم المحاسبين والاستخدامات المحاسبية لهذه النماذج، وتقديمها للمحاسبين بالصورة التي تمكنهم من مساعدة الإدارة في ترشيد الكثير من قراراتها.

وقد تم تصميم وبناء هذا المرجع بهدف دراسة مجموعة من الموضوعات الهامة، والتي تتصل اتصالاً وثيقاً بمساعدة المحاسبين على فهم نموذج وأساليب بحوث العمليات، وكيفية تطبيقها، والاستفادة منها في أداء المهام المنوطة بهم؛ وليكون إحدى لبنات تطوير التعليم المحاسبي بالوطن العربي والإسلامي، وبجمهورية مصر العربية بوجه خاص.

وقد حاولنا قدر المستطاع أن نجمع بين منظومتى الحداثة والأصالة، وذلك مع التبسيط غير المخل، بغية تيسير عرض المادة العلمية على أبنائنا من طلاب مرحلة البكالوريوس، وكذلك أبنائنا من طلاب الدراسات العليا، ومزاوي مهنة المحاسبة والمراجعة، المهتمين بالإطلاع على الكتابات الأكاديمية المتخصصة.

رَبَّنَا عَلَيْنَا تَوَكَّلْنَا وَإِلَيْكَ أَنبْنَا وَإِلَيْكَ الْمَصِيرُ (سورة الممتحنة آية رقم ٤)

والله المستعان، وعليه التكلان، وهو ولي التوفيق.

المؤلفون

القاهرة في غرة ربيع أول من عام ١٤٣٩ هـ.

١ من ديسمبر من سنة ٢٠١٧ م.

الفصل الأول الإطار العام لبحوث العمليات: المفاهيم والمبادئ

نشأة وطبيعة بحوث العمليات:

ترجع نشأة بحوث العمليات (Operations Research /OR) في واقع الأمر، إلى تاريخ نشوب الحرب العالمية الثانية، حيث تطور هذا الفرع من فروع المعرفة منذ ذلك التاريخ تطوراً سريعاً، حيث قامت المملكة المتحدة أثناء الحرب العالمية الثانية، بالإستعانة بفريق من العلماء لدراسة المشكلات الاستراتيجية لوسائل الدفاع، وذلك سعياً نحو تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد العسكرية المحدودة. حيث اعتبر تكوين هذا الفريق العلمي بمثابة نقطة البداية لظهور ما يعرف حالياً بمدخل بحوث العمليات، ويرجع سبب إطلاق مصطلح بحوث العمليات، إلى قيام فريق العلماء آنذاك بإجراء أبحاثه علي العمليات الحربية.

وقد أدي نجاح فرق بحوث العمليات العسكرية، إلى قيام رجال الصناعة بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، بمحاولة الاستفادة مما توصلت إليه هذه الفرق. ويمكن القول بأنه من أهم ما ساهم في إدخال بحوث العمليات في الصناعة:

١. قيام كل من: George Dantzig في عام ١٩٤٧م. و Charnes and Cooper في عام ١٩٥١م.، بتقديم نموذج البرمجة الخطية كأسلوب رياضي، يمكن الاعتماد عليه للوصول إلي التوزيع الأمثل للموارد النادرة والمحدودة، وكذلك تقديم طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية، والذي يعد من أهم نماذج بحوث العمليات وأكثرها ملاءمة للتطبيق في منشآت الأعمال.

٢. ظهور واستخدام الحاسبات الإلكترونية، بما لها من قدرات فائقة علي القيام بالعمليات الحسابية المعقدة، والتي تركز عليها معظم أساليب ونماذج بحوث العمليات.

ولقد أثمر ذلك عن تطور مدخل بحوث العمليات بصورة كبيرة، كما تأسست الجمعيات المهنية لبحوث العمليات في كل من: المملكة المتحدة، والولايات المتحدة الأمريكية، وغيرهما من بلدان العالم، كما تم تقديم العديد من أساليب ونماذج بحوث العمليات، مثل نماذج البرمجة الخطية، و برمجة الأهداف، والبرمجة الخطية متعددة الأهداف، ونماذج البرمجة غير الخطية، ونماذج المخزون، ونماذج المباريات ونماذج صفوف الانتظار، وغيرها من الأساليب والنماذج التي تم استخدامها على نطاق واسع، في الكثير من المشكلات الإدارية وأنشطة منشآت الأعمال.

هذا ويعتمد مدخل بحوث العمليات، على تطبيق مبادئ التحليل الكمي، وبناء واستخدام النماذج، في وضع العوامل المركبة - التي ترتبط بمشكلة صنع القرار- في إطار منطقي يسمح بتحليلها تحليلاً علمياً، بهدف الوصول إلى استنتاجات علمية وحلول منطقية، تحقق أفضل النتائج بالنسبة لأهداف منشآت الأعمال.

كما يعتمد مدخل بحوث العمليات على استخدام الحاسب الالكتروني، في معالجة الكم الهائل من العمليات الحسابية والرياضية اللازمة لحل النماذج والوصول إلى حلول المشكلات، الأمر الذي مثل دافعاً جوهرياً لسرعة وانتشار استخدامها، وتعدد وتنوع مجالات تطبيقها.

هذا، وعلى الرغم من أن بحوث العمليات لم تظهر بصورة رسمية، إلا خلال الحرب العالمية الثانية؛ فإنه عندما امتد استخدامها وتطبيقها لمواجهة احتياجات الصناعة، وحل مشكلات منشآت الأعمال، فقد تعددت مسمياتها، وكذلك معانيها ومفاهيمها.

فقد وصفها البعض بأنها حالة من حالات دراسة العمل، ووصفها البعض الآخر بأنها رياضيات تطبيقية؛ أما بالنسبة لرجال الأعمال فهي تعني من وجهة نظرهم تطبيق الإحصاء والفهم والإدراك العام لحل مشكلات الأعمال؛ كما نظر إليها بعض الكتاب على أنها تمثل نشاطاً أو عملية تطبيقية، مكونة من بناء من المشكلات والأساليب والحلول، التي تم جمعهم تحت مسمى بحوث العمليات.

هذا، ويمكن إرجاع اختلاف معاني ومفاهيم بحوث العمليات إلي العديد من الأسباب وهي:

- ١- ارتباط نشأتها الأولي بالعمليات العسكرية.
- ٢- ارتباطها بجهود وأعمال Taylor مؤسس علم الإدارة في العصور الحديثة، ومكتشف دراسة العمل لتحسين كفاية منشآت الأعمال.
- ٣- محاولة ربطها بأساليب رياضية وإحصائية معينة، لتمييزها عن مجالات الخدمات الإدارية الأخرى.
- ٤- اصطلاح بحوث العمليات ذاته بشقيه: بحوث/العمليات، حيث قد يعمل مصطلح: بحوث، على خلق انطباع وهمي على أن الطريقة التي تستخدم مازالت محل البحث. إلا أنه على الرغم من ذلك، فقد أثبت مدخل بحوث العمليات خلال الحقبة الماضية من الزمن، أنه يمثل أحد المداخل الفعالة في حل المشكلات الحقيقية التي تواجه الإدارة. كما أن مصطلح: عمليات قد يفهم منه أنه يعالج فقط العمليات اليومية في منشآت الأعمال، مثل جدولة الإنتاج ورقابة المخزون وغير ذلك. إلا أن الكثير من دراسات بحوث العمليات لا تتعلق بعمليات يومية فقط، بل بمشكلات ذات نوع إستراتيجي أيضاً، مثل تخطيط برامج تشكيلة المنتجات وتصميم شبكات الأعمال، وتطوير برامج التوسع الآلي طويلة الأجل وغير ذلك.

هذا، ويلاحظ أنه نظراً لنشأة مدخل بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية، فلقد أطلق عليه مصطلح بحوث العمليات العسكرية؛ غير أنه عندما امتد استخدامها في قطاع الأعمال، فقد سُميت بتسميات مختلفة منها، ومن ذلك: الأسلوب العلمي للإدارة؛ الإدارة العلمية Management Science؛ تحليل القرارات Decision Analysis؛ التحليل الكمي Quantitative Analysis؛ تحليل النظم System Analysis؛ إلا أن مصطلح بحوث العمليات Operations Research يعد أكثر هذه المصطلحات شيوعاً.

وعلي الرغم من تعدد تعريفات بحوث العمليات، إلا أنه يمكن استخلاص أن مدخل بحوث العمليات يتمثل في تطبيق المنهج العلمي في حل مشكلات

الإدارة؛ كما يتميز مدخل بحوث العمليات بتداخل عدد من فروع المعرفة، مثل: الرياضة والاقتصاد والإحصاء والحاسبات الإلكترونية، وغيرها.

هذا وقد عرفت جمعية بحوث العمليات الإنجليزية مدخل بحوث العمليات، بأنه: تطبيق طرق العلم، في المشكلات المركبة التي تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة، من القوي البشرية، والآلية، والمواد، والأموال، في الصناعة ومنشآت الأعمال، والمنظمات الحكومية ومنشآت الدفاع. وذلك بحيث يتمثل المبدأ في إيجاد نموذج علمي للنظام، وذلك بهدف مساعدة الإدارة في تحديد سياستها وقراراتها بطريقة علمية.

كما عرفت جمعية بحوث العمليات الأمريكية مدخل بحوث العمليات، بأنه: التحديد العلمي لكيفية تصميم وتشغيل النظم البشرية والآلية بصورة أفضل، في ظل الظروف التي تستلزم تخصيص الموارد المحددة.

الأمر الذي يمكن معه استخلاص أن مدخل بحوث العمليات، يقوم علي مجموعة من المفاهيم الأساسية، والتي تعد بمثابة الدعائم أو الأركان الأساسية لمدخل بحوث العمليات، وهي:

- ١- تطبيق الطرق العلمية عند معالجة المشكلات.
- ٢- يتمثل المبدأ في إيجاد نموذج يتم بناؤه واستخدامه، تبعاً للطريقة العلمية التجريبية.
- ٣- يتمثل الدافع الأساسي في اتخاذ القرارات، أو مساعدة صانعي القرار في معالجة المشكلات وإيجاد حلول تلك المشكلات.

• الخصائص والسمات الرئيسية لبحوث العمليات:

تتمثل أهم الخصائص الأساسية لمدخل بحوث العمليات في:

- (١) حل المشكلات يمثل: محور (بؤرة) اهتمام مدخل بحوث العمليات.
- (٢) يطبق مدخل بحوث العمليات: المنهج العلمي في حل المشكلات واتخاذ القرارات.

(٣) يركز مدخل بحوث العمليات على: تطبيق مدخل النظم.

(٤) يعتمد مدخل بحوث العمليات على: تضافر جهود فريق العمل.

(٥) يعتمد مدخل بحوث العمليات على: النماذج الرياضية في حل المشكلات.

(٦) يعتمد مدخل بحوث العمليات على: استخدام الحاسبات الإلكترونية.

• حل المشكلات يمثل: محور (بؤرة) اهتمام مدخل بحوث العمليات:

نظراً لأن مدخل بحوث العمليات يتمثل في تطبيق المنهج العلمي في حل المشكلات، لذا فإن محور اهتمام هذا المدخل يتمثل في: مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات لحل المشكلات.

ولقد صار استخدام الإدارة للنماذج بوجه عام، والنماذج الرياضية بوجه خاص، أمراً ضرورياً بعد أن أصبح من الصعب التعامل مع مشكلات الواقع العملي مباشرة، وذلك بسبب تشابك وتعقد تلك المشكلات، واشتمالها على العديد من المتغيرات المتشابكة، وكذلك بسبب تعدد القيود المحيطة بحل مثل تلك المشكلات، ومن هنا فقد أصبح من الضروري القيام بتجريد مثل تلك المشكلات، وصياغتها في صورة نموذج يكون من السهل نسبياً التعامل معه، وذلك بدلاً من التعامل المباشر مع المشكلات الواقعية.

• يطبق مدخل بحوث العمليات: المنهج العلمي في حل المشكلات واتخاذ القرارات:

حيث يتضمن المنهج العلمي في حل المشكلات الخطوات الآتية:

أ- تحديد المشكلة وتعريفها.

ب- إجراء المشاهدة أو الملاحظة في ظل ظروف مختلفة لتحديد سلوك النظام الذي يتضمن المشكلة.

ج- وضع الفروض وهي تصف كيفية تفاعل عناصر المشكلة والحلول البديلة لها.

د- إجراء التجارب اللازمة لاختبار صحة الفروض.

هـ- تحليل نتائج التجارب وقبول أو رفض الفروض.

وإذا كان المنهج العلمي السابق يطبق بنجاح في العلوم الطبيعية حيث تجري التجارب داخل المعمل في ظل ظروف يمكن التحكم فيها وبالتعامل مع متغيرات ومعالم قياساتها محددة بدقة، إلا أن المشكلة التي واجهتها بحوث العمليات هي كيفية تطبيق ذات المنهج علي معالجة مشكلات منشآت الأعمال حيث عدم التأكد يحيط بالبيانات والعلاقات بين المتغيرات، وحيث بيئة الأعمال في تغير مستمر ولا يمكن التحكم والسيطرة عليها، ولا شك أن نجاح بحوث العمليات في هذا الشأن يعد العامل المحدد لفعاليتها في حل مشكلات منشآت الأعمال وتفوقها علي باقي الأساليب التي تعتمد علي الخبرة الشخصية وسرعة البديهة والقواعد المنطقية البسيطة.

ويلاحظ أن بحوث العمليات تعني رؤية خاصة للعمليات، كما تتضمن نوعاً خاصاً من البحوث، حيث ينظر إلى العمليات كوحدة متكاملة، فلا تقتصر النظرة إلي المعدات المستخدمة أو الخصائص الطبيعية للمخرجات أو العوامل مجتمعة: لعملية اقتصادية متكاملة. هذه العملية الاقتصادية تخضع للتحليل المنطقي عن طريق عمليات ذهنية، ومناهج وطرق سليمة للتحليل، تربطها ببحوث العلماء في العلوم الطبيعية وهذا يقود إلي ما يطلق عليه الطريقة العلمية.

• يرتكز مدخل بحوث العمليات علي: تطبيق مدخل النظم:

يتسم مدخل بحوث العمليات باعتماده علي مدخل النظم؛ حيث يُعرف النظام بأنه: مجموعة من العناصر التي ترتبط ببعضها البعض وكذلك بالبيئة المحيطة، بمجموعة من العلاقات المتبادلة، حيث تتفاعل عناصر النظام معاً لكي تنجز أو تحقق هدفاً محدداً، أو مجموعة من الأهداف المتكاملة للنظام. هذا، ومن الواجب ضرورة وجود تنسيق بين عناصر النظام ، وذلك لكي لا تطغى الأهداف الخاصة لكل منهم علي تحقيق الأهداف العامة للنظام ككيان واحد متكامل.

وتتسم النظم بمجموعة من الخصائص من أهمها خاصية هرمية النظم، حيث يمكن النظر إلي منشأة الأعمال، كنظام يتكون من مجموعة من الأنظمة الفرعية المترابطة مع بعضها ومع البيئة الخارجية بمجموعة من العلاقات المتبادلة. ومن أهم أمثلة النظم الفرعية للمنشآت الصناعية: نظم الإنتاج؛ و نظم التسويق؛ و نظم التخزين؛ و نظم الإدارة؛ والنظام المحاسبي؛ ونظم الرقابة الداخلية.

هذا، ويلاحظ أن تطبيق بحوث العمليات لمدخل النظم، يتطلب: ضرورة تحليل وفحص أية مشكلة من كافة الزوايا، ومراعاة أن نشاط أي نظام من النظم الفرعية لمنشأة الأعمال، إنما يؤثر ويتأثر بأنشطة باقي النظم الفرعية الأخرى داخل المنشأة، الأمر الذي يبين أهمية وضرورة الأخذ في الاعتبار - لدى فحص وتحليل ودراسة أية مشكلة - كافة آثارها علي جميع قطاعات المنشأة.

• يعتمد مدخل بحوث العمليات على: تضافر جهود فريق العمل:

فمن المعروف أن المشكلات التي تواجه منشآت الأعمال، إنما تتميز بأنها مشكلات ذات أبعاد متعددة، سواءً الاقتصادية أو الاجتماعية أو الهندسية أو السياسية، حيث لا يستطيع أحد الإلمام بكل هذه الأبعاد والجوانب، الأمر الذي يتطلب تكوين فريق من الخبراء في مختلف التخصصات لدراسة المشكلات من كافة جوانبها.

هذا، ويحقق مبدأ الفريق العديد من المميزات، من أهمها: توفير عدد من الأفكار المفيدة لحل المشكلات، ومن ثم إمكانية الوصول إلي أفضل حل ممكن لها، وذلك فضلاً عن أنه يكفل استخدام أحدث الأساليب العلمية المطبقة في مجالات المعرفة المختلفة.

ويلاحظ أن فريق بحوث العمليات، يتكون من مجموعة متكاملة من الخبراء في تخصصات: الإدارة، والمحاسبة، والحاسبات الالكترونية، والرياضيات، والإحصاء، والاقتصاد، والهندسة.

• يعتمد مدخل بحوث العمليات على: النماذج الرياضية في حل المشكلات:

تعتبر عملية استخدام النماذج من الأعمدة الرئيسية لبحوث العمليات، ويقصد بالنموذج القيام بمحاولة تمثيل نظام ما (أو مشكلة ما) تمثيلاً مادياً. ويتم بناء النماذج بهدف فهم أو وصف أو التنبؤ بسلوك ذلك النظام أو تلك المشكلة. ويلاحظ أنه من الضروري، القيام ببناء النماذج لأغراض دراسة النظم، وذلك بسبب صعوبة أو استحالة الرقابة المباشرة على النظم الفعلية، فضلاً عن أن التعامل مع النظم الفعلية قد تكون تكلفته مرتفعة بصورة كبيرة جداً.

هذا ومن الملاحظ أنه يتم بناء النماذج، في معظم الأحوال ارتكازاً على عدد محدود من المتغيرات التي تمثل سمات أو أركان أو نواحي معينة من النظام. ذلك أن النموذج لا يمثل النظام بكافة تفاصيله، بل يركز فقط على بعض ملامح أو سمات النظام، الأمر الذي يعني أن بناء وتكوين النماذج، يشتمل في غالب الأمر على نوع من التجريد، ومن هنا فمن الواجب أن يكون النموذج المُشَيّد: محددًا بدقة؛ ومحكمًا؛ وموجزًا؛ واقتصاديًا؛ وقابلًا للرقابة عليه ببسْرٍ وسهولة.

ومن المعروف تعدد أنواع النماذج، حيث توجد: النماذج المادية والتي تتكون من عناصر مادية؛ والنماذج الرمزية، والتي تهدف إلى وصف النظام. ويعتبر النموذج الرياضي من أهم النماذج الرمزية، حيث يتكون من مجموعة علاقات رياضية، تصف كل منها العلاقة بين متغيرات معينة، حيث يتم تشغيل مدخلات النموذج الرياضي، وفقاً للعلاقات الرياضية، بهدف إنتاج مخرجات، من شأنها أن تعمل على تفسير أو التنبؤ بالتغيرات المتوقع حدوثها في النظام. ويلاحظ أن النماذج الرياضية تعتبر من أفضل النماذج التجريدية في تمثيلها للنظم الواقعية، وتعتمد مقدرة هذه النماذج على وصف والتنبؤ بسلوك نظام ما، على مدى دقة تمثيل العلاقات الرياضية لسلوك النظام، كما تعتبر النماذج الرياضية من أكثر النماذج شيوعاً واستخداماً في تطبيقات بحوث العمليات.

• يعتمد مدخل بحوث العمليات على: استخدام الحاسب الإلكتروني:

من الملاحظ أن بحوث العمليات تعتمد بصورة رئيسة على الحاسب الإلكتروني، في القيام بتنفيذ العمليات الحسابية والرياضية المعقدة، واللازمة لحل النماذج والوصول إلى حلول مشكلات الواقع العملي، حيث تتسم المشكلات التي تواجهها منشآت الأعمال، بالتعقيد واشتمالها على العديد من المتغيرات المتشابكة، ومن هنا فإنه يكاد يكون من المستحيل في كثير من الحالات أن تتم معالجة الكثير من هذه المشكلات بدون الاستعانة بالحاسب الإلكتروني، والذي يعمل على توفير وقت الإدارة، في مواجهة مشكلات الواقع العملي والمافسة، وكذلك الدقة المتناهية في تشغيل وحل النماذج.

• بحوث العمليات وبناء النماذج:

يعتبر بناء واستخدام النماذج من أهم محاور اهتمام بحوث العمليات، حيث يمكن النظر إلى النموذج على أنه عبارة عن تمثيل مبسط لشيء حقيقي، إما أن يكون ظواهر معينة أو نظام رئيس أو نظام فرعي، بمعنى أن النموذج يمكن اعتباره تجريباً للواقع الحقيقي.

وتتمثل خطوات بناء النماذج في:

أولاً: تجريد الواقع أو محاكاته: عن طريق تكوين فرض، من شأنه أن يوضح العلاقات والارتباطات المنطقية بين عناصر الواقع، ويمثل السمات و الملامح الرئيسية لهذا الواقع، وذلك من خلال بناء نموذج، بما يستلزم اتخاذ مجموعة من القرارات التي يجب التنسيق بينها، مثل:

١- ما هي العناصر الأساسية الخاصة بالواقع، والواجب إدخالها في النموذج؟

٢- ما هي العناصر التي يمكن التغاضي عنها، واستبعادها من النموذج؟

٣- ما هي الصورة أو الشكل الذي يمكن من خلاله صياغة النموذج؟

ثانياً: الاستدلال أو الاستنباط: أي استخدام الأساليب المختلفة اللازمة لحل النموذج واستخراج النتائج منه: وتتوقف هذه الأساليب علي طبيعة النموذج، وشكله وطريقة صياغته. فقد تكون حل المعادلات أو تشغيل برامج الحاسب الالكتروني، أو عمليات رياضية ومنطقية متتابعة، وكل ما من شأنه العمل على حل النموذج.

ثالثاً: تفسير نتائج النموذج: ويتطلب ذلك ضرورة الأخذ في الاعتبار الجوانب التالية:

- ١- ترجمة ونقل نتائج النموذج إلى الواقع، مع ضرورة المعرفة التامة بأية اختلافات أو تناقضات قائمة بين الواقع والنموذج الذي يمثله، ومحاولة تضيق أية اختلافات تقع بينهما.
- ٢- مراجعة الفروض التي تم على أساسها بناء النموذج منذ البداية.
- ٣- التأكد لدى تكوين فروض النموذج، من عدم إغفال أية عناصر جوهرية. هذا ومن الملاحظ أن النماذج، يمكن تبويبها وتقسيمها إلى عدة أقسام وتبويبات، من أهمها:

١. النماذج المادية أو الطبيعية:

وتمثل هذه النماذج كل العناصر الجوهرية في الواقع بكل خصائصه تمثيلاً دقيقاً ولكن بمقاييس أصغر. ومن أمثلة هذا النوع من النماذج، نماذج السيارات ولطائرات والمباني والمنشآت وتعتبر هذه النماذج أقل تجريداً للواقع، وتستخدم أساساً لأغراض الوصف، وهي ذات فائدة محددة في أغراض التنبؤ.

٢. النماذج المناظرة:

وتمثل هذه النماذج عنصراً معيناً، أو مادة بديلة، أو وسيلة ما، لتمثيل عناصر معينة في الواقع، وهي لذلك تعتبر أكثر تجريداً للواقع، إذا ما قورنت بالنماذج المادية. ومن أمثلة هذه النماذج: استخدام النظام الهيدروليكي لاندفاع

الماء، كمنظير لتمثيل النظام الكهربائي. كما قد يستخدم أيضاً هذا النظام المائي، لتمثيل نظم النقل والحركة، أو لتمثيل نظم اقتصادية، أو أية نظم أخرى شبيهة. وهنا نلاحظ أنه يسهل تجربة هذا النوع من النماذج، ومن ثم فإنها تفيد في أغراض التنبؤ.

٣. النماذج التصويرية:

وذلك مثل: الخرائط الجغرافية، والصور الضوئية، والرسوم التصميمية، وخرائط التدفق لتشغيل المواد أو المعلومات. وهي أكثر تجريداً للواقع، ومن أهم الأمثلة على ذلك: نموذج النظام المحاسبي، والذي يمثل في صورة مجموعة من الدفاتر والسجلات والحسابات، كافة أوجه نشاط المنشأة، وتدفق السلع والخدمات فيه، ويمدنا بالمعلومات عن معدل التدفق والأداء المحقق والقيم الناتجة، ونلاحظ هنا أن هذا النموذج يعتبر مفيداً في هذه الصورة، على الرغم من أنه لا يعد تمثيلاً حقيقياً للعمليات.

٤. النماذج الرمزية:

وهي من أكثر النماذج شيوعاً واستخداماً في بحوث العمليات، وتعتبر هذه النماذج عن الشيء الذي تمثله في صورة رمزية جبرية، أو أعداد أو حروف، وتعرف عادة بالنماذج الرياضية، حيث يتم تمثيل المشكلة محل البحث في صورة علاقات رياضية (معادلات أو متباينات)، وتنعكس في صورة كمية: النظام محل الدراسة. وتعد هذه النماذج أكثر أنواع النماذج تجريداً للواقع، وأسهل في المعالجة والتحليل، وتستخدم عموماً في أغراض تفسير المشكلة والتنبؤ بحلها.

وبوجه عام، فإنه يمكن تقسيم النماذج الرياضية في بحوث العمليات، إلى نوعين رئيسيين من النماذج:

النوع الأول: النماذج التحديدية (المحددة): وتتميز هذه النماذج بشمولها على متغيرات تعتبر مراقبة، وضالة ومحدودية دور عدم التأكد فيها، بل قد تخلو

منها، ويعتبر النموذج في هذه الحالة، بمثابة نموذج تفسيري وإيضاحي للمشكلة، ويشاع استخدام هذه النماذج التحديدية في معالجة مشكلات الإنتاج ومراقبة المخزون، حيث يكون الطلب على الإنتاج محدداً ومعروفاً، ويسهل كشف علاقات السببية بين متغيراته.

النوع الثاني: النماذج الاحتمالية: ويتضمن هذا النوع من النماذج: عوامل عدم التأكد بصورة صريحة، ويخلو عادة من المتغيرات المراقبة، ويكون النموذج بمثابة نموذجاً وصفيّاً للمشكلة، ويستخدم عادة مثل هذا النوع من النماذج، في معالجة المشكلات التسويقية والتنافسية، بسبب ما يتضمنه من عوامل غير مؤكدة، مرتبطة بسلوك العملاء والمنافسين، حيث تستخدم هنا مفاهيم نظرية الاحتمالات بصورة موسعة إلى حد ما.

■ خطوات بناء واستخدام النماذج في بحوث العمليات:

يمكن تحديد خطوات بناء واستخدام النماذج الرياضية في بحوث العمليات، على النحو الآتي:

- ١- تكوين المشكلة.
- ٢- بناء هيكل النموذج.
- ٣- اشتقاق واستخراج حل المشكلة من النموذج.
- ٤- اختبار كل من: النموذج والحل المستخرج منه.
- ٥- تنفيذ الحل.
- ٦- رقابة كل من: النموذج والحل.

وذلك كما يتبين مما يلي:

١- تكوين المشكلة:

حيث يجب القيام بتحديد المشكلة محل البحث، تحديداً دقيقاً واضحاً. ويقصد بتحديد أو تكوين المشكلة: تشخيصها والتعرف على أسبابها، وعلى عناصرها المختلفة، والعلاقات والارتباطات بين هذه العناصر.

ويتحدد ذلك من خلال تحديد الآتي:

- أ- أهداف صانع القرار.
- ب- البدائل المختلفة لتحقيق هذه لأهداف.
- ج- العناصر التي تخضع لرقابة صانع القرار؟ بمعنى تحديد ما هي المتغيرات المراقبة.
- د- القيود المفروضة.
- هـ- المتغيرات الأخرى غير المراقبة.

٢- بناء هيكل النموذج:

يلي خطوة تحديد وتكوين المشكلة: خطوة التفصيل الدقيق لهذه المشكلة، والتقرير عن المدخلات الصحيحة للبيانات، والتصميم المناسب للمخرجات، وتحديد كافة العناصر، وتمثيل كافة العلاقات المتداخلة بين هذه العناصر، في صورة معادلات ومتباينات، وهما:

أ- دالة الهدف.

ب- القيود المفروضة.

ويختلف نوع النموذج الرياضي، باختلاف طبيعة المشكلة المطلوب حلها. ونوع البيانات اللازمة لتحليلها، ومدى التعقيد في العلاقات بين عناصرها المختلفة.

ففي مشكلات تخصيص الموارد المحدودة، لتحديد مزيج الإنتاج الأمثل، الذي يساهم في تعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف، فإنه يتم استخدام نموذج البرمجة الخطية؛ أما في مشكلات توزيع المنتجات بين مواقع الإنتاج ومراكز التوزيع الجغرافية، بما يساهم في تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن، فإنه يتم استخدام نموذج النقل.

٣- اشتقاق واستخراج الحل من النموذج:

بعد أن يتم تحديد هيكل النموذج الرياضي وبنائه، فإن الخطوة التالية لذلك، تتمثل في ضرورة التوصل إلى حل المشكلة عن طريق النموذج، بمعنى تحديد الحل الأمثل للنموذج، وتطبيق هذا الحل على المشكلة الحقيقية.

حيث يتم التوصل إلى الحل، من خلال إيجاد القيم المثلى للمتغيرات المراقبة، في ضوء القيم المحددة للمتغيرات غير المراقبة، والتي تعمل على تعظيم أو تخفيض الهدف.

ويتم اشتقاق الحل في معظم الأحوال، من خلال استخدام التحليل الرياضي، الذي توفره أدوات الرياضة التقليدية (مثل حساب التفاضل والتكامل)، أو باستخدام جبر المصفوفات والمحددات، أو باستخدام الإجراء التكراري. وهنا نلاحظ أن هذا الإجراء يبدأ بحل مبدئي، يتم تحسينه في ضوء مجموعة من القواعد، على أن يتم إحلال الحل المُحسَّن محل الحل المبدئي، مع تكرار العملية، إلى أن يتم التأكد من عدم إمكانية تحقيق أي تحسين آخر للحل.

٤- اختبار كل من: النموذج والحل المستخرج منه:

من المتعارف والمتفق عليه - قبل أن يوضع الحل المستخرج من النموذج موضع التنفيذ- أنه يجب أولاً اختبار النموذج ذاته، واختبار الحل المستخرج منه أيضاً. حيث نقصد باختبار النموذج: ضرورة التأكد من أن ذلك النموذج في صورته المتكاملة يمثل النظام الذي أعد من أجله، فإذا فشل النموذج في تحقيق ذلك، يصبح من الواجب ضرورة التعرف على الأسباب وتصحيحها.

أما اختبار الحل المستخرج من النموذج، فيقصد به: اختبار صلاحية النموذج، بمعنى التحقق من صحة المعلومات التي يوفرها، وإمكانية الاعتماد عليها في اتخاذ القرارات.

٥- تنفيذ الحل:

عقب التأكد من صحة النموذج وصلاحيته، والجدوي العلمية للحل المستخرج منه، تأتي خطوة وضع هذا الحل موضع التنفيذ والتطبيق، بمعنى تفسير الحل للإدارة المسئولة، وترجمته في صورة إجراءات عمل يسهل فهمها وتنفيذها.

٦- رقابة النموذج والحل:

من الواجب أن يظل النموذج صحيحاً، طالما أن الفروض الأساسية التي بني عليها لم تتغير، ويعتبر ذلك بمثابة إحدى القواعد الرئيسية، كما أن الحل المستخرج منه يظل صحيحاً، طالما أنه يحقق النتائج التي وضع من أجلها النموذج. غير أنه عندما يمتد تطبيق النموذج وتنفيذ الحل المستخرج منه، على مدى فترة طويلة من الزمن، فمن الممكن أن تختلف أو تتغير الظروف التي بُنيَ علي أساسها، بما يؤدي إلى تغيير الفروض الأساسية التي بُنيَ وفقاً لها النموذج، والتي تتمثل في معظم الأحوال في:

- أ- تغييرات في الهدف.
 - ب- تغييرات في العناصر أو المتغيرات المراقبة.
 - ج- تغييرات في قيم ثوابت المعدلات.
 - د- تغييرات في العلاقة بين الهدف، والمتغيرات المراقبة، والثوابت.
- حيث تتطلب هذه التغييرات، ضرورة إجراء التعديل اللازم علي النموذج وإعادة صياغته وبنائه.

▪ مبادئ إعداد النموذج:

بعد أن تحدد الإطار العام لما نقصده فعلاً ببناء النماذج، يصبح من الواجب ضرورة تحديد مجموعة من المبادئ العامة، التي تحكم ترشيد عملية البناء والتكوين السليم للنموذج، وتحكم تفسير نتائجه وتنفيذ الحلول المستخرجة منه. ومن أهم المبادئ الأساسية لعملية إعداد النماذج واستخدامها:

أولاً: في مرحلة تكوين النموذج وصياغته:

١- عند بناء النموذج وتكوينه: يجب مراعاة أن يكون النموذج بسيطاً بقدر الإمكان.

٢- عند تكوين نموذج لحل مشكلة ما: يجب عدم إخفاء معالم المشكلة لكي تناسب الأدوات والأساليب التي يفضل استخدامها لحلها، بل يجب تحديد هيكل النموذج والأسلوب الأكثر ملاءمة للمشكلة.

٣- يجب التأكد من صحة البيانات التي تدخل في النموذج.

ثانياً: في مرحلة الاستدلال واستخراج النتائج:

١- يجب تنفيذ مرحلة الاستدلال بدقة تامة قدر المستطاع.

٢- عند تنفيذ الاستدلال باستخدام الحاسب الإلكتروني: يجب مراعاة العناية والدقة عند إعداد برامج الحاسب، أي عند تحديد الخطوات اللازمة للعمليات الحسابية والمنطقية، المطلوب إجراؤها علي البيانات التي يتم إدخالها للتشغيل.

ثالثاً: في مرحلة تفسير النتائج وتنفيذ الحلول:

١- عند تفسير نتائج النموذج ووضعها موضع التنفيذ والتطبيق العملي: يجب أولاً التأكد من صحة تلك النتائج، عن طريق مراجعة النموذج، في ضوء معايير منطقية لمدى ملاءمته ومدى صلاحيته، والجدوى العملية للحلول المستخرجة منه.

٢- يجب أن يتم تفسير نتائج النموذج: في ضوء الفروض التي بُنيَ عليها وفي ضوء الهدف منه.

٣- لا يمكن أن تحل النماذج محل صانعي القرارات.

٤- يجب أن يكون واضحاً، أن المنفعة الحقيقية من النموذج، لا تتحقق إلا بمشاركة المستخدم النهائي له، وأن تكون هذه المشاركة في كافة مراحل بنائه وتنفيذه.

• بحوث العمليات واتخاذ القرارات:

إن من أهم مقاصد وأهداف بحوث العمليات: العمل على مساعدة صانعي القرار، في معالجة المشكلات المركبة في العالم الحقيقي، وذلك من خلال التأكيد على تحليل القرار، وتحسين صنع هذا القرار. ويعد هذا المفهوم أساسياً وموحداً في كافة تطبيقات بحوث العمليات.

ويقصد بتحليل القرار: تقسيم وتجزئة المشكلات الكبيرة، إلى أجزاء فرعية يسهل دراستها، حيث يلي دراسة كل جزء فرعي بدقة وعناية: القيام بتركيب النتائج، لكي تعطي رؤية دقيقة للمشكلة الأصلية.

ويقصد بتحسين صنع القرار: القيام بتوجيه الاهتمام نحو عنصر أساسي في كافة مشكلات بحوث العمليات، ألا وهو البدائل المختلفة للأداء، والتي يجب الاختيار فيما بينها، من خلال دراسة وتحليل كل عملية دراسة علمية، بهدف الوقوف على حقيقة العلاقة بين بدائل الأداء المختلفة، وتحديد كل بديل، وتحديد مقاييس الأداء التي تعكس أهداف المنشأة، ومن هنا فقد أصبحت بحوث العمليات، أداة محورية هامة ومساعدة للإدارة في ترشيد عملية اتخاذ القرارات.

▪ نشأة وتاريخ بحوث العمليات:

على الرغم من أن مصطلح (بحوث العمليات) قد صيغ خلال الحرب العالمية الثانية، إلا أن العديد من الكتابات العلمية تؤكد أن جذوره العلمية ترجع إلى تاريخ يسبق ذلك بكثير. فقد قدمت النماذج الأولى للبرمجة الرياضية في سنة ١٧٥٩م. وفي سنة ١٨٧٤م، كما تطورت الأسس الرياضية للنماذج الخطية مع اقتراب القرن التاسع عشر في سنة ١٨٧٣م، وفي سنة ١٨٩٦ م.، وفي سنة ١٩٠٣م.

ورغم هذه النشأة المبكرة لبحوث العمليات، والمحاولات الأولى لبعض نماذجها وأساليبها، إلا أنه يؤرخ لها بصفة رسمية ومعترف بها وبصورة شرعية، بتاريخ قيام الحرب العالمية الثانية.

ومع بداية سنة ١٩٣٧م، فقد كانت هناك حاجة إلى العلماء البريطانيين لتقديم مساعداتهم للقادة، ومع بداية سنة ١٩٣٧م، فقد كانت هناك حاجة إلى العلماء البريطانيين، لتقديم مساعداتهم للقادة العسكريين، في تعلم كيفية استخدام الرادار، في تحديد موقع طائرات العدو. وبسبب المشكلات الفنية والاستراتيجية في زمن الحرب، ونظراً للحاجة الملحة في ذلك الوقت إلى توزيع الموارد المحددة بأكثر الطرق كفاية واقتصادية، وكذلك صعوبة الوصول إلى حلول مناسبة لكل هذه المشكلات من فرد واحد أو حتي من نظام واحد، فلقد قرر عالم الفيزياء البريطاني **Blackitt**، أن يجمع في سبتمبر ١٩٤٠م. فريق العلماء ذوي الخلفيات العلمية والثقافية المتنوعة، لدراسة هذه المشكلات، دراسة علمية تحليلية وإيجاد الحلول المناسبة لها. وقد عُرف هذا الفريق في بريطانيا باسم **Blackitt circus** وقد كان هذا الفريق ناجحاً بصورة ملحوظة في تحسين كفاءة العمليات العسكرية؛ الأمر الذي ترتب عليه في سنة ١٩٤١م. إدخال فرق بحوث العمليات على نطاق واسع، في السلاح الجوي الملكي البريطاني، كما حدثت تطورات مشابهة في القوات البرية الملكية البريطانية، الأمر الذي أسفر عن اتجاه دول الحلفاء وفرنسا إلى تطبيق نفس الاتجاه، فقامت بتنظيم فرق بحوث عمليات خاصة بكلٍ منها، وقد عُرفت في المملكة المتحدة تحت مسمى "بحوث علي العمليات العسكرية"، كما عُرفت في الولايات المتحدة تحت عدة أسماء مختلفة مثل: "تحليل العمليات العسكرية"، "تحليل النظم"، "علم الإدارة"، غير أن أكثر الأسماء شيوعاً واستخداماً كان مسمى "بحوث العمليات".

وعقب انتهاء الحرب العالمية الثانية، اتجه كثير من العلماء الذين عملوا في فرق بحوث العمليات العسكرية، ووجهوا انتباههم نحو إمكانيات تطبيق نفس الاتجاه في الأغراض المدنية؛ حيث عاد بعضهم إلى الجامعات، لتوفير بناء راسخ للأساليب التي اكتشفت علي وجه السرعة في زمن الحرب، كما عاد بعضهم إلى الجامعات لتأسيس بناء متكامل للأساليب التي اكتشفت علي وجه السرعة في زمن الحرب، في حين اتجه البعض الأخر نحو تطوير أساليب

جديدة، بينما اتجه فريق ثالث نحو القطاعات المختلفة من الاقتصاد القومي لحل مشكلات الإدارة.

وفي الولايات المتحدة، فقد بدأت الجهود في تاريخ متأخر، إلا أنها حققت أيضاً تقدماً أساسياً في الأساليب الرياضية لتحليل المشكلات العسكرية، غير أنه في أواخر الأربعينيات، فقد قادت الولايات المتحدة ما يمكن أن يُسمى عليه الثورة الصناعية الثانية، وذلك من خلال انتشار الحاسبات الالكترونية.

كما تأسست جمعية بحوث العمليات البريطانية بعد الحرب مباشرة في سنة ١٩٤٧م، وأصبحت تعرف بدءاً من سنة ١٩٥٤م. بجمعية بحوث العمليات الإنجليزية. كما ظهر أكثر من عشرين جمعية أخرى لبحوث العمليات في أوروبا وأسيا وأفريقيا، وبلغ عدد أعضاء هذه الجمعيات بالآلاف، إلى أن تم تشكيل "اتحاد الجمعيات الدولية لبحوث العمليات"، وذلك قبيل نهاية الألفية الثانية بسنوات معدودة.

حيث تولت هذه الجمعيات، القيام بتنظيم العديد من المؤتمرات الدولية، وإصدار الدوريات العلمية الخاصة بها، فتم إصدار مجلة بحوث العمليات، ومجلة علم الإدارة، حيث ساهم ذلك كله، في تجميع نتائج الدراسات والتطبيقات والأبحاث، وتكوين بناء المعرفة الخاص ببحوث العمليات، بل إنه يمكن القول بانتظار المزيد من التقدم والتطور لهذا الميدان الحديث من البحث العلمي، وبوجه خاص في ظل التطورات المتسارعة وغير المسبوقة، سواءً في ميدان الحاسبات الإلكترونية، أو الأساليب الكمية، أو غير ذلك من نتاج العولمة والتطورات التكنولوجية الحديثة.

وفي ضوء كل ما سبق، فقد يمكن إرجاع هذا التطور والانتشار السريع لبحوث العمليات، إلى العديد من العوامل، من أهمها العوامل الأربعة الآتية:

١. ميكانيكية الإنتاج، وزيادة التخصص وتقسيم العمل الصناعي والإداري أيضاً.

٢. الضغط التنافسي، وحاجة منشآت الأعمال، إلى تحسين الطرق التقليدية في جمع وتحليل البيانات واتخاذ القرارات.

٣. التطور والانتشار السريع في استخدام الحاسب الالكترونى.
٤. استمرار الباحثين في أبحاثهم، ومن ذلك ابتكار George Dantzig في سنة ١٩٤٧م، لطريقة السمبلكس، لحل نموذج البرمجة الخطية.
- علاقة بحوث العمليات بالحاسبة:

من المعلوم أن السلوك الاقتصادي لأية منشأة يعتمد على النظام المحاسبي، والذي يمثل المحور الرئيس في تجميع البيانات عن الأحداث الاقتصادية والمالية في المنشأة، حيث أنه يعد نظام المعلومات الرسمي داخل المنشأة وخارجها، وذلك نظراً لما يلي:

١- تعدد وتنوع وظائف المحاسبة، والتي أصبحت ليست مجرد وسيلة لضمان سلامة حقوق الملاك والمساهمين، بل إنها قد أصبحت بمثابة الطريق نحو أفضل القرارات داخل المنشأة.

٢- زيادة الاحتياجات للمعلومات المحاسبية، سواءً من جانب الإدارة داخل المنشأة، أو من جانب الهيئات والمنظمات الاقتصادية والقانونية والاجتماعية خارج المنشأة.

٣- اعتبار النظام المحاسبي بمثابة حجر الأساس في أحدث مراحل تطور نظم المعلومات، والتي يطلق عليه "النظام الكلي للمعلومات"، حيث أصبح المستشارون من المحاسبين أحد العناصر الرئيسية في هذا النظام، جنباً إلى جنب مع مصممي النظم وواضعي البرامج، وخبراء بحوث العمليات.

ولهذه الأسباب فإن المحاسبة تعتبر وثيقة الصلة ببحوث العمليات، وذلك من الزوايا الآتية:

١- يعد النظام المحاسبي بمثابة حجر الأساس أو المرتكز الرئيس، في توفير مدخلات البيانات اللازمة لنماذج بحوث العمليات.

٢- يقوم النظام المحاسبي بدور جوهري وهام، في بناء وتصميم نماذج بحوث العمليات.

٣- يعد النظام المحاسبي ذا دور ملموس وجوهري، في رقابة ومتابعة وتحليل الحلول المستخرجة من نماذج بحوث العمليات.

■ مشكلات وأساليب بحوث العمليات:

● تبويب مشكلات بحوث العمليات:

يكاد معظم الكتاب والمؤلفين، يتفقون على أن معظم مشكلات بحوث العمليات تقع في أحد الأقسام الآتية:

- ١- مشكلات التخصيص.
- ٢- مشكلات الصفوف.
- ٣- مشكلات التتابع.
- ٤- مشكلات المسارات.
- ٥- مشكلات الإحلال.
- ٦- مشكلات المنافسة.
- ٧- مشكلات المخزون.
- ٨- مشكلات البحث.

أولاً: مشكلات التخصيص:

وهي ثلاثة أنواع:

النوع الأول: وهو النوع الرئيس في مشكلات التخصيص، حيث تكون الموارد اللازمة للإنتاج محدودة، وتتنافس المنتجات فيما بينها على تلك الموارد المحددة.

وتعتبر مشكلة مزيج الإنتاج الأمثل، من أهم وأشهر الأمثلة الشائعة لهذا النوع من المشكلات.

النوع الثاني: ويطلق عليه مشكلات التعيين، ويتحدد هذا النوع من مشكلات التخصيص، عندما يكون هناك مجموعة من الأعمال أو المهام، يجب أداؤها في ظل توافر موارد كافية ومتاحة لأداء هذه الأعمال، غير أن بعضها يمكن أداؤه بطرق أفضل من غيرها، وليس هناك موارد كافية لأداء كل تلك المهام بأفضل الطرق الممكنة.

النوع الثالث: ويطلق عليه مشكلات التوزيع التي ترتبط بمشكلات النقل، أي تخصيص الوحدات التي يتم نقلها من مواقع إنتاج مختلفة، إلى مواقع الطلب أو التوزيع المختلفة، بطريقة تساهم في تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن.

هذا ويطلق على أساليب بحوث العمليات التي تستخدم لحل مشكلات التخصيص: البرمجة الرياضية، وتتكون من عدة أنواع من البرمجة الخطية، والبرمجة غير الخطية، و برمجة الأهداف، والبرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة، والبرمجة الديناميكية، وغير ذلك. ويختلف كل نوع من أنواع البرمجة، من حيث البيانات التي يتناولها، ونوع الفروض التي يقوم عليها.

ثانياً: مشكلات الصفوف:

وتعرف مشكلة الصفوف بأنها مشكلة انتظار، وتتحدد المشكلة عن طريق وصول العملاء طبقاً لتاريخ محدد للوصول، وانتظارهم في صف من صفوف الانتظار، حتى يستطيعوا المرور خلال أدوات وتسهيلات الخدمة إلى أن يتم مغادرتهم بعد إتمام خدمتهم.

وتستخدم بحوث العمليات نماذج صفوف الانتظار، لحل مثل هذا النوع من المشكلات، بالإضافة إلى استخدام قواعد التفاضل والتكامل ومفاهيم نظرية الاحتمالات.

ثالثاً: مشكلات التتابع:

وهي تتعلق باختبار قاعدة أو مبدأ، يتم بناءً عليه، أداء مجموعة أنشطة مختلفة تتميز بتتابع فني وتكنولوجي محدد طبقاً لمعيار مناسب لأدائها، ويتمثل في الغالب في تخفيض إجمالي الوقت المستغرق في أداء الأنشطة المختلفة.

هذا ويلاحظ في معظم مشكلات التتابع المركبة، أنه عادة ما تستخدم نماذج شبكات الأعمال، عن طريق أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (أو ما يُسمى أسلوب بيرت)، وطريقة المسار الحرج في العمليات والأهداف المراد تحقيقها، حسب تواريخ محددة للتسليم، وتكمن المشكلة هنا في تحديد أزمنة

البداية، والمدة اللازمة لأداء كل عملية أو نشاط في المنشأة وتكلفته، بحيث يكون إجمالي وقت وتكلفة أداء العمليات عند أدنى حد ممكن.

رابعاً: مشكلات المسارات:

وهي تتعلق بإيجاد المسار الأمثل، من بين عدة مسارات ممكنة ومتاحة، والمسار الأمثل هنا يُقصد به المسار الذي يخفض المسافة أو الوقت أو التكلفة، بين نقطة أصل معينة وبين موقع معين إلي أدنى حد ممكن. وتعتبر مشكلة تنقل وسفر رجال البيع: المثال التقليدي لمثل هذا النوع من المشكلات.

وعادة ما يتم حل مثل هذا النوع من المشكلات، باستخدام نماذج أقصى تدفق، ونماذج أقصر طريق.

خامساً: مشكلات الإحلال:

وهي تتكون من نوعين رئيسيين من المشكلات: يتعلق النوع الأول منها بالأصول والمعدات كبيرة الحجم وذات التكلفة العالية، والتي تستهلك بعد فترة الاستخدام الاقتصادي، مثل استهلاك الآلات والمعدات والمولدات والسيارات وغير ذلك، حيث تقل كفاية تشغيلها. والمشكلة هنا تتركز في تحديد الوقت الأمثل لإحلال مثل هذه الأصول، بحيث تنخفض إجمالي تكاليف الاستثمار والتشغيل إلي أدنى حد ممكن.

أما النوع الثاني، من مشكلات الإحلال، فيتعلق بالأجزاء الصناعية غير المستهلكة، والتي توقفت توقفاً كاملاً عن العمل وبصورة مفاجئة، وعادة ما تكون هذه الأجزاء صغيره الحجم وأقل تكلفة، مثل تلف مصابيح الإضاءة، وإطارات السيارات، وغير ذلك. حيث تتعلق المشكلة هنا بتحديد سياسة الإحلال المثلى، بمعنى إحلال المجموعة الكاملة عند تلف جزء منها، أم أحلال كل جزء على حدة، وأثر ذلك علي تكاليف التشغيل والصيانة.

وتعتبر أساليب البرمجة الديناميكية من أهم الأساليب الشائعة لمعالجة النوع الأول من مشكلات الإحلال، في حين أن النوع الثاني يستخدم في حلها التحليل الرياضي أو الإحصائي، وكذلك نماذج المحاكاة.

سادساً: مشكلات المنافسة:

وتظهر تلك النوعية من المشكلات، عندما يتنافس اثنان أو أكثر من متخذي القرار، على الحصول على أكبر حصة سوقية ممكنة، والقرار الذي يتخذه منافس ما يتأثر بالقرارات التي يتخذها المنافس الآخر أو عدة منافسين آخرين.

وتعتبر نظرية المباريات، بمثابة الإطار العلمي، الذي يتم في ضوءه تركيب وتكوين وحل معظم المشكلات التنافسية.

سابعاً: مشكلات المخزون:

لا يخفى أن المخزون السلعي قد يمثل موارد عاطلة، يرتبط بها نوعان أساسيان من التكاليف:

١- تكاليف تتزايد بتزايد المخزون.

٢- تكاليف تتناقص بتزايد المخزون.

ومن أهم أمثلة تلك التكاليف: تكاليف الاحتفاظ بالمخزون، والتي تتمثل في: تكاليف الحفظ، والمخازن، والتالف والعدم، والضرائب، والتأمين على المخزون، والفائدة على رأس المال المستثمر في المخزون، وغير ذلك من التكاليف التي تصحب الاحتفاظ بحجم معين من المخزون.

وقد تطورت الأساليب الرياضية التي تعالج مشكلات المخزون، وأصبحت ذات خصائص متعددة، كما تعتمد أساساً على استخدام قواعد حساب التفاضل، ونظرية الاحتمالات، ويطبق في حلها طرق البرمجة الخطية والديناميكية وأساليب المحاكاة.

ثامناً: مشكلات البحث:

وهي ترتبط بشكلٍ عام، بتحديد مدى تغطية مجال البحث، أي تحديد حجم العينة، وتحديد نوع هذه التغطية (أي تصميم العينة)، ويترتب عليها نوعان من التكاليف: تكلفة الموارد اللازمة للبحث (أي تكاليف الوقت والمال والباحثين)؛ وتكلفة الخطأ في استكشاف ما يتم البحث عنه بسبب عدم كفاية التغطية لميدان البحث (أي خطأ العينة).

ويطبق خبراء بحوث العمليات نظرية البحث، في حل مثل هذه المشكلات، وفي تحديد المجالات التي يجب البحث فيها وكيفية بحثها.

• أساليب بحوث العمليات:

يتسم حقل بحوث العمليات، بأنه قد يتم استخدام أسلوب واحد لمعالجة مشكلة معينة بذاتها، كما قد يتم استخدام نفس الأسلوب لمعالجة أنواع أخرى من المشكلات، ومن هنا فإنه يصبح من الضروري بمكان تعريف كل أسلوب من هذه الأساليب، وذلك على النحو الآتي:

١- نموذج البرمجة الخطية:

وهو عبارة عن: أسلوب رياضي، يعمل على تخصيص الموارد المحددة على المنتجات المختلفة؛ حيث تكون هذه المنتجات مقيدة بظروف واعتبارات فنية للإمكانيات، والتي يُعبّر عنها في صورة معادلات أو متباينات خطية، وذلك لتحديد مزيج الإنتاج الأمثل، الذي يحقق هدف أمثل- في ضوء تلك القيود- قد يتمثل إما في تعظيم الأرباح أو في تخفيض التكاليف إلى أدنى حد، ويتميز هذا النموذج أساساً بالعلاقات الخطية بين المتغيرات، وعادة ما تستخدم طريقة السمبلكس في حل هذا النموذج.

٢- نماذج التوزيع:

وهي عبارة عن: طرق خاصة في مشكلة البرمجة الخطية، وترتبط بمشكلات النقل والتعيين، حيث يهدف نموذج النقل إلى تخصيص الوحدات التي تتم إنتاجها في مواقع إنتاج مختلفة، على عدد من مواقع البيع أو التوزيع

الجغرافية، بطريقة تساهم في تخفيض تكلفة النقل إلى أدنى حد أو تعظيم الربحية. ويتعلق نموذج التعيين، بتعيين عدد من نقط الأصل، علي نفس عدد المواقع، من أجل تحقيق مثالية دالة الهدف التي ترتبط بالتكلفة أو الربح.

٣- نموذج البرمجة الديناميكية:

ويهدف هذا الأسلوب إلى إيجاد الحلول المناسبة، للمشكلات التي تستلزم اتخاذ القرارات التي تتوقف علي بعضها البعض وتتم في تتابع، ويؤثر كل قرار علي القرارات المستقبلية، وتتم هذه التأثيرات في تتابع، ويؤثر كل قرار علي القرارات المستقبلية، والتي تتم أيضاً في تتابع، وتقوم أساساً علي تقسيم وتجزئة المشكلة، إلي أجزاء صغيرة يسهل حلها، على أن يتم إعادة تجميع وتركيب وربط نتائج التحليل مع بعضها البعض، للوصول إلى أفضل حل للمشكلة الأصلية المركبة، ويُعرف ذلك بالحل متعدد المراحل للمشكلات.

٤- نماذج شبكات الأعمال:

وهي تستخدم عادة في إدارة المنشآت كبيرة الحجم، والتي تتضمن عدداً من أوجه النشاط التي ترتبط بها مشكلات مركبة، تتعلق بتخطيط وجدولة ورقابة الأنشطة أو الأعمال، كما يتميز أداء هذه الأنشطة أو الأعمال، بتتابع فني وتكنولوجي محدد، ويتم حل هذه النماذج باستخدام أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (أسلوب بيرت) وباستخدام طريقة المسار الحرج.

٥- نماذج صفوف الانتظار:

وتستخدم أساساً من أجل تخفيض وقت العملاء، من أجل الخدمة بما يساهم في تخفيض تكاليف أداء هذه الخدمة إلى أدنى حد ممكن.

٦- نماذج نظرية المباريات:

وتستخدم هذه النماذج في المواقف التي تتوقف فيها القرارات التنافسية لمنافس ما، على خطط واستراتيجيات المنافسين الآخرين أو ذوي المصالح المتعارضة؛ سواءً كانت هذه الخطط والاستراتيجيات معروفة، أو يمكن التنبؤ بها، أو غير معروفة على الإطلاق.

٧- نماذج الإحلال:

وتستخدم هذه النماذج في التوصل إلى برنامج أو سياسة الإحلال المثلى، سواءً عند الإحلال الكامل للأصول، أو الإحلال الجزئي لها، بما يساهم في تخفيض تكاليف الاستثمار والتشغيل والصيانة إلى أدنى حد ممكن.

٨- نماذج المخزون:

وتهدف إلى تخفيض إجمالي تكاليف التجهيز الآلي أو الشراء وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون إلى أدنى حد ممكن، وذلك من خلال تحديد كمية الطلب الاقتصادية أو الكمية الاقتصادية للإنتاج، وتحديد عدد مرات الطلب أو المدة التي تفصل بين كل طلب وآخر، كما تساهم أيضاً في تحديد الحد الأدنى للمخزون، في ضوء طول فترة التوريد أو فترة الإنتاج، وتحديد الحد الأعلى للمخزون ونقطة إعادة الطلب.

٩- نماذج المحاكاة:

وتعتبر امتداداً طبيعياً لنماذج بحوث العمليات الرياضية والتحليلية؛ وتستخدم في وصف سلوك أو هيكل نظام حقيقي واقعي مركب خلال عدة فترات زمنية ممتدة، حيث تعتبر بذلك عملية بناء أو إنشاء جوهر الحقيقة بدون بلوغ الحقيقة ذاتها، وذلك بما يسهل من إمكانية دراسة وتجربة التفاعلات المركبة والداخلة في نظام معين، والذي قد يكون منشأة أعمال، أو صناعة أو نشاط اقتصادي، أو نظام فرعي من هذه النظم، بحيث يمكن من خلال المحاكاة: دراسة التغيرات في المعلومات أو النظم أو البيئة علي عمليات النظام، على أن يلي ذلك القيام بإجراء تعديلات في النظام، وملاحظة تأثير تلك التعديلات على السلوك الحقيقي للنظام، واختبارها وتقييمها بدون مخاطرة تجربة النظام الحقيقي ذاته.

• حدود استخدام بحوث العمليات:

تحيط وتحد بحوث العمليات - كمنهج علمي لحل المشكلات - مجموعة من الحدود، من أهمها:

(١) على الرغم من أن بحوث العمليات وأساليبها ونماذجها، تعالج كافة المشكلات التي تخضع للتحليل الكمي؛ فإنه لا يدخل في نطاقها تلك

- المشكلات التي لا تخضع للقياس الكمي؛ حيث قد لا يمكن إخضاع كل العوامل والمتغيرات المؤثرة في المشكلة للقياس الكمي.
- (٢) لا تعمل نماذج بحوث العمليات على توفير الأساس الكامل لاتخاذ كافة القرارات؛ حيث أنها تساعد الإدارة فقط في مواجهة وحل المشكلات التي تواجهها في الواقع العملي، حيث توفر نماذج بحوث العمليات، معلومات كمية غالباً ما تفيد في أغراض اتخاذ القرارات، ويكون القرار النهائي للإدارة؛ الأمر الذي يعني أن خبرة الإدارة والتقدير الشخصي لمتخذي القرارات، من العوامل الهامة للوصول إلى القرار النهائي الرشيد، ومن ثم فإن خبرة الإدارة وتجربتها وحكمها الشخصي، تظل ضرورية ولازمة لإدراك واختيار وتنفيذ النموذج الملائم، والتأكد من صلاحيته واستمرار استخدامه بصورة صحيحة.
- (٣) يتوقف نجاح تطبيق منهج بحوث العمليات، ليس على مجرد التصميم الصحيح للنموذج الرياضي؛ وإنما يتوقف أيضاً على مصادر المعلومات والبيانات، المرتبطة بأهداف وكفاءة وخبرة القوى البشرية المسؤولة عن جمع تلك المعلومات والبيانات.
- (٤) إن التطبيق الناجح لبحوث العمليات، لا يمكنه أن يستقل عن استخدام الفن أو الخبرة، فالقوة البشرية المدربة ذات المهارة الفنية والقدرات الذهنية المتميزة، تعتبر ضرورية جنباً إلى جنب مع الكفاءات الإدارية القادرة على التصور والإبداع، بالإضافة إلى توفير الإمكانيات المادية اللازمة، بمعنى أن التطبيق الناجح لمنهج وأساليب بحوث العمليات يعتمد على توفيق الله تعالى، ثم على توافر مجموعة من المقومات المادية والبشرية (كالحاسبات الإلكترونية والخبراء في مجالات المعرفة المختلفة)، ومن أهم الأشكال العملية لذلك: نظم دعم القرار، والتي تمثل نوعاً من التفاعل، بين نماذج بحوث العمليات وخبرة ومهارة متخذي القرار، فإن كل ذلك يعتبر بمثابة عوامل حيوية وجوهرية، في تطبيق هذا المنهج العلمي لاتخاذ القرارات.

الفصل الثاني الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

• مفهوم البرمجة الخطية:

تعتبر وظائف التخطيط من أهم وظائف الإدارة، بمختلف مستوياتها، وذلك بغية إيجاد أفضل الحلول لمشاكل التخطيط العديدة التي تواجه المنشآت على مختلف أنواعها وصورها القانونية وحجم أعمالها: صناعية كانت أو تجارية أو حكومية،... الخ.

وغني عن البيان، أن قرارات التخطيط تتمثل في محاولة الوصول إلى حلول للمشاكل التخطيطية، التي تقوم الإدارة بتحليلها ومواجهتها. ويعتبر أسلوب البرمجة الخطية، من أهم أساليب بحوث العمليات التي تم استخدامها وتطبيقها على نطاق واسع في مجال التخطيط بوجه عام، وفي مجال التخطيط المالي على وجه التحديد، وذلك فضلاً عن أنه يعتبر من أهم وأكثر أساليب بحوث العمليات شيوعاً واستخداماً في الحياة العملية، حيث يستخدم أسلوب البرمجة الخطية في محاولة مواجهة وحل العديد من المشاكل، والتي من أهمها: مشاكل التخصيص (أي تحديد التوزيع الأمثل للموارد الاقتصادية النادرة والمحدودة على الاستخدامات البديلة لها)؛ ويرتكز أسلوب البرمجة الخطية، على كفاءته المرتفعة في إمكانية التوصل إلى أفضل خطة للمنشأة، من بين مجموعة الخطط البديلة والمتاحة أمامها، حيث يمكن للمحاسبين الإداريين - من خلال استخدامهم لهذا الأسلوب - زيادة درجة كفاءة التخطيط المالي.

هذا وتعتبر البرمجة الخطية، من أهم طرق التحليل الكمي التي شاع تطبيقها واستخدامها في اتخاذ قرارات التخطيط المثلى، وهي عبارة عن طريقة رياضية منظمة، تتعلق بتخصيص الموارد المحددة من المواد الخام، والعمل، والآلات، والمعدات ورأس المال، بأفضل طريقة ممكنة، على أوجه

النشاط المختلفة والتي تتنافس فيما بينها على تلك الموارد المحدودة، وذلك بقصد تحقيق هدف معين، غالباً ما يتمثل في معيار اقتصادي مثل: تعظيم الأرباح إلى أقصى حد، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

ويلاحظ في هذا الصدد أن مصطلح أفضل طريقة ممكنة، يُقصد بها القيام باختيار أفضل بديل، من بين مجموعة من البدائل المتاحة أو البرامج المختلفة، لصنع قرار إداري معين، حيث يتم اختيار أفضل بديل أو برنامج ممكن، بحيث يكون هذا البديل الأفضل، هو الحل الأمثل للمشكلة الرياضية.

كما يلاحظ أيضاً أن البدائل أو البرامج توصف بالخطية، نظراً لوجود علاقات خطية بين كلٍ من: مخرجات النموذج؛ والموارد المحدودة أو المدخلات المختلفة الداخلة في تكوينه.

وتتبع أهمية استخدام نموذج البرمجة الخطية، من ارتباطها الوثيق بعملية إيجاد الحلول المثلى لمشاكل تخطيط الإنتاج، عن طريق: تحديد مزيج الإنتاج الأمثل؛ أو تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع من أنواع المنتجات؛ أو تحديد الحجم الأمثل للإنتاج أو الطاقة التشغيلية للمنشأة.

ولكي يمكننا فهم المقصود بمصطلح " البرمجة الخطية"، فإننا يمكن أن نتناول مفردات المصطلح، كلاً على حدى، حيث يُقصد بلفظ "البرامج": مجموعة الحلول الممكنة للمشكلة، بينما يُقصد بلفظ "الخطية": ثبات العلاقة بين متغيرات المشكلة، والتي تأخذ شكل الخط المستقيم عند تمثيلها بيانياً، أو ثبات العلاقة بين المتغيرات مهما كان مستوى النشاط، الأمر الذي يمكن معه القول بأن أسلوب البرمجة الخطية: ما هو إلا أسلوب رياضي يهدف إلى الوصول إلى الحل الأمثل من بين مجموعة الحلول الممكنة لمشكلة ما، تتسم العلاقة بين متغيراتها بأنها علاقة خطية.

وتعد البرمجة الخطية أحد أساليب البرمجة الرياضية، والتي تشتمل على مجموعة من الأساليب الرياضية المتنوعة، والتي يمكن الاستفادة منها في

معالجة العديد من المشاكل؛ حيث يلائم أسلوب البرمجة الخطية تلك الحالات التي تتسم بخطية العلاقات بين متغيراتها، وتتعامل مع هدف واحد؛ بينما لا يلائم هذا الأسلوب معالجة تلك الحالات التي تتضمن أهدافاً متعددة.

هذا، ونظراً لأن منشآت الأعمال تسعى - غالباً - إلى تحقيق أهداف متعددة، متفاوتة الأهمية، بل وقد تكون متعارضة؛ فإن ذلك يمكن مواجهته بأسلوب برمجة الأهداف، والذي يُعتبر أسلوباً مناسباً لمعالجة حالات الأهداف المتعددة والمتعارضة وفقاً لجدول أولويات وتفضيلات الإدارة؛ أو بمعنى آخر فإن هذا الأسلوب يصبح مناسباً لتلك الحالات التي يمكن لإدارة المنشأة فيها القيام بتحديد أولويات لأهدافها المختلفة، وأوزان تلك الأهداف.

ومن جهة أخرى، فإن أسلوب البرمجة الخطية متعددة الأهداف، يتعامل مع حالات تعدد الأهداف، ويعمل على الوصول إلى الحل الأمثل، الذي يحقق تلك الأهداف المتعددة، دونما حاجة إلى التحديد المسبق للمستويات المرغوبة لهذه الأهداف أو أوزانها النسبية، ومن هنا فإن أسلوب البرمجة متعددة الأهداف قد أمكنه مواجهة أوجه القصور التي تُنسب لأسلوب برمجة الأهداف. بل إنه يمكن القول، بأن هناك مجموعة متكاملة من الأساليب الرياضية، تقع ضمن مجموعة البرمجة الرياضية، من أهمها: أسلوب البرمجة غير الخطية؛ والذي يفضل استخدامه في حالة توافر علاقات غير خطية بين متغيرات المشاكل؛ وكذلك أسلوب البرمجة بالوحدات الصحيحة؛ والذي يفضل استخدامه في الحالات التي لا تسمح بالحلول الكسرية؛ وأسلوب البرمجة الاحتمالية؛ والذي يفضل استخدامه في حالة ما إذا كانت البيانات المتاحة عن متغيرات المشكلة غير مؤكدة (احتمالية).

■ الشروط الواجب توافرها في مشاكل البرمجة الخطية:

يقوم نموذج البرمجة الخطية على مجموعة من الاشتراطات، التي يلزم توافرها لإمكانية تطبيقه وحله، حيث يشترط ضرورة أن تتوافر في المشاكل المطلوب حلها بالبرمجة الخطية، مجموعة من الشروط، ومن أهمها:

١- أن يكون هناك هدفاً محدداً لحل المشكلة، وأن يكون من الممكن صياغة هذا الهدف بصورة رياضية.

٢- أن معيار اختيار أفضل القيم لمتغيرات القرار، يتم وصفه عن طريق دالة خطية تحتوي على هذه المتغيرات، وتُعرف هذه الدالة بأنها دالة الهدف، والتي قد تتمثل في: تعظيم الأرباح، أو تخفيض (تدنية) التكاليف.

٣- أن متغيرات القرار، التي تدخل في بناء المشكلة: يجب أن تكون متغيرات غير سالبة، فيجب ألا يظهر في حل نموذج البرمجة الخطية قيم سالبة، وذلك ما يعرف بشرط عدم السالبة، حيث لا يعقل أن يتضمن الحل مثلاً إنتاج (- ١٠) من منتج ما، حيث أنه لا يمكن إنتاج وحدات سالبة، بل يجب أن تكون موجبة، بمعنى أن تكون قيمتها الجبرية أكبر من أو تساوي الصفر.

٤- يجب أن يكون للمشكلة مجموعة من الحلول الممكنة، أو بمعنى آخر أن يكون هناك أكثر من بديل لحل المشكلة، وإذا كان للمشكلة حل واحد أو بديل واحد فلن تكون هناك مشكلة ولا يوجد مبرر لاستخدام أسلوب البرمجة الخطية. كما يشترط وجود نطاق محدد لمجموعة الحلول البديلة الممكنة للمشكلة.

٥- أن تكون الموارد المتاحة للمنشأة محدودة، حيث إن ندرة الموارد تؤدي إلى نشأة مشكلة التوزيع الأمثل لها، وأن يتم التعبير عن قواعد العمل التي تحكم عملية تخصيص الموارد المحدودة، في صورة مجموعة من المعادلات أو المتباينات الخطية، يطلق عليها مجموعة القيود.

٦- أن يكون من الممكن صياغة العلاقات بين المتغيرات المختلفة في صورة رياضية، بحيث يمكن وصف المشكلة وكل العلاقات بين المتغيرات رياضياً، بمعنى ضرورة أن يكون من الممكن القياس الكمي لأهم المتغيرات المؤثرة على المشكلة، وإمكانية تمثيل المشكلة في صورة معادلات أو متباينات خطية (أي من الدرجة الأولى).

■ مجالات التطبيق العملي لأسلوب البرمجة الخطية:

اتسع مجال استخدام أسلوب البرمجة الخطية - باعتباره من أكثر أساليب بحوث العمليات استخداماً - في حل العديد من المشاكل، خاصة المشاكل الإدارية القابلة للصياغة في هيئة نموذج برمجة خطية. ولعل من أهم تطبيقات أسلوب البرمجة الخطية في منشآت الأعمال:

١- تحديد التشكيلة المثلى للمنتجات.

٢- مشاكل النقل.

٣- تحديد المزيج الأمثل للعناصر أو المدخلات.

٤- إعداد جداول تشغيل الآلات.

٥- جدولة الإنتاج، وتخطيط المخزون السلي.

٦- مشاكل التخطيط المالي، وإعداد الموازنات التخطيطية.

■ الفروض الأساسية لنموذج البرمجة الخطية:

يرتكز نموذج البرمجة الخطية، على مجموعة من الفروض، من أهمها:

١- فرض العلاقات الخطية:

تتضمن أي مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية مجموعة من الأنشطة، بحيث يحتاج كل نشاط منها إلى مجموعة من المدخلات، ويترتب عليه مجموعة من المخرجات؛ فعلى سبيل المثال، فإن أنشطة مشكلة تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، تتمثل في المنتجات التي يمكن للمنشأة إنتاجها، ويتطلب إنتاج كل منتج مجموعة من الموارد تتمثل في عناصر الإنتاج المختلفة اللازمة، كما يترتب على نشاط إنتاج أي منتج مخرجات معينة، تتمثل في: المنتج الذي يمكن بيعه، وتحقيق الربح.

وبناءً على ذلك، ففي نموذج البرمجة الخطية، فإنه يمكن استخدام أي هدف بشرط أن يكون قابلاً للصياغة في صورة رياضية، حيث يلاحظ أن أكثر

الأهداف شيوعاً في نموذج البرمجة الخطية، في الحياة العملية: هدف تعظيم الربح؛ أو هدف تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن؛ حيث تتكون دالة الهدف من مجموعة متغيرات تمثل الأنشطة المختلفة (أو ما يطلق عليها: متغيرات القرار).

هذا، وقد تتمثل معاملات المتغيرات في دالة الهدف في ربح أو تكلفة وحدة النشاط، وذلك بالطبع بحسب الهدف المرغوب تحقيقه، حيث نلاحظ هنا أنه لكي تكون دالة الهدف خطية، فإنه معاملات المتغيرات في دالة الهدف يجب أن تكون ثابتة (أي لا تتغير بتغيرات مستوى النشاط)، ولذلك فإننا نستخدم: عائد المساهمة أو هامش ربح الوحدة (وليس صافى الربح الوحدة) في حالة ما إذا كان الهدف هو تعظيم الربح، كما نستخدم: التكلفة المتغيرة للوحدة في حالة ما إذا كان الهدف هو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

ويُقصد بالخطية في هذا السياق: أن يتم تمثيل المشكلة في صورة دوال ومعادلات ومتباينات من الدرجة الأولى، أي أن تكون جميع المتغيرات ذات الأس واحد (مرفوعة لأس واحد)؛ وألا توجد متغيرات مضروبة في متغيرات أخرى، ومن ثم فإنه يمكن تمثيلها في صورة خطوط مستقيمة.

٢- فرض الهدف الوحيد:

يرتكز نموذج البرمجة الخطية، على افتراض أن منشأة الأعمال، تهدف إلى تحقيق هدف واحد، قد يكون تعظيم الربحية، أو تخفيض أو تدنية التكاليف. غير أنه الواقع العملي، قد نجد أن مثل هذا الافتراض غير قائم، حيث تسعى منشآت الأعمال في الغالب، إلى تحقيق مجموعة أهداف، وهنا يصبح من الأنسب استخدام نماذج رياضية تلائم حالات الأهداف المتعددة، مثل: نموذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف، أو نموذج برمجة الأهداف، أو غيرهما من النماذج الرياضية التي تسمح بتعدد أهداف النموذج المطلوب التوصل إلى حله.

٣- فرض القابلية للتجزئة:

ويرتكز هذا الفرض على إمكانية أن يتضمن الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية قيمة كسرية؛ وكذلك الحال بالنسبة للموارد (أو المدخلات)، فعلى سبيل المثال: فقد يتمثل الحل الأمثل لإحدى مشاكل البرمجة الخطية، في: إنتاج ٢١.٧٥ وحدة من أحد المنتجات، ويحتاج ذلك إلى ٤٣.٥ ساعة عمل مباشر، و ١١.٢٥ كيلو جرام من مادة خام معينة.

وترتيباً على ذلك، فإنه إذا كانت طبيعة المشكلة لا تقبل الحلول الكسرية، مثلما هو عليه الحال في مشكلة القرارات الاستثمارية والمفاضلة بين الاستثمارات البديلة (حيث لا يمكن اتخاذ قرار بقبول ٢.٥ أو ٢.٢٥ أو ١.٥ أو ١.٢٥ أو ١.٧٥ مشروع استثماري من بين المشروعات المعروضة للدراسة واختيار إحداها): ففي مثل تلك الحالات، لا يصلح استخدام نموذج البرمجة الخطية، وإنما قد يتناسب مع مثل تلك الحالات، استخدام نموذج البرمجة بوحدات صحيحة.

٤- فرض التأكد التام:

حيث يعتمد نموذج البرمجة الخطية، على فرض رئيس، يتلخص في أن جميع معالم النموذج معلومة على وجه التأكيد، أي أنها محددة في صورة قيم وحيدة محددة، وليست في صورة توزيعات احتمالية؛ ويسري ذلك أو ينطبق على كافة معالم النموذج، سواءً: معاملات المتغيرات في دالة الهدف؛ أو معاملات المتغيرات في القيود التي تمثل الموارد المتاحة؛ أو الكميات المتاحة من تلك الموارد.

• تكوين نماذج البرمجة الخطية لتعظيم الأرباح:

يتم تكوين وصياغة نموذج البرمجة الخطية لتعظيم الأرباح وفقاً للخطوات الآتية:

▪ الخطوة الأولى:

تعيين متغيرات القرار الذي يجب اتخاذه، وهي المتغيرات المجهولة التي يجب تحديد القيم المثلى لها، والتعبير عنها في صورة رموز جبرية.

■ الخطوة الثانية:

تحديد كافة قيود (حدود) المشكلة محل الدراسة، والتي تتمثل في الموارد المحدودة، بحيث يتم التعبير عنها في صورة معادلات أو متباينات خطية، بحيث تصبح بمثابة دالات خطية لمتغيرات القرار المجهولة.

■ الخطوة الثالثة:

تحديد الهدف أو معيار القرار والتعبير عنه، كدالة خطية لمتغيرات القرار، وهذا الهدف قد يتمثل في تعظيم الأرباح؛ أو في تلبية أو تخفيض التكاليف.

✓ هذا ولكي يمكننا فهم طبيعة نموذج ومشاكل البرمجة الخطية، أن نقوم بتقسيم مشكلة البرمجة الخطية، إلى مرحلتين رئيسيتين:

المرحلة الأولى: صياغة النموذج.

المرحلة الثانية: حل النموذج.

حيث تعتبر مرحلة الصياغة ذات أهمية كبيرة، وذلك بسبب أن مدى سلامة وصحة الحل (ومن ثم فعالية أسلوب البرمجة الخطية)، إنما تعتمد على الله تعالى أولاً، ثم على درجة دقة وسلامة صياغة النموذج. وللمحاسب الإداري الذي يعمل ضمن فريق بحوث العمليات، دور رئيس لا يمكن تجاهله في مرحلة أو عملية صياغة النموذج.

في حين أن مرحلة حل النموذج، وعلى الرغم من ارتفاع درجة أهميتها وخطورتها، إلا أنها لم تعد تمثل مشكلة صعبة، وذلك بعد انتشار وتطور عملية استخدام الحاسبات الآلية، وظهور المزيد من البرامج الجاهزة المتخصصة في مجال بحوث العمليات عموماً، وفي مجال البرمجة الخطية بوجه خاص.

■ مكونات نموذج البرمجة الخطية:

تتشرك كافة مشاكل البرمجة الخطية، في أنها تتضمن هدفاً محدداً يتم السعي نحو الوصول إلى القيمة المثلى له، في حدود الموارد والإمكانات

المتاحة للمنشأة؛ ومن هنا فإننا يمكننا القول بأن نموذج البرمجة الخطية يتكون من قطاعين أو جزئين رئيسيين:

١ - دالة الهدف.

٢ - القيود.

١ - دالة الهدف:

فإذا كان الهدف من نموذج البرمجة الخطية للمشكلة محل الدراسة، يتمثل في تعظيم الربح، وكانت المنشأة صاحبة تلك المشكلة، تنتج منتجين: س_١، س_٢، على سبيل المثال، وكان عائد مساهمة الوحدة من س_١ = ٣٣ جنيهاً، ومن س_٢ = ٥٥ جنيهاً، فإننا يمكننا صياغة دالة الهدف في هذه الحالة على النحو الآتي:

$$\text{تعظيم } R = 33 \text{ س}_1 + 55 \text{ س}_2$$

حيث R = عائد المساهمة الكلي للمنشأة.

ويلاحظ أننا استخدمنا عائد مساهمة الوحدة، وليس صافي ربح الوحدة، كمعاملات للمتغيرات في دالة الهدف، وذلك لكي تكون هذه الدالة دالة خطية، حيث أن صافي ربح الوحدة غير ثابت، أي أنه ليس خطياً في علاقته بحجم النشاط.

وذلك في الوقت الذي تتوافر فيه خاصية الخطية، في العلاقة القائمة بين عائد مساهمة الوحدة، وحجم النشاط.

وإذا كان الهدف النهائي للمنشأة، يتمثل في تحقيق أقصى أرباح كلية ممكنة، فإنه يمكن إثبات أن تعظيم عائد المساهمة الإجمالي للمنشأة، يؤدي في نفس الوقت إلى تعظيم صافي الربح، وذلك بسبب ثبات مستوى التكاليف الثابتة.

٢- القيود:

يفصح الواقع العملي، عن مواجهة منشآت الأعمال، لمجموعة من القيود، والتي قد تتمثل في أو تعبر عن ندرة الموارد والإمكانات المتاحة للمنشأة، أو عن احتياجات السوق والكميات القصوى التي يمكن أن يستوعبها من منتجات المنشأة، كما قد تعبر بعض القيود عن بعض السياسات والاعتبارات الاجتماعية، أو بعض نوعيات علاقات الارتباط بين متغيرات القرار في النموذج.

وتتضمن المجموعة الأولى من القيود: الموارد والإمكانات المحدودة المتاحة للمنشأة، مثل المواد الخام والطاقة الآلية والبشرية، فإذا افترضنا أن الطاقة الآلية المتاحة لإحدى منشآت الأعمال مليون ساعة سنوياً، وكانت تلك المنشأة تستطيع إنتاج ثلاث منتجات س_١، س_٢، س_٣، وكانت الوحدة من المنتج س_١ تحتاج إلى ٧ ساعات من الطاقة الآلية، والوحدة من المنتج س_٢ تحتاج إلى ٩ ساعات، والوحدة من المنتج س_٣ تحتاج إلى ١١ ساعة، فإنه يمكن صياغة قيد الطاقة الآلية على النحو الآتي:

$$٧س_١ + ٩س_٢ + ١١س_٣ \geq ١,٠٠٠,٠٠٠$$

ويُقصد بذلك أن كميات الإنتاج من المنتجات: س_١، س_٢، س_٣، والتي سيتضمنها الحل الأمثل للنموذج، يجب ألا تزيد احتياجاتها الكلية من ساعات الطاقة الآلية، عن ١,٠٠٠,٠٠٠ ساعة.

وذلك في حين أن القيود الخاصة باحتياجات السوق أو الطاقة التسويقية، إنما تعبر عن الحدود القصوى لما يمكن أن تبعية المنشأة في السوق من كل منتج من المنتجات، في حالة وجود مثل تلك الحدود. فإذا افترضنا أن الحد الأقصى لما يمكن أن تبعية إحدى منشآت الأعمال، من المنتج س_١ هو ٤٥٠,٠٠٠ وحدة فإنه يمكن صياغة ذلك رياضياً على النحو الآتي:

$$س_١ \geq ٤٥٠,٠٠٠$$

في حين أن القيود الخاصة بالسياسات والاعتبارات الاجتماعية، تعكس بعض السياسات التي تلزم بها الدولة منشآت الأعمال، وذلك وفاءً لبعض الاعتبارات السياسية أو الاقتصادية أو الاجتماعية. وهنا نلاحظ أن نموذج البرمجة الخطية، يتضمن إنتاج المنتجات الأكثر ربحية، فإذا كانت بعض المنتجات التي تنتجها المنشأة، تمثل سلعاً إستراتيجية أو شعبية، فإن الحل الأمثل للنموذج لن يتضمن إنتاج هذه المنتجات، أو إنتاجها بكميات لا تفي بحاجات المجتمع؛ ومن هنا فإن الدولة قد تفرض علي مثل تلك المنشآت ألا يقل إنتاجها من سلع معينة عن حدود معينة؛ فإذا افترضنا أن الدولة قد قامت بإلزام إحدى منشآت الأعمال، ألا يقل إنتاجها من المنتج س. عن ٦٠٠,٠٠٠ وحدة، فإنه يمكن صياغة هذا القيد، في مثل هذه الحالة، على النحو الآتي:

$$س. \leq 600,000$$

وأخيراً، فإن المجموعة الأخيرة من القيود تمثل: علاقات الارتباط الفني أو الاقتصادي بين متغيرات القرار؛ فقد يرتبط إنتاج سلعة ما فنياً بإنتاج سلعة أخرى، كما قد يكون الارتباط اقتصادياً، بمعنى أن العائد من إنتاج سلعة ما، يتأثر بإنتاج أو عدم إنتاج سلعة أخرى ضمن تشكيلة منتجات المنشأة. فإذا افترضنا أن الآلات الحالية للمنشأة تقوم بإنتاج المنتجين س_١، س_٢ بالتوازي، بمعنى أن كل وحدة يتم إنتاجها من س_١ لا بد من إنتاج وحدة من س_٢ في نفس الوقت، فإن هذا الارتباط الفني يمكن صياغته في صورة القيد الآتي:

$$س_١ = س_٢$$

■ الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية:

تأخذ الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية الصورة الآتية:

المطلوب الوصول إلي أقصى أو أدنى قيمة للدالة الآتية:

$$د (ر) = ر_١ س_١ + ر_٢ س_٢ + + ر_ن س_ن \quad (١)$$

في ظل القيود التالية:

$$أ_1 س_1 + أ_2 س_2 + + أ_n س_n \geq \text{أو} \leq ك \quad (2)$$

$$س_1، س_2،، س_n \leq \text{صفر} \quad (3)$$

حيث تمثل:

د(ر): دالة الهدف المطلوب الوصول إلى قيمتها المثلى، سواءً كانت أقصى قيمة ممكنة، أو أدنى قيمة ممكنة.

ر₁،، ر_n: معاملات حسابية، تعبر عن مدى مساهمة متغيرات القرار، في تحقيق دالة الهدف.

س₁،، س_n: متغيرات القرار.

أ₁،، أ_n: معاملات حسابية، تمثل معاملات متغيرات القرار في القيود.

ك₁،، ك_n: القيم المطلقة للقيود، وهي تعبر عن الكميات المتاحة من الموارد، ويطلق عليها قيم الطرف الأيسر للمتباينات.

■ خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية:

تعد مرحلة الصياغة، من أهم مراحل حل مشاكل البرمجة الخطية؛ حيث تتوقف سلامة وصحة حل النموذج (كفاءة ونجاح أسلوب البرمجة الخطية)، على توفيق الله تعالى، ثم على سلامة صياغة النموذج.

وإذا كان حل النموذج يتم وفقاً لخطوات محددة وواضحة، كما قد يتم استخدام الحاسبات الآلية، فإنه لا توجد قواعد محددة تحكم عملية صياغة النموذج، حيث تعتمد الصياغة على خبرة وكفاءة مصمم النموذج وقدرته على التفكير والتحليل المنطقي السليم.

● وتتكون عملية صياغة النموذج إلى الخطوات الآتية:

١- دراسة المشكلة.

٢- تحديد متغيرات القرار.

٣- صياغة دالة الهدف.

٤- صياغة القيود.

وذلك كما يتبين مما يلي:

١- دراسة المشكلة:

فمن المعلوم أن الخطوة الأولى لحل أية مشكلة، تتمثل في دراسة تلك المشكلة من كافة جوانبها وأبعادها، ومن ثم فإنه يمكن تحديد الهدف المطلوب تحقيقه، بالإضافة إلى العوامل والعناصر الواجب تحديد قيمتها لتحقيق ذلك الهدف.

٢- تحديد متغيرات القرار:

حيث تتمثل متغيرات القرار في كافة الأنشطة، التي يمكن أن تقوم بها المنشأة وتؤدي إلى تحقيق الهدف، حيث تتمثل متغيرات القرار في كافة البدائل التي يمكن أن تؤدي إلى تحقيق الهدف؛ وفي مشاكل تحديد تشكيلة المنتجات المثلى على سبيل المثال، فإن متغيرات القرار تتمثل في المنتجات التي يمكن للمنشأة القيام بإنتاجها، ويعمل نموذج البرمجة الخطية في مثل هذه الحالة، على الوصول إلى القيمة المثلى لدالة الهدف، ومن الواجب هنا ضرورة ملاحظة أن تحديد متغيرات القرار يجب أن يتم بدقة، لأن وقوع أي خطأ في ذلك، من شأنه أن يعمل على صياغة النموذج بطريقة غير صحيحة.

٣ - صياغة دالة الهدف:

حيث يجب ملاحظة أن صياغة دالة الهدف، تستلزم ضرورة تحديد مساهمة كل متغير من متغيرات القرار في تحقيق الهدف، حيث تُسمى هذه المساهمات: معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

فإذا كان الهدف يتمثل في تعظيم الربح، وكانت متغيرات القرار عبارة عن المنتجات س_١، س_٢..... س_ن، ففي هذه الحالة فإننا يمكن أن نستخدم عائد أو هامش المساهمة الوحدة من المنتج، كمعاملات في دالة الهدف، وذلك تحقيقاً لشرط الخطية؛ وإذا رمزنا لعائد أو هامش المساهمة للوحدة من المنتج بالرمز r_j فإنه يمكن صياغة دالة الهدف كما يلي:

المطلوب تعظيم قيمة الدالة التالية:

$$R = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \dots + r_n s_n$$

حيث تمثل r_i هامش مساهمة الوحدة من المنتج s_i ، كما يمثل s_i عدد وحدات هذا المنتج؛ ومن ثم فإن $r_1 s_1$ تعبر عن: هامش مساهمة المنتج الأول أو مقدار مساهمة المنتج الأول في هدف ربحية المنشأة ككل. وتمثل (R) : مجموع هامش مساهمة كل المنتجات، أو هامش المساهمة الإجمالي للمنشأة ككل؛ والمطلوب من النموذج تحديد القيم المثلى لمتغيرات القرار (s_1, s_2, \dots, s_n) ، والتي تؤدي إلى الوصول إلى القيمة القصوى لدالة الهدف (R) .

٤- صياغة قيود المشكلة:

وهنا يجب أن نلاحظ أن صياغة قيود المشكلة، تستلزم ضرورة حصر كافة القيود المحيطة بالمشكلة، سواءً كانت قيوداً خاصة بالموارد والإمكانيات المحدودة المتاحة للمنشأة، أو قيوداً خاصة بالطاقة التسويقية أو سياسات اقتصادية أو اجتماعية أو بعلاقات ارتباط فني أو اقتصادي بين متغيرات القرار.

وبعد أن نقوم بحصر القيود، فإننا يجب أن نحدد الآتي:

أ- معاملات متغيرات القرار في القيود أو معاملات المدخلات: فإذا ما أخذنا حالة مشاكل تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، على سبيل المثال، فإننا نجد أنه بالنسبة للقيود التي تعكس الموارد المحدودة المتاحة للمنشأة، فإن معاملات متغيرات القرار في تلك القيود تتمثل في: احتياجات وحدة المنتج من كل مورد من الموارد المحدودة المتاحة، فعلي سبيل المثال: إذا كانت الوحدة من المنتج الأول (s_1) تحتاج إلى ٢٧ ساعة من ساعات العمل المباشر، ٧.٥ كيلو جرام من المادة الخام أ، و ١١ جرام من المادة الخام (ب)، فإن المعاملات الحسابية: ٢٧، ٧.٥، ١١ تسمى: معاملات المتغير (s_1) في القيود والتي تمثل الإمكانيات المتاحة من ساعات العمل المباشر، والمادتين الخام أ، ب علي التوالي.

ب- تحديد الكميات المتاحة من الموارد:

ويلخص الجدول التالي عملية صياغة القيود، حيث يمكن من خلاله أن نقوم بعملية تلخيص لكل من: القيود ومعاملات متغيرات القرار في القيود والكميات المتاحة من الموارد (قيم الطرف الأيسر للمتباينات).

الكميات المتاحة من الموارد	س ١ س ٢ سن		متغيرات القرار
	معاملات متغيرات القرار في القيود		الموارد
			ساعات العمل المباشر مادة خام أ مادة خام ب ... الخ

واعتماداً على الله تعالى، ثم على الجدول السابق، فإننا يمكننا أن نقوم بصياغة العلاقة الكمية، بين متغيرات القرار والقيود، في صورة معادلات أو متباينات خطية.

■ **أمثلة تطبيقية على كيفية صياغة نموذج البرمجة الخطية:**

● **مثال ١. مشكلة تشكيلة المنتجات المثلى:**

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، ويمر كل منتج منهم بمرحلتين صناعيتين هما: مرحلة التقطيع، ومرحلة التشطيب، ويوضح الجدول الآتي الوقت اللازم لإنتاج الوحدة من كل منتج في كل مرحلة:

المنتج الرابع	المنتج الثالث	المنتج الثاني	المنتج الأول	منتجات المراحل
٨	٩	٦	٧	مرحلة التقطيع
٦	٧	٨	٥	مرحل التشطيب

هذا، وتبلغ الساعات المتاحة في مرحلة التقطيع ١٩٠٠ ساعة أسبوعياً وفي مرحلة التشطيب ١٤٠٠ ساعة أسبوعياً، وفيما يلي البيانات المتوافرة عن أسعار البيع والتكاليف المتغيرة للوحدة من كل منتج:

المنتج الرابع	المنتج الثالث	المنتج الثاني	المنتج الأول	المنتجات بيانات المنتجات
٣٤	٢٨	٢٣	٢١	سعر البيع تكاليف الإنتاج:
٤	٦	٥	٣	تكلفة المواد المباشرة
٨	٨	٤	٥	التكلفة المتغيرة للتقطيع
٧	٥	٣	٢	التكلفة الثابتة للتقطيع
٦	٦	٨	٦	التكلفة المتغيرة للتشطيب
٩	٧	٦	٧	التكلفة الثابتة للتشطيب

• والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى بما يحقق أقصى ربح ممكن.

✓ نلاحظ هنا أننا يمكننا القيام بصياغة نموذج البرمجة الخطية - في ظل الخطوات المبينة سابقاً - وذلك على النحو الآتي:

١- دراسة المشكلة:

تتمثل هذه المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، حيث يوجد أمام هذه المنشأة مجموعة بدائل تتمثل في المنتجات الممكن إنتاجها، وتتمثل المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى من بين هذه المنتجات، وبحيث تحقق أقصى ربح ممكن في حدود الموارد والإمكانات المحدودة المتاحة للمنشأة.

٢- تحديد متغيرات القرار:

تتمثل متغيرات القرار في هذه المشكلة في الآتي:

- إنتاج وبيع المنتج الأول، ويرمز له بالرمز س_١ للتعبير عن كمية الإنتاج والمبيعات من هذا المنتج.

- إنتاج وبيع المنتج الثاني، ويرمز له بالرمز س_٢.

- إنتاج وبيع المنتج الثالث، ويرمز له بالرمز س_٣.

- إنتاج وبيع المنتج الرابع، ويرمز له بالرمز س_٤.

٣- صياغة دالة الهدف:

في هذا المثال؛ وترتيباً على أن الهدف هنا يتمثل في تعظيم الربح: فإن معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف تتمثل هنا في: هامش مساهمة الوحدة من كل منتج - حيث يمكن حساب هامش المساهمة عن طريق طرح التكاليف المتغيرة للوحدة من سعر بيع الوحدة - وذلك كما يتبين مما يلي:

المنتج الرابع س٤	المنتج الثالث س٣	المنتج الثاني س٢	المنتج الأول س١	المنتجات بيانات المنتجات
٣٤	٢٨	٢٣	٢١	سعر بيع الوحدة
(١٨)	(٢٠)	(١٧)	(١٤)	(-) التكلفة المتغيرة للوحدة
١٦	٨	٦	٧	= هامش مساهمة الوحدة

وعلى ذلك فإننا نستطيع صياغة دالة الهدف على النحو الآتي:

المطلوب تعظيم الدالة:

$$R = 7س١ + 6س٢ + 8س٣ + 16س٤$$

٤- صياغة قيود المشكلة:

تتمثل الموارد المتاحة في هذه المشكلة في الطاقة المتاحة في مركزي: التقطيع والتشطيب، وتتطلب صياغة القيود ضرورة تحديد الآتي:

أ- معاملات متغيرات القرار في القيود وتتمثل في احتياجات وحدة المنتج من الساعات في كل مرحلة من مراحل الإنتاج: حيث يحتاج المنتج الأول إلى: ٧ ساعات تقطيع، ٥ ساعات تشطيب، وعلى نفس هذا النمط يمكننا تحديد هذه المعاملات لباقي المنتجات.

ب- الكميات المتاحة من الموارد: وهي: ١٩٠٠ ساعة تقطيع؛ و ١٤٠٠ ساعة تشطيب أسبوعياً.

ويمكن تلخيص البيانات السابقة في الجدول التالي:

الكميات المتاحة من الموارد	متغيرات القرار				الموارد
	س١	س٢	س٣	س٤	
١٩٠٠	٧	٦	٩	٨	طاقة التقطيع
١٤٠٠	٥	٨	٧	٦	طاقة التشطيب

ويتطلب الأمر صياغة قيد لكل مورد من الموارد، فإذا ما أخذنا المورد الأول، والذي يمثل طاقة التقطيع، فإننا نلاحظ أن الوحدة من المنتج الأول (س١) تحتاج إلى ٧ ساعات، ولذلك فإن المنتج الأول يحتاج إلى ٧ س١ من طاقة التقطيع، أما المنتج الثاني فيحتاج إلى ٦ س٢، والمنتج الثالث يحتاج إلى ٩ س٣، بينما يحتاج المنتج الرابع إلى ٨ س٤. وبالتالي فإن إجمالي الساعات التي يمكن تخصيصها من طاقة التقطيع لكل المنتجات = ٧ س١ + ٦ س٢ + ٩ س٣ + ٨ س٤؛ ويجب أن يكون هذا الإجمالي في حدود طاقة التقطيع أي في حدود ١٩٠٠ ساعة أسبوعياً، حيث يمكن التعبير عن ذلك في صورة المتباينة الآتية:

$$١٩٠٠ \geq ٧س١ + ٦س٢ + ٩س٣ + ٨س٤$$

أما بالنسبة للمورد الثاني فإنه يمكن التعبير عنه رياضياً على نفس المنوال السابق، حيث يصبح هذا القيد في صورة المتباينة الآتية:

$$١٤٠٠ \geq ٥س١ + ٨س٢ + ٧س٣ + ٦س٤$$

وإذا أضفنا شرط عدم السالبة، فإن الصياغة الكاملة للنموذج تأخذ الشكل

التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = ٧س١ + ٦س٢ + ٩س٣ + ٨س٤$$

وذلك في ظل القيود الآتية:

$$١٩٠٠ \geq ٧س١ + ٦س٢ + ٩س٣ + ٨س٤$$

$$١٤٠٠ \geq ٥س١ + ٨س٢ + ٧س٣ + ٦س٤$$

$$٠ \leq ١س١, ٢س٢, ٣س٣, ٤س٤$$

ويمكن بحل النموذج السابق، إيجاد قيم متغيرات القرار s_1 ، s_2 ، s_3 ، والتي تؤدي إلى الوصول إلى أقصى قيمة ممكنة لدالة الهدف. وقد يتضمن الحل الأمثل الاستغلال الكامل للطاقة المتاحة، كما قد يتضمن أيضاً عدم استغلال جزء من هذه الطاقة؛ ولذلك فإننا يجب أن نراعي إمكانية أن يتضمن النموذج السابق متغيرات جديدة، تأخذ في الحل الأمثل قيمة تعبر عن الطاقة غير المستغلة (إن وجدت). ويُطلق على هذه المتغيرات الجديدة: "المتغيرات الراكدة"، وتأخذ في الحل قيمة تساوي أو أكبر من الصفر، حيث لا يتصور أن تأخذ قيمة سالبة.

وإذا رمزنا للساعات غير المستغلة في مرحلة التجميع بالرمز (غ) وللساعات غير المستغلة في مرحلة التشطيب بالرمز (غ)، فإننا يمكننا إعادة صياغة النموذج السابق، على النحو الآتي:

المطلوب - تعظيم الدالة التالية:

$$R = 7s_1 + 6s_2 + 8s_3 + 16s_4 + \text{صفر غ} + \text{صفر غ}$$

في ظل القيود التالية:

$$1900 = 1s_1 + 6s_2 + 9s_3 + 8s_4 + \text{غ} + 1900$$

$$1400 = 5s_1 + 8s_2 + 7s_3 + 6s_4 + \text{غ} + 1400$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \text{غ} \geq \text{صفر}$$

هذا، ويجب مراعاة الملاحظات الآتية على النموذج السابق:

- (١) تمثل s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 متغيرات القرار، أما غ ، غ فتمثل الساعات غير المستغلة، وهي تقابل الطاقة والموارد غير المستغلة.
- (٢) الدالة المبينة في بداية النموذج، تمثل دالة الهدف، وهي تعبر عن إجمالي هامش المساهمة لمستويات النشاط s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 ؛
- (٣) المعادلتان المبينتان عقب دالة الهدف، تمثلان قيود المشكلة بعد تحويلهما من متباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة؛ أما المتباينة الأخيرة فتمثل شرط عدم السالبة.

٤) الطاقة المتاحة في مرحلتي التقطيع والتشطيب، تمثل الموارد المتاحة، ويطلق علي الكميات المتاحة منها: قيم الطرف الأيسر للمعادلات أو المتباينات.

٥) أي قيم تأخذها المتغيرات س_١، س_٢، س_٣، س_٤، غ_١، غ_٢ : تمثل حلاً للمشكلة؛ فإذا كان هذا الحل يفى بقيود المشكلة: يطلق عليه حينئذٍ حل ممكن، أما إذا كان هذا الحل يحقق أقصى قيمة لدالة الهدف أيضاً، فإنه يعتبر الحل الأمثل.

• مثال ٢. تشكيلة المنتجات المثلى:

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، حيث يتم الإنتاج في ثلاثة مراكز للإنتاج، وفيما يلي الساعات اللازمة لإنتاج كل وحدة من المنتجات في مراكز الإنتاج، واحتياجات الوحدة من المواد الخام، وكذلك هامش مساهمة الوحدة:

المنتجات	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث	المنتج الرابع	بيانات المنتجات
مركز الإنتاج الأول	٦٥	١٠٤	---	---	ساعة
مركز الإنتاج الثاني	٢٦	---	---	٥٢	ساعة
مركز الإنتاج الثالث	١٣	---	١٥٦	٣٩	ساعة
مادة خام ط	٥٢	---	٩١	---	كيلو جرام
مادة خام ق	---	٦٥	---	١١٧	ميلي لتر
هامش المساهمة	١٠٤	٧٨	٥٢	٦٥	جنيهاً

هذا وتبلغ الطاقة المتاحة في مراكز الإنتاج والكميات المتاحة من المواد

الخام ما يلي:

مركز الإنتاج الأول	٦٥٠,٠٠٠ ساعة
مركز الإنتاج الثاني	٥٢٠,٠٠٠ ساعة
مركز الإنتاج الثالث	٧٨٠,٠٠٠ ساعة
المادة الخام ط	١٩٥,٠٠٠ كيلو جرام
المادة الخام ق	١٣٠,٠٠٠ مل ليتر

وقد أسفرت دراسات السوق، عن أن أقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق من المنتج الأول هي ٦٥٠٠ وحدة، بينما يمكن استيعاب أي كميات من باقي المنتجات.

والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المنشأة، لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى التي تحقق لها أقصى ربح ممكن.

✓ يلاحظ هنا أننا يمكننا صياغة النموذج على النحو الآتي:

١ - دراسة المشكلة: تمثل هذه الحالة أيضاً إحدى مشاكل تحديد تشكيلة المنتجات المثلى؛ ويهدف نموذج البرمجة الخطية إلى تحديد تشكيلة المنتجات المثلى التي تحقق للمنشأة أقصى ربح ممكن، في حدود الطاقات والموارد المتاحة.

٢ - متغيرات القرار: حيث تتمثل متغيرات القرار هنا في: المنتجات التي يمكن للمنشأة إنتاجها، وسنستخدم الرموز س_١، س_٢، س_٣، س_٤، للتعبير عن كميات الإنتاج من المنتجات الأربعة علي التوالي.

٣ - صياغة دالة الهدف: حيث تتمثل معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف هنا، في هامش مساهمة الوحدة؛ وعلي ذلك يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = ١٠٤س١ + ٧٨س٢ + ٥٢س٣ + ٦٥س٤؛$$

٤ - صياغة القيود:

يمكن تلخيص معاملات متغيرات القرار في القيود وكذلك الكميات

المتاحة من الموارد في الجدول التالي:

الكميات المتاحة من الموارد	س٤؛	س٣	س٢	س١	متغيرات القرار الموارد
٦٥٠,٠٠٠	---	---	١٠٤	٦٥	مركز الإنتاج الأول
٥٢٠,٠٠٠	٥٢	---	---	٢٦	مركز الإنتاج الثاني
٧٨٠,٠٠٠	٣٩	١٥٦	---	١٣	مركز الإنتاج الثالث
١٩٥,٠٠٠	---	٩١	---	٥٢	مادة خام ط
١٣٠,٠٠٠	١١٧	---	٦٥	---	مادة خام ق

وبناءً على ذلك، فإننا يمكننا صياغة القيود على النحو الآتي:

مركز الإنتاج الأول:

$$650,000 \geq 65 \text{ س} 1 + 104 \text{ س} 2$$

مركز الإنتاج الثاني:

$$520,000 \geq 26 \text{ س} 1 + 52 \text{ س} 2$$

مركز الإنتاج الثالث:

$$780,000 \geq 13 \text{ س} 1 + 156 \text{ س} 2 + 39 \text{ س} 3$$

المادة الخام ط:

$$195,000 \geq 52 \text{ س} 1 + 91 \text{ س} 2$$

المادة الخام ق:

$$130,000 \geq 65 \text{ س} 2 + 117 \text{ س} 3$$

أما فيما يتعلق بأقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق بالنسبة للمنتج

الأول، فإنه يمكن صياغة هذا القيد على النحو الآتي:

$$6500 \geq 1 \text{ س} 1$$

وعلى ذلك يمكن صياغة النموذج كلاً على النحو الآتي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = 104 \text{ س} 1 + 78 \text{ س} 2 + 52 \text{ س} 3 + 65 \text{ س} 4$$

وذلك في ظل القيود التالية:

$$650,000 \geq 65 \text{ س} 1 + 104 \text{ س} 2$$

$$520,000 \geq 26 \text{ س} 1 + 52 \text{ س} 2$$

$$780,000 \geq 13 \text{ س} 1 + 156 \text{ س} 2 + 39 \text{ س} 3$$

$$195,000 \geq 52 \text{ س} 1 + 91 \text{ س} 2$$

$$130,000 \geq 65 \text{ س} 2 + 117 \text{ س} 3$$

$$6500 \geq 1 \text{ س} 1$$

$$1 \text{ س} 1, 2 \text{ س} 2, 3 \text{ س} 3, 4 \text{ س} 4 \leq \text{صفر} .$$

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لحل نموذج البرمجة الخطية

يلاحظ أن هناك أربعة اتجاهات أساسية، تمثل الأساليب المختلفة لحل مشاكل البرمجة الخطية، وهي: الطريقة البيانية؛ طريقة السمبلكس، والتي تقوم أساساً على الطريقة الجبرية (رياضة المصفوفات)، وتعتبر الطريقة العامة لحل معظم مشاكل البرمجة الخطية؛ طريقة النقل؛ وطريقة التعيين.

هذا، وعلى الرغم من أن الطريقة البيانية تعتبر ذات فائدة محدودة، في حل المشاكل العملية التي تتميز بكثرة وتعدد المتغيرات، ويقتصر تطبيقها في نموذج مكوناً من متغيرين فقط، يمكن تمثيلها بيانياً برسم محورين أو إحداثيين، ويصعب استخدامها في حل المشاكل ذات المتغيرات المتعددة، والتي تستلزم أبعاداً بيانيةً متعددة، تحتاج إلى نظريات هندسية خاصة، إلا أن تقديم الأسلوب البياني يعد خطوةً أولى في إيضاح بعض المفاهيم الأساسية، التي تستخدم في حل مشاكل البرمجة الخطية الأكبر حجماً، فضلاً عن أن الطريقة البيانية تتسم ببساطة التطبيق.

أما الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس أو الطريقة الجبرية) فتصلح للاستخدام أياً كان عدد المتغيرات التي يتضمنها النموذج. وقد ساعد على انتشار استخدام هذه الطريقة برامج الحاسب الآلي الجاهزة التي يمكن من خلالها حل أي مشكلة برمجة خطية أياً كان عدد متغيرات القرار.

■ إجراءات تطبيق الطريقة البيانية:

تتضمن الطريقة البيانية لحل مشاكل البرمجة الخطية الخطوات الآتية:

١- تصوير المعادلات والمتباينات التي يتضمنها النموذج بيانياً.

٢- تصوير دالة الهدف بيانياً، وإيجاد الحل الأمثل للمشكلة.

حيث تقوم الطريقة البيانية على إجراء منطقي منظم، لتحديد وتعيين موقع على الرسم أو الخريطة البيانية، يتعلق بالآتي:

١) كل القيود المختلفة في المشكلة.

٢) دالة الهدف أو المعيار المرغوب تحقيقه؛ حيث يسمح تحديد موقع هذه العناصر، في تحديد الحل الأمثل والتوصل إليه من الرسم البياني، وتتحدد إجراءات تطبيقها طبقاً للخطوات التالية:

١- تحديد وتكوين هيكل المشكلة:

أ - تحديد كل القيود: التي تمثل مدى توافر الموارد (أي المعروض منها)، والاحتياجات اللازمة من هذه الموارد (أي الطلب عليها).

ب- تعيين موقع القيود الخطية: عن طريق تحديد نقطتين لكل قيد (أجزاء الخط المستقيم المحصورة بين المحورين السيني، والصادي، هي النقط الملائمة لتحديد موقع القيود).

ج- تعيين المساحة أو المنطقة الممكنة للحل: وهي تمثل الإمكانية الفنية، كما تحددها مجموعة القيود مجتمعة.

د- تحديد الخط الملائم لدالة الهدف: والذي قد يتمثل إما في تعظيم الأرباح، أو في تخفيض التكاليف.

٢- تحديد الحل الأمثل أو الحلول المثلي:

أ - تحديد موقع دالة الهدف.

ب- رسم خط مستقيم متوازي لدالة الهدف، داخل المساحة الممكنة للحل أو على حدودها، وهو إما أن يكون:

١. أكثر بعداً عن نقطة الأصل: وذلك عندما تكون دالة الهدف تتمثل في تعظيم الأرباح.

٢. أكثر قريباً من نقطة الأصل: وذلك عندما تكون دالة الهدف تتمثل في تخفيض التكاليف.

(ج) رسم إسقاطين أفقي ورأسي من النقطة التي تحددت في ٢ ب (١) أو ٢ (ب) ٢.

(د) قراءة الحل علي المحورين: السيني، والصادي، وهي تلك القيم التي تتحدد من الإسقاطين الرأسي والأفقي علي المحورين السيني، والصادي، علي الترتيب.

● مثال:

المطلوب حل مشكلة المزيج الإنتاجي الأمثل، باستخدام الأسلوب البياني، وذلك للمشكلة الآتية، والتي تتكون من العناصر الآتية:

١- تحديد حجم الإنتاج الأمثل الأسبوعي من المنتجات س، ص، أي تحديد كل القيم الممكنة غير السالبة للمتغيرات، والتي تحقق كل القيود الموضوعية وتحقق تعظيم الأرباح.

٢- هناك ثلاثة موارد لازمة لإنتاج هذه المنتجات، وهي الأقسام الإنتاجية: أ، ب، ج، وتبلغ الطاقة المتاحة من هذه الموارد أسبوعياً:

القسم الإنتاجي أ ≥ 160 ساعة.

القسم الإنتاجي ب ≥ 120 ساعة.

القسم الإنتاجي ج ≥ 280 ساعة.

٣- تحتاج الوحدة المنتجة من كل منتج من المنتجات س، ص إلى الموارد الآتية (بالساعات):

الموارد اللازمة

المنتجات	القسم أ	القسم ب	القسم ج
س	٢	١	٤
ص	٢	٢	٢

حيث يمكن التعبير عن القيود (أو الاحتياجات المتاحة) جبرياً كآتي:

$$س٢ + ص٢ \geq ١٦٠ \text{ ساعة في القسم الإنتاجي أ}$$

$$س١ + ص٢ \geq ١٢٠ \text{ ساعة في القسم الإنتاجي ب}$$

$$س٤ + ص٢ \geq ٢٨٠ \text{ ساعة في القسم الإنتاجي ج}$$

تمثيل المتباينات بيانياً:

يمكن تمثيل مجموعة المتباينات السابقة بيانياً، حيث يستلزم ذلك تحويل المتباينات إلي معادلات:

فبالنسبة للمتباينة الخاصة بالقسم الإنتاجي (أ) يتم الآتي:

$$س٢ + ص٢ = ١٦٠$$

ولتحديد موقع كل قيد من القيود الخطية، وتحديد نقطتين لكل قيد، فإننا نفترض عدم إنتاج أي وحدات من المنتج ص، بمعنى أن نفترض أن ص = صفر

$$\therefore س٢ = ١٦٠ \text{ ومنها س: } ٨٠$$

وبفرض عدم إنتاج أية وحدات من المنتج س، بمعنى أن نفترض أن س = صفر

$$\therefore ص٢ = ٨٠ \text{ ومنها ص } ٨٠$$

وتتمثل نقطتا القيد الأول في: (٨٠، ٨٠)

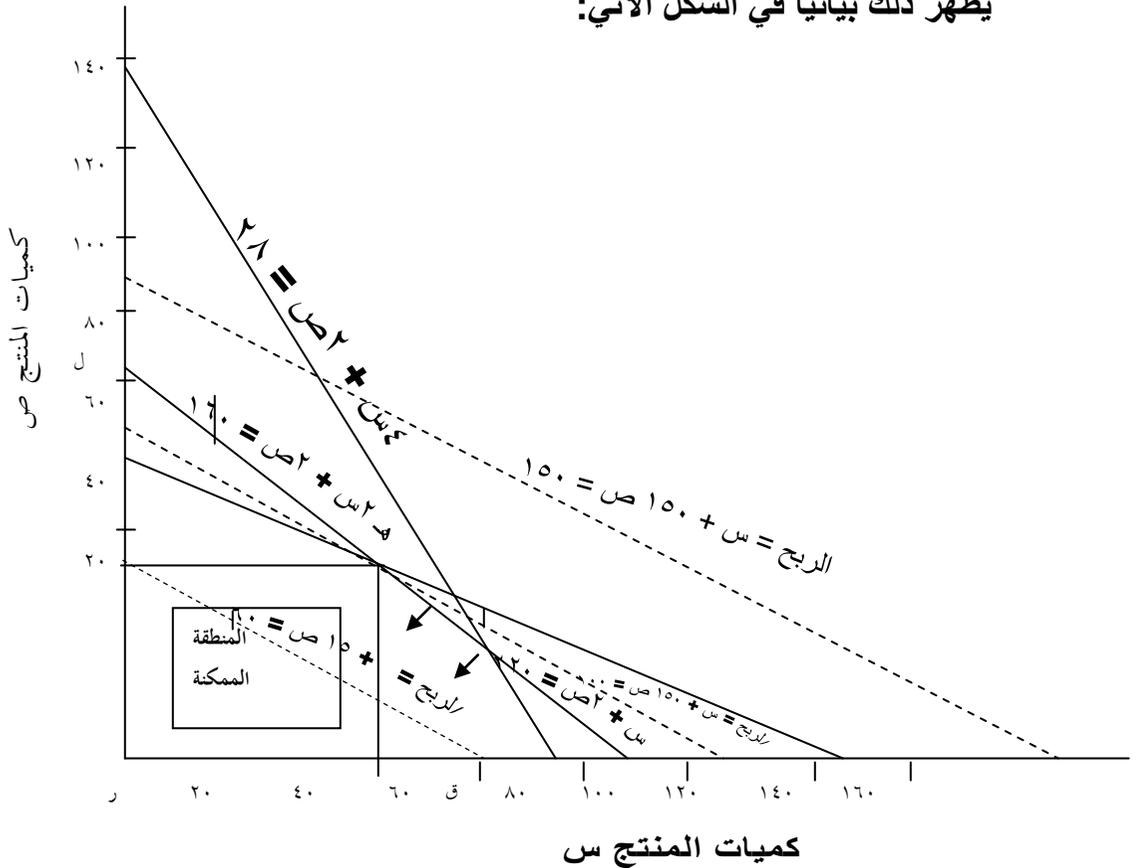
وبالنسبة للمتباينة الخاصة بالقسم الإنتاج (ب)، فإن نقطتي القيد تتمثل في: (٦٠، ١٢٠)

وبالنسبة للمتباينة الخاصة بالقسم الإنتاجي (ج)، فإن نقطتي القيد تتمثل في: (١٤٠، ٧٠)

حيث يلاحظ أن كل قيم المتغيرات S ، V قيم موجبة، وتحقق كل القيود؛ ويطلق على هذه القيم: الحل الممكن؛ أما مجموعة كل الحلول الممكنة فيُطلق عليها: المساحة الممكنة للحل؛ ونلاحظ هنا أن حل البرنامج الخطي، ما هو إلا إيجاد أفضل حل ممكن في حدود المساحة الممكنة؛ ويطلق اصطلاح الحل الأمثل على: أفضل حل ممكن؛ ويطلق على قيمة دالة الهدف التي تتفق مع الحل الأمثل: القيمة المثلى للبرنامج الخطي.

وتحدد المساحة الممكنة للحل بتجميع القيود الثلاثة للموارد؛ حيث

يظهر ذلك بيانياً في الشكل الآتي:



التمثيل البياني المشترك للموارد

حيث يتبين من الرسم البياني السابق، أن المنطقة المخططة هي التي تمثل المساحة المشتركة بين المتباينات، وهي تمثل منطقة الحلول الممكنة للمشكلة. وتحديد منطقة الحلول الممكنة فإن ذلك يعتبر خطوة أولى نحو التوصل إلى حل المشكلة؛ لأن أية قيم غير سالبة للمتغيرات س، ص، والتي يمكن أن تقع داخل هذه المنطقة المشتركة التي تقع علي حدودها قيود الموارد الثلاثة، تعتبر حلولاً ممكنة؛ وتتمثل المشكلة الآن في اختيار نقطة ما، تعتبر ممكنة وتؤدي في ذات الوقت إلى تعظيم دالة الهدف، وقد يكون هناك أكثر من نقطة ما مثلى، وهذا ما يطلق عليه تعدد المثالية في البرمجة الخطية (وسيتم تفصيل وتوضيح هذه الجزئية تفصيلاً ضمن الطريقة العامة أو طريقة السمبلكس).

• تمثيل دالة الهدف بيانياً:

يمكن تحديد موقع دالة الهدف بيانياً، وتحديد نقطتين لها، إذا بدأنا بقيمة ما اجتهدادية للدالة الخطية س = ١.٥٠٠ ص، ولتكن هذه القيمة متمثلة في: تحقيق أرباح قدرها ٦٠ جنيهاً فإن نقطتي خط الربح، تتحددان على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} 60 \text{ جنيهاً} &= \frac{60 \text{ وحدة من س}}{1 \text{ جنيه للوحدة من س}} = 60 \text{ س} \\ 60 \text{ جنيهاً} &= \frac{60 \text{ وحدة من ص}}{1.5 \text{ جنيه للوحدة من ص}} = 40 \text{ ص} \end{aligned}$$

ويظهر خط الربح - دالة الهدف - بالخطوط المتقطعة في الشكل السابق بالنقطتين (٦٠، ٤٠)؛ ولأن هذه الدالة خطية فإننا يمكننا الاستمرار في رسم عدة خطوط للربح، حيث يمثل كل خط مقداراً أكبر من الأرباح، ويظهر موازياً للخط الذي يسبقه، بسبب ثبات معدل ربح الوحدة من المنتجين س، ص، وتكون أكثر بعداً عن نقطة الأصل، لأن الهدف هنا هو تعظيم الأرباح. هذا،

ويتم التوقف في رسم خطوط الربح عند مماس خط الربح مع إحدى النقط التي تقع علي حدود المساحة الممكنة للحل؛ حيث يتحقق ذلك عند النقطة (هـ) في الركن الأعلى من الشكل المحدب المظلل هل ر ن والذي يمثل المساحة الممكنة للحل؛ وهذا يعني أنه قد أمكننا التوصل إلي الربح الذي لا يتعدى القيود الموضوعه؛ كما أن هذه النقطة (هـ) تعتبر أكثر النقط ابتعاداً عن نقطة الأصل، حيث تمثل أقصى ربح يمكن تحقيقه في ضوء القيود الموضوعه، وهو خط ربح = ١٠٠ جنيه.

وبرسم الإسقاطين الأفقي والرأسي من النقطة هـ (كما يظهران في الرسم البياني السابق يتم التوصل إلى الحل الأمثل، حيث يتكون هذا الحل من: إنتاج ٤٠ وحدة من المنتج س، و ٤٠ وحدة من المنتج ص؛ كما أن مجموع الأرباح = س + ١,٥٠٠ ص

$$= ١٠٠ (٤٠) + ١,٥٠٠ (٤٠) = ١٠٠ جنيهاً.$$

هذا، ويمكننا التأكد من أن النقطة (هـ) تمثل نقطة الحل الأمثل الوحيد، وذلك من قراءات نقط الأركان المختلفة على حدود المساحة الممكنة للحل؛ وحساب قيمة دالة الهدف - الأرباح - التي تحققها كل نقطة من هذه النقط بمزيج من المنتجين س، ص، وذلك كالاتي:

النقط علي حدود المساحة الممكنة	القيم غير السالبة للمتغيرات س، ص	دالة الربح (س+١,٠٠ص)	إجمالي مبلغ الأرباح بالجنيه
ر	صفر، صفر	١ (صفر)+١,٥٠٠ (صفر)	صفر
ل	صفر، ٦٠	١ (صفر) + ١,٥٠٠ (٦٠)	٩٠
هـ	٤٠، ٤٠	١ (٤٠) + ١,٥٠٠ (٤٠)	[١٠٠]
ن	صفر، ٧٠	١ (٧٠) + ١,٥٠٠ (صفر)	٧٠

كما يمكن التأكد من أن هذه النقطة تمثل أقصى ربح؛ وفي نفس الوقت لا تتجاوز أو تتعدى القيود الموضوعية؛ أي تمثل أقصى حل ممكن؛ وذلك عن طريق اختبارها على القيود، وذلك كما يتبين من الآتي:

$$\text{القيود (١)} \quad 2س + 2ص \geq 160$$

$$160 = 2(40) + 2(40)$$

$$\text{القيود (٢)} \quad 2س + 4ص \geq 120$$

$$120 = 2(40) + 4(40)$$

$$\text{القيود (٣)} \quad 4س + 2ص \geq 280$$

$$280 \geq 240 = 2(40) + 4(40)$$

وتجدر الإشارة في هذا السياق، إلى أنه قد تم التوصل إلى الحل الأمثل، عند نقطة تقاطع القيودين (١)، (٢) ومماس خط الربح مع هذه النقطة؛ أما القيد الثالث في المشكلة والذي يمثل القسم الإنتاجي ج، فقد اعتبر بمثابة طاقة عاطلة أو غير مستغلة.

هذا، ويمكن الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية بطريقة أخرى وهي تحديد عائد المساهمة عند نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة، واختيار تلك النقطة التي تحقق أقصى عائد مساهمة ممكن. ويرجع الاقتصار على نقاط الأركان عند تحديد الحل الأمثل أنه كلما اتجهنا يمينا نحو حدود منطقة الحلول الممكنة كلما ازدادت قيمة دالة الهدف، وبالتالي فإن نقاط الأركان في منطقة الحلول الممكنة ستضمن النقطة التي تحقق أقصى قيمة لدالة الهدف.

ولا يختلف تطبيق الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية التي تهدف إلى خفض التكاليف، عنها في مشاكل تعظيم الأرباح، من حيث تمثيل المتباينات بيانياً ورسم خط التكاليف بحيث يقع داخل المساحة الممكنة للحل أو على حدودها؛ ويتمثل الاختلاف فقط في مجرد أن خط التكاليف يتحرك بشكل موازي للخط الذي يسبقه ولكن بالاقتراب من نقطة الأصل، حتى يتم التوصل إلى أكثر النقط اقتراباً من الأصل، وهي تتمثل نقطة أدنى تكلفة ممكنة.

هذا، ويمكن القول عموماً: بأنه في أية مشكلة بيانية من بين مشاكل البرمجة الخطية، التي تتميز بدالة الهدف الخطية والقيود الخطية، أن الحل الأمثل عادةً ما يكون نقطة ما - علي الأقل - في أحد الأركان على حدود مساحة الحل؛ ويتحدد الموقع الدقيق لهذه النقطة عن طريق ميل دالة الهدف الذي يكون مماساً لنقطة تقاطع قيدين أو أكثر؛ كما يلاحظ أن معامل الربح (أو التكلفة) - أي معدل ربح الوحدة أو معدل التكلفة، يحدد ميل دالة الهدف؛ كما أن معاملات القيود - أي احتياجات الوحدة من الموارد - والطاقة المتاحة في كل مورد، تحدد حدود أو أركان المساحة الممكنة للحل، وبالتالي فإن أي تغيير في معاملات دالة الهدف - للربح أو التكلفة - يغير ميل دالة الهدف، كما أن أي تغيير في معاملات القيود أو الطاقة المتاحة، يعمل على تغيير أركان المساحة الممكنة للحل، وأي تغييرات جوهرية في كل أو بعض هذه العناصر، من شأنه أنه سيؤثر على الحل الأمثل؛ وهذا هو ما يطلق عليه "تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية" الذي سوف نتناول دراسته بالتفصيل في ختام موضوعات هذا المرجع.

■ حدود استخدام الطريقة البيانية:

يتبين مما سبق أن استخراج الحل الأمثل بيانياً لمشكلة ما من مشاكل البرمجة الخطية، قد اعتمد أساساً على تحديد موقع القيود المختلفة، وتحديد المساحة الممكنة للحل من واقع هذه القيود، كما اعتمد أيضاً على تحديد موقع

وميل دالة الربح؛ ومن ثم فإن عدم دقة تحديد هذه المواقع، من شأنه أنه سيؤدي إلى نتائج أو حلول غير دقيقة؛ وذلك بالإضافة إلى أننا نجد أن الطريقة البيانية قد ارتبطت أساساً بمشاكل البرمجة الخطية ذات المتغيرين فقط؛ حيث يمكن تمثيلهما بيانياً بالمحورين السيني، والصادي؛ غير أنه إذا تضمنت المشكلة ثلاثة متغيرات: فإنه يمكن تمثيلها بيانياً عن طريق ثلاثة إحداثيات أو ثلاثة محاور س، ص، ع مثلاً، للوصول إلى ما يطلق عليه الفراغ الثلاثي، إلا أنه في المشاكل التي تتضمن أكثر من ثلاثة متغيرات وتحتاج إلى أكثر من ثلاثة أبعاد، فإنه يصعب رسم المشكلة بيانياً، لأنه في هذه الحالة يكون هناك حاجة إلى استخدام نظريات هندسية خاصة؛ ومن هنا فإن الطريقة البيانية تعتبر ذات فائدة محدودة، في حل مشاكل البرمجة الخطية العملية التي تتميز بتعدد المتغيرات، ويفضل عليها الطريقة العامة الجبرية أو ما تسمى بطريقة السمبلكس، والتي تعتمد أساساً على جبر المصفوفات، وتمثل الطريقة العامة لحل معظم مشاكل البرمجة الخطية.

الفصل الرابع

الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية

(طريقة السمبلكس Simplex Method)

حالة تعظيم الربحية

سبقت الإشارة إلى أن استخدام الطريقة البيانية لحل مشاكل البرمجة الخطية، يقتصر على تلك الحالات التي لا يزيد فيها عدد متغيرات القرار عن متغيرين؛ ونظراً لأن مشاكل الواقع العملي لا تتضمن مجرد عشرات المتغيرات للقرار الواحد، وإنما قد يصل عدد متغيرات القرار إلى المئات أو الآلاف، فإن ذلك يتطلب حتمية وجود طريقة عامة لحل مشاكل البرمجة الخطية؛ حيث يمكن القول بأن طريقة السمبلكس، تمثل الطريقة العامة لحل مشاكل البرمجة الخطية؛ والتي تعتبر بمثابة إجراء متكرر لحل مشاكل البرمجة الخطية، وذلك من خلال إيجاد عدة حلول ممكنة، يتم تحسينها، إلى أن يتم التوصل إلى الحل الأمثل، حيث تستخدم مفاهيم جبر المصفوفات، في تحديد قيم مجموعة متغيرات تشكل نظاماً من المتباينات الخطية.

وقد انتشر استخدام طريقة السمبلكس أو الطريقة العامة لحل مشاكل البرمجة الخطية وتطبيقها، في حل الكثير من المشاكل الإدارية في منشآت الأعمال، في مختلف القطاعات الاقتصادية، وكذلك في المجالات الحكومية المختلفة، حيث يرجع ذلك إلى ما تتميز به هذه الطريقة، من سمات أساسية، لعل من أهمها:

- 1- أنها تعتبر إجراءً عاماً بصورة تامة، بمعنى أنها قادرة على حل أي نوع من مشاكل البرمجة الخطية، بما فيها من مشاكل النقل والتعيين التي لها طرق خاصة لحلها.
- 2- أنها ليست مقيدة أو محددة بمجرد إثنين فقط من المتغيرات، كما هو الحال في الطريقة البيانية، حيث أنها تعالج أي عدد من المتغيرات والقيود.
- 3- أنها تختبر وتقيم فقط المثالية المتوقعة.

- ٤- أنها تحدد الحلول المثلى، وتكشف عن كيفية تحسين الحلول المثلى الفرعية، بالإضافة إلى تحديد مدى مساهمة كل تحسين في زيادة الأرباح.
- ٥- تحقق الوصول إلى الحل الأمثل.
- ٦- تحدد الحلول المثلى البديلة في حالة وجودها.

✓ خطوات تطبيق طريقة السمبلكس:

يلاحظ أن الطريقة العامة أو طريقة السمبلكس، إنما تمثل الحل الجبري لمشكلة البرمجة الخطية، وتكمن حقيقة هذه الطريقة، في أنها عبارة عن أسلوب تتابعي أو تكراري، يتم من خلال تطبيقه، الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة موضوع الدراسة، من خلال عدة خطوات متتالية، بمعنى أنه يتم تكرار نفس الخطوات إلى أن يتم التوصل إلى الحل الأمثل؛ حيث ينتج عن ذلك مجموعة من الحلول المتتالية، ومن أهم سمات طريقة السمبلكس، أن الحل الأخير دائماً ما يكون أفضل من الحل السابق عليه، وهذا ما يضمن الوصول إلى الحل الأمثل في نهاية تطبيقها؛ وتتمثل الخطوات العامة لتطبيق طريقة السمبلكس في التالي:

١- صياغة النموذج عن طريق: تحديد دالة الهدف؛ والقيود المفروضة؛ وشرط عدم السلبية.

٢- الابتداء بأول حل مبدئي ممكن: طبقاً لمجموعة من القواعد تتمثل في:

أ- تحويل المتباينات في المشكلة إلى معادلات: بإضافة متغيرات جديدة، يطلق عليها المتغيرات الراكدة.

ب- يحتوي البرنامج المبدئي على المتغيرات الراكدة فقط: أي أن يتم البدء في الحل بنقطة الصفر، وبفرض أساسي محتواه أن المتغيرات الأصلية تساوي الصفر.

٣- تحسين الحل المبدئي بقدر الإمكان في ضوء اختبار مثالية هذا الحل المبدئي، وإيجاد حل أساسي ممكن آخر مع قيمة أفضل لدالة الهدف.

٤- الاستمرار في إيجاد حلول أساسية ممكنة أفضل: يؤدي إلى تحسين دالة الهدف - واختبار مثالية هذه الحلول في كل مرة؛ وعندما لا يكون هناك أي تحسين أكثر من ذلك لحل أساسي ممكن، فإن هذا الحل يمثل الحل الأمثل، وينتهي بذلك تطبيق خطوات طريقة السمبلكس.

✓ هذا، ويمكن أن نتفهم كيفية تطبيق طريقة السمبلكس، من خلال المثال التالي:

مثال (١): تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتجين أ، ب؛ ويبين الجدول التالي: عائد مساهمة الوحدة، والوقت اللازم لإنتاج كل وحدة، والطاقة المتاحة بكل مرحلة إنتاجية:

المرحلة الأولى	المنتج (أ)	المنتج (ب)	الطاقة المتاحة لكل مرحلة
٥ ساعات	١٠ ساعات	٤٠.٠٠٠ ساعة	المرحلة الأولى
١٥ ساعة	١٠ ساعات	٤٥.٠٠٠ ساعة	المرحلة الثانية
١٢.٥ ج	١٠ ج		عائد مساهمة الوحدة

✓ والمطلوب: تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، بهدف تعظيم الربح.

✓ يتم البدء هنا بافتراض أن:

س_١ تمثل عدد الوحدات من المنتج (أ)

س_٢ تمثل عدد الوحدات من المنتج (ب)

✓ فإنه يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة السابقة على النحو التالي:

■ المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = 12,5س_1 + 10س_2$$

■ في ظل القيود التالية:

$$40.000 \geq 5س_1 + 10س_2$$

$$45.000 \geq 15س_1 + 10س_2$$

$$س_1, س_2 \leq \text{صفر}$$

■ ويجب إضافة الأنشطة الخاصة بعدم استخدام الموارد أو بمعنى آخر يجب تحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة، ويمكن استخدام المتغيرات الراكدة التالية:

غ_١ الساعات غير المستغلة في قسم (١)

غ_٢ الساعات غير المستغلة في قسم (٢)

ويصبح النموذج بعد إضافة المتغيرات الراكدة على النحو التالي:

■ المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = 12,5 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2 + \text{صفر غ}_1 + \text{صفر غ}_2$$

■ في ظل القيود التالية:

$$40.000 = 1 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2 + \text{غ}_1 + \text{صفر غ}_2$$

$$45.000 = 1 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2 + \text{صفر غ}_1 + \text{غ}_2$$

■ بشرط أن: $\text{س}_1, \text{س}_2, \text{غ}_1, \text{غ}_2 \leq \text{صفر}$

ويلاحظ أن المتغيرات الراكدة ترتبط بمعاملات صفرية في دالة الهدف، حيث أن المنشأة لن تحقق أية أرباح إذا لم تستخدم الطاقة أو الموارد المتاحة لها. ولتسهيل عملية الحل وفقا لطريقة السمبلكس، فإننا يمكننا استخدام

الجدول التالي:

معاملات دالة الهدف لجميع المتغيرات					رو
الراكدة	المتغيرات	الأصلية	المتغيرات	قيم متغيرات	متغيرات
غ ₂	غ ₁	س ₂	س ₁	الحل	الحل
				قيم الطرف الأيسر من القيود	معاملات دالة هدف المتغيرات الأساسية فقط
					اختبار المثالية ص و
					صف التقييم النهائي رو- ص و

ويمكن توضيح خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس، على النحو التالي:

■ تحديد الحل المبدئي:

تبدأ طريقة السمبلكس بحل مبدئي يتكون من المتغيرات الراكدة (غ₁، غ₂)، وطبقا لهذا الحل يفترض عدم إنتاج أية وحدات من المنتجات، وبالتالي فإن قيم المتغيرات الراكدة تساوي قيم الطرف الأيسر للمعادلات أو كميات الموارد المتاحة، ويتم إعداد جدول السمبلكس الأول على أساس هذا الحل المبدئي، ويظهر هذا الجدول على النحو التالي:

صف ص_١؛ وبناء على ذلك فإن الحل وفقاً للجدول الأول يتمثل في التالي:

$$س_١ = \text{صفر}$$

$$س_٢ = \text{صفر}$$

$$غ_١ = ٤٠,٠٠٠$$

$$غ_٢ = ٤٥,٠٠٠$$

وذلك كما هو مبيناً بالأعمدة الثلاثة الأولى في الجدول الأول السابق.

٥- تبين أعمدة س_١، س_٢، غ_١، غ_٢: مصفوفة المعاملات وهي تمثل معاملات المتغيرات في القيود:

ففي عمود س_١: نجد أن المعاملات ٥، ١٥ في هذا العمود تمثل احتياجات المنتج الأول (س_١) من الساعات في القسم (١) (٥ ساعات) وفي القسم (٢) (١٥ ساعات). أما العمود س_٢ فتظهر به المعاملات ١٠، ١٠ وهي تمثل أيضاً احتياجات المنتج الثاني (س_٢) من الساعات في القسم (١)، والقسم (٢) علي التوالي.

٦- تبين أعمدة المتغيرات الراكدة غ_١، غ_٢: معاملات المتغيرات الراكدة في القيود. ويلاحظ أن هذه المعاملات تشكل مصفوفة الوحدة.

٧- يستخدم الصفان الأخيران في الجدول في تحديد ما إذا كان من الممكن تحسين الحل أم لا؛ وبالنسبة للصف ص_١ فإن القيمة التي تظهر في عمود قيم متغيرات الحل تمثل الربح (عائد المساهمة) المحقق للمنشأة وفقاً لهذا الحل؛ ولذلك فإن ظهور الرقم صفر في الجدول الأول: يعني أن الربح وفقاً للحل المبدئي = صفر؛ أما الرقم صفر الذي يظهر في هذا الصف تحت الأعمدة الأخرى: فإنه يمثل القيمة التي يمكن أن ينخفض بها الربح (عائد المساهمة الإجمالي)، في حالة إدخال وحدة من المتغيرات س_١، س_٢، غ_١، غ_٢ في الحل، أو بمعنى آخر، فإنها تمثل عائد المساهمة الضائع للوحدة.

٨- ويمثل الصف الأخير في الجدول صف (ر_١ - ص_١): صافي عائد المساهمة الذي يتحقق في حالة إضافة وحدة من المتغير في الحل؛ وكما يبين الجدول الأول: فإن إدخال وحدة من س_١ في الحل، يؤدي إلى زيادة

عائد المساهمة بـ ١٢,٥ جنيهاً، أما في حالة إدخال وحدة من س_٢، فإن عائد المساهمة يزيد بـ ١٠ جنيهاً؛ أما بالنسبة للمتغيرات غ_١، غ_٢، فإن الزيادة في عائد المساهمة في حالة إدخالهما في الحل = صفر؛ وبفحص القيم التي تظهر في هذا الصف نجد أن أكبر قيمة موجبة هي ١٢,٥، وهي تمثل الزيادة في الربح، في حالة إدخال وحدة من س_١ في الحل.

ويعنى وجود قيم موجبة في صف (ر - ص_١): إمكانية زيادة أرباح المنشأة؛ أما القيم السالبة: فتمثل القيمة التي يمكن أن تنخفض بها أرباح المنشأة، في حالة إدخال وحدة من المتغير الذي يظهر في العمود ذي القيمة السالبة في الصف الأخير من الحل؛ وعلى ذلك فإذا ظهرت قيم موجبة في الصف الأخير من الجدول: فإنها تعنى إمكانية زيادة أرباح المنشأة من خلال تغيير الحل وإدخال متغيرات جديدة؛ أما في حالة ظهور قيم سالبة (أو صفر): فإنها تعنى عدم إمكانية تحسين الحل؛ وبالتالي نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

▪ اختبار مثالية الحل وتحديد المتغير المرشح للدخول (تحديد العمود الرئيس):

وفقاً لاختبار المثالية: فإننا نجد أن الحل وفقاً للجدول الأول، لا يمثل الحل الأمثل، وأنه يمكن تحسين الحل من خلال تغيير الحل، وإدخال متغيرات جديدة؛ حيث يمكن تغيير الحل عن طريق إدخال متغير من المتغيرات غير الأساسية، لكي يحل محل أحد المتغيرات الأساسية وفقاً للحل الحالي؛ وإذا كانت قيم صف اختبار المثالية (ر - ص_١) تعبر عن صافي عائد المساهمة الذي يتحقق في حالة إدخال وحدة من المتغير في الحل؛ فإنه يمكن اختيار المتغير (أو العمود) ذي أكبر قيمة موجبة في هذا الصف، ويرجع سبب اختيار العمود ذي أكبر قيمة موجبة إلى أن الهدف هنا يتمثل في تعظيم الأرباح، وبالتالي فإنه يجب اختيار المتغير الذي يحقق أكبر ربح بالنسبة للمتغيرات الأخرى؛ وفي الجدول الأول نجد أن عمود س_١ (وهو يمثل المنتج الأول) ذو أكبر قيمة موجبة، حيث يحقق هذا المنتج أكبر عائد مساهمة (١٢,٥ جنيهاً للوحدة)، ولذلك فإن المتغير س_١ يمثل المتغير الداخل في الحل في المرحلة التالية.

■ تحديد المتغير الواجب استبعاده من الحل الحالي (تحديد الصف الرئيس):

حيث تهدف هذه الخطوة، إلى تحديد المتغير الذي سيتم استبعاده من الحل وإحلال المتغير الداخل بدلاً منه؛ وإذا كان س₁ سيدخل الحل فإنه سيحل محل المتغير غ₁ أو غ₂ فمن هو المتغير الذي سيتم استبعاده؟ في الواقع فإنه يتم تحديد المتغير المستبعد، عن طريق قسمة القيم التي تظهر في عمود قيم متغيرات الحل ÷ ما يقابل كل منها من معاملات في العمود الرئيس، واختيار الصف ذي أقل قيمة موجبة.

✓ ويرجع سبب اختيار الصف ذي أصغر قيمة موجبة: إلى أن المنشأة ترغب في إنتاج أكبر كمية ممكنة من المنتج الذي سيتم إحلاله في الحل التالي، غير إنها يجب أن تأخذ في اعتبارها، اعتبارات وحدود الطاقة المتاحة في كل قسم؛ فإذا كان المنتج الذي سيتم إحلاله في الحل التالي هو س₁، فما هو عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من هذا المنتج؟ في الحقيقة فإنه يمكن حساب ذلك على النحو التالي:

$$\text{قسم ١} = \frac{\text{الساعات المتاحة}}{\text{الساعات اللازمة لإنتاج الوحدة من س}_1} = \frac{40,000}{5}$$

$$= 8,000 \text{ وحدة}$$

$$\text{قسم ٢} = \frac{45,000}{15} = 3,000 \text{ وحدة}$$

ويلاحظ أن القسم (٢) هو العامل المتحكم، لأنه يمكن إنتاج ٨,٠٠٠ وحدة وفقاً لطاقة القسم (١)، إلا أن إمكانيات القسم (٢) لا تسمح إلا بإنتاج ٣,٠٠٠ وحدة فقط؛ ولذلك فإن اختيار الصف ذي أصغر قيمة موجبة يعتبر تطبيقاً لشرط عدم السالبية.

ووفقاً لذلك، فإن الصف الرئيس هنا يمثل الصف غ₂ وبالتالي فإن المتغير الذي سيتم استبعاده من الحل هو غ₂، والعنصر الذي يقع عند تقاطع العمود الرئيس والصف الرئيس يطلق عليه عنصر المفتاح (وهو العنصر داخل الدائرة في الجدول الأول).

▪ إعداد جدول السمبلكس الثاني:

ويتم ذلك وفقا للخطوات التالية:

أ- حساب القيم الجديدة لعناصر الصف الجديد (س_١) والذي سيحل محل الصف المستبعد (صف غ_٢) وذلك عن طريق: القيام بقسمة جميع عناصر الصف المستبعد ÷ عنصر المفتاح (أى: بقسمة الأرقام الظاهرة في صف المفتاح ÷ رقم المفتاح؛ وتبدأ القسمة من أول رقم في عمود الكمية وحتى نهاية الجدول).

وعلي ذلك نحصل علي القيم الجديدة التالية:

$\frac{1}{15}$	صفر	$\frac{10}{15}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{45000}{15}$
$\frac{1}{15}$	صفر	$\frac{2}{3}$	١	$30000 =$

كما يحل معامل المتغير الداخلى (س_١) في دالة الهدف وهو ١٢,٥ محل معامل المتغير المستبعد غ_٢ وهو صفر وذلك في عمود ر_١.

ب- حساب القيم الجديدة للصفوف الأخرى (صف غ_١)، وذلك كما يتبين

مما يلى:

القاعدة التي تتبع في تعديل الصفوف الأخرى، تقوم علي الأساس التالي:

$$\text{الرقم الجديد} = \text{الرقم في الصف القديم} - \left[\frac{\text{الرقم المناظر في صف المفتاح}}{\text{المعدل ثابت}} \right]$$

حيث أن: المعدل الثابت = $\frac{\text{الرقم القديم في عمود المفتاح}}{\text{رقم المفتاح}}$

وعلي ذلك فإن صف غ_١ في جدول السمبلكس الثاني يشق كالتالي مع

$$\begin{aligned} \text{ملاحظة أن المعدل الثابت} &= \frac{5}{15} \\ 25,000 &= \frac{5}{15} \times 45,000 - 40,000 \\ \text{صفر} &= \frac{5}{15} \times 0 - 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{20}{3} &= \frac{5}{15} \times 10 - 10 \\ 1 &= \frac{5}{15} \times \text{صفر} - 1 \\ \frac{1}{3} &= \frac{5}{15} \times \text{صفر} - 1 \end{aligned}$$

ج - بالنسبة لصفى اختبار المثالية (الصفين الأخيرين بالجدول): نلاحظ

أن:

١. يتم حساب القيم الجديدة لهذين الصفين، على النحو التالي:

صف ص و:

يتم حساب القيم الجديدة لهذا الصف، من خلال إيجاد مجموع حاصل ضرب عناصر عمود ر و [بعد تغيير عائد المساهمة المستبعد، بعائد مساهمة المتغير الداخل في الحل] \times العناصر الجديدة المقابلة لها في كل عمود، وذلك على النحو التالي:

$$\text{عمود قيم متغيرات الحل} = (\text{صفر} \times 25,000) + (3,000 \times 12,5) = 37,500$$

$$\text{عمود س}_1 = (\text{صفر} \times \text{صفر}) + (1 \times 12,5) = 12,5$$

$$\text{عمود س}_2 = (\text{صفر} \times \frac{20}{3}) + (\frac{2}{3} \times 12,5) = 12,5$$

$$\text{عمود غ}_1 = (\text{صفر} \times 1) + (12,5 \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$\text{عمود غ}_2 = (\text{صفر} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{1} \times 12,5) = \frac{5}{6}$$

أما بالنسبة لصف (ر - ص)، فإنه يمكن حساب القيم الجديدة له على النحو التالي:

$$\text{س}_1 = 12,5 - (\text{عائد المساهمة للوحدة}) - 12,5 = \text{عائد المساهمة الضائع للوحدة} = \text{صفر}$$

$$\text{س}_2 = 10 - \frac{25}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{غ}_1 = \text{صفر} - \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\text{غ}_2 = \text{صفر} - \frac{5}{6} = -\frac{5}{6}$$

ويمكن بناء على العناصر الجديدة للصفوف إعداد الجدول الثانى، ويظهر على النحو

التالى:

١٠ ١٢,٥ ١٠ ١٢,٥ ١٠ ١٢,٥						لـ و
٢ غ	١ غ	٢ س	١ س	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	
$\frac{1}{3}$	١	$\frac{20}{3}$	صفر	٢٥٠٠٠	١ غ	صفر
$\frac{1}{15}$	صفر	$\frac{2}{3}$	١	٣٠٠٠	١ س	١٢,٥
$\frac{5}{6}$	صفر	$\frac{25}{3}$	١٢,٥	٣٧٥٠٠	اختبار المثالية ص و	
$\frac{5}{6}$	صفر	$\frac{5}{3}$	صفر		لـ و - ص و	

الجدول الثاني

ومن جدول السمبلكس هذا؛ يمكن أن نستنبط التالي:

١- يبلغ هامش المساهمة الإجمالي للمنشأة وفقاً لهذا الحل ٣٧,٥٠٠ جنيهاً. (في حين أنه كان يبلغ صفرًا وفقاً للحل الذي يمثلته جدول السمبلكس الأول).

٢- أن هناك قيمةً موجبةً ($\frac{5}{3}$ في عمود س_٢) في الصف الأخير من الجدول، وهذا يعني إمكانية تحسين الحل.

خامساً- اختبار مثالية الحل وتحسينه إذا كان ذلك ممكناً:

نتيجةً لظهور قيم موجبة في صف اختبار المثالية في الجدول الثاني (السابق إعداده)، فإن الحل الذي يمثلته هذا الجدول يعتبر حلاً غير أمثل، ومن ثم فإن هناك إمكانية لتحسين الحل، عن طريق: إدخال متغير جديد يحل محل أحد المتغيرات الأساسية، وفقاً للحل الذي يمثلته هذا الجدول، ويتم تحسين الحل باتباع الخطوات التالية:

١- تحديد المتغير الداخل (العمود الرئيس):

✓ تعني القيم الموجبة في صف اختبار المثالية أن: هناك إمكانية لزيادة الأرباح،

عن طريق تعديل الحل وإحلال متغير جديد محل أحد المتغيرات التي يتضمنها الحل الحالي؛ ويتم اختيار المتغير (أو العمود) ذي أكبر قيمة موجبة في صف اختبار المثالية:

وعلى ذلك فإن المتغير الجديد الذي سيدخل في الحل الجديد هو المتغير س_٢

٢- تحديد المتغير الذي سيتم استبعاده من الحل الحالي (الصف الرئيس):

يستلزم تحديد المتغير الذي سيتم استبعاده: ضرورة قسمة كل رقم من أرقام عمود قيم متغيرات الحل ÷ القيم المقابلة لها في العمود الرئيس، وذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{صف غ}_1 &= \frac{20}{3} \div 25000 = 3750 \\ \text{صف س}_1 &= \frac{2}{3} \div 3000 = 4500 \end{aligned}$$

وهنا نلاحظ أن: الصف ذو أصغر قيمة موجبة هو الصف غ_١، وعلى ذلك،

فإن الصف الرئيس هو: صف غ_١، وكذلك فإن المتغير المستبعد هو: غ_١

٣- تحديد عنصر المفتاح: وهو الرقم الذي يقع عند تقاطع الصف الرئيس مع العمود الرئيس، وهو الرقم $\frac{20}{3}$ في الجدول الثاني.

٤- يمكن تحديد قيم عناصر صف س_٢ الجديدة: بقسمة عناصر صف غ_١ القديمة على عنصر المفتاح ($\frac{20}{3}$)، وعلى ذلك نحصل على القيم الجديدة التالية:

$\frac{20}{3} \div \frac{1}{3} = \downarrow$	$\frac{20}{3} \div 1 = \downarrow$	$\frac{20}{3} \div \frac{20}{3} = \downarrow$	صف غ _١ ÷ صف غ _١ = صف غ _١ = صف غ _١	$\frac{20}{3} \div 25000 = \downarrow$
$\frac{1}{20} = \downarrow$	$\frac{3}{20} = \downarrow$	$1 = \downarrow$		$3750 = \downarrow$

٥- حساب القيم الجديدة لعناصر الصفوف الأخرى، باستخدام المعادلة السابقة (الموضحة في صفحة ٨٧)؛ وعلى ذلك فإن قيم عناصر صف س_١ الجديدة تحسب على النحو التالي:

الرقم الجديد = الرقم في الصف القديم - [الرقم المناظر في صف المفتاح ×

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{2}{3} \text{ الرقم القديم في عمود المفتاح}}{\frac{20}{3} \text{ رقم المفتاح}} = \text{معدل ثابت}$$

$$500 = \left(\frac{1}{10} \times 25000 \right) - 3000$$

$$1 = \left(\frac{1}{10} \times \text{صفر} \right) - 1$$

$$\text{صفر} = \left(\frac{1}{10} \times \frac{20}{3} \right) - \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10} \times 1 \right) - \text{صفر}$$

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{3} - \right) - \frac{1}{10}$$

٦- كما يمكن حساب العناصر الجديدة للصفين الأخيرين: بنفس الطريقة المبينة في إعداد الجدول الثاني (صفحة ٨٨)، ومن ثم فإن جدول السمبلكس الثالث، يظهر كما يلي:

رقم	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١٢,٥	١٠	صفر	صفر
١٠	٢س	٣٧٥٠	صفر	١	٣	١
١٢,٥	١س	٥٠٠	١	صفر	١	١
اختبار المثالية ص ر		٤٣,٧٥٠	١٢,٥	١٠	١	٣
ر-و ص و			صفر	صفر	١	٣

وهنا تجدر ملاحظة التالي:

(١) الربح المحقق وفقا لهذا الحل يبلغ: ٤٣٧٥٠ جنيهاً، وهو يزيد عن

الربح المحقق وفقاً للحل السابق (٣٧٥٠٠ جنيهاً) بمبلغ ٦٢٥٠ جنيهاً.
(٢) لا تظهر قيم موجبة في صف (ر - ص)؛ وهو الأمر الذي يعني عدم
إمكانية تحسين الحل؛ ومن ثم نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل والذي
يتمثل في:

$$١س = ٥٠٠ وحدة$$

$$٢س = ٣٧٥٠ وحدة$$

$$كل من: ١غ، ٢غ = صفر$$

هامش المساهمة الإجمالي (الربح) للمنشأة وفقاً لهذا الحل = ٤٣٧٥٠ جنيهاً
ويعني هذا الحل: إنتاج ٥٠٠ وحدة من المنتج الأول، ٣٧٥٠ وحدة من
المنتج الثاني. كما أنه لا توجد ساعات عاطلة (أو غير مستغلة) في الأقسام
الإنتاجية حيث إن ١غ = صفر، ٢غ = صفر.

كما يمكن التأكد من أن الحل يفي بالقيود، عن طريق التعويض في القيود
 بقيم المتغيرات على النحو التالي:

القيود:

$$٤٠,٠٠٠ \geq ١س + ١٠س٢$$

$$٤٥,٠٠٠ \geq ١٥س١ + ١٠س٢$$

وبالتعويض بقيم ١س، ٢س في هذه القيود، نجد أن:

القيد الأول:

$$٤٠,٠٠٠ \geq (٣,٧٥٠ \times ١٠) + (٥٠٠ \times ٥)$$

$$٤٠,٠٠٠ \geq ٣٧,٥٠٠ + ٢,٥٠٠$$

$$٤٠,٠٠٠ = ٤٠,٠٠٠$$

وفي القيد الثاني:

$$٤٥,٠٠٠ \geq (٣,٧٥٠ \times ١٠) + (٥٠٠ \times ١٥)$$

$$٤٥,٠٠٠ \geq ٣٧,٥٠٠ + ٧,٥٠٠$$

$$٤٥,٠٠٠ = ٤٥,٠٠٠$$

■ ملاحظات هامة:

١. يلاحظ أنه في بعض الحالات؛ قد نجد أن الحل الأمثل يتضمن ساعات غير مستغلة، بمعنى أن الحل يتضمن قيماً موجبة للمتغيرات الراكدة، وفي مثل هذه الحالة، فإننا يجب أن نتأكد من سلامة الحل بالتعويض في القيود، حيث يجب أن يتساوى مجموع (الساعات المستغلة + الساعات غير المستغلة) مع الساعات المتاحة.

٢. حساب تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج:

يطلق على معاملات المتغيرات الراكدة الظاهرة في صف التقييم النهائي: أسعار ظل الموارد (أو الأسعار المحاسبية أو الأسعار الداخلية).

- فمعامل المتغير الراكد غ^١ يمثل سعر ظل مورد القسم الأول (المرحلة الأولى) ويساوي ١ — جنيهاً (مع إهمال الإشارة السالبة).

- ومعامل المتغير الراكد غ^٢ يمثل سعر ظل مورد القسم الثاني (المرحلة الثانية) ويساوي ٣ — جنيهاً (مع إهمال الإشارة السالبة).

[وقد يحدث أن يكون معامل أحد المتغيرات الراكدة مساوياً للصفر، وهذا يعني أن سعر الظل = صفرًا؛ وهذا أيضا يعني أن هناك طاقة عاطلة فائضة من هذا المورد؛ وهذه الطاقة الفائضة ليس لها قيمة ولذلك فسعر الظل = صفرًا.]

وبناءً على ذلك يمكننا حساب تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج كما يلي:

$$\begin{aligned} & (\text{طاقة مورد القسم الأول} \times \text{سعر الظل}) + (\text{طاقة مورد القسم الثاني} \times \text{سعر الظل}) \\ & = (٤٠,٠٠٠ \times \text{ساعة} \frac{١}{٤} \text{ جنيهاً}) + (٤٥,٠٠٠ \times \text{ساعة} \frac{٣}{٤}) \\ & = ٣٣,٧٥٠ + ١٠,٠٠٠ = ٤٣,٧٥٠ \text{ جنيهاً.} \end{aligned}$$

ويلاحظ أن إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج = إجمالي هامش (أو عائد) المساهمة (أو إجمالي الأرباح) = ٤٣.٧٥٠ جنيهاً من جدول السمبلكس الأمثل.

٣- حساب الطاقة العاطلة للموارد:

تحسب الطاقة العاطلة (للموارد) لأي مورد، أو لأي عامل من عوامل الإنتاج

كما يلي:

الطاقة العاطلة = الطاقة القصوى المتاحة (-) الطاقة الفعلية المستغلة

أ. الطاقة العاطلة لمورد القسم الأول (المرحلة الأولى) =

$$= 40,000 \text{ ساعة} - \left[10 \text{ س} \times 3750 + 5 \text{ س} \times 5000 \right]$$

من المعطيات
 معامل س ١ من متباينة من القسم الأول
 قيمة س ١ من الجدول الأمثل
 معامل س ٢ من الجدول الأمثل
 قيمة س ٢ من الجدول الأمثل

$$= 40,000 \text{ ساعة} - [37500 + 25000]$$

$$= 40,000 \text{ ساعة} - 40,000 \text{ ساعة} = \text{صفر}$$

وهذا يعني أن طاقة القسم الأول مستغلة بالكامل.

ب. الطاقة العاطلة لموارد القسم الثاني (المرحلة الثانية) =

$$= 45,000 \text{ ساعة} - \left[(3750 \times 10) + (5000 \times 15) \right]$$

من المعطيات
 معامل س ١ من الجدول الأمثل
 قيمة س ١ من الجدول الأمثل
 معامل س ٢ من الجدول الأمثل
 قيمة س ٢ من الجدول الأمثل

$$= 45,000 - [37500 + 75000] = \text{صفر}$$

وهذا يعني أن طاقة القسم الثاني مستغلة بالكامل.

التفسير المحاسبي والاقتصادي
لمعلومات نموذج البرمجة الخطية:

مثال:

تنتج إحدى المنشآت ثلاثة منتجات أ، ب، ج، يحقق كل منها عائد مساهمة للوحدة قدره: ٢ ج، ٤ ج، ٥ ج، جنبهاً على الترتيب، والتالي بياناً يوضح احتياجات الوحدة من كل منتج من كل من: المواد الخام؛ وساعات الطاقة؛ والكميات المتاحة من هذه الموارد:

المتاح من الموارد	احتياج وحدة المنتج من الموارد			الموارد
	ج	ب	أ	
١٠٠	—	٢	٤	مادة خام م
١٠٠	١	١	٢	مادة خام ن
١٠٠	١	٣	١	ساعات الآلات

وقد استخدمت المشاة المذكورة نموذج البرمجة الخطية، لتحديد خليط الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن؛ وفيما يلي جدول السمبلكس الأمثل:

ر	٢	٤	٠.٥	صفر	صفر	صفر	قيم متغيرات الحل	
٢	١	صفر	$\frac{1}{5}$	صفر	$\frac{3}{10}$	صفر	١ س	متغيرات الحل
صفر	صفر	صفر	١	١	$\frac{1}{2}$	١	٢ غ	٢
٤	صفر	١	$\frac{2}{5}$	صفر	$\frac{1}{10}$	صفر	٢ س	٤
اختبار المثالية ص و								
ر و - ص و								

حيث تمثل س_١، س_٢، س_٣ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل غ_١، غ_٢، غ_٣ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود المادة الخام وساعات تشغيل الآلات.

أولاً: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.

$$١- \text{دالة الهدف: تعظيم } R = ٢س١ + ٤س٢ + \frac{١}{٢}س٣$$

$$٢- \text{القيود: قيد المادة الخام م: } ٤س١ + ٢س٢ \geq ١٠٠$$

$$\text{قيد المادة الخام ن: } ٢س١ + ٢س٢ + ٣س٣ \geq ١٠٠$$

$$\text{قيد ساعات الآلات: } ١س١ + ٣س٢ + ٣س٣ \geq ١٠٠$$

$$٣- \text{شرط عدم السالبة... س١، س٢، س٣} \leq \text{صفر}$$

$$\text{دالة الهدف} = ٢س١ + ٤س٢ + ٠.٥س٣ + ٠غ١ + ٠غ٢ + ٠غ٣$$

تحويل متباينات القيود إلى معادلات:

$$١٠٠ = ٤س١ + ٢س٢ + ٠غ١$$

$$١٠٠ = ٢س١ + ٢س٢ + ٠غ١ + ٠غ٢$$

$$١٠٠ = ١س١ + ٣س٢ + ٣س٣ + ٠غ١ + ٠غ٢ + ٠غ٣$$

▪ يفرض أن جميع المتغيرات الأصلية = صفر، والتعويض في معادلات القيود

$$\therefore ١٠٠ = ٠غ١, ١٠٠ = ٠غ٢, ١٠٠ = ٠غ٣$$

ثانياً: استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل:

س _١	س _٢	س _٣	غ _١	غ _٢	غ _٣	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	س _١	س _٢	س _٣
١	٢	٠.٥	٠	٠	٠	١٠	١س _١	٢	٠	٠
٢	٤	١	٠	٠	٠	٥٠	٢غ _١	٠	٠	٠
١	٣	١	٠	٠	٠	٣٠	٢س _١	٠	٠	٠
٢	٤	٠.٥	٠	٠	٠	١٤٠	اختبار المثالية ص _١			
٢	٤	٠.٥	٠	٠	٠		ص _١ - ص _٢			

ويتم إيجاد أرقام صف (R) على النحو التالي:

- ✓ بالنسبة للمتغيرات الأصلية (س) — من دالة هدف النموذج
- ✓ بالنسبة للمتغيرات الراكدة (ع) — دائماً معاملها = صفر.
- ✓ أرقام عمود (ر): هي معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية فقط، وبالتالي فإنها تتوقف على المتغيرات الموجودة في عمود متغيرات الحل.
- ✓ أرقام صف (ص)، أرقام صف (ر - ص) يتم إيجادها بالقواعد المعروفة والسابق ذكرها.

تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً:

- أ- تحديد كمية الإنتاج من كل منتج، وأقصى ربح ممكن:
- لاحظ أن: كمية الإنتاج تعبر عنها المتغيرات الأصلية س: فإذا ظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أنه يجب إنتاج كمية من هذا المنتج تساوي الرقم الموجود في عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير الأصلي.
- أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أن هذا المنتج لن يتم إنتاج أية وحدات منه "أي أن كمية الإنتاج من هذا المنتج = صفر."

وبالتطبيق على التمرين من جدول الحل الأمثل، نتبين أن:

- الكمية المنتجة من المنتج الأول س₁ = ١٠
- الكمية المنتجة من المنتج الثاني س₂ = ٣٠
- الكمية المنتجة من المنتج الثالث س₃ = صفر
- لاحظ أن: أقصى ربح ممكن هو الرقم الموجود في صف ص أسفل عمود قيم متغيرات الحل.
- وبالتطبيق على التمرين من جدول الحل الأمثل، نجد أن:
أقصى ربح ممكن = ١٤٠

■ درجة استغلال الموارد المتاحة (تحديد الطاقات المستغلة والعاطلة):

- المتغيرات الراكدة غ: هي التي تعبر عن الطاقات ومدى استغلالها. فإذا ظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد (القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد، توجد به طاقة عاطلة.
- كمية الطاقة العاطلة = الرقم الموجود في عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير الراكد.
- أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد (القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد مُستغل بالكامل؛ أي أنه لا توجد به طاقة عاطلة (طاقته العاطلة = صفر).
وبالتطبيق على التمرين (من جدول الحل الأمثل)، نجد أن:
غ_١ = صفر ←.: المورد الأول مستغل بالكامل
غ_٢ = ٥٠ ←.: المورد الثاني به طاقة عاطلة قدرها ٥٠
غ_٣ = صفر ←.: المورد الثالث مستغل بالكامل

● تحديد أسعار ظل الموارد:

(أثر إضافة وحدة واحدة من كل مورد على أرباح المنشأة):
يلاحظ أن: أسعار الظل هي: الأرقام الموجودة في صف التقييم النهائي (ر-ص) أسفل أعمدة المتغيرات الراكدة بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).
ويقصد بأسعار الظل: مقدار التغير في قيمة الأرباح الإجمالية (دالة الهدف) نتيجة التغير في كمية المورد بوحدة واحدة.

وبالتطبيق على التمرين من جدول الحل الأمثل:

المورد الأول: المادة الخام م:

سعر ظل المورد الأول المادة م ← أسفل الراكد غ_١ = $\frac{2}{10}$ جنيهاً

وهذا يعني أن عائد المساهمة الإجمالي يزيد بمقدار $\frac{2}{10}$ جنيهاً؛ إذا زادت الكمية المتاحة من المادة م بمقدار ١ كيلو، كما أن ذلك يؤدي إلى: (انظر عمود غ١):

زيادة الكمية المنتجة من س_١ بمقدار $\frac{3}{10}$ وحدة

نقص كمية غ_٢ بمقدار $\frac{1}{2}$ ، ونقص س_٢ بمقدار $\frac{1}{10}$ وحدة

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة، على النحو التالي:

زيادة كمية س_١ بمقدار $\frac{3}{10}$ وحدة \times ٢ جنيهاً = +٠,٦ جنيهاً

نقص كمية س_٢ بمقدار $\frac{1}{10}$ وحدة \times ٤ جنيهاً = -٠,٤ جنيهاً

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة +٠,٢ جنيهاً

المورد الثاني: المادة الخام ن:

سعر ظل المورد الثاني (المادة الخام ن) أسفل الراكد غ_٢ = صفر وهذا يعني: أن عائد المساهمة الإجمالي لن يتأثر إذا زادت الكمية المتاحة من المادة الخام ن، لأنه يوجد منها كمية فائضة (طاقة عاطلة).

المورد الثالث: ساعات الآلات:

سعر ظل المورد الثالث: ساعات الآلات: أسفل الراكد غ_٣ = $\frac{6}{5}$

* وهذا يعني: أن عائد المساهمة الإجمالي يزيد بمقدار $\frac{6}{5}$ جنيهاً؛ إذا زادت الكمية المتاحة من ساعات تشغيل الآلات بمقدار ١ ساعة؛ كما أن ذلك يؤدي إلى (أنظر عمود المتغير غ_٣):

نقص الكمية المنتجة من س_١ بمقدار $\frac{1}{5}$ وحدة

زيادة الكمية المنتجة من س_٢ بمقدار $\frac{2}{5}$ وحدة

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة:

نقص كمية س_١ بمقدار $\frac{1}{5}$ وحدة \times ٢ جنيهاً = (-) $\frac{2}{5}$ جنيهاً

زيادة كمية س_٢ بمقدار $\frac{2}{5}$ وحدة \times ٤ جنيهاً = + $\frac{8}{5}$ جنيهاً

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة + $\frac{6}{5}$ جنيهاً

■ المنتجات التي لا يتضمنها الحل الأمثل - والسبب في ذلك:

يمكن حساب أو تحديد خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل الأمثل؛ وكذلك عائد المساهمة الذي يجب أن يحققه كل منتج ليس ضمن الحل الأمثل حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً، وذلك على النحو التالي:
يلاحظ هنا أن:

المنتجات التي لا يتضمنها الحل — هو المنتج س_٣

وسبب ذلك أنه: لا يتم إنتاج أية وحدات من المنتج س_٣، وذلك لأن كل وحدة يتم إنتاجها من هذا المنتج يترتب عليها تحمل المنشأة خسارة فرصة بديلة قدرها $\frac{7}{10}$ جنيهاً.

■ يلاحظ أن: خسارة الفرصة البديلة تتمثل في: الأرقام الموجودة في صف التقييم النهائي (ر- ص) أسفل أعمدة المتغيرات الأصلية بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).

■ ويقصد بخسارة الفرصة البديلة: مقدار الخسارة التي تتحملها المنشأة نتيجة إنتاج وحدة واحدة من المنتج.

● حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل:

يتم حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل الأمثل كما يلي:

$$\text{عائد مساهمة الوحدة من المنتج س}_3 = 0.5 \text{ جنيهاً} = \frac{2.5}{5}$$

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من س_٣

مقومة بأسعار الظل (الاحتياج من الموارد × سعر ظل الموارد)

$$\text{المادة الخام م: } 0 \text{ كيلو} \times \frac{2}{10} = \text{صفر}$$

$$\text{المادة الخام ن: } 1 \text{ كيلو} \times 0 = \text{صفر}$$

$$\text{ساعات الآلات: } 1 \text{ ساعة} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \text{ (الإجمالي = 1.2 جنيهاً)}$$

$$\text{∴ خسارة الفرصة البديلة للمنتج س}_3 = -0.7$$

عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج غير الداخل في الحل؛ حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً =

= قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل

أو = هامش المساهمة الحالي له + خسارة فرصته البديلة

:. عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج س₃ حتى

يكون إدخاله في الحل مربحاً =

= قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل = ١,٢ ج

أو هامش المساهمة الحالي ٥,٠ + خسارة فرصته البديلة ٧,٠ = ١,٢ ج

• إنتاج منتج جديد:

• إذا رغبت المنشأة في إضافة منتج جديد، تحقق الوحدة منه عائد مساهمة

قدره على سبيل المثال ٦ جنيهات، ويتطلب إنتاج الوحدة منه: ٣ كيلو من

المادة الخام م، و٥ كيلو من المادة الخام ن، و٦ ساعات من ساعات

تشغيل الآلات. هل تنصح بإدخال هذا المنتج ولماذا؟

من أجل تحديد هل من الأفضل قبول أو رفض إضافة منتج جديد،

يجب القيام بتحديد صافي ربح أو خسارة هذا المنتج...

ويتم تحديد صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد كما يلي:

صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد =

<p>قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة من هذا المنتج مقومة بأسعار الظل</p>	(-)	هامش مساهمة الوحدة من المنتج
---	-------	------------------------------

:. هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد: ٦ جنيهات

يطرح منه: قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج

مقومة بأسعار الظل:

الاحتياج من الموارد x سعر ظل المورد

المادة م: $0.6 = \frac{2}{10} \times 3$ جنيهاً

المادة ن: $0 = 0 \times 5$ صفر

ساعات الآلات: $7.2 = \frac{36}{5} = \frac{6}{5} \times 6$ جنيهاً

الإجمالي ٧.٨ جنيهاً

خسارة فرصته البديلة – ١.٨ جنيهاً

∴ لا ننصح بإضافة هذا المنتج؛ حيث أن إضافة هذا المنتج يترتب عليه تحمل المنشأة خسارة فرصة بديلة قدرها ١.٨ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

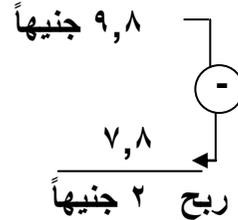
▪ يفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ٩.٨ جنيهاً؛ فهل تنصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟

هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ٩.٨ جنيهاً

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار

الظل (كما سبق حسابها)



∴ ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؛ طالما أن إضافته يترتب

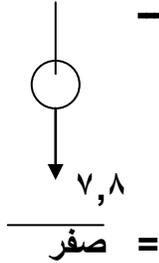
عليها تحقيق ربح قدره ٢ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

▪ يفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ٧.٨ جنيهاً فهل

ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟

∴ هامش مساهمة الوحدة من المنتج ← ٧,٨ جنيهاً

يطرح منه:



قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار الظل كما سبق حسابها).

∴ ننصح بإضافة المنتج الجديد طالما أن قيمة الموارد المستخدمة

في إنتاج وحدة واحدة منه = هامش مساهمة الوحدة منه.

• بعض مشاكل تطبيق طريقة السمبلكس:

يحفل الواقع العملي لتطبيق طريقة السمبلكس بمواجهة بعض المشاكل: حيث قد يحدث بعض الحالات توافر عدة حلول مثلى وليس حلاً أمثلاً وحيداً؛ كما قد يحدث في حالات أخرى: أن يكون الحل الأمثل غير محدود نظراً لأن منطقة الحلول الممكنة غير مغلقة؛ كما قد يحدث حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج من الحل، الأمر الذي يؤدي إلى ظهور مشكلة تسمى "مشكلة اعتلال الحل"؛ وغير ذلك من المشاكل؛ ويمكن توضيح ذلك على النحو التالي:

أولاً: حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول في الحل [أي تساوي أكبر معامل موجب]:

من المعروف - في مشاكل البرمجة الخطية لتعظيم الأرباح - أن عملية اختيار متغير ما غير أساسي لكي يدخل إلى الحل كمتغير أساسي، إنما يتم عن طريق اختيار ذلك المتغير الذي يكون له أعلى معامل موجب (المتغير صاحب أعلى معامل موجب) يساهم في تحسين قيمة الأرباح؛ غير أنه قد يحدث في بعض الحالات، أن نجد أمامنا أكثر من متغير واحد له نفس أكبر قيمة موجبة في صف التقييم النهائي (صف ر و - ص و)، حينئذٍ نواجه مشكلة التعادل أو التساوي عند اختيار متغير كان غير أساسي؛ والقاعدة هنا تتمثل في: اختيار أي متغير منهما اجتهادياً، حتى ولو أدى الاختيار الخاطئ إلى زيادة عدد

جداول السمبلكس؛ حيث لا تتوافر طريقة للتنبؤ بهذا الاختيار الخاطئ قبل التطبيق؛ ومن ثم فإن الاختيار الاجتهادي لأي من المتغيرين هنا، يمثل القاعدة العامة لمعالجة هذا التساوي في المعامل الموجب الأكبر.

ثانياً: حالة تساوي أصغر كمية موجبة] اعتلال الحل؛ أو تعدد المتغيرات المرشحة للخروج]:

من المعلوم أنه يتم تطبيق قاعدة أصغر كمية موجبة، لاختيار صف المتغير الخارج؛ حيث يتم اختيار المتغير المرشح للخروج؛ عن طريق قسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل على العناصر المقابلة في عمود المتغير المرشح للدخول في الحل (العمود الرئيس)؛ حيث يتم اختيار المتغير (الصف) ذي أصغر قيمة موجبة ناتجة عن عملية القسمة؛ غير أنه قد يحدث أحياناً أن نجد أن نتيجة عملية القسمة متساوية بالنسبة لأكثر من متغير (صف)؛ فإذا ما تم اختيار أحد المتغيرات للخروج من الحل، فإن قيمة المتغير أو المتغيرات الأخرى ذات نتيجة القسمة المتساوية، ستؤول إلى الصفر في الحل التالي؛ مما يعني أن قيمة أحد المتغيرات الأساسية في الحل تساوي صفر؛ وفي مثل هذه الحالة نجد أن الحل يفقد صفة الحل الأساسي ويسمى "الحل المعتل".

ويلاحظ هنا عدم توافر قاعدة محددة توضح لنا مسبقاً أفضلية اختيار متغير للخروج من الحل في حالة تساوي نتيجة القسمة؛ بل إنه قد يؤدي اختيار أحد المتغيرات بدلا من المتغير الآخر (أو المتغيرات الأخرى) إلى اختلاف عدد جداول السمبلكس اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل، وكذلك اختلاف أسعار الظل؛ وذلك في الوقت الذي لن تتغير فيه قيمة دالة الهدف، وقد يؤدي ذلك إلى دخول عملية الحل في دورة غير منتهية، حيث قد نجد أنفسنا أمام حل سبق وأن توصلنا إليه في مرحلة سابقة.

ولإيضاح هذه المشكلة وكيفية معالجتها، نقوم بدراسة جدول السمبلكس الأول - الذي يتضمن الحل المبدئي لإحدى مشاكل تعظيم الأرباح، وذلك كما يتبين من المثال التالي:

		٢ صفر $\frac{3}{2}$ صفر صفر صفر						
رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١س	٢س	٣س	١غ	٢غ	٣غ
صفر	١ غ	٢	١	- ١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	٢ غ	٤	٢	صفر	١	صفر	١	صفر
صفر	٣ غ	٣	١	١	١	صفر	صفر	١
اختبار المثالية								
ص	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
رو - ص			٢	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	صفر

ولتعديل هذا الحل، واقتراح حل آخر أفضل منه نتبع الخطوات التالية:

- ١- عمود المتغير s_1 هو عمود المفتاح: حيث أنه يقع فيه أعلى قيمة موجبة في صف التقييم النهائي (صف $r_0 - s_1$).
- ٢- لاختيار صف المفتاح، أي تحديد المتغير الخارج الذي يحل s_1 محله: فإننا نلاحظ من اختبار الصفوف الآتي:

$$\text{صف } 1 \text{ غ} = 2 \div 1 = 2$$

$$\text{صف } 2 \text{ غ} = 4 \div 2 = 2$$

$$\text{صف } 3 \text{ غ} = 3 \div 1 = 3$$

ويتبين من اختبار الصفوف أن القيد الأول والثاني يحققان نفس القيمة الموجبة الأصغر (٢)؛ فإذا قررنا اجتهادياً استبعاد s_1 ، وطبقاً لقواعد تعديل الصفوف السابق إيضاحها، فإنه يكون لدينا الحل الأساسي الممكن التالي:

٢ صفر $\frac{3}{2}$ صفر صفر صفر								لـ
٣ غ	٢ غ	١ غ	٣ س	٢ س	١ س	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	
صفر	صفر	١	صفر	١ -	١	٢	١ س	٢
صفر	١	٢ -	١	٢	صفر	صفر	٢ غ	صفر
١	صفر	١ -	١	٢	صفر	١	٣ غ	صفر
اختبار المثالية								ص
صفر	صفر	٢	صفر	٢ -	٢			
صفر	صفر	٢ -	$\frac{3}{2}$	٢	صفر	٤		٣ - ص

والحل الأساسي الممكن الجديد يتمثل في:

$$١ س = ٢$$

$$٢ غ = صفر$$

$$٣ غ = ١$$

ولكننا نلاحظ هنا بالنسبة للمتغير الأساسي غ٢: أن قيمته تساوي الصفر؛

ويطلق على الحل في هذه الحالة: " الحل المعتل " .

ونلاحظ هنا أن تساوي أصغر كمية موجبة، هو السبب الرئيس لهذا الحل

المعتل. ويشكل ذلك صعوبات في العمليات الحسابية لطريقة السمبلكس؛ لأنه

إذا تم الاستمرار في تطبيق الطريقة فإننا نجد الآتي:

١- عمود المتغير س٢ هو عمود المفتاح.

٢- وبتطبيق قاعدة اختبار الصفوف وتحديد أصغر كمية موجبة نجد أن:

$$صفر س١ = (١ -) \div ٢ = ٢ -$$

$$صفر غ٢ = صفر \div ٢ = صفر (أصغر كمية موجبة)$$

$$صفر غ٣ = ١ \div ٢ = \frac{1}{2}$$

ويوضح اختبار الصفوف أن المتغير s_2 سوف يحل محل المتغير x_1 ؛ إلا أن أصغر كمية موجبة تساوي صفر، وهذا يعني أن x_1 لا يمكن زيادته حتى يكون له قيمة موجبة، ومعناه أيضاً أنه لن يطرأ تحسين على دالة الهدف نتيجة هذا التعديل.

وإذا أجري أي تعديل آخر في الأساس، فإن ذلك لن يؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف.

ويلاحظ هنا أنه يجب أن الاستمرار في تطبيق طريقة السمبلكس، غير أن أقصى قيمة للأرباح في هذه المشكلة، لا يمكن الوصول إليها، إلا عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي صفرية أو سالبة، ولا يمكن تحقيق هذه الحالة الأخيرة.

ويتمثل حل هذه المشكلة في اتخاذ قرار اجتهادي، يتعلق بتحديد أي متغير أساسي منهما يجب أن يترك الحل، حتى يتم التوصل إلى الحل الذي يقترب من الأمثل.

مثال (٢):

المطلوب تحديد القيمة القصوى للدالة التالية:

$$R = 11s_1 + 6s_2$$

في ظل القيود التالية:

$$18 \geq 6s_1 + 3s_2$$

$$15 \geq 5s_1 + 3s_2$$

$$\text{صفر} \leq s_1, s_2$$

ويظهر جدول السمبلكس الأول على النحو التالي:

		صفر	صفر	٦	١١			
		غ ^٢	غ ^١	س ^٢	س ^١	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	ر ^٠
→	→	صفر	١	٣	٦	١٨	غ ^١	صفر صفر
→	→	١	صفر	٣	٥	١٥	غ ^٢	
اختبار المثالية								
		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	ص ^٠	
		صفر	صفر	٦	١١		ر ^٠ - ص ^٠	

حيث نلاحظ هنا أن المتغير الداخل هو س^١؛ ولتحديد المتغير المستبعد يتم قسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل على العناصر المقابلة في عمود س^١ كما يلي:

$$٣ = \frac{١٨}{٦} \quad \text{صف غ}^١$$

$$٣ = \frac{١٥}{٥} \quad \text{صف غ}^٢$$

وبذلك نستطيع اختيار أحد المتغيرات غ^١ أو غ^٢ للخروج من الحل الحالي، فإذا قمنا باختيار غ^١، فإن الجدول الثاني يظهر على النحو التالي:

		صفر	صفر	٦	١١			ر ^٠
		غ ^٢	غ ^١	س ^٢	س ^١	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	
		صفر	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	١	٣	س ^١	١١
→	→	١	$\frac{٥}{٦} -$	$\frac{١}{٢}$	صفر	صفر	غ ^٢	صفر
اختبار المثالية								
		صفر	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{١١}{٢}$	١١	٣٣	ص ^٠	
		صفر	$\frac{١١}{٦} -$	$\frac{١}{٢}$	صفر		ر ^٠ - ص ^٠	

حيث يعنى هذا الحل أن $s_1 = 3$ ؛ في حين أن باقى المتغيرات تساوى صفرًا، حيث نلاحظ هنا أن هذا الحل يفقد صفة الحل الأساسي، حيث أن عدد القيود $= 2$ ؛ بينما عدد المتغيرات التى تأخذ قيمة غير صفرية $= 1$ ؛ ولذلك يعتبر هذا الحل معتلاً.

وكما سبقت الإشارة، فإننا نلاحظ هنا أنه يجب الاستمرار في الحل بطريقة السمبلكس، غير أن أقصى قيمة للأرباح في هذه المشكلة لا يمكننا التوصل إليها، إلا عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي صفرية أو سالبة؛ ولا يمكن تحقيق هذه الحالة الأخيرة؛ ومن ثم فإن حل هذه المشكلة يتمثل فى اتخاذ قرار اجتهادي يتعلق بتحديد أى متغير أساسى منهما يجب أن يترك الحل، حتى يتم التوصل إلى الحل الذى يقترب من الأمثل.

ثالثاً: حالة الحل غير المحدود [أو: الحلول التي لا حدود لها]:

وهي تلك الحالة التي تحدث حينما لا نجد لدالة الهدف حداً أقصى، بمعنى أننا عندما نقوم بتطبيق قاعدة أصغر قيمة موجبة: لا نستطيع تحديد المتغير الأساسي - صف المفتاح - الذي يجب أن يترك الحل؛ ويحدث ذلك في حالة إذا ما كانت قيمة جميع عناصر عمود المتغير المرشح للدخول في الحل (العمود الرئيس) سالبة أو صفر؛ وهذا يعنى أنه عند تحديد المتغير المطلوب إخراجة من الحل، بقسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل ÷ العناصر المقابلة في العمود الرئيس، نجد أن ناتج القسمة سيكون سالباً أو ما لانهاية؛ مما يعنى أن المتغير المرشح للدخول في الحل سيأخذ قيمة سالبة، مما يتنافى مع شرط عدم السالبية؛ وفي مثل هذه الحالة فإنه يجب التوقف عن الاستمرار في الحل؛ حيث نكون حينئذ بصدد حالة ليس لها حل محدود.

• ويمكن توضيح هذه الحالة بالمثال التالى:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = 10s_1 + 4s_2$$

حيث يمكن أن نتبين ذلك، من استقراء جداول السمبلكس التالية

والخاصة بحل نموذج البرمجة الخطية:

صفر		صفر		٤	١٠	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	ر٠
غ٢	غ١	س٢	س١					
صفر	١	٦	-	٤	٤	٢٤	غ١	صفر
صفر	١	صفر	-	٤	٥	٢٠	غ٢	صفر
اختبار المثالية								
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	ص	ص
صفر	صفر	٤		١٠				ر٠ - ص

صفر		صفر		٤	١٠	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	ر٠
غ٢	غ١	س٢	س١					
$\frac{٤}{٥}$	١	$\frac{١٤}{٥}$	صفر		صفر	٨	غ١	صفر
$\frac{١}{٥}$	صفر	$\frac{٤}{٥}$	١		١	٤	س١	١٠
اختبار المثالية								
٢	صفر	٨	١٠		١٠	٤٠	ص	ص
٢	صفر	١٢	صفر		صفر			ر٠ - ص

ونظراً لأن جميع معاملات عمود س٢ ؛ وهو المتغير المرشح للدخول في الحل التالي: سالبة؛ فإن هذا يعني أن هذه تعتبر مشكلة ليس لها حلاً أمثلاً محدوداً؛ وبما أن جميع قيم عناصر عمود س٢ سالبة؛ فإن هذا يعني أن قيمة عنصر (ر٠- ص) أسفل هذا العمود ستظل دائماً موجبة مهما كان عدد مرات تكرار الحل.

هذا ومن المهم أن نشير هنا إلى أنه من الناحية الواقعية؛ فإن هذه المشكلة لا تواجهنا في الحياة العملية، حيث أن وجود هذه المشكلة إنما يعني في حقيقة الأمر: توافر الموارد بصورة لا نهائية، ولا يخفى أن هذا أمر غير

منطقي ولا يتفق مع حقيقة ندرة الموارد الاقتصادية المتاحة لأي منشأة؛ وعلى ذلك فإن ظهور هذه المشكلة يعني أن وقوع خطأ ما، سواءً في مرحلة صياغة المشكلة، أو في مرحلة الحل.

رابعاً: حالة تعدد المثالية في البرمجة الخطية] أو: حالة تعدد الحلول المثلى]:

وتحدث هذه الحالة عند وجود قيمة صفر في صف (ر_و - ص_و)؛ تحت أحد المتغيرات غير الأساسية في الحل الأمثل (أي أن هذا المتغير الذي ظهر أسفل العمود الخاص به صفر لم يظهر في عمود متغيرات الحل الأمثل)؛ وهذا يعني أنه يمكن إدخال هذا المتغير غير الأساسي في جدول الحل الأمثل الحالي، فيؤدي ذلك إلى تحقيق نفس قيمة دالة الهدف، ولكن من خلال تشكيلة منتجات أخرى بديلة؛ ويقال في هذه الحالة: أن هناك عدة حلول مثلى لهذه المشكلة.

أما في حالة عدم وجود قيمة صفر في صف (ر_و - ص_و)؛ تحت أحد المتغيرات غير الأساسية؛ فإن هذا الحل يعتبر هو الحل الأمثل الوحيد.

ويلاحظ أن وجود مجموعة من الحلول المختلفة التي تصل بنا إلى نفس النتيجة النهائية المثلى، يُطلق عليها في البرمجة الخطية: حالة تعدد المثالية (أو حالة المثاليات البديلة).

ولتوضيح حالة تعدد المثالية عند تحديد مزيج الإنتاج الأمثل، يتم استعراض المثال التالي:

مثال:

تقوم إحدى منشآت الأعمال الصناعية، بإنتاج منتجين: س، ص، يحقق كل منهما عائد مساهمة للوحدة: ١٢ جنيهاً، ٨ جنيهاً، على الترتيب؛ والتالي احتياجات الوحدة من الساعات في كل من قسمي: التجميع، والتشطيب، والساعات المتاحة في كل قسم:

الساعات المتاحة لكل قسم	احتياجات الوحدة		الأقسام
	منتج ص	منتج س	
١٢٠	٤	٦	قسم التجميع
١٥٠	٦	٥	قسم التشطيب

وكان الحل الأمثل الذي يحقق أقصى ربح يظهر على النحو التالي:

ر و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١٢	٨	صفر	صفر
١٢	س _١	٢٠	١	س _٢	غ _١	غ _٢
صفر	غ _٢	٥٠	صفر	٨/٣	٥/٦ -	١
اختبار المثالية ص و		٢٤٠	١٢	٨	٢	صفر
ر و - ص و			صفر	صفر	٢-	صفر

حيث تمثل س_١، س_٢ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل غ_١، غ_٢ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود الأقسام الإنتاجية.
حيث نجد هنا أن جدول الحل الأمثل البديل، يظهر على النحو التالي:

ر و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١٢	٨	صفر	صفر
١٢	س _١	$\frac{15}{2}$	١	صفر	غ _١	غ _٢
٨	س _٢	$\frac{75}{4}$	صفر	١	$\frac{5-}{16}$	$\frac{3}{8}$
اختبار المثالية ص و		٢٤٠	١٢	٨	٢	صفر
ر و - ص و			صفر	صفر	٢-	صفر

ويلاحظ من الجدول السابق أن المورد الانتاجي الثاني له طاقة عاطلة تبلغ ٥٠ ساعة؛ وهذه الطاقة العاطلة قد ظهرت في الحل الأمثل الأول، على الرغم من أنها لم تظهر في الحل الأمثل البديل.

ويمكن القول في ضوء ما سبق أن حالة تعدد المثالية ترتبط بوجود سعر ظل = صفر، تحت أعمدة أحد المتغيرات الراكدة غير الأساسية والتي لم تدخل الحل الأمثل.

ويجب هنا أن نلاحظ أن الحل الأمثل البديل؛ وعلى الرغم من أنه قد حقق نفس القيمة المثلى لدالة الهدف وهي ٢٤٠ جنيهاً؛ إلا أنه لم يحقق الاستغلال الكامل لطاقة المورد الثاني؛ إذ ترك طاقة فائضة (عاطلة) قدرها ٥٠ ساعة.

خامساً: حالة سالبية الطرف الأيسر للقيود:

من المعلوم أن طريقة السمبلكس تستلزم ضرورة ألا تكون قيم الطرف الأيسر للقيود سالبة، وذلك بهدف تسهيل عملية التوصل إلى حل مبدئي؛ فإذا كانت قيمة الطرف الأيسر لأي قيد سالبة؛ فإنه يمكن ضرب طرفي القيد في (-)، مع ضرورة مراعاة تغيير إشارة المتباينة.

■ فعلى سبيل المثال، فإذا كانت متباينة أحد القيود بالشكل الآتي:

$$٣س١ - ٢س٢ \leq ٣٠$$

فإننا للتخلص من الإشارة السالبة في الطرف الأيسر: يجب ان نقوم بضرب طرفي المتباينة في (-)، مع ضرورة مراعاة تغيير الإشارات في كلا طرفي المتباينة (كلا الطرفين)، وكذلك إشارة المتباينة لتصبح:

$$-٣س١ + ٢س٢ \geq ٣٠$$

على أن يتم استكمال الحل بالخطوات المعتادة.

■ وكذلك فعلى سبيل المثال: إذا كان القيد على النحو التالي:

$$٥س١ - ٢س٢ \leq ١٥$$

فبضرب طرفي المتباينة $\times (-)$ تصبح على النحو التالي:

$$-٥س١ + ٢س٢ \geq ١٥$$

على أن يتم استكمال الحل بالخطوات المعتادة.

سادساً: التعامل مع المعادلات والمتباينات ذات الإشارة (\leq):

تناولنا فيما سبق: أساسيات طريقة السمبلكس على المتباينات ذات الإشارة أقل من أو يساوي (\geq)؛ والتي استقر حل نموذج البرمجة فيها،

على ضرورة تحويلها إلى معادلات، عن طريق إضافة المتغيرات الراكدة، وذلك بهدف تحديد الحل المبدئي؛ إلا أن الحياة العملية تزخر بالعديد من الحالات التي تتضمن مشكلة البرمجة الخطية فيها: معادلات أو متباينات ذات إشارة أكبر من أو تساوي (ك)؛ والتالي توضيح أسس كيفية التعامل، من خلال طريقة السمبلكس مع مثل تلك الحالات:

• توافر نوعية المعادلات (=):

يلاحظ أنه إذا كان أحد أو بعض قيود نموذج البرمجة الخطية، قد ظهر في صورة معادلة: فإن الأمر هنا لا يتطلب إضافة متغيرات راکدة، وذلك لأن المتغيرات الراكدة تستخدم في تحويل المتباينات إلى معادلات، فإذا كان القيد (على سبيل المثال) على النحو التالي:

$$س_١ = ٣٦٠$$

$$س_٢ = ٤٨٠$$

في هذه الحالة نجد أنه لا يوجد أي داعي لإضافة متغيرات راکدة؛ لأن هذين القيدين في هيئة معادلة؛ وإذا كان الحل المبدئي يفترض أن متغيرات القرار = صفر، بمعنى أن $س_١ =$ صفر؛ و $س_٢ =$ صفر، فإننا هنا نحتاج إلى ضرورة إضافة متغيرين جديدين يأخذان قيمة الطرف الأيسر في الحل المبدئي؛ حيث يلاحظ على هذه المتغيرات التي يتم إضافتها بهدف تحديد الحل المبدئي يُطلق عليها: "المتغيرات الإصطناعية"؛ وهي في الحقيقة عبارة عن: متغيرات وهمية لا علاقة لها بالمشكلة، غير أننا نقوم بإضافتها إلى قيود النموذج، لكي يمكننا تحديد الحل المبدئي؛ وبمجرد أقيام تلك المتغيرات الاصطناعية بأداء هذا الدور، فإننا يجب أن نتخلص منها لكي لا تظهر في الحل الأمثل.

وتظهر المعادلتان السابقتان بعد إضافة المتغيرين الإصطناعيين: $س_١$ ؛

و $س_٢$ على النحو التالي:

$$س_١ + ١س_١ = ٣٦٠$$

$$س_٢ + ٢س_٢ = ٤٨٠$$

حيث نجد في الحل المبدئي، أن:

$$س_١ = \text{صفر} \quad ٣٦٠ = ١٢$$

$$س_٢ = \text{صفر} \quad ٤٨٠ = ٢٤$$

• توافر نوعية المتباينات ذات الإشارة (≤):

تشير هذه المتباينات إلى أن: قيمة الطرف الأيمن قد تساوي أو تزيد عن قيمة الطرف الأيسر؛ فعلى سبيل المثال فإن المتباينة التالية:

$$س_١ \leq ١٨٠$$

$$س_٢ \leq ٣٢٠$$

فإننا لكي نقوم بتحويل هاتين المتباينتين، إلى معادلتين: فإن إشارة المتغيرات الراكدة تكون سالبة، أي تصبح المتباينتين على النحو التالي:

$$س_١ - ١٨٠ = ١٢$$

$$س_٢ - ٣٢٠ = ٢٤$$

وفي الحل المبدئي فإننا نجد أن:

$$س_١ = \text{صفر}، ١٢ = -١٨٠؛$$

$$س_٢ = \text{صفر}، ٢٤ = -٣٢٠؛$$

بمعنى أن قيمة كل من: ١٢، و ٢٤ سالبتين، وهو الأمر الذي يتنافى مع شرط عدم السالبة؛ ومن ثم فلكي يمكننا تحديد الحل المبدئي، فإننا يجب أن نضيف متغيرين إصطناعيين، يأخذان في الحل المبدئي قيمة تساوي قيمة الطرف الأيسر، وعلي ذلك تظهر المتباينتان السابقتان على النحو التالي:

$$س_١ - ١٢ = ١٢ + ١٢$$

$$س_٢ - ٢٤ = ٢٤ + ٢٤$$

حيث نجد في الحل المبدئي أن:

$$س_١ = \text{صفر} \quad ١٢ = \text{صفر} \quad ١٢ = ١٢$$

$$س_٢ = \text{صفر} \quad ٢٤ = \text{صفر} \quad ٢٤ = ٢٤$$

وهنا يجب ملاحظة أننا بعد أن نتوصل إلى الحل المبدئي: فإننا يجب أن نعمل على التخلص من المتغيرات الإصطناعية، لكي لا تظهر في الحل الأمثل.

نخلص مما سبق إلى أن نموذج البرمجة الخطية قد يشتمل على ثلاثة أنواع من المتغيرات: ١- متغيرات القرار (س_١، س_٢... الخ)؛ ٢- المتغيرات الراكدة (غ_١، غ_٢... الخ)؛ ٣- المتغيرات الإصطناعية (س_١، س_٢...).

وتجدر ملاحظة أنه يمكن التخلص من المتغيرات الإصطناعية (س_١، س_٢...)؛ وذلك عن طريق إستخدام عدة طرق، من أهمها:

١- طريقة م الكبرى.

٢- طريقة المرحلتين.

• طريقة م الكبرى:

وترتكز هذه الطريقة على ضرورة القيام بإعطاء المتغيرات الإصطناعية معاملات في دالة الهدف، تضمن التخلص منها وعدم ظهورها في الحل الأمثل؛ ويرمز لهذه المعاملات بالرمز (م)، حيث تأخذ م قيمة كبيرة جداً بالمقارنة بالمعاملات الأخرى في دالة الهدف؛ غير أنه يجب ملاحظة أن:

• تأخذ (م) إشارة سالبة: في المشكلات التي تتضمن إيجاد القيمة القصوى لدالة الهدف؛

• بينما تأخذ (م) إشارة موجبة: في المشكلات التي تتضمن إيجاد القيمة الدنيا لدالة الهدف؛

حيث تعني الإشارة السالبة خسارة كبيرة جداً، كما تعني الإشارة الموجبة تكلفة مرتفعة جداً، وهو الأمر الذي يضمن التخلص من المتغيرات الإصطناعية. ويمكن توضيح هذه الطريقة بالمثال التالي:

▪ مثال رقم (١):

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = 10س_1 + 8س_2$$

وذلك، في ظل القيود التالية:

$$٧٤ = ١س٥ + ٢س٣$$

$$٦٠ \geq ١س٤ + ٢س٢$$

$$١٠ \leq ١س١$$

$$\leq \text{صفر} \quad ١س١, ٢س٢$$

ويصبح النموذج السابق بعد إضافة المتغيرات الرائدة والإصطناعية على

النحو التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = ١٠س١ + ٨س٢ + \text{صفر غ}١ + \text{صفر غ}٢ - م١س١ - م٢س٢$$

في ظل القيود التالية:

$$٧٤ = ١س٥ + ٢س٣$$

$$٦٠ = ١س٤ + ٢س٢ + \text{غ}١$$

$$١٠ = ١س١ + \text{غ}٢$$

$$\leq \text{صفر} \quad ١س١, ٢س٢, \text{غ}١, \text{غ}٢, م١س١, م٢س٢$$

ويمكن التوصل إلي الحل الأمثل لهذا النموذج باستخدام طريقة السمبلكس

على النحو التالي:

رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١٠	٨	صفر	صفر
- م	١س١	٧٤	٥	٣	صفر	صفر
صفر	١س٤	٦٠	٤	٢	١	صفر
- م	٢س٢	١٠	١	صفر	صفر	١ -
	اختبار المثالية					
صو		- ٨٤ م	- ٦ م	- ٣ م	صفر	م
رو - صو			١٠ + ٦ م	٨ + ٣ م	صفر	- م

	٥	صفر ١	صفر ٣	٢٤	١ى	م -
	٤	صفر	صفر ٢	٢٠	١غ	صفر
	١ -		صفر ١	١٠	١س	١٠
					اختبار المثالية	
	م٥ - ١٠ -	صفر	م ٣ -	١٠	م ٢٤ - ١٠٠	ص و
	م٥ + ١٠	صفر	م ٣ + ٨	صفر		رو - ص و

		صفر	صفر	٨	١٠			
		١غ	١غ	٢س	١س	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	
	١	صفر	$\frac{٣}{٥}$	صفر	صفر	$\frac{٢٤}{٥}$	١غ	
	صفر	١	$\frac{٢}{٥}$ -	صفر	صفر	$\frac{٤}{٥}$	١غ	
	صفر	صفر	$\frac{٣}{٥}$	١	١	$\frac{٧٤}{٥}$	١س	
							اختبار المثالية	
	صفر	صفر	٦	١٠	١٤٨		ص و	
	صفر	صفر	٢	صفر			رو - ص و	

	$\frac{٥}{٣}$	صفر	١	صفر	٨	٢س	٨	
	$\frac{٢}{٣}$	١	صفر	صفر	٤	١غ	صفر	
	١ -	صفر	صفر	١	١٠	١س	١٠	
							اختبار المثالية	
	$\frac{١٠}{٣}$	صفر	٨	١٠	١٦٤		ص و	
	$\frac{١٠}{٣}$ -	صفر	صفر	صفر			رو - ص و	

ويتبين من الجدول الأخير أن الحل الأمثل يتمثل في:

$$س_١ = ١٠ \quad س_٢ = ٨ \quad غ = ٤$$

$$غ = ٤، س_١ = ١٠، س_٢ = ٨ \quad = \text{صفر} \quad \text{هامش المساهمة} = ١٦٤$$

حيث أن: $س_١$ ، $س_٢$ متغيرات القرار، $غ$ المتغير الراكد المرتبط بالقيود الثاني.

هذا، وبإمكاننا أن نتحقق من أن الحل الأمثل: إنما هو حل ممكن كما أنه يفي بقيود المشكلة؛ وذلك عن طريق القيام بالتعويض بقيم متغيرات الحل في القيود كما يتبين مما يلي:

القيود الأول:

$$٧٤ = ٥س_١ + ٣س_٢ + ١س_٣$$

$$٧٤ = ٥ \times ١٠ + ٣ \times ٨ + \text{صفر}$$

القيود الثاني:

$$٦٠ = ٤س_١ + ٢س_٢ + ١س_٣$$

$$٦٠ = ٤ \times ١٠ + ٢ \times ٨ + \text{صفر}$$

القيود الثالث:

$$١٠ = ١س_١ - ٢س_٢ + ١س_٣$$

$$١٠ = ١٠ - \text{صفر} + \text{صفر}$$

ويمكن حساب قيمة دالة الهدف وفقا للحل الأمثل بالتعويض بقيم متغيرات

الحل الأمثل في دالة الهدف كما يتضح مما يلي:

$$ر = ١٠س_١ + ٨س_٢$$

$$١٦٤ = ١٠ \times ١٠ + ٨ \times ٨$$

• طريقة المرحلتين:

وهنا يتم التوصل إلى الحل الأمثل من خلال مرحلتين:

• المرحلة الأولى:

ويتم فيها: التخلص من المتغيرات الإصطناعية، ولذلك تقتصر دالة الهدف على المتغيرات الإصطناعية فقط؛ وتأخذ هذه المتغيرات معاملات في دالة الهدف تساوي (-١) في مشكلات تعظيم الربح؛ ومعاملات موجبة تساوي (١) في مشكلات تخفيض التكلفة؛ أما باقي متغيرات المشكلة فتأخذ معاملات = صفر في دالة الهدف؛ ويتم تحديد الحل المبدئي؛ على أن نستمر في الحل، إلى

أن يتم الوصول إلى الحل الأمثل لهذه المرحلة، والذي لا يتضمن المتغيرات الإصطناعية.

وإذا انتهت هذه المرحلة ولم يتم التخلص من المتغيرات الإصطناعية، أي إذا كانت بعض المتغيرات الإصطناعية تأخذ قيمة في الحل تزيد عن الصفر: فإن ذلك يعني أنه لا يوجد حل لهذه المشكلة، وفي هذه الحالة لا يتم الانتقال إلى المرحلة الثانية.

• المرحلة الثانية:

حيث يتم الانتقال إلى هذه المرحلة؛ إذا تم التخلص من المتغيرات الإصطناعية وإخراجها من الحل الأساسي، أو إذا أصبحت قيمة هذه المتغيرات في الحل الأساسي تساوي الصفر.

وتبدأ هذه المرحلة عن طريق تعديل معاملات دالة الهدف، بحيث يتم إعادة المعاملات الأصلية للمشكلة؛ كما يتم استبعاد الأعمدة الخاصة بالمتغيرات الإصطناعية من جدول السمبلكس؛ ثم يتم حساب عناصر صف اختبار المثالية؛ وتطبق بعد ذلك الخطوات المعتادة في طريقة السمبلكس، إلى أن يتم الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة.

ويمكن تطبيق طريقة المرحلتين على المثال السابق، حيث تظهر جداول السمبلكس لكل مرحلة على النحو التالي:

لـ	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	صفر	صفر	صفر	صفر	١ -	١ -
١ -	١٥	٧٤	٥	٣	صفر	صفر	١	صفر
صفر	١٥	٦٠	٤	٢	١	صفر	صفر	صفر
١ -	٢٥	١٠	١	صفر	صفر	١ -	صفر	١
اختبار المثالية								
ص	٨٤ -							
لـ - ص	٦	٦	٣ -	صفر	١ -	١ -	١ -	صفر

صفر صفر صفر صفر صفر						قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	رو
١ -	١ -	صفر	صفر	صفر	صفر			
٢٥	١٥	٢غ	١غ	٢س	١س	٢٤	١٥	١ -
٥ -	١	٥	صفر	٣	صفر	٢٤	١٥	١ -
٤ -	صفر	٤	١	٢	صفر	٢٠	١غ	صفر
١	صفر	١ -	صفر	صفر	١	١٠	١س	صفر
اختبار المثالية								
٥	١ -	٥ -	صفر	٣ -	صفر	٢٤ -		ص
٦ -	صفر	٥	صفر	٣	صفر			رو - ص

١ -	$\frac{١}{٥}$	١	صفر	$\frac{٣}{٥}$	صفر	$\frac{٢٤}{٥}$	١غ	صفر
صفر	$\frac{٤}{٥} -$	صفر	١	$\frac{٢}{٥} -$	صفر	$\frac{٤}{٥}$	١غ	صفر
صفر	$\frac{١}{٥}$	صفر	صفر	$\frac{٣}{٥}$	١ -	$\frac{٧٤}{٥}$	١س	صفر
اختبار المثالية								
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر		ص
١ -	١ -	صفر	صفر	صفر	صفر			رو - ص

جداول المرحلة الأولى

ونظراً لعدم وجود قيم موجبة في صف اختبار المثالية في الجدول الأخير: فإن الحل وفقاً لهذا الجدول يعتبر هو الحل الأمثل للمرحلة الأولى؛ وتبدأ المرحلة الثانية بالجدول الأخير في المرحلة السابقة، على أن يتم تعديل معاملات دالة الهدف، بحيث توضع المعاملات الأصلية، كما يتم استبعاد أعمدة المتغيرات الإصطناعية، وتظهر جداول المرحلة الثانية على النحو التالي:

رو		متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١٠	٨	صفر	صفر
صفر	٢ غ	$\frac{٢٤}{٥}$	صفر	صفر	٢ س	١ غ	٢ غ
صفر	١ غ	$\frac{٤}{٥}$	صفر	صفر	$\frac{٢}{٥}$	١	صفر
١٠	١ س	$\frac{٧٤}{٥}$	١	صفر	$\frac{٣}{٥}$	صفر	صفر
اختبار المثالية		١٤٨		١٠	٦	صفر	صفر
ص				صفر	٢	صفر	صفر
رو - ص				صفر	٢	صفر	صفر

رو		متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١٠	٨	صفر	صفر
٨	٢ س	٨	صفر	صفر	١	صفر	٢ غ
صفر	١ غ	٤	صفر	صفر	صفر	١	١ غ
١٠	١ س	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١ -
اختبار المثالية		١٦٤		١٠	٨	صفر	صفر
ص				صفر	٨	صفر	صفر
رو - ص				صفر	٨	صفر	صفر

جداول المرحلة الثانية

ويلاحظ عدم وجود قيم موجبة في صف (رو - ص)، وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل، والذي يتطابق مع نفس الحل الذي توصلنا إليه عن طريق استخدام وتطبيق طريقة م الكبرى.

الفصل الخامس

الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية حالة تخفيض (تدنية) التكاليف

تستخدم خطوات، وإجراءات تطبيق طريقة السمبلكس في مشاكل تخفيض التكاليف، بنفس الطريقة التي سبق إتباعها في مشاكل تعظيم الأرباح، مع بعض الاختلافات والتعديلات التي تتبع من طبيعة المشكلة ذاتها، حيث تتركز هذه المشكلة في تخفيض التكاليف إلى أدنى حد وليس تعظيم الأرباح. هذا، وتتركز أهم أوجه الاختلاف بين تطبيق طريقة السمبلكس، في حالات تخفيض (تدنية) التكاليف؛ عنها في حالات تعظيم الربحية، في النقاط التالية:

- ١) تتمثل دالة الهدف المطلوب تدنية أو تخفيض قيمتها في دالة تكلفة؛ في حين تتمثل دالة الهدف المطلوب تعظيم قيمتها في دالة ربح؛ ولكي يتوافر شرط الخطية في مثل تلك المشاكل، فإن التكلفة المطلوب تخفيضها إلى أدنى حد ممكن تتمثل في: التكلفة المتغيرة، وذلك نظراً لتوافر العلاقة الخطية بين كل من: التكلفة المتغيرة، ومستوي النشاط.
- ٢) تركز القيود في مشكلات تعظيم قيمة الدالة على: الموارد المحدودة، ومن ثم فإن المتباينات المرتبطة بها غالباً ما تكون في صورة أقل من أو يساوي (\geq)؛ في حين أنه في مشكلات تدنية أو تخفيض قيمة دالة الهدف، فإن القيود تركز على: المواصفات الفنية التي يجب الوفاء بها، ومن ثم فإن المتباينات المرتبطة بها غالباً ما تكون في صورة أكبر من أو يساوي (\leq)؛ وقد تتضمن بعض المشاكل قيوداً مختلطة؛ أو بمعنى آخر فإنه في مشاكل تعظيم الأرباح، فإن معظم القيود الأساسية للطاقة أو الموارد المحدودة هي من نوعية: أصغر من أو يساوي " \geq "، ويتم تحويل هذا النوع من المتباينات إلى معادلات عن طريق إضافة متغيرات راکدة، حيث يبدأ الحل

المبدئي بإدخال هذه المتغيرات الراكدة في الأساس، وتكون قيم المتغيرات الأصلية = صفراً، بمعنى الابتداء من نقطة الصفر، ثم يتم تحسين الحل واقتراح حل آخر أفضل منه في ضوء اختبار المثالية، وذلك إلى أن يتم التوصل إلى الحل الأمثل الذي يحقق أقصى ربحية؛ وذلك في الوقت الذي نجد فيه في مشاكل تدنية أو تخفيض التكاليف، أنه عادةً ما تظهر مجموعة القيود في صورة متباينات من نوعية: أكبر من أو يساوي " \leq "، والتي يستلزم تحويلها إلى معادلات: ضرورة إضافة متغيرات راکدة بإشارة سالبة، ويكون معامل التكلفة الخاص بها = صفراً؛ غير أنه يلاحظ أنه إذا جعلنا المتغيرات الأصلية = صفراً طبقاً للقاعدة المتبعة في البرنامج المبدئي في مشاكل تعظيم الربحية، فإن قيم هذه المتغيرات الراكدة سوف تصبح سالبة، الأمر الذي يخالف شرط عدم السالبة؛ ولذلك يتم إضافة متغيرات أخرى إصطناعية بإشارة موجبة، بحيث يمكن بدء الأساس في طريقة السمبلكس بداية سليمة، كما يلاحظ أنه يجب استبعاد تلك المتغيرات الاصطناعية من المشكلة قبل أن نصل إلى الحل الأمثل؛ ولكي يمكن تحقيق ذلك، فإنه يتم ربط كل متغير من المتغيرات الاصطناعية، بمعامل تكلفة متناهي في الكبر في دالة الهدف، بحيث يرمز له بالرمز (م)، ثم يتم استبعاده للأسباب الاقتصادية، بمعنى ضرورة العمل على استبعاده من الأساس في عملية تدنية (تخفيض) التكاليف، إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الذي يؤكد عدم إحتوانه على أية تكلفة مغالى فيها، حيث أن الهدف هنا يتمثل في تخفيض أو تدنية التكاليف والوصول بها إلى أدنى حد ممكن.

٣) لا تختلف الخطوات الرئيسية لحل المشاكل التي تتضمن الوصول إلى تدنية أو تخفيض قيمة دالة الهدف باستخدام طريقة السمبلكس، عنها في المشاكل التي تتضمن تعظيم قيم دالة الهدف؛ إلا فيما يتعلق باختبار المثالية وتحديد المتغير المطلوب إدخاله لتحسين الحل، حيث يتمثل التغيير في خطوات طريقة السمبلكس في التالي:

أ - اختبار المثالية: حيث يلاحظ أن معيار التوصل إلي الحل الأمثل يتمثل في أن تكون عناصر صف (ر - ص) أكبر من أو تساوي الصفر؛ في حين أنه في مشكلات تعظيم الربحية، فإن معيار الوصول إلي الحل الأمثل يتمثل في أن تكون عناصر صف (ر - ص) أقل من أو تساوي صفر؛ ويدل وجود قيم سالبة في صف اختبار المثالية في مشكلات تخفيض أو تدنية التكاليف، على أن هناك إمكانية في تحسين الحل وإحداث خفض آخر في دالة الهدف، وبالتالي فإن ذلك يتطلب تعديل الحل، بإدخال متغيرات جديدة محل المتغيرات الأساسية الحالية، وهذا يعني أن الحل الحالي حل غير أمثل.

ب- يتم اختيار المتغير المرشح للدخول على أساس المتغير (أو العمود) الذي تكون قيمته أكبر قيمة سالبة في صف اختبار المثالية؛ أي في صف (ر - ص)، وذلك بهدف إحداث أكبر تخفيض ممكن في دالة الهدف؛ أو بمعنى آخر فإن المتغير الذي يجب أن يدخل الأساس في مشاكل تعظيم الأرباح: هو ذلك المتغير ذو أكبر قيمة موجبة، كما تظهر في صف (ر - ص)، حيث يوضح المعامل الموجب لهذا المتغير، أن إضافة وحدة واحدة منه سوف تؤدي إلي زيادة قيمة دالة الهدف؛ بينما يوضح المعامل السالب في صف التقييم النهائي أن المتغير الذي له هذا المعامل السالب، سوف تؤدي إضافة وحدة واحدة منه، إلى تخفيض قيمة دالة الهدف؛ وتتوقف طريقة السمبلكس، ونكون قد توصلنا حينئذٍ إلى الحل الأمثل عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي صفرية أو سالبة.

غير أنه في مشاكل تدنية (تخفيض) التكاليف، فإنه يتم اختيار المتغير الذي يدخل الأساس والذي تكون قيمة معاملته سالبة في صف (ر - ص)، لأن المعامل السالب يساهم في تخفيض التكاليف؛ ويتم اختيار المتغير ذي أكبر معامل سالب في صف (ر - ص) ليدخل الأساس، لأنه يساهم أكثر من غيره في تحسين دالة الهدف؛ أي يساهم في التوصل إلي أكبر تخفيض ممكن للتكاليف؛ ويتم التوصل إلي الحل الأمثل عندما تكون معاملات كل المتغيرات في صف (ر - ص): صفرية أو موجبة؛ بمعنى أن إضافة وحدة واحدة من هذه المتغيرات، لن تؤثر على التكاليف أو سوف تؤدي إلى زيادتها.

ويمكن توضيح خطوات تطبيق طريقة السمبلكس، في مشاكل تخفيض (تدنية) التكاليف، من الأمثلة التالية:

■ مثال (١):

تقوم إحدى المنشآت الصناعية بإنتاج نوعين من المنتجات س، ص، وذلك باستخدام ثلاث أنواع من الخامات: أ، ب، ج؛ ويظهر الجدول التالي احتياجات كل منتج من كل نوع من أنواع الخامات، والحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة من كل نوع من المواد الخام، وذلك كالتالي:

أدنى حد من الاحتياجات	المنتجات		الخامات
	ص	س	
٢٠	٥	٤	أ
٣٠	٣	١٢	ب
١٢	٢	٣	ج

فإذا كانت تكلفة الوحدة من المنتج س: ٣ جنيهات، ومن المنتج ص: ٢ جنيهًا.

والمطلوب: التوصل إلى الحل الأمثل الذي يعمل على تدنية أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، وذلك مستخدماً طريقة السمبلكس.

● صياغة نموذج البرمجة الخطية لتدنية التكاليف:

■ دالة الهدف:

$$\text{المطلوب تخفيض (تدنية) الدالة } T = 3س١ + ٢س٢$$

■ وذلك طبقاً للقيود التالية:

$$٢٠ \leq ٥س٢ + ٤س١$$

$$٣٠ \leq ٣س١ + ١٢س٢$$

$$١٢ \leq ٢س١ + ٣س٢$$

■ وذلك طبقاً لشرط عدم السالبة:

$$س١، س٢ \leq \text{صفر}$$

تحويل المتباينات إلى معادلات:

يتم تحويل المتباينات التي من النوع "أكبر من أو يساوي" \leq إلى معادلات؛ عن طريق إضافة متغيرات راحة بإشارة سالبة، ولها معامل تكلفة = صفر؛ ثم إضافة متغيرات اصطناعية بإشارة موجبة، ولها معامل تكلفة متناهي في الكبر (م)؛ وعادة ما تأخذ الرموز r_1, r_2, \dots, r_n لتميزها عن كل من المتغيرات الأصلية، والمتغيرات الراكدة، حيث يظهر ذلك على النحو التالي:

$$20 = 1r_1 + 1g_1 - 2s_5 + 1s_4$$

$$30 = 2r_2 + 2g_2 - 2s_3 + 1s_2$$

$$12 = 3r_3 + 2g_3 - 2s_2 + 1s_3$$

جدول الحل المبدئي:

يظهر جدول السمبلكس الأول كالتالي:

ت و	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	٣	٢	صفر	صفر	صفر
م	٢٠	١ ر	٤	٥	٢غ	١غ	٢غ
م	٣٠	٢ ر	١٢	٣	١ -	صفر	صفر
م	١٢	٣ ر	٣	٢	١ -	صفر	صفر
اختبار المثالية	٦٢ م						
ص و			١٩ م	١٠ م	م -	م -	م -
ت و - ص و			١٩ - ٣ م	١٠ - ٢ م	م	م	م

قواعد إعداد جداول السمبلكس:

يوضح الجدول المبين أعلاه (الحل المبدئي): أنه يحقق تكلفة مغالي فيها تبلغ (٦٢م)، كما يتبين من قيم معاملات المتغيرات في صف (٣ ر - ص و)، أنها معاملات سالبة، وهذا يعني أن الحل السابق لا يمثل الحل الأمثل، ومن ثم فلا بد من تحسين الحل، بالانتقال إلى حل آخر أفضل منه على النحو التالي:

١- يظهر تحت عمود المتغير s_1 أكبر قيمة سالبة في صف (٣ ر - ص و)، وعلى ذلك فإن عمود s_1 يعتبر هو عمود المفتاح.

٢- يتم اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل س_١ محله وذلك

على النحو التالي:

$$\text{صف } ١ = ٢٠ \div ٤ = ٥$$

$$\text{صف } ٢ = ٣٠ \div ١٢ = ٢.٥ \text{ (وهي هنا تمثل أصغر قيمة موجبة)}$$

$$\text{صف } ٣ = ١٢ \div ٣ = ٤$$

وعلى ذلك فإن صف ٢ يعتبر هو صف المفتاح، لأنه يمثل أصغر قيمة

موجبة.

٣- رقم المفتاح هو (١٢)

٤- تعديل الصفوف:

أولاً: تعديل صف المفتاح وذلك عن طريق: قسمة الأرقام الظاهرة فيه

÷ رقم المفتاح ١٢ ، حيث يظهر ذلك على النحو التالي:

$$\left[\begin{array}{ccc} ١ & ٥ & ١ \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \text{ صفر}$$

ثانياً: تعديل صف ١ وفقاً للقاعدة السابق توضيحها (في نموذج

البرمجة حالة تعظيم الربحية) مع ملاحظة أن المعدل الثابت =

القاعدة التي تتبع في تعديل الصفوف الأخرى، تقوم على الأساس التالي: 3

الرقم الجديد = الرقم في الصف القديم - ((الرقم المناظر في صف المفتاح) × المعدل

[ثابت]

حيث أن: المعدل الثابت =

رقم المفتاح

$$٢٠ - ٣٠ \times \frac{1}{3} = ١٠$$

$$٤ - ١٢ \times \frac{1}{3} = \text{صفر}$$

$$٥ - ٣ \times \frac{1}{3} = ٤$$

$$١ - \text{صفر} \times \frac{1}{3} = ١$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times (1-) - \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{3} \times \text{صفر} - \text{صفر}$$

ثالثاً: تعديل صف r_3 مع ملاحظة أن المعدل الثابت $= \frac{1}{4}$

$$\frac{18}{4} = \frac{1}{4} \times 30 - 12$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{4} \times 12 - 3$$

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{4} \times 3 - 2$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{4} \times \text{صفر} - \text{صفر}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times (1-) - \text{صفر}$$

$$1- = \frac{1}{4} \times \text{صفر} - 1-$$

ومن ثم فإن جدول السمبلكس الثاني سيظهر على النحو التالي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س _١	٢ س _٢	صفر غ _١	صفر غ _٢	صفر غ _٣
م	ر	١٠	صفر	٤	١-	$\frac{1}{3}$	صفر
٣	س _١	$\frac{5}{2}$	١	$\frac{1}{4}$	صفر	$\frac{1}{12}$	صفر
م	ر	$\frac{18}{4}$	صفر	$\frac{5}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$	١-
		اختبار المثالية ص و $\frac{29}{2} + \frac{15}{2}$ م	٣	$\frac{21}{4} + \frac{3}{4}$ م	م-	$\frac{7}{12} + \frac{1-}{4}$ م	م-
ت و - ص و			صفر	$\frac{21}{4} - \frac{5}{4}$ م	م	$\frac{7}{12} - \frac{1}{4}$ م	م

هذا وقد تم حساب أدنى تكلفة [صف ص₃] كالتالي:

$$1- \text{أدنى تكلفة} = 10م + \frac{15}{2}م + \frac{18}{4}م = \frac{29}{2}م$$

هذا وقد تم حساب الأرقام الظاهرة في صف (ت - ص₃) كالتالي:

$$1- \text{عمود س}_1 = 3 - (م \times \text{صفر} + 1 \times 3 + م \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$2- \text{عمود س}_2 = 2 - (م \times \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + م \times \frac{7}{12} - \frac{1}{4}) = \frac{21}{4}م - \frac{5}{4}$$

$$3- \text{عمود غ}_1 = \text{صفر} - (م - م + \text{صفر} + \text{صفر}) = م$$

$$4- \text{عمود غ}_2 = \text{صفر} - (م \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - م \times \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}م - \frac{1}{4}$$

$$5- \text{عمود غ}_3 = \text{صفر} - (\text{صفر} + \text{صفر} - م) = م$$

■ تحسين الحل:

1- يلاحظ أن عمود س₂ يمثل عمود المفتاح، وذلك نظراً لأن له أكبر

قيمة سالبة تساهم في تخفيض التكاليف.

2- يتم اختبار الصفوف بهدف تحديد المتغير الخارج، والذي يحل س₂

محلّه كالتالي:

$$\text{صف ر}_1 = 10 \div 4 = \frac{5}{2} \text{ (وهي تمثل هنا أصغر قيمة موجبة)}$$

$$\text{صف س}_1 = 10 = \frac{1}{4} \div \frac{5}{2}$$

$$\text{صف ر}_2 = \frac{18}{5} = \frac{5}{4} \div \frac{18}{4}$$

ومن ثم فإن صف ر₁ يمثل صف المفتاح، لأن له أصغر قيمة موجبة.

3- رقم المفتاح هو (4)

4- تعديل الصفوف:

أ. تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ 4 ، حيث يظهر

على النحو التالي:

$$\frac{5}{2} \text{ صفر} \quad 1 \quad \frac{1}{4} - \quad \frac{1}{12} \text{ صفر}$$

ب. تعديل الصفوف:

تعديل صف س₁ مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{1}{16}$

$$\frac{30}{16} = \frac{1}{16} \times 10 - \frac{5}{2}$$

$$1 - \text{صفر} = \frac{1}{16} \times \text{صفر}$$

$$\frac{1}{4} - \text{صفر} = \frac{1}{16} \times \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \times (-1)$$

$$\frac{5}{48} - \text{صفر} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} = \frac{1}{16} \times \text{صفر}$$

تعديل صف ر₃ مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{5}{16}$

$$\frac{22}{16} = \frac{5}{16} \times 10 - \frac{18}{4}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} = \frac{5}{16} \times \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = \frac{5}{16} \times 4 - \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{16} = \frac{5}{16} \times (-1) - \text{صفر}$$

$$\frac{7}{48} = \frac{5}{16} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \text{صفر} = \frac{5}{16} \times \text{صفر}$$

ويظهر جدول السمبلكس الثالث كالتالي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س _١	٢ س _٢	صفر غ _١	صفر غ _٢	صفر غ _٣
٢	س _٢	$\frac{5}{2}$	صفر	١	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	صفر
٣	س _١	$\frac{30}{16}$	١	صفر	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{48}$	صفر
م	س _٣	$\frac{22}{16}$	صفر	صفر	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{48}$	١
اختبار المثالية ص و		$\frac{22}{16} + \frac{170}{16}$	٣	٢	$\frac{5}{16} + \frac{5}{16}$	$\frac{7}{48} + \frac{23}{48}$	م -
ت و - ص و			صفر	صفر	$\frac{5}{16} - \frac{5}{16}$	$\frac{7}{48} - \frac{23}{48}$	م

وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالتالي:

$$\text{أدنى تكلفة} = \left(\frac{22}{16} + \frac{170}{16} \right) = \left(\frac{22}{16} + 3 \times \frac{30}{16} + 2 \times \frac{5}{2} \right) = \frac{22}{16} + \frac{170}{16}$$

وقد تم حساب أرقام صف (ت و - ص و) كالتالي:

- ١- عمود س_١ = ٣ - (٢ × صفر + ١ × ٣ + م × صفر) = صفر
- ٢- عمود س_٢ = ٢ - (١ × ٢ + ٣ × صفر + م × صفر) = صفر
- ٣- عمود غ_١ = صفر - (٢ × $\frac{1}{4}$ + ٣ × $\frac{1}{16}$ + م × $\frac{5}{16}$) = $\frac{5}{16} - \frac{5}{16}$
- ٤- عمود غ_٢ = صفر - (٢ × $\frac{1}{12}$ + ٣ × $\left(\frac{5}{48}\right)$ + م × $\frac{7}{48}$) = $\frac{7}{48} - \frac{23}{48}$
- ٥- عمود غ_٣ = صفر - (٢ × صفر + ٣ × صفر + م × ١) = م

■ تحسين الحل:

يتبين من معاملات المتغيرات كما تظهر في صف التقييم النهائي أنه ما زال هناك معاملات سالبة يمكن أن تساهم في تخفيض التكاليف، ويتحدد اقتراح حل آخر أفضل من السابق كالتالي:

- ١- عمود س_٣ هو عمود المفتاح؛ حيث أن له أكبر قيمة سالبة.
٢- اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل س_٣ محله يتم على

النحو التالي:

$$\text{صف س}_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} = -10$$

$$\text{صف س}_1 = \frac{1}{16} \div \frac{30}{16} = 30$$

$$\text{صف س}_3 = \frac{22}{5} = \frac{5}{16} \div \frac{22}{16} \text{ (وهي تمثل أصغر قيمة موجبة).}$$

وبذلك يكون صف س_٣ هو صف المفتاح، حيث أنه ذو أصغر قيمة موجبة.

$$\text{٣- رقم المفتاح هو } \frac{5}{16}$$

٤- تعديل الصفوف

أ - تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيه على رقم المفتاح:

$$\frac{22}{5} \quad \text{صفر} \quad \text{صفر} \quad 1 \quad \frac{7}{15} \quad - \quad \frac{16}{5}$$

ب- تعديل الصفوف:

$$\text{تعديل صف س}_2 \text{ مع ملاحظة أن المعدل الثابت} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{18}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{22}{16} - \frac{5}{2}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} \times \frac{4}{5} = \text{صفر}$$

$$1 - \text{صفر} \times \frac{4}{5} = 1$$

$$\text{صفر} = \frac{4}{5} - \frac{5}{16} \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{5} - \times \frac{7}{48} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{4}{5} - = \frac{4}{5} - \times (1 -) - \text{صفر}$$

تعديل صف س₁ مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{1}{5}$

$$\frac{8}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{22}{16} - \frac{30}{16}$$

$$1 - = \frac{1}{5} \times \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - = \frac{1}{5} \times \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{16} - \frac{1}{16}$$

$$\frac{4}{15} - = \frac{1}{5} \times \frac{7}{48} - \frac{5}{48}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times (1 -) - \text{صفر}$$

ويظهر جدول السمبلكس الرابع كالتالي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س _١	٢ س _٢	صفر غ _١	صفر غ _٢	صفر غ _٣
٢	س _٢	$\frac{8}{15}$	صفر	١	صفر	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
٣	س _١	$\frac{8}{5}$	١	صفر	صفر	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
صفر	س _٣	$\frac{22}{5}$	صفر	صفر	١	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{5}$
اختبار المثالية ص و ١٢							
ت و - ص و							
			صفر	صفر	صفر	صفر	١ -
			صفر	صفر	صفر	صفر	١

وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالتالي:

$$12 = \text{أدنى تكلفة} = \left(2 \times \frac{18}{5} + 3 \times \frac{8}{5} + \text{صفر} \times \frac{22}{5} \right)$$

وقد تم حساب أرقام صف (ت - ص) كالتالي:

$$1 - \text{عمود س}_1 = 3 - (2 \times \text{صفر} + 1 \times 3 + \text{صفر} \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$2 - \text{عمود س}_2 = 2 - (1 \times 2 + 3 \times \text{صفر} + \text{صفر} \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$3 - \text{عمود غ}_1 = \text{صفر} - (2 \times \text{صفر} + 3 \times \text{صفر} + 1 \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$4 - \text{عمود غ}_2 = \text{صفر} - \left(2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \left(\frac{2-}{15} \right) + \text{صفر} \times \frac{7}{15} \right) = \text{صفر}$$

$$5 - \text{عمود غ}_3 = \text{صفر} - \left(2 \times \left(\frac{4-}{5} \right) + 3 \times \frac{1}{5} + \text{صفر} \times \left(\frac{16-}{5} \right) \right) = 1$$

■ تفسير الحل الأمثل:

يتبين من قيم معاملات المتغيرات والظاهرة في صف (ت - ص) في جدول السمبلكس الرابع، أنها أصبحت كلها إما قيماً موجبة أو صفرية، ولا توجد أية قيم سالبة، ومن ثم فإنه لا توجد هناك أية إمكانية لتخفيض التكاليف إلى أكثر من ذلك؛ ونلاحظ هنا أن أية محاولة لتعديل الحل بإضافة وحدة من أحد المتغيرات، لن يؤثر على التكاليف - بالنسبة للمعاملات الصفرية - بل قد يؤدي إلى زيادة التكاليف - بالنسبة للمعاملات الموجبة، وعلى ذلك فإن جدول السمبلكس الرابع يعتبر بمثابة الحل الأمثل للمشكلة؛ والذي يتحدد كالتالي:

$$\text{س}_1 = \frac{8}{5} \text{ وحدة}$$

$$\text{س}_2 = \frac{18}{5} \text{ وحدة}$$

$$\text{غ}_1 = \frac{22}{5}$$

$$\text{غ}_2 = \text{صفر}$$

$$\text{غ}_3 = \text{صفر}$$

كما أن أدنى تكلفة للإنتاج هي: ١٢ جنيهاً.
ويكون مقدار الخامات الداخلة في وحدة المنتج كالتالي:

$$\frac{122}{5} = 5 \times \frac{18}{5} + 4 \times \frac{8}{5} = \text{المادة الخام أ}$$

والمغير الراكد غ ، يمثل زيادة المادة الخام أ عن الحد الأدنى المقرر

$$\frac{22}{5} = 20 - \frac{122}{5} =$$

$$30 = \frac{150}{5} = \frac{54}{5} + \frac{96}{5} = 3 \times \frac{18}{5} + 12 \times \frac{8}{5} = \text{المادة الخام ب}$$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

$$12 = \frac{60}{5} = \frac{36}{5} + \frac{24}{5} = 2 \times \frac{18}{5} + 3 \times \frac{8}{5} = \text{المادة الخام ج}$$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

■ مثال (٢):

تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتجاً مُكوَّناً من خلط ثلاثة أنواع من المواد الخام هي: أ، ب، ج؛ وقد ورد للمنشأة طلب من أحد عملائها، بتوريد ١٠,٠٠٠ وحدة من هذا المنتج وفقاً للشروط التالية:

- ١- ألا يزيد المستخدم من المادة الخام أ عن ٣٠٠٠ كيلو.
 - ٢- وجوب استخدام ١٥٠٠ كيلو على الأقل من المادة الخام ب.
 - ٣- وجوب استخدام ٢٠٠٠ كيلو على الأقل من المادة الخام ج.
- هذا، وتبلغ تكلفة الكيلو من المادة الخام أ: ٨ جنيهاً، ومن المادة الخام ب: ١٠ جنيهاً، ومن المادة الخام ج: ١١ جنيهاً.

والمطلوب: تحديد الكمية المثلى من كل مادة خام، والتي تؤدي إلى تدنية

(تخفيض) التكلفة إلى أدنى حد ممكن.

يلاحظ هنا أنه يمكن حل هذه المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس وفقاً

للخطوات التالية:

■ صياغة المشكلة:

يمكن صياغة هذه المشكلة على النحو التالي:

المطلوب تدنية (تخفيض) الدالة التالية:

$$د (ت) = ٨ س١ + ١٠ س٢ + ١١ س٣$$

في ظل القيود التالية:

$$\begin{aligned}
 10,000 &= 3س + 2س + 1س \\
 3000 &\geq 1س \\
 1500 &\leq 2س \\
 2000 &\leq 3س \\
 \text{صفر} &\leq 1س, 2س, 3س
 \end{aligned}$$

حيث:

- 1س: تمثل عدد الوحدات (الكيلو جرامات) من المادة الخام أ.
 2س: تمثل عدد الوحدات (الكيلو جرامات) من المادة الخام ب.
 3س: تمثل عدد الوحدات (الكيلو جرامات) من المادة الخام ج.
 ويُقصد بالمتباينة الأولى $1س \geq 3000$: أنه يمكن استخدام كميات تساوى أو تقل عن 3000 كيلو من المادة الخام أ؛
 أما المتباينة الثانية والثالثة فتعنيان: أنه يجب استخدام كميات تزيد عن 1500 كيلو، 2000 كيلو من المادتين: ب، ج، على التوالي؛ كما يجب ألا تقل الكميات المستخدمة من هاتين المادتين عن:
 1500، 2000 كيلو على التوالي.

■ تحويل المتباينات إلى معادلات:

سبق وأن بينا في مشكلات تعظيم الأرباح، أننا يجب نبدأ بحل مبدي يتضمن عدم إنتاج أية منتجات، مما يترتب عليه عدم تحقيق أية أرباح، وكذلك الحال أيضاً في مشكلات تدنية التكاليف: فإننا نبدأ أيضاً بحل مبدي يتضمن تحقيق تكلفة كبيرة جداً؛ ونحاول في المراحل التالية: أن نعمل على تحسين الحل، من خلال تخفيض التكلفة؛ إلى أن نصل إلى الحل الأمثل، والذي يتضمن أدنى تكلفة ممكنة.

فإذا أخذنا القيد الثاني $1س \geq 3000$ ؛ فإننا يجب أن نضيف متغير راكد غ₁ ؛ حيث أن $1س$ في الحل الأمثل سيأخذ قيمة تساوى أو أقل من 3000 ؛ ولذلك فإن المتغير الراكد سيأخذ قيمة تساوى الفرق بين 3000 والقيمة التي تأخذها $1س$ في الحل الأمثل؛ وعلى ذلك فإن هذا القيد يصبح بعد تحويله إلى معادلة، على النحو التالي:

$$3000 = 1س + غ_1$$

وفي الحل المبدئي فإن س_١ = صفر، غ_١ = ٣٠٠٠
وبالنسبة للقيد الأول:

$$١٠,٠٠٠ = س٣ + س٢ + س١$$

فإننا نلاحظ أنه في الحل المبدئي إذا كانت س_١، س_٢، س_٣ = صفر، فإننا يجب أن نضيف متغير إصطناعي ي_١، ويأخذ في الحل المبدئي قيمة تساوي قيمة الطرف الأيسر وهو ١٠,٠٠٠

ويرتبط المتغير الإصطناعي، بمعامل في دالة الهدف تكون له قيمة كبيرة جدا (يرمز لها بالرمز م)، وذلك لكي نضمن عدم ظهور هذا المتغير في الحل الأمثل، وعلى ذلك يصبح القيد الأول:

$$١٠,٠٠٠ = س١ + س٢ + س٣ + ي١$$

كذلك فإذا أخذنا القيدين: الثالث والرابع، فإنه يمكن تحويلهما إلى معادلات

على النحو التالي:

$$١٥٠٠ = س٢ - غ٢$$

$$٢٠٠٠ = س٣ - غ٣$$

ويمثل المتغير الراكد غ_٢: القيمة التي يمكن أن يزيد بها س_٢ عن ١٥٠٠؛ فعلى سبيل المثال إذا أخذت س_٢ قيمة تساوي ٥٠٠٠؛ فإن غ_٢ = ٣٥٠٠؛ وينطبق ذلك أيضا بالنسبة للمتغير الراكد غ_٣؛ أما إذا أخذت س_٢ أو س_٣ في الحل الأمثل قيمة تساوي الطرف الأيسر: فإن غ_٢، غ_٣ في الحل الأمثل، ستأخذ قيمة تساوي صفر.

وإذا أخذت س_٢، س_٣ قيمة تساوي صفر في الحل المبدئي: فإن غ_٢ = -١٥٠٠، غ_٣ = -٢٠٠٠، وهذه القيم تتنافى مع شرط عدم السالبية، ولذلك ولكي لا تظهر تلك المتغيرات في الحل المبدئي، فإننا نقوم بإضافة متغيرات إصطناعية تأخذ في الحل المبدئي قيمة تساوي الطرف الأيسر من المتباينات، وترتبط بمعامل تكلفة كبير جداً في دالة الهدف، حتى نضمن عدم ظهور تلك المتغيرات في الحل الأمثل؛ وإذا أضفنا المتغيرات الإصطناعية ي_٢، ي_٣ تصبح هذه القيود على النحو التالي:

$$١٥٠٠ = س٢ + ي٢ - غ٢$$

$$٢٠٠٠ = س٣ + ي٣ - غ٣$$

وفي الحل المبدئي: فإن س_٢، غ_٢، س_٣، غ_٣ = صفر، وبالتالي فإن:

$$١٥٠٠ = ٢٢٢$$

$$٢٠٠٠ = ٣٣٣$$

وبعد تحويل المتباينات إلى معادلات يصبح النموذج السابق، كما يلي:

المطلوب تدنية الدالة التالية:

$$د (ت) = ١س٨ + ٢س١٠ + ٣س١١ + ١صفرغ١ + ٢صفرغ٢ + ٣صفرغ٣ + م$$

$$٢٢٢ + م + ٣٣٣$$

وذلك، في ظل القيود التالية:

$$١س + ٢س + ٣س + ١صفرغ١ + ٢صفرغ٢ + ٣صفرغ٣$$

$$+ ١٠ + ٢٠ + ٣٠ = ١٠٠٠٠$$

$$١س + ٢س + ٣س + ١صفرغ١ + ٢صفرغ٢ + ٣صفرغ٣$$

$$+ ١صفر١ + ٢صفر٢ + ٣صفر٣ = ٣٠٠٠$$

$$٢صفرس١ + ٣صفرس٢ + ١صفرغ١ - ٢صفرغ٢ + ٣صفرغ٣$$

$$+ ١صفر١ + ٢صفر٢ + ٣صفر٣ = ١٥٠٠$$

$$٢صفرس١ + ٣صفرس٢ + ١صفرغ١ + ٢صفرغ٢ - ٣صفرغ٣$$

$$+ ١صفر١ + ٢صفر٢ + ٣صفر٣ = ٢٠٠٠$$

$$١س، ٢س، ٣س، ١غ، ٢غ، ٣غ، ١صفر، ٢صفر، ٣صفر ≤$$

ويلاحظ في هذا النموذج أن المتغيرات الراكدة ترتبط بمعامل = صفر في

دالة الهدف، أما المتغيرات الإصطناعية فإنها ترتبط بمعامل = م في دالة الهدف.

■ إعداد الجدول الأول:

ويمثل الجدول الأول الحل المبدئي، ونلاحظ هنا أنه وفقاً لهذا الحل: فإن

متغيرات القرار س_١، س_٢، س_٣ = صفر، كذلك المتغيرات الراكدة ذات الإشارة

السالبة غ_٢، غ_٣ = صفر؛ أما المتغيرات التي تأخذ قيمة موجبة في الحل الأول

فهي: المتغيرات الراكدة ذات الإشارة الموجبة (غ_١ = ٣٠٠٠) والمتغيرات

الإصطناعية $y_1 = 10,000$ ، $y_2 = 15,000$ ، $y_3 = 20,000$ وعلى ذلك فإن الحل المبدئي الأول يتمثل في:

$y_1 = 10,000$ ، $y_2 = 3,000$ ، $y_3 = 15,000$ ، $y_4 = 20,000$ ويظهر الجدول الأول على النحو التالي:

ت _و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٨	١٠	١١	صفر	صفر	صفر
م	١ _ي	١٠,٠٠٠	١	١	١	صفر	صفر	صفر
صفر	١ _غ	٣,٠٠٠	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر
م	٢ _ي	١٥,٠٠٠	صفر	١	صفر	صفر	١-	صفر
م	٣ _ي	٢٠,٠٠٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١-
اختبار المثالية		١٣٥٠٠ م	م	٢- م	٢ م	صفر	م -	م -
ت _و - ص _و			٨- م	١٠- م	١١- م	صفر	م	م

ويتم إعداد الجدول الأول بنفس طريقة إعداد الجدول الأول للسيمبلكس في حالة تعظيم الأرباح.

■ اختبار المثالية:

نلاحظ هنا أنه في حالة وجود قيم سالبة في صف (ت_و - ص_و): فإن ذلك يعني إمكانية تخفيض التكاليف عن طريق إدخال متغيرات جديدة؛ ولذلك فإن الحل في هذه الحالة لا يمثل الحل الأمثل؛ أما إذا كانت عناصر صف (ت_و - ص_و) = صفراً، أو موجبة: فإن ذلك يعني عدم وجود إمكانية لتحسين الحل؛ وأن تغيير الحل إما أن يؤدي إلى عدم حدوث أي تغيير في التكلفة (في حالة وجود رقم الصفر في صف) (ت_و - ص_و)؛ أو أن يؤدي إلى زيادة التكلفة (في حالة وجود قيم موجبة في هذا الصف)، وعلى ذلك فإنه في حالة وجود عناصر = صفراً أو عناصر ذات قيم موجبة في صف (ت_و - ص_و): فإن الحل في هذه الحالة يمثل الحل الأمثل.

وبناء على ذلك، فإن الحل وفقاً للجدول الأول: لا يمثل الحل الأمثل، بسبب وجود قيم سالبة في صف (ت_و - ص_و)؛ ومن ثم فإنه يجب تغيير الحل عن

طريق: إدخال متغيرات جديدة؛ ويتطلب ذلك اختيار المتغير المرشح للدخول في الحل (العمود الرئيس) واختيار المتغير الذى يتعين إخراجة من الحل (الصف الرئيس).

■ تحسين الحل وإيجاد حل آخر أفضل:

يتم تحسين الحل وإيجاد حل آخر أفضل وفقاً للخطوات التالية:

١- تحديد المتغير المرشح للدخول في الحل (العمود الرئيس): يلاحظ أنه نظراً لأن الهدف هنا يتمثل في تخفيض التكاليف: لذلك فإنه يتم اختيار العمود الرئيس على أساس العمود الذي يكون له أكبر قيمة سالبة في صف (ت_١ - ص_١)؛ و يعني ذلك ضرورة اختيار المتغير الذي يؤدي إلى أكبر تخفيض في التكاليف؛ ومن ثم فإننا نجد أن العمود الذي له أكبر قيمة سالبة هو: عمود س_٢؛ ولذلك فإن العمود الرئيس يعتبر هو عمود س_٢، أي أن المتغير الداخلى في الحل الجديد هو س_٢

٢- تحديد المتغير الذى يجب استبعاده من الحل الحالى (الصف الرئيس): وذلك بقسمة عناصر عمود قيم متغيرات الحل ÷ العناصر المقابلة لها في العمود الرئيس؛ ويتم اختيار الصف ذى أصغر قيمة موجبة، ويتضح ذلك مما يلي:

$$\begin{array}{rcl} \text{صف } ١ & = & \frac{١٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} \\ \text{صف } ١ \text{ غ} & = & \frac{٣٠٠٠}{\text{صفر}} \\ \text{صف } ٢ & = & \frac{١٥٠٠}{١} \\ \text{صف } ٣ & = & \frac{٢٠٠٠}{\text{صفر}} \end{array}$$

وبناء على النتائج السابقة؛ فإننا نختار صف ١ ذى أصغر قيمة موجبة كصف رئيس، كما يعتبر المتغير س_٢ هو المتغير المستبعد (أو الخارج من الجدول).

٣- تحديد أو حساب القيم الجديدة لصف س_٢ الجديد: وذلك عن طريق: قسمة عناصر الصف المستبعد ÷ عنصر المفتاح؛ ونظراً لأن عنصر المفتاح = (١)، لذلك فإن العناصر ستبقى كما هي؛ ولكن على أن يحل المتغير س_٢ بدلاً من

المتغير y_1 في عمود متغيرات الحل؛ كما يحل معامل s_2 في دالة الهدف (١٠)

في عمود t_1 ، بدلاً من معامل y_1 (م)

٤- حساب القيم الجديدة للصفوف الأخرى: وذلك باستخدام المعادلة التي سبق توضيحها في حالة تعظيم الربحية (راجع صفحة ٨٧).

على أن نستمر في نفس الخطوات، بنفس المنهجية التي سبق وأن بينها في نموذج البرمجة الخطية (تعظيم ربحية)، ولكن آخذين في الاعتبار الفروق القائمة بين نموذج البرمجة (تدنية أو تخفيض تكاليف) وبين نموذج البرمجة (تعظيم ربحية)، وذلك إلى أن نصل إلى الجدول الخامس، والذي يمثل الحل الأمثل لهذه المشكلة:

ت _١	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٨	١٠	١١	صفر	صفر	صفر
			س _١	س _٢	س _٣	غ _١	غ _٢	غ _٣
صفر	غ _٢	٣٥٠٠	صفر	صفر	صفر	١-	١	١
٨	س _١	٣٠٠٠	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر
١٠	س _٢	٥٠٠٠	صفر	١	صفر	١-	صفر	١
١١	س _٣	٢٠٠٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١-
اختبار المثالية								
ص _١		٩٦,٠٠٠	٨	١٠	١١	٢-	صفر	١-
ت _١ - ص _١			صفر	صفر	صفر	٢+	صفر	١+

الجدول الخامس

ويلاحظ من الجدول الخامس عدم وجود أية قيم سالبة في صف (ت_١ - ص_١)، ويعنى ذلك عدم وجود أية إمكانية أخرى لتخفيض التكاليف، الأمر الذي يعنى أن الحل وفقاً لهذا الجدول، يتضمن تحقيق أدنى تكلفة ممكنة، أى أن الحل وفقاً للجدول الخامس يمثل الحل الأمثل؛ والذي يتمثل في:

$$س_١ = ٣٠٠٠$$

$$س_٢ = ٥٠٠٠$$

$$س_٣ = ٢٠٠٠$$

الفصل السادس

المشكلة الثنائية (المشكلة المقابلة)

في البرمجة الخطية

(Dual Problem)

تعتبر نظرية الثنائية أو المقابلة، واحدة من أكثر المفاهيم أهمية في البرمجة الخطية، حيث يلاحظ أن الفكرة الرئيسية وراء نظرية الثنائية تكمن في أن: كل مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية لها برنامج خطي يصحبها يطلق عليه: "ثنائيتها، أو المشكلة الثنائية، أو المشكلة المقابلة"؛ بمعنى أن حل البرنامج الخطي الأصلي، يتيح أو يوفر لنا حلاً للبرنامج الخطي الثنائي أيضاً، الأمر الذي يعني أنه عندما يتم حل مشكلة خطية بطريقة السمبلكس، فإننا نكون قد توصلنا إلى حل اثنتين من مشاكل البرمجة الخطية (حل للمشكلة الأصلية – والتي قد تكون تعظيم ربحية أو تدنية تكاليف – وحل للمشكلة المقابلة أو الثنائية – وهي تدنية التكاليف: إذا كانت المشكلة الأصلية هي مشكلة تعظيم؛ أو أنها تعظيم ربحية: وذلك إذا كانت المشكلة الأصلية هي مشكلة تدنية تكاليف.

بكلمات أخرى، فإنه إذا كان أمامنا مشكلة برمجة خطية تهدف إلى تعظيم الربحية، فإن هذه المشكلة يطلق عليها: "النموذج الأصلي"، ويصحب هذه المشكلة دائماً مشكلة أخرى تهدف إلى تدنية التكاليف، يطلق عليها: "النموذج الثنائي"؛ أما إذا كان أمامنا مشكلة برمجة خطية تهدف إلى تدنية التكاليف، فإن هذه المشكلة يطلق عليها: "النموذج الأصلي"، ويصحب هذه المشكلة دائماً مشكلة أخرى تهدف إلى تعظيم الربحية يطلق عليها: "النموذج الثنائي".

هذا، وتجدر الإشارة إلى أنه من الأمور المنطقية، أن ترتبط الأرباح بالتكاليف: ذلك أن الأرباح – وكما هو معلوم إنما تمثل الفرق بين الإيرادات والتكاليف؛ وأنه كلما انخفضت التكاليف زادت الأرباح – الأمر الذي يعني أن

هناك دائماً علاقة ارتباط بين المخرجات والمدخلات، حيث نجد في مشاكل تعظيم الربحية، أن الاهتمام يتركز أو ينصب على اختيار مزيج الإنتاج الأمثل (أي المخرجات)، بينما نجد في مشاكل تدنية التكاليف، أن الاهتمام ينصب على تخفيض التكاليف عن طريق حساب تكلفة الموارد أو تكلفة الطاقة أو حساب أسعار الظل (أي المدخلات).

ويمكننا أن نفسر المشكلة الثنائية من وجهة الاقتصادية، بأنه إذا كان النموذج الأصلي يهدف إلى تعظيم الربحية، في ضوء مجموعة من الموارد المحدودة أو المدخلات؛ فإننا نلاحظ في الوقت نفسه، أنه لا يمكن تحقيق الأرباح بدون تلك المدخلات؛ وهو الأمر الذي يعني وجوب أن نأخذ في الاعتبار عند حساب الأرباح المحققة: تكلفة الموارد المحدودة التي ساهمت في تحقيق الأرباح، وهو الأمر الذي يستلزم ضرورة حساب سعر ظل كل مورد من الموارد، للتأكد من أن مجموعة أسعار ظل الموارد لا تزيد عن إجمالي الأرباح المحققة.

ومن هنا، فإنه يمكن تفسير الحل الثنائي الأمثل علي أنه السعر الذي يتم دفعه ثمناً للموارد المقيدة، ومن ثم فإن قيمة دالة الهدف لكل من النموذجين: الأصلي والثنائي دائماً ما نجدهما متساويين؛ وتفيد هذه العلاقة في: التعرف علي خصائص الحل الأمثل للنموذج الخطي؛ وفي اختبار حساسية الحل الأمثل، أو في التأكد من أن الحل الممكن للمشكلة يعتبر حلاً أمثلاً.

هذا، ويمكن صياغة النموذج الثنائي، من نموذج البرمجة الخطية الأصلي، وكذلك العكس بالعكس؛ وذلك من خلال مراعاة المحاور الآتية:

١. إذا كانت المشكلة الأصلية القائمة لدينا، تهدف إلى تعظيم دالة هدف ربحية؛ فإن النموذج المقابل أو الثنائي له، يهدف إلى تدنية دالة تكاليف؛ والعكس بالعكس صحيح.

٢. يتم أخذ قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الأصلي، لتصبح: معاملات دالة هدف النموذج الثنائي؛ كما يتم أخذ معاملات دالة هدف النموذج الأصلي، لتصبح: قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الثنائي.

٣. يلاحظ أن عدد قيود النموذج الثنائي = عدد متغيرات النموذج الأصلي؛ الأمر الذي يعني أن كل متغير من متغيرات النموذج الأصلي، يقابله قيد في النموذج الثنائي.
٤. يتم استخدام متغيرات جديدة في النموذج الثنائي، بحيث يتم استخدام متغير في النموذج الثنائي مقابل كل قيد من قيود النموذج الأصلي؛ فإذا كان كل قيد في النموذج الأصلي يرتبط بمتغير راكد، فإن ذلك يعني أن كل متغير راكد في النموذج الأصلي يرتبط بمتغير من المتغيرات الجديدة في النموذج الثنائي.
٥. يلاحظ أنه إذا كان عدد المتغيرات في النموذج الأصلي = (ن) ، وعدد القيود = (ق)؛ فإن النموذج الثنائي يجب أن يشتمل على عدد من المتغيرات قدره (ق)، وكذلك على عدد من القيود قدره (ن)؛ وذلك مع ضرورة مراعاة أن شرط عدم السالبية لا يعتبر قيد يدخل ضمن العدد (ق)، بمعنى أننا حينما نطبق هذه القاعدة فإننا لا نأخذ شرط عدم السالبية في الاعتبار كأحد قيود النموذج الأصلي.
٦. يلاحظ بالنسبة لمعاملات القيود الأصلية، والتي تظهر أمامنا بدءاً من اليمين إلى اليسار؛ هي نفسها في النموذج الثنائي؛ ولكن بعد تحويلها: بجعل الصفوف أعمدة، والأعمدة صفوف.
٧. يجب مراعاة أنه إذا كانت إشارة قيود النموذج الأصلي في صورة \geq : فإن إشارة النموذج الثنائي له يتم عكسها لتصبح \leq ؛ والعكس بالعكس. غير أنه يجب ملاحظة أن هذا الأمر لا ينطبق على شرط عدم السالبية، حيث أنه من الواجب دائماً في مشاكل البرمجة الخطية بنوعها (التعظيم، والتدنية) أن تكون كافة متغيرات النموذجين: الأصلي، والثنائي، محققة لشرط عدم السالبية، بمعنى أن تكون \geq الصفر.
٨. ومن جهة أخرى، فإنه يجب مراعاة أن القيمة المثلى لدالة الهدف في النموذج الأصلي = القيمة المثلى لدالة الهدف في النموذج الثنائي.

وبكلمات موجزة، فإن أهم القواعد الواجب إتباعها لإعداد النموذج

الثنائي (أو المقابل)، تتلخص في:

يتم تكوين صياغة النموذج الثنائي من واقع صياغة النموذج الأصلي، حيث تتكون صياغة النموذج الثنائي من:

١- دالة الهدف. ٢- القيود. ٣- شرط عدم السالبية.

١- دالة الهدف:

- إذا كان النموذج الأصلي تعظيم: يصبح النموذج الثنائي تدنية والعكس بالعكس صحيح.

- متغيرات النموذج الثنائي يرمز لها بالرمز "ص"؛ كما أن عدد متغيرات النموذج الثنائي = عدد قيود النموذج الأصلي.

- معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي هي نفسها قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الأصلي.

٢- القيود:

- عدد قيود النموذج الثنائي = عدد متغيرات النموذج الأصلي.

- إشارات قيود النموذج الثنائي: تكون عكس إشارات قيود النموذج الأصلي:

فإذا كانت الإشارة \geq في النموذج الأصلي: فإنها تصبح \leq في النموذج الثنائي.

أما إذا كانت الإشارة \leq في النموذج الأصلي: فإنها تصبح \geq في النموذج الثنائي.

- قيم الطرف الأيسر لقيود النموذج الثنائي: هي معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي.

- قيم الطرف الأيمن لقيود النموذج الثنائي: يتم استخدامها هي نفسها كقيم للطرف الأيمن من قيود النموذج الأصلي (ولكن بعد أن يتم تبديل الصفوف مكان الأعمدة، والأعمدة مكان الصفوف).

٣- شرط عدم السالبية:

- لا يختلف في النموذج الثنائي، عن النموذج الأصلي، سوى في الرموز "ص" بدلاً من "س" كما لا تطبق عليه قاعدة الإشارات السابقة.

▪ مثال على كيفية صياغة النموذج الثنائي:

إذا علمت أن نموذج البرمجة الخطية يتمثل في:

$$\text{تعظيم أرباح} = ٢٤٠ \text{ س}_١ + ٣٦٠ \text{ س}_٢ + ٤٨٠ \text{ س}_٣$$

طبقاً للقيود الآتية:

$$٦٠٠ \geq ٢ \text{ س}_١ + ٤ \text{ س}_٢ + ٣ \text{ س}_٣$$

$$٩٠٠ \geq ٢ \text{ س}_١ + ٢ \text{ س}_٢ + ٣ \text{ س}_٣$$

$$١٢٠٠ \geq ٢ \text{ س}_١ + ٣ \text{ س}_٢ + ٢ \text{ س}_٣$$

وذلك طبقاً لشرط عدم السلبية:

$$\text{س}_١ \geq ٠ ; \text{س}_٢ \geq ٠ ; \text{س}_٣ \geq ٠$$

فإذا كان النموذج السابق يطلق عليه النموذج الأصلي، فإن النموذج

الثاني له يظهر على النحو الآتي:

$$\text{تدنية تكاليف: } ٦٠٠ \text{ ص}_١ + ٩٠٠ \text{ ص}_٢ + ١٢٠٠ \text{ ص}_٣$$

طبقاً للقيود الآتية:

$$٢٤٠ \leq ٣ \text{ ص}_١ + ٢ \text{ ص}_٢ + ٢ \text{ ص}_٣$$

$$٣٦٠ \leq ٣ \text{ ص}_١ + ٢ \text{ ص}_٢ + ٣ \text{ ص}_٣$$

$$٤٨٠ \leq ٢ \text{ ص}_١ + ٢ \text{ ص}_٢ + ٢ \text{ ص}_٣$$

وذلك طبقاً لشرط عدم السالبة:

$$\text{ص}_١ \geq ٠ ; \text{ص}_٢ \geq ٠ ; \text{ص}_٣ \geq ٠$$

▪ العلاقات بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي:

بمقارنة النموذجين الأصلي والثاني نلاحظ العلاقات التالية:

١- معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي: أصبحت ثوابت الجانب الأيسر

في النموذج الثنائي؛ وبالمثل فإن: ثوابت الجانب الأيسر في النموذج

الأصلي: أصبحت معاملات التكلفة في النموذج الثنائي.

٢- تم تعديل المتباينات من النوع " أصغر من أو يساوي \geq " إلى

متباينات من النوع " أكبر من أو يساوي \leq " .

٣- تم تحويل الهدف: من تعظيم أرباح في النموذج الأصلي، إلى تدنية

التكاليف في النموذج الثنائي.

٤- كل عمود في النموذج الأصلي: يناظره صف للقيود في النموذج الثنائي؛ وبالتالي فإن عدد قيود النموذج الثنائي يساوي عدد متغيرات النموذج الأصلي.

٥- كل قيد أي صف في النموذج الأصلي: يناظره عمود في النموذج الثنائي؛ وبالتالي فإن هناك متغير ثنائي واحد لكل قيد في النموذج الأصلي.

٦- وأخيراً فإنه يلاحظ أن: ثنائي النموذج الثنائي يتمثل في: النموذج الأصلي نفسه.

٧- لكي يمكن تحويل النموذج الأصلي للبرمجة الخطية، إلى نموذج ثنائي

(مقابل)، فإنه يجب توافر مجموعة من الشروط؛ وتتمثل في الآتي:

أ- يجب أن تكون جميع قيود المشكلة، في صورة متباينات؛ فإذا كان من بين قيود المشكلة معادلة: فإنه يتم تحويلها إلى متباينة كما يلي:

$$٦٠٠ = ٣س١ + ٤س٢ + ٢س٣$$

فإنه يتم تحويلها إلى متباينة، كما يلي:

$$٦٠٠ \geq ٣س١ + ٤س٢ + ٢س٣$$

$$\text{أو } ٦٠٠ \leq ٣س١ + ٤س٢ + ٢س٣$$

ب- كما يجب توحيد اتجاه المتباينات، عن طريق ضرب إحداهم في رقم ثابت (١ -)؛ وعلى ذلك يمكن تعديل اتجاه المتباينة الثانية، عن طريق ضربها $\times (- ١)$ ، وذلك على النحو الآتي:

$$٦٠٠ \geq ٣س١ - ٤س٢ - ٢س٣$$

ج- من الواجب أن تكون جميع المتباينات في اتجاه واحد، بمعنى أن تكون كلها من النوع (\geq)، أو أن تكون جميعها من النوع (\leq).

د- فإذا توافرت الشروط السابقة في أية مشكلة أصلية: فإنه يمكن تحويلها إلى مشكلة ثنائية أو مقابلة، ويمكن توضيح كيفية تحويل المشكلة الأصلية، إلى مشكلة ثنائية أو مقابلة، من خلال المثال الآتي:

مثال (١):

بفرض أن قدم إليك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{تعظيم أرباح} = 300 \text{ س}_1 + 600 \text{ س}_2 + 900 \text{ س}_3$$

طبقا للقيود الآتية:

$$60 \geq 3 \text{ س}_1 + 4 \text{ س}_2 + 5 \text{ س}_3$$

$$40 \geq 2 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2 + 2 \text{ س}_3$$

$$80 \geq 6 \text{ س}_1 + 7 \text{ س}_2 + 8 \text{ س}_3$$

وطبقا لشرط عدم السلبية فإن:

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 \leq \text{صفر}$$

فإذا كان النموذج السابق يطلق عليه النموذج الأصلي ، فإن النموذج

الثاني له يظهر كالاتي:

$$\text{تخفيض تكاليف: } 60 \text{ ص}_1 + 40 \text{ ص}_2 + 80 \text{ ص}_3$$

طبقا للقيود الآتية:

$$300 \leq 3 \text{ ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 + 6 \text{ ص}_3$$

$$600 \leq 2 \text{ ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 + 7 \text{ ص}_3$$

$$900 \leq 6 \text{ ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 + 8 \text{ ص}_3$$

وطبقا لشرط عدم السلبية فإن:

$$\text{ص}_1 ؛ \text{ص}_2 ؛ \text{ص}_3 \leq \text{صفر}$$

مثال (٢):

تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتجين: أ ، ب ، وذلك من خلال ٣ مراحل إنتاجية. وقد تم صياغة نموذج البرمجة الخطية الأصلي للمشكلة على

النحو الآتي:

$$\text{المطلوب تعظيم الدالة } R = 6 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2$$

وذلك في ظل القيود الآتية:

$$36 \geq 6 \text{ س}_1 + 4 \text{ س}_2$$

$$8 \geq 2 \text{ س}_1$$

$$12 \geq 2 \text{ س}_2$$

وذلك بشرط أن: $\text{س}_1 ؛ \text{س}_2 \leq \text{صفر}$

أولاً: حل المشكلة الأصلية:

من خلال اتباع قواعد نموذج البرمجة الخطية تعظيم ربحية، فإنه يمكن إعداد جدول السمبلكس الأول على النحو الآتي:

٦						١٠		صفر		صفر		لـو
١س	٢س	١غ	٢غ	٣غ	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	اختبار المثالية					
١	٢	٤	١	صفر	٣٦	١غ	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٢	صفر	صفر	١	صفر	٨	٢غ	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	٢	صفر	١	١٢	٣غ	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	اختبار المثالية						
٦	١٠	صفر	صفر	صفر	لـو - ص و							

وباتباع خطوات حل نموذج البرمجة الخطية، بتطبيق القواعد التي سبق بيانها في قواعد تطبيق طريقة السمبلكس لتعظيم الربحية: فإننا يمكننا الوصول إلى جدول السمبلكس الأمثل الآتي:

٦						١٠		صفر		صفر		لـو
١س	٢س	١غ	٢غ	٣غ	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	اختبار المثالية					
١	صفر	صفر	صفر	$\frac{1-}{3}$	٢	١س	٦	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	صفر	١	$\frac{1-}{3}$	٤	٢غ	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	١	صفر	$\frac{1}{2}$	٦	٢س	١٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٦	١٠	١	صفر	٣	٧٢	اختبار المثالية						
صفر	صفر	صفر	١-	٣-	لـو - ص و							

- ويلاحظ علي جدول السمبلكس الأمثل السابق الملاحظات التالية:
- ١- الحل يعتبر حلاً أمثلاً: وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صف (ر) - ص_١): صفرية أو سالبة.
 - ٢- يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل كالآتي:
س_١ = ٢ وحدة، س_٢ = ٦ وحدات، كما أن أقصى ربح = ٧٢ جنيهاً.
 - ٣- هناك طاقة عاطلة فائضة في المورد الثاني يمثلها المتغير الراكد غ_٢ وقدرها ٤ ساعات.
 - ٤- أسعار ظل الموارد تتحدد على النحو الآتي:
أ- المورد الأول له سعر ظل = ١ جنيهاً واحداً، وطاقته مستغلة بالكامل.
ب- المورد الثالث له سعر ظل = ٣ جنيهاً، وطاقته مستغلة بالكامل.
ج- المورد الثاني له سعر ظل = صفر، لأن به طاقة عاطلة قدرها ٤ ساعات.

• حل المشكلة الثنائية (المقابلة):

يمكن تحويل المشكلة الأصلية، إلى مشكلة مقابلة، على النحو الآتي:
المطلوب تدنية الدالة:

$$ت = ٣٦ ص١ + ٨ ص٢ + ١٢ ص٣$$

وذلك طبقاً للقيود الآتية:

$$٦ \leq ٦ ص١ + ٢ ص٢$$

$$١٠ \leq ٢ ص٢ + ٤ ص٣$$

وطبقاً لشرط عدم السلبية فإن:

$$ص١ \leq ٠ ؛ ص٢ \leq ٠ ؛ ص٣ \leq ٠$$

ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي الذي يهدف إلى تخفيض أو تدنية

التكاليف كالآتي:

٣٦ ٨ ١٢ صفر صفر						متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	ت _١
٢غ	١غ	٣ص	٢ص	١ص	١ص			
صفر	$\frac{1-}{6}$	صفر	$\frac{1}{3}$	١	١	١ص	٣٦	
$\frac{1-}{2}$	$\frac{1}{3}$	١	$\frac{2-}{3}$	صفر	٣	٣ص	١٢	
						اختبار المثالية		
٦-	٢-	١٢	٤	٣٦	٧٢	ص و		
٦	٢	صفر	٤	صفر	ت _١ - ص و			

ويلاحظ علي جدول السيمبلكس الأمثل السابق أنه يمثل الحل الأمثل، وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صف (ت_١ - ص و) : صفرية أو موجبة.

■ مطابقة الحلول والتحقق:

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي لتعظيم الأرباح: هي نفسها قيمة دالة الهدف في النموذج الثنائي لتدنية (تخفيض) التكاليف؛ وتحسب

كالآتي:

<u>تخفيض تكاليف</u>	<u>تعظيم أرباح</u>
$= ٣٦ص١ + ٨ص٢ + ١٢ص٣$	$٦س١ + ١٠س٢$
$= ٣٦ \times ١ + ٨ \times صفر + ١٢ \times ٣$	$٦ \times ١٠ + ٢ \times ٦ =$
$٧٢ =$	$٧٢ =$

٢- معاملات المتغيرات الراكدة في صف (ر_١ - ص و) في جدول السيمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الثنائية - أسعار ظل الموارد : ص_١، ص_٢، ص_٣ حيث أن:

$$١ = ١ص = ١غ$$

$$٢ص = ٢غ = صفر$$

$$٣ص = ٣غ = ٣$$

٣- معاملات المتغيرات الأصلية س_١، س_٢ في صف (ر_١ - ص و) في جدول السيمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الثنائي لتخفيض التكاليف حيث أن:

$$س_1 = غ_1 = \text{صفر}$$

$$س_2 = غ_2 = \text{صفر}$$

٤- معاملات المتغيرات الأصلية $س_1, س_2$ في صف (ر - ص ١) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل الفرق بين الجانب الأيمن - الذي يمثل التكاليف - والجانب الأيسر الذي يمثل الأرباح - لمعاملات القيود في النموذج الثنائي؛ ويظهر ذلك كما يلي:

$$٦ \leq ٦ص_1 + ٢ص_2$$

$$٦ = ٦ص_1 + ٢ص_2 \times \text{صفر}$$

الفرق بين كلا الجانبين = $٦ - ٦ = \text{صفر}$ وهو معامل $س_1$

$$١٠ \leq ٤ص_1 + ٢ص_2$$

$$١٠ = ٤ص_1 + ٢ص_2 \times ٣$$

الفرق بين كلا الجانبين = $١٠ - ١٠ = \text{صفر}$ وهو معامل $س_2$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة $غ_1, غ_2$ كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الأساسية $س_1, س_2$ كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح.

$$٢ = غ_1 = س_1$$

$$٦ = غ_2 = س_2$$

٦- معاملات المتغيرات الأصلية $ص_1, ص_2, ص_3$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف): تمثل قيمة المتغيرات الراكدة $غ_1, غ_2, غ_3$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح)؛ حيث أن:

$$ص_1 = غ_1 = \text{صفر}$$

$$ص_2 = غ_2 = ٤$$

$$ص_3 = غ_3 = \text{صفر}$$

مثال (٣):

قدم إليك نموذج البرمجة الخطية الأصلي التالي:

$$\text{المطلوب تدنية التكاليف} = ٦ص_1 + ٣ص_2 + ٤ص_3$$

وذلك طبقاً للقيود الآتية:

$$\begin{aligned} 30 &\leq && \text{ص}_1 \\ 50 &\leq && \text{ص}_2 \\ 20 &\leq && \text{ص}_3 \\ 120 &= && \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 \end{aligned}$$

والمطلوب:

- ١- التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج السابق.
 - ٢- صياغة النموذج الثنائي له.
 - ٣- مطابقة الحلول بين النموذجين الأصلي والثنائي.
- ١- يظهر جدول السمبلكس الأمثل الأصلي للنموذج السابق لتخفيض التكاليف كالاتي:

تو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٦	٣	٤	صفر	صفر	صفر
٦	ص _١	٣٠	١	صفر	صفر	ص _٣	١-غ	٢غ
٣	ص _٢	٧٠	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
٤	ص _٣	٢٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١-
صفر	٢غ	٢٠	صفر	صفر	صفر	صفر	١	١
	اختبار المثالية ص و	٤٧٠	٦	٣	٤	٣-	صفر	١-
	تو - ص و		صفر	صفر	صفر	٣	صفر	١

٢- صياغة النموذج الثنائي:

$$\text{تعظيم أرباح} = 30\text{س}_1 + 50\text{س}_2 + 20\text{س}_3 = 120\text{س};$$

طبقاً للقيود الآتية:

$$\begin{aligned} 6 &\geq && \text{س}_1 + \\ 3 &\geq && \text{س}_2 + \\ 4 &\geq && \text{س}_3 + \end{aligned}$$

وطبقاً لشرط عدم السالبة:

$$\text{س}_1 \geq 0; \text{س}_2 \geq 0; \text{س}_3 \geq 0; \text{صفر} \leq$$

ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي لتعظيم الأرباح كالآتي:

رو	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س _١	س _٢	س _٣	س؛	غ _١	غ _٢	غ _٣
٣٠	س _١	٣	١	١-	صفر	صفر	١	١-	صفر
١٢٠	س؛	٣	صفر	١	صفر	١	صفر	١	صفر
٢٠	س _٢	١	صفر	١-	١	صفر	١-	١	١
اختبار المثالية									
ص و	٤٧٠	٣٠	٧٠	٢٠	١٢٠	٣٠	٧٠	٢٠	٢٠
رو - ص و	صفر	٢٠-	صفر	٢٠-	صفر	٣٠-	٧٠-	٢٠-	٢٠-

وهنا يجب ملاحظة أن المطابقة وتحقيق النتائج تتم من نموذج تعظيم الأرباح سواءً أكان أصلياً أو ثنائياً إلى نموذج تخفيض التكاليف؛ كما يلاحظ أيضاً أن المطابقة السادسة السابق ذكرها لن تتحقق هنا بسبب أن متباينات النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف ليست كلها من النوع أكبر من أو يساوي، بل يتضمن النموذج متباينة في شكل متساوية، وبالتالي يمكن إجراء خمس مطابقات فقط وذلك كما يتبين مما يلي:

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي هي نفسها قيمة دالة الهدف في

النموذج الثنائي وتحسب كالآتي:

تعظيم أرباح

$$٣٠ س١ + ٥٠ س٢ + ٢٠ س٣ + ١٢٠ س؛$$

$$٣٠ (٣) + صفر + ٢٠ (١) + ١٢٠ (٣) = ٤٧٠ جنيها$$

تخفيض تكاليف

$$٦ ص١ + ٣ ص٢ + ٤ ص٣$$

$$= ٦ (٣٠) + ٣ (٧٠) + ٤ (٢٠) = ٤٧٠ جنيها$$

٢- معاملات المتغيرات الراكدة غ_١، غ_٢، غ_٣، في النموذج الثنائي لتعظيم الأرباح: تمثل القيم للمتغيرات الأصلية - أسعار الظل - في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف.

$$٣٠ = ١ ص = ١ غ$$

$$٧٠ = ٢ ص = ٢ غ$$

$$٢٠ = ٣ ص = ٣ غ$$

٣- معاملات المتغيرات الأصلية s_1, s_2, s_3 ، كما تظهر في صف التقييم النهائي في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف:

$$s_1 = غ_1 = \text{صفر}$$

$$s_2 = غ_2 = 20$$

$$s_3 = غ_3 = \text{صفر}$$

٤- معاملات المتغيرات الأصلية s_1, s_2, s_3 ، كما تظهر في صف (ر) - (ص) في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح هي الفرق بين الجانب الأيمن - التكاليف - والجانب الأيسر - الأرباح - لمعاملات القيود في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف.

حيث يظهر كآتي:

$$ص_1 \leq 30$$

$$30 - 30 = \text{صفر معامل } s_1$$

$$ص_2 \leq 50$$

$$70 - 50 = 20 \text{ معامل } s_2$$

$$ص_3 \leq 20$$

$$20 - 20 = \text{صفر معامل } s_3$$

$$ص_1 + ص_2 + ص_3 = 120$$

$$120 = (30)1 + (70)1 + (20)1$$

$$120 - 120 = \text{صفر معامل } s_3$$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة $غ_1, غ_2, غ_3$ كما تظهر في صف (ر) - (و) في جدول السمبلكس الأمثل لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلي للمتغيرات الأساسية s_1, s_2, s_3 كما تظهر في صف (ر) - (و) في جدول السمبلكس الأمثل لتعظيم الأرباح حيث أن:

$$ص_1 = 3$$

$$ص_2 = \text{صفر}$$

$$ص_3 = 1$$

الفصل السابع

تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية

Sensitivity Analysis in Linear Programming

■ مفهوم تحليل الحساسية:

يبين لنا إطار البرمجة الخطية، أن الحل الأمثل الذي يتم التوصل إليه من خلال طريقة السمبلكس، في كافة نماذج البرمجة الخطية، إنما يعتمد على الله تعالى، ثم على قيم معاملات المتغيرات المختلفة التي يتكون منها نموذج البرمجة الخطية؛ ذلك أن معاملات دالة الهدف **Objective Function**، **Coefficients**، ومعاملات القيود الفنية **Technical Coefficients**، والثوابت **constants** التي تمثل حدود الطاقة المتاحة، تعتبر بمثابة مدخلات البيانات أو معلمات **Parameters** نموذج البرمجة الخطية.

هذا وتجدر الإشارة إلى أن الحل العملي لأية مشكلة برمجة خطية: لا يعتبر حلاً كاملاً بمجرد التوصل إلى الحل الأمثل؛ ذلك أن حدوث أي تغيير في قيم المعاملات أو في مدخلات البيانات: من شأنه أن يعمل على تغيير مشكلة البرمجة الخطية، ومن ثم فإنه بدون شك سيؤثر على الحل الأمثل للمشكلة.

ويقصد بتحليل الحساسية: القيام بعملية تحليل كمي، بهدف البحث عن إجابة سؤال يدور مضمونه حول: "ماذا يحدث لو حدث تغير في قيمة كل أو بعض معاملات المتغيرات الداخلة في تركيب النموذج الخطي"، وهو بذلك يعتبر وسيلة هامة للتأكد من مدى مثالية هذا الحل؟ وهل مازال يعتبر حلاً أمثلاً بعد حدوث التغيرات في قيم المعاملات، أم لا؟ وهل لا يزال يحقق كافة القيود الموضوعية؟ وهل سيظل يمثل الحل الأمثل للفترة المستقبلية؟

الواقع أن تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية، يوفر إجابات محددة ودقيقة عن كل هذه التساؤلات؛ وذلك من خلال استخدام قواعد محددة يتم

تطبيقها بدون الحاجة إلى إعادة حل النموذج كله، وذلك لكي يمكن الاستفادة من هذا النموذج في مجالات عديدة لاتخاذ القرارات الإدارية.

هذا، ويلاحظ أن أهمية تحليل الحساسية ترجع إلى الأسباب الآتية:

أولاً: تحديد مدى استجابة الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه، للتغيرات التي قد يتم إدخالها على قيم المعاملات المتعلقة بهذا الحل.

ثانياً: تحليل ودراسة مدى تأثيرات التغيرات في معاملات النموذج على الحل المثلى، والاستفادة من هذه التغيرات في اتخاذ القرارات؛ فعلى سبيل المثال: إذا تبين لنا أن الحل الأمثل (الربح أو التكلفة) قد تغير تغييراً ملحوظاً في صالح المنشأة، بسبب تغيير طفيف في المعاملات المعطاة، فإن هذا الأمر قد يستحق الأخذ بهذه التغيرات عند اتخاذ القرارات؛ بحيث أنه إذا ساهمت زيادة الطاقة المتاحة من العمل مثلاً عن طريق وقت عمل إضافي، في تعظيم العائد مقارنةً بالتكلفة الزائدة للعمل الإضافي، فإنه يكون من الأفضل في هذه الحالة القيام باتخاذ قرار بالسماح بوقت إنتاج إضافي.

ثالثاً: إمكانية التوصل إلى تقديرات دقيقة لمعاملات (معلمات) نموذج البرمجة الخطية، حيث أن تحديد المعاملات التي تؤثر أكثر من غيرها على قيمة دالة الهدف: من شأنه إتاحة إمكانية التوصل إلى أفضل التقديرات لهذه المعلمات، وذلك بشكل يساهم في زيادة درجة الثقة في نموذج البرمجة الخطية، وفي الحل المستخرج منه.

هذا، ويلاحظ أن تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية؛ يركز على

التغيرات في المدخلات الآتية:

- ١- التغيرات في معاملات دالة الهدف (ب ر).
- ٢- التغيرات في الثوابت التي تمثل الطاقة المتاحة (ح ر).
- ٣- التغيرات في مصفوفة القيود أو المعاملات (أ ل ر)، والتي قد ترجع إلى:
 - (أ) إضافة متغير جديد.
 - (ب) إحداث تغيير في الأعمدة الموجودة.
 - (ج) إضافة قيود جديدة للموارد المتاحة.

هذا ويمكن أن نتفهم أساسيات وكيفية تطبيق تحليل الحساسية، وكيفية معالجة التغييرات السابقة من خلال المثال التطبيقي الآتي:

مثال (١):

تنتج إحدى المنشآت الصناعية ثلاثة منتجات: س، ص، ع، ويبلغ هامش مساهمة الوحدة من كل منتج ٢ جنيهاً؛ ٣ جنيهاً؛ ١ جنيهاً واحداً؛ علي التوالي؛ كما تحتاج هذه المنتجات إلى نوعين من الموارد، هما: العمل المياشر؛ والمواد الخام؛ وقد قام قطاع بحوث العمليات في المنشأة بصياغة نموذج البرمجة الخطية التالي، لتحديد مزيج الإنتاج الأمثل. المطلوب تعظيم

$$\text{أرباح: } ٢س١ + ٣س٢ + ١س٣$$

وذلك طبقاً للقيود الآتية:

$$١ \geq ١س١ + ٢س٢ + ٣س٣ \quad (\text{العمل المباشر}).$$

$$٣ \geq ١س١ + ٢س٢ + ٣س٣ \quad (\text{المواد الخام}).$$

وذلك طبقاً لشرط عدم السالبة، حيث أن:

$$١س١؛ ٢س٢؛ ٣س٣ \leq \text{صفر}.$$

ويظهر جدول السمبلكس المبني؛ على النحو الآتي:

١ ٣ ٢					قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	رو
صفر	صفر	١	٣	٢			
صفر	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	١	١ غ	صفر
١	صفر	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	٣	٢ غ	صفر
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	اختبار المثالية ص و	
صفر	صفر	١	٣	٢		رو - ص و	

ومن خلال تطبيق القواعد التي سبق بيانها لطريقة السمبلكس (تعظيم ربحية)، فقد ظهر جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

ر	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٢	٣	١	صفر	صفر
٢	١س	١	١	صفر	١-	٤	١غ
٣	٢س	٢	صفر	١	١-	١-	٢غ
اختبار المثالية		٨	٢	٣	٤	٥	١
ر - ص و			صفر	صفر	٣-	٥-	١-

وبالنظر إلى الجدول الأمثل السابق يتبين الآتي:

١- الحل يعتبر حلاً أمثلاً، لأن معاملات كافة متغيرات صف (ر و - ص و) : إما صفرية أو سالبة.

٢- يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل علي أساس

$$١س = ١ وحدة$$

$$٢س = ٢ وحدة$$

$$٣س = صفر$$

٣- أقصى ربحية ممكنة = ٨ جنيهاً.

٤- أسعار ظل الموارد تتحدد كالاتي:

١غ، مورد العمل المباشر = ٥ جنيهاً؛ وطاقته مستغلة بالكامل.

٢غ، مورد المواد الخام = ١ جنيهاً؛ وطاقته مستغلة بالكامل.

٥- إجمالي الأرباح = ٨ جنيهاً = إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في

الإنتاج وتتحدد كالاتي:

$$٨ جنيهاً = ٣ + ٥ = ١ \times ٣ + ٥ \times ١$$

وتجدر الإشارة هنا، إلى أننا إذا قمنا بإجراء تحليل الحساسية، فإننا يمكننا الحصول على معلومات هامة وذات قيمة جوهرية، تتعلق بجداول الإنتاج البديلة وثيقة الصلة بالحل الأمثل؛ حيث تعتبر هذه المعلومات ذات أهمية ونفع كبيرين للإدارة، بما قد يفوق أهميته تحديد الحل الأمثل نفسه؛ ويمكن القول كحقيقة هامة أن أحد أسباب انتشار البرمجة الخطية في الحياة العملية، يتمثل في قدرتها على إجراء تحليل الحساسية جنباً إلى جنب، مع التوصل إلى الحل الأمثل.

١. التغييرات في معاملات دالة الهدف (ب):

قد تحدث تغييرات في معاملات دالة الهدف، وذلك بما يؤدي إلى حدوث تغيير في ربح أو تكلفة أحد أو بعض متغيرات النموذج، والذي قد يكون متغيراً أساسياً في الحل الأمثل؛ وقد يكون متغيراً غير أساسي في هذا الحل؛ وذلك كما يتبين فيما يلي:

١/١. تغيير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي:

يتبين من جدول مزيج الإنتاج الأمثل، أن: المنتج س_٣ لم يتم إنتاجه بسبب انخفاض هامش مساهمة الوحدة منه (ب_٣) حيث تبلغ ١ جنيهاً واحداً؛ وقد يكون من الضروري والمهم هنا أن نحاول إيجاد مدى Range من القيم لمعامل الربح (ب_٣)، بحيث يظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه. وهنا نتبين من دراسة الجدول الأمثل، أن أي انخفاض في المعامل (ب_٣) إلى أقل من ١ جنيهاً واحداً، لن يكون له تأثير على الحل الأمثل الحالي، لأن المنتج س_٣ سوف يظل غير مربح، ولكن إذا زاد هامش مساهمة الوحدة منه فوق قيمة معينة: فإن المنتج س_٣ قد يصبح إنتاجه أمراً مربحاً للمنشأة.

وعندما تتغير قيمة (ب_٣) والتي تتعلق بالمنتج س_٣، فإن قيمة معامل هذا المتغير في صف التقييم النهائي، سوف تتغير في الجدول الأمثل؛ مع ملاحظة أن الجدول الأمثل السابق سيظل أمثلاً طالما بقي معامل س_٣ في صف التقييم النهائي سالباً.

ويتبين من جدول السمبلكس الأمثل الحالي، أن ربح الوحدة من المتغيرين س₁، س₂ هو (٣، ٢) علي الترتيب وعلي ذلك فان معامل المتغير س₃ في صف التقييم النهائي (رو - ص و): (ب⁻ ٣) يتحدد كالاتى:

$$\bar{b}_3 = b_3 - [] (3, 2) = 4 - 3 = 1$$

(ملاحظة: ١. سيتم استخدام الرمز: ب⁻ ليشير إلى معامل س₃ في صف التقييم النهائي (رو - ص و).

$$٢. \text{ يدل } \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right] \text{ على عمود س}_3$$

٣. يدل (٣، ٢) على متجه الأرباح أو عمود ر و بالجدول الأمثل.

$$\bar{b}_3 = b_3 - [\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}] (3, 2) = 4 - 3 = 1$$

وهنا يجب أن نلاحظ أنه: لكي يكون الجدول السابق جدولاً أمثلاً: فان معامل المتغير س₃ في صف التقييم النهائي ب⁻ ٣ = ٤ - ٣ ≥ صفر أو ب_٣ ≥ ٤ ؛ أي أننا يمكننا القول بأنه طالما أن ربح الوحدة من المنتج س₃ أقل من ٤ جنيهات، فإن إنتاج المنتج س₃ لن يكون اقتصادياً؛ وسيظل مزيج الإنتاج الحالي بمثابة المزيج الأمثل؛ ولكن إذا فرضنا أن ربح الوحدة من المنتج س₃ قد زاد إلى ٦ جنيهات، حينئذ فان ب⁻ ٣ = ٦ - ٤ = ٢+ وحينئذ، فإن مزيج الإنتاج الحالي لن يكون أمثلاً، لأنه يمكن زيادة الأرباح القصوى بإنتاج المنتج س₃، ويترتب على ذلك أن جدول السمبلكس السابق لن يكون الجدول الأمثل، حيث أنه يمكن إدخال س₃ في الأساس لزيادة قيمة دالة الهدف؛ وبتطبيق قاعدة أصغر قيمة موجبة فإن المتغير س₃ سوف يترك الأساس ليحل س₃ محله.

ويمكن القول كقاعدة عامة: أن حساسية الحل الأمثل الحالي يمكن التوصل إليها بأفضل طريقة ممكنة، من خلال دراسة كيف سيتغير الجدول الأمثل الحالي إذا ما تغيرت مدخلات البيانات؛ ويظهر الحل الأمثل الجديد كالاتى:

٢ ٣ ١ صفر صفر							رو
متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س _١	س _٢	س _٣	غ _١	غ _٢	
س _١	١	١	صفر	١	٤	١	٢
س _٢	٢	٢	صفر	١	١	١	٣
اختبار المثالية ص و							
رو - ص و							
٢ ٣ ٦ صفر صفر							رو
متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س _١	س _٢	س _٣	غ _١	غ _٢	
س _١	٢	١	$\frac{1}{2}$	صفر	$\frac{7}{2}$	$\frac{1-}{2}$	٢
س _٢	١	صفر	$\frac{1}{2}$	١	$\frac{1-}{2}$	$\frac{1}{2}$	٦
اختبار المثالية ص و							
رو - ص و							

وعلي ذلك فإن مزيج الإنتاج الأمثل (الجديد) يتحدد علي أساس إنتاج ٢ وحدة من س_١، ووحدة واحدة من س_٢؛ وذلك بربحية قصوى تبلغ ١٠ ج. ويمكن القول في ضوء ما سبق أن ربح الوحدة من المنتج س_٢ يجب أن تزيد من ١ جنيهاً، إلى أكثر من ٤ جنيهاً، وذلك لكي يكون مربحاً، ويكون في الإمكان تغيير مزيج الإنتاج الأمثل الحالي؛ ولما كان هامش مساهمة الوحدة من المنتج س_٢ = ١ جنيهاً؛ وإعتبر س_٢ في ضوء ذلك متغيراً غير أساسي وغير مربح، ولم يدخل الأساس في الحل الأمثل، لذلك فإنه يجب أن يكون واضحاً أن أي معدل ربح لهذا المتغير يقل عن ١ جنيهاً: سوف يؤدي أيضاً إلي استبعاده من المزيج الأمثل؛ وعلى ذلك فإن معامل المتغير س_٢ - غير الأساسي - في دالة الهدف، يمكن أن يقع بين (صفر، ٤) ويظل الحل الحالي حلاً أمثلاً؛ أما إذا زاد معدل ربح الوحدة من س_٢ عن ٤ جنيهاً وأصبح ٦ جنيهاً كما افترضنا: فإن الحل الحالي لن يكون حلاً أمثلاً؛ ويجب تعديله والتوصل إلى الحل الأمثل الجديد علي النحو السابق.

وعلى ذلك، فإن معاملات المتغيرات غير الأساسية، في صف التقييم النهائي (رو - ص و)، تمثل أقصى إضافة موجبة لمعاملات دالة الهدف الأصلية، والتي تسمح للحل بأن يظل حلاً أمثلاً.

٢/١. تغيير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي:

لتحديد تأثير التغيير، في معدل ربح الوحدة (ب_١) من المنتج س_١: فإننا نجد أنه من الواضح أنه عندما تنخفض ب_١ وتصل إلى أقل من مستوى معين، فإنه من غير المرشح إدخال المنتج س_١ في مزيج الإنتاج الأمثل؛ وحتى عندما تزيد ب_١ فإنه من الممكن أن يغير ذلك من مزيج الإنتاج الأمثل عند مستوى معين؛ ويحدث ذلك عندما يصبح المنتج س_١ مربحاً جداً، بحيث أن مزيج الإنتاج الأمثل قد لا يتضمن سواه؛ وعلى ذلك فإننا نجد هناك حداً أعلى، وحداً أدنى للتغيير في ب_١. ولا يتأثر الحل الأمثل الحالي السابق بإجاده، إذا ما حدث التغيير بين هذه الحدود.

ولتحديد مدى التغيير في ب_١: فإنه يجب أن نلاحظ أن تغيير ما في ب_١ يغير متجه ربح الوحدة (ب ر) المتعلق بالمتغيرات الأساسية، حيث $B = (B_1, B_2)$.

ولكن هذا التغيير لن يؤثر على معاملات هذه المتغيرات الأساسية في صف التقييم النهائي (رو - ص و)، وهي ب_١، ب_٢. حيث تظل قيم هذه المعاملات تساوي صفراً؛ ولكن سوف يؤثر هذا التغيير على معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي (رو - ص و)، وهي ب_٣، ب_٤، ب_٥، ولكن طالما أن معاملات هذه المتغيرات غير الأساسية ظلت سالبة، فإن الجدول السابق سيظل بمثابة الجدول الأمثل، ويمكن التعبير عن قيم ب_٣، ب_٤، ب_٥، كدالة للمعامل ب_١ كالآتي:

$$\begin{aligned} B_3 &= -1 - (B_1 + 6) = [-7] \\ B_4 &= \text{صفر} - (B_1 + 3) = [-3] \\ B_5 &= \text{صفر} - (B_1 + 3) = [-3] \end{aligned}$$

ومن الحسابات الموضحة أعلاه فإننا نجد أن:

$$\bar{b}_3 \geq \text{صفر طالما أن } b_1 \geq 0$$

وبالمثل، فإننا نجد أن كل متغير غير أساسي يضع حدوداً معينة (حد أدنى أو حد أعلى) على قيمة المعامل b_1 ، وعلى ذلك فإن:

$$\bar{b}_1 \geq \text{صفر تعني أن } b_1 \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{كما أن } \bar{b}_2 \geq \text{صفر تعني أن } b_1 \geq 3$$

وسيظل الجدول الأمثل السابق: جدولاً أمثلاً، طالما أن التغيير في b_1 يقع في الحدود التي حددتها المتغيرات غير الأساسية؛ فمثلاً لو أخذنا مدى للتغيير في b_1 مثل $(\frac{3}{4}, 3)$ ، بمعنى أن b_1 يمكن أن تتغير من $\frac{3}{4}$ فأكثر إلى أقل من أو يساوي 3، فإن كل معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي، سوف تظل سالبة، والحل الأمثل الحالي الذي تحدد علي أساس أن $s_1 = 1$ ، $s_2 = 2$ ، $s_3 = \text{صفر}$ ؛ لا يزال حلاً أمثلاً؛ ومن المنطقي أنه طالما أن b_1 تتغير: فإن القيمة المثلى لدالة الهدف سوف تتغير أيضاً، فمثلاً عندما تكون $b_1 = 1$ فإن الحل الأمثل يتحدد علي أساس أن $s_1 = 1$ ، $s_2 = 2$ ، $s_3 = \text{صفر}$ ، إلا أن أقصى ربح = 7 جنيهات؛ وعندما تبعد قيم b_1 عن الحدود التي وفرها تحليل الحساسية، حينئذ فإن الحل السابق لن يظل حلاً أمثلاً، لأن معامل أحد المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي ب ر سوف يصبح موجباً؛ ويمكننا في هذه الحالة استخدام طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل الجديد كما سبق وأن أوضحنا في الحالة (1/1).

وعلى وجه العموم: فإن ما ينطبق على معامل المتغير الأساسي s_1 ، ينطبق على معامل المتغير الأساسي s_2 .

3/1. تغيير معامل دالة الهدف لكل من المتغيرات الأساسية، وغير الأساسية:

إذا افترضنا أنه قد تم تغيير هامش مساهمة المنتجات الثلاثة جميعها،

بحيث أن دالة الهدف أصبحت كالآتي:

$$\text{تعظيم أرباح } 1 \text{ س} + 4 \text{ س} + 2 \text{ س}$$

في الحقيقة فإننا يمكننا تحديد تأثير مثل هذا التغيير على الحل الأمثل، عن طريق اختبار ومراجعة معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي (رو - ص و)، والتحقق أو التأكد من أنها لا تزال سالبة بمعنى أن:

$\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \text{صفر}$ ، (وهي معاملات المتغيرات الأساسية في صف التقييم النهائي (رو - ص و)، بينما تتحدد المعاملات الأخرى على النحو الآتي:

$$\bar{b}_3 = \text{صفر} - 2 - (1, 4) \begin{bmatrix} - \\ 1 \end{bmatrix} = -5 \geq \text{صفر}$$

$$\bar{b}_4 = \text{صفر} - (1, 4) \begin{bmatrix} - \\ 1 \end{bmatrix} = \text{صفر}$$

$$\bar{b}_5 = \text{صفر} - (1, 4) \begin{bmatrix} - \\ 1 \end{bmatrix} = -3 \geq \text{صفر}$$

وعلي ذلك، فإنه طالما أن معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي (رو - ص و)، مازالت معاملات سالبة، بعد التغيير في قيم معاملات دالة الهدف، فإن الحل الأمثل لن يتغير ويتحدد مزيج الإنتاج الأمثل على أساس أن: $s_1 = 1$ ، $s_2 = 2$ ، $s_3 = \text{صفر}$. غير أننا نلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد أصبحت = 9 جنيهاً؛ كما يلاحظ أيضاً أنه قد توفر لدينا مؤشر عن وجود حالة مثالية بديلة، حيث أن سعر الظل $t = \text{صفر}$ (وذلك كما سبق وأن أوضحنا في الفصل الرابع: حالة تعدد المثالية).

٢. التغيير في ثوابت الطاقة (ح ر):

إذا افترضنا توافر وحدة إضافية من مورد العمل، وأرادت إدارة المنشأة تحديد كيفية تأثير هذا التغيير على مزيج الإنتاج الأمثل؛ فإننا نلاحظ في مثل هذه الحالة، أن إضافة وحدة عمل أخرى، من شأنه أن يعمل على تغيير متجه ثوابت الجانب الأيسر في جدول السمبلكس المبدئي؛ بمعنى أن متجه الثوابت في جدول السمبلكس المبدئي السابق سوف يتغير من (b_1) إلى: (b_1')

إلا أننا نلاحظ هنا أن مثل هذا التغيير ليس له أي تأثير على الجدول الأمثل، باستثناء التغييرات في قيم الثوابت - المجموع الكمي - كما نلاحظ أنه حتى بعد التغيير لو ظلت ثوابت الجانب الأيسر موجبة؛ فإن الحل الأمثل السابق يظل حلاً أساسياً ممكناً؛ ولأن معاملات المتغيرات في صف التقييم

النهائي \bar{b} هي نفسها (أي أنها لا تزال سالبة) فإن هذا الجدول يصبح أيضاً حلاً أمثلاً للمشكلة.

وترتيباً على ذلك، فإنه لكي يمكن دراسة تأثير التغيير في ثوابت الجانب الأيسر: فإن التحقق من بقاء ثوابت المتجه الجديد في الجدول النهائي موجبة يعتبر كافياً، وذلك بدون الحاجة إلى إعداد حل للبرنامج مرة ثانية؛ حيث تتحدد قيمة الثوابت الجديدة على النحو الآتي:

مصفوفة المتغيرات الراكدة

$$\begin{array}{c} \text{التي تمثل قيود الموارد في الحل الأمثل} \\ \text{متجه الثوابت} \\ \text{متجه الثوابت} \\ \text{الجديد} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{المعدل} \\ \text{الجديد} \end{array} = \begin{array}{c} \text{٢} \\ \text{٣} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{١ غ} & \text{٢ غ} \\ \begin{array}{c} \text{١-} \\ \text{٤} \\ \text{١} \\ \text{١-} \end{array} & \begin{array}{c} \text{١-} \\ \text{٤} \\ \text{١} \\ \text{١-} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{س١} \\ \text{س٢} \end{array}$$

وفي ضوء ما سبق؛ فإننا يمكن أن نتبين أنه: عندما تغيرت قيم الثوابت في الجدول المبدئي إلى (\bar{b}) فإن القيم الجديدة للثوابت في الجدول الأمثل تصبح (\bar{b}) وهي موجبة.

كما نلاحظ أن الجدول السابق الأمثل سيظل كما هو أمثلاً؛ ويتحدد مزيج الإنتاج الأمثل الجديد كما يتبين من متجه الثوابت الجديد على أساس س١ = ٥، س٢ = ١، س٣ = ٠، وتصبح أقصى قيمة لدالة الهدف = ١٣ جنيهاً (= ٥ × ٢ + ١ × ٣).

حيث نلاحظ هنا أن كلاً من الحل الأمثل والقيمة المثلى لدالة الهدف، قد تغير، وذلك بسبب التغيير في الطاقة المتاحة من مورد العمل؛ غير أننا يمكننا أن نلاحظ أن الأساس الأمثل لم يتغير، بمعنى أن المنتجين س١، س٢ فقط لا يزال هو الحل الأمثل، وأن الاختلاف الوحيد إنما تمثل في كمية ما يجب إنتاجه منهما.

وعلى افتراض أنه قد أمكن الحصول على وحدة عمل إضافية، عن طريق وقت عمل إضافي ينتج عنه تكاليف إضافية تبلغ ٤ جنيهات عن كل وحدة عمل إضافية، وتسعى الإدارة بل وترغب دائماً في تحديد ما إذا كان من المربح لها أن تستخدم هذا الوقت الإضافي.

في حقيقة الأمر، يمكننا التوصل إلى هذا القرار، عن طريق مقارنة الزيادة في الأرباح نتيجة استخدام وقت العمل الإضافي مع التكاليف الإضافية التي تنشأ نتيجة هذا القرار؛ وبالتطبيق على المثال الحالي، فإننا نجد أن الزيادة في الربح = ١٣ - ٨ = ٥ جنيهات؛ وهي أكثر من تكلفة الوقت الإضافي (٤ جنيهات)؛ وبالتالي فإنه من المربح الحصول على وحدة واحدة إضافية من العمل.

ويطلق على الربح الزائد (٥ جنيهات عن كل وحدة عمل إضافية): سعر ظل قيد العمل؛ ويساعد معرفة الإدارة لأسعار الظل لقيود الموارد المختلفة، في تحديد مقدار ما يمكن تحمله أو سداده من أجل زيادة الموارد المقيدة؛ كما أن سعر الظل الخاص بقيد المواد الخام هو ١ جنيهًا؛ وهنا يجب ان نلاحظ أن أسعار الظل إنما تعكس التغير النهائي في قيمة دالة الهدف والنتيجة من إضافة وحدة واحدة من الموارد المقيدة، طالما أن التغير في الموارد المقيدة لم يغير الأساس الأمثل.

وترتيباً على ذلك، فإنه لكي يمكن استخدام أسعار الظل بطريقة مفيدة، فإنه يجب أن نحسب مدى التغير في المورد المقيد، بحيث يبقى الأساس الأمثل (مزيج الإنتاج) على ما هو عليه.

ولتوضيح ذلك، فإننا يمكننا القيام بحساب كيف يمكن أن يتغير العمل المتاح (بالزيادة أو بالنقص)، (ويظل الأساس الأمثل الحالي (مزيج الإنتاج) على ما هو عليه.

فإذا كانت (ح_١) ترمز إلي مقدار العمل المتاح، (ح_٢) ترمز إلي متجه الثوابت الجديد في جدول السمبلكس المبدئي فإن:

$$\begin{bmatrix} ١-ح \\ ٣ \end{bmatrix} = ح$$

ولكي يكون جدول السمبلكس السابق جدولاً أمثلاً كما هو: فإن حاصل ضرب كل عمود من أعمدة المتغيرات في جدول السمبلكس الأمثل \times قيمة الثوابت الجديد يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفر بمعنى أن:

$$\begin{bmatrix} ٣-١ح٤ \\ ٣+١ح- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١-ح \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- ٤ \\ ١ ١- \end{bmatrix}$$

ويكون حاصل الضرب موجباً طالما أن:

$$٣-١ح٤ \leq \text{صفر} \text{ أو } ١ح \leq \frac{3}{4}$$

$$٣+١ح- \leq \text{صفر} \text{ أو } ١ح \geq ٣$$

الأمر الذي يعني أن س_١، س_٢ ستظل تعبر عن المزيج الأمثل للإنتاج، طالما أن العمل المتاح يتغير بين $\frac{3}{4}$ من الوحدة إلى ٣ وحدات؛ إلا أن الحل الأمثل سيتغير، وستتغير قيمة أقصى الأرباح؛ وعلى ذلك يكون قد توفر لدينا مدى من الحلول المثلى تتحدد على النحو الآتي:

بالنسبة لكل قيم $\frac{3}{4} \geq ١ح \geq ٣$: فإن الحل الأمثل يصبح:

$$س_١ = ١ح٤ - ٣ \text{ أي أن: } س_١ = \text{صفر} \text{ أو } س_١ = ٩$$

$$س_٢ = -١ح + ٣ \text{ أي أن: } س_٢ = \frac{9}{4} \text{ أو } س_٢ = \text{صفر}$$

$$س_٣ = \text{صفر}$$

$$\text{كما أن أقصى ربح} = ٢(٣ - ١ح٤) + ٣(-١ح + ٣) = ٥ - ١ح + ٣$$

ويعني ذلك أن أقصى ربح يمكن أن يتحقق في ضوء الحد الأدنى للتغير

في ج_١، والحد الأعلى لهذا التغير يقع بين $\frac{27}{4}$ جنيه، ١٨ جنيهاً.

أي أنه لن يقل عن $\frac{27}{4}$ جنيه ولن يزيد على ١٨ جنيه.

وكمثال آخر؛ فإذا زادت ساعات العمل المتاح إلى ٤ وحدات، وهو الأمر الذي يعني أن قيم ثوابت الجانب الأيسر كما تظهر في جدول السمبلكس المبدئي سوف تتغير إلي $\left[\frac{4}{3} \right]$ ؛ وتتحدد القيم الجديدة لهذه الثوابت في جدول السمبلكس الأمثل النهائي على النحو الآتي:

مصفوفة المتغيرات الراكدة:

في جدول السمبلكس الأمثل متجه الثوابت المعدل متجه الثوابت الجديد

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1\text{ع} & 2\text{ع} \\ 1- & 4 \\ 1 & 1- \end{matrix} \begin{matrix} 1\text{س} \\ 2\text{س} \end{matrix}$$

ويعني ذلك أن جدول السمبلكس النهائي، لم يصبح جدولاً أمثلاً، حيث أن الحل الأساسي الذي يقوم على أساس، $1\text{س} = 13$ ، $2\text{س} = 1$ ، $1\text{ع} = 0$ ، $2\text{ع} = 0$ ، ومن أجل إيجاد مزيج الإنتاج الأمثل الجديد، فإننا نقوم بإدراج القيم الجديدة للثوابت في جدول السمبلكس الأمثل السابق حيث يظهر ذلك على النحو الآتي:

رو	متغيرات	قيم متغيرات	٢	٣	١	صفر	صفر
	الحل	الحل	١س	٢س	٣س	١ع	٢ع
٢	١س	١٣	١	صفر	١-	٤	١-
٣	٢س	١-	صفر	١	٢	١-	١
	اختبار المثالية						
ص و		٢٣	٢	٣	٤	٥	١
رو - ص و			صفر	صفر	٣-	٥-	١-

ونلاحظ هنا أنه على الرغم من أن جدول السمبلكس السابق غير ممكن بسبب عدم تحقق شرط عدم السالبية؛ إلا أنه يمكن التوصل إلى الحل الأمثل الجديد، باستخدام طريقة السمبلكس الثنائية، فالمتغير 2س هو المتغير

الأساسي السالب، ويجب أن يترك الأساس، كما أن المتغير ١ هو المتغير غير الأساسي الوحيد الذي له معامل سالب، وبالتالي سوف يحل محل س٢؛ ويظهر جدول السمبلكس الأمثل الجديد كالآتي:

		١	٣	٢			ر٥
صفر		صفر	١	٣	٢	١	
	٢غ	١غ	٣س	٢س	١س	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل
	٣	صفر	٧	٤	١	٩	س١
	١-	١	٢-	١-	صفر	١	١غ
							اختبار المثالية
	٦	صفر	١٤	٨	٢	١٨	ص و
	٦-	صفر	١٣-	٥-	صفر		ر٥ - ص و

ونلاحظ هنا أن الجدول السابق يعتبر الجدول الأمثل، حيث أن ثوابت الجانب الأيسر موجب؛ كما أنه يمثل مزيج الإنتاج الأمثل الجديد عندما تمت زيادة العمل المتاح بمقدار ٤ وحدات؛ ويتحدد هذا الحل الأمثل الجديد على أساس:

س١ = ٩، س٢ = صفر، س٣ = صفر كما أن أقصى ربح = ١٨ جنيهاً.

٣. التغيير في مصفوفة القيود (أ ل ر):

من الملاحظ أنه قد تتغير مصفوفة القيود أو معاملات هذه المصفوفة،

نتيجة تغييرات معينة مثل:

(أ) إضافة أنشطة أو أوجه نشاط جديدة.

(ب) تغيير احتياجات الأنشطة الموجودة من الموارد.

(ج) إضافة قيود جديدة.

٣/١. إضافة متغير أو نشاط جديد:

بافتراض أن إدارة المنشأة قد قررت في المثال السابق، القيام بإدخال

منتج جديد س٤، بحيث يحتاج هذا المنتج إلى: وحدة واحدة من مورد العمل

ووحدة واحدة من مورد المواد الخام، وأنه تتوافر السوق اللازمة لتسويقه، كما تحقق الوحدة منه هامش مساهمة يبلغ ٣ جنيهات؛ وترغب إدارة المنشأة في معرفة ما إذا كان تصنيع هذا المنتج يعتبر اقتصادياً أم لا.

نلاحظ هنا أن إدخال منتج جديد في مزيج الإنتاج الحالي، يعتبر رياضياً - معادلاً لإضافة متغير جديد - وليكن س_٣ - له عمود (١) في جدول السمبلكس المبدئي في المثال السابق - كما نلاحظ أن مزيج الإنتاج الأمثل الحالي السابق تحديده سيظل أمثلاً طالما أن معامل ربح هذا المنتج الجديد في صف التقييم النهائي (ر_٣ - ص_٣) - أي: ب؛ - معامل سالب، وحتى يمكن إيجاد معامل المنتج الجديد في صف التقييم النهائي، فإننا يجب أن نقوم بحساب التأثير النهائي على مستوى الأرباح نتيجة إضافة وحدة واحدة من مورد العمل، وإضافة وحدة واحدة من مورد المواد الخام، من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج الجديد س_٣؛ حيث أن إضافة وحدة واحدة من مورد العمل يؤدي إلى: زيادة ما ينتج من س_١ (+٤) وتخفيض ما ينتج من س_٢ (-١)؛ وإضافة وحدة واحدة من مورد المواد الخام لإنتاج المنتج الجديد سيؤدي إلى: تخفيض ما ينتج من س_١ (-١) وزيادة ما ينتج من س_٢ (+١) ويظهر التأثير النهائي على الأرباح على النحو الآتي:

$$(1, 5) = (3, 2) \begin{bmatrix} \text{س}_٥ & \text{س}_٤ \\ ١- & ٤ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{س}_١ \\ \text{س}_٢ \end{matrix}$$

ويكون معامل س_٣ في صف التقييم النهائي (ر_٣ - ص_٣) هو:

$$\text{ب؛} - ٣ = (1, 5) [\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix}] - ٣ =$$

حيث يبين هذا المعامل السالب أن: إنتاج المنتج الجديد س_٣؛ لن يساهم في تحسين القيمة الحالية لأقصى ربحية، ويظل الحل الأمثل السابق كما هو. غير أننا نلاحظ أنه في الحالات التي يتبين منها أن المتغير أو النشاط الجديد، يمكن أن يساهم في زيادة الأرباح، حيث تكون قيمة معامل ت ر

موجبة في صف التقييم النهائي، فإننا حينئذ يمكننا تطبيق طريقة السمبلكس لتحديد الحل الأمثل الجديد.

٣/٢. التغيير في احتياجات الأنشطة الموجودة من الموارد:

من الملاحظ أنه عندما تتغير احتياجات الموارد كالعامل أو المواد الخام لمتغير ما غير أساسي في الحل الأمثل - مثل المتغير س_٣ - فإنه يمكن دراسة تأثير ذلك على الحل الأمثل، عن طريق إتباع نفس الخطوات التي اتبعت في الحالة (٣/١)؛ غير أنه إذا تغيرت معاملات القيود لمتغير ما أساسي - مثل المتغير س_١ أو س_٢: فإننا حينئذ سنجد أن المصفوفة الأساسية نفسها سوف تتأثر، مما يؤدي بالتبعية إلى التأثير على كل القيم المعطاة في جدول السمبلكس الأمثل السابق، الأمر الذي يترتب عليه عدم إمكانية هذا الجدول؛ ويكون من الأفضل في مثل هذه الظروف ضرورة القيام بحل البرنامج الخطي كله مرة ثانية.

٣/٣. إضافة قيود جديدة:

إذا افترضنا أنه قد تمت إضافة قيد جديد مثل الخدمات الإدارية، في المشكلة التي يتم فيها إنتاج المنتجات س_١، س_٢؛ حيث تحتاج هذه المنتجات إلى ١ ساعة، ٢ ساعة، ١ ساعة من الخدمات الإدارية على الترتيب، وأن ساعات الخدمات الإدارية المتاحة تبلغ ١٠ ساعات، فإنه يترتب على ما سبق، إضافة قيد جديد في التكوين والصياغة الأصلية للمشكلة، بحيث يأخذ الصورة الآتية:

$$١٠ \geq ٣س١ + ٢س٢ + ١س٣$$

وبهدف دراسة أثر هذا القيد على الحل الأمثل الحالي، فإن التحقق من أن مزيج الإنتاج الحالي يحقق هذا القيد الجديد يعتبر كافياً؛ ويظل الحل الأمثل الحالي - رياضياً - حلاً أمثلاً، طالما أنه يحقق هذا القيد الجديد؛ فإذا كان مزيج الإنتاج الأمثل الحالي يتحدد على أساس س_١ = ١، س_٢ = ٢، س_٣ = صفر.

فإن تحقيق القيد الجديد يتم على النحو الآتي:

$$1(1) + 2(2) + 1(\text{صفر}) = 5 \geq 10$$

وعلى ذلك فإن مزيج الإنتاج الأمثل، لن يحدث بشأنه أي تغيير. غير أنه إذا افترضنا أن ساعات الخدمات الإدارية المتاحة كانت ٤ ساعات فقط: فإن القيد الجديد يصبح على النحو الآتي:

$$1س١ + ٢س٢ + ٣س٣ \geq ٤$$

وبذلك نجد أن مزيج الإنتاج الأمثل الحالي (١=١س، ٢=٢س، ٣=٣س= صفر) لن يحقق هذا القيد، ولن يظل هذا المزيج حلاً أمثلاً؛ ولكي يمكن إيجاد الحل الأمثل الجديد، فإنه يجب إضافة القيد الجديد كصف ثالث في جدول السمبلكس الأمثل السابق، وباستخدام س؛ كمتغير راكد في القيد الجديد، فإن جدول السمبلكس بعد إضافة القيد الجديد سيظهر كالآتي:

ر و	٢	٣	١	صفر	صفر	صفر
	قيم متغيرات	متغيرات	الحل	١س	٢س	٣س
٢	١	١	صفر	١-	٤	١- غ
٣	٢س	٢	صفر	١	١-	١ غ
صفر	س؛	٤	١	٢	١	صفر
اختبار المثالية ص و	٨	٢	٣	٤	صفر	١
ر و - ص و	صفر	صفر	٣-	صفر	٥-	١-

ومن دراسة جدول السمبلكس السابق، يتبين لنا أنه ليس في صورته الصحيحة؛ حيث توجد معاملات موجبة للمتغيرات الأساسية س١، س٢ في الصف الثالث من المصفوفة؛ ولكي يمكن التخلص من المعاملات الموجبة للمتغيرات س١، س٢: فإننا نستطيع ضرب الصف الأول من المصفوفة $x - 1$ ، وضرب الصف الثاني $x - 2$ ، وجمع ناتج الصفيين على الصف الثالث، بحيث يمكن التوصل إلى الجدول الجديد بشكله الصحيح؛ كما نلاحظ أيضاً أن

معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي (ر و - ص) لن تتأثر في هذه الحالة، لأن المتغير الأساسي الجديد س؛ يعتبر متغيراً راكداً؛ ويظهر جدول السمبلكس الجديد في صورته الصحيحة على النحو الآتي:

ر و		٢	٣	١	صفر	صفر	صفر
متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س _١	س _٢	س _٣	س؛	غ _١	غ _٢
س _١	١	١	صفر	١-	صفر	٤	١-
س _٢	٢	صفر	١	٢	صفر	١-	١
س؛	١-	صفر	صفر	٢-	١	٢-	١-
اختبار المثالية ص و		٨	٢	٣	٤	صفر	٥
ر و - ص و			صفر	صفر	٣-	صفر	٥-

وقبل أن نحكم علي مثالية الجدول السابق، فإننا يجب أن نتأكد ونتحقق من أن الحل الناتج منه حلاً ممكناً. حيث يلاحظ أن الحل الأساسي الممكن، هو ذلك الحل الذي تكون فيه قيم المتغيرات الأساسية غير سالبة؛ ولذلك فإن الحل السابق يعتبر غير ممكن بسبب وجود قيمة سالبة (-١) للمتغير الأساسي في الحل س؛؛ وذلك بالإضافة إلى ذلك فإن الأساس الممكن لأي نموذج خطي، يجب أن يكون ممكناً أيضاً للنموذج الثنائي له؛ وإذا ما وجد أساس ممكن للنموذج الأصلي وكان ممكناً للنموذج الثنائي؛ فانه يكون أمثل لكليهما؛ وهناك طريقتان لتحقيق الأساس الممكن:

الطريقة الأولى: استخدام طريقة السمبلكس التي سبق دراستها - عن طريق الانتقال من أساس أصلي - في النموذج الأصلي - إلى آخر إلى أن يصبح الأساس ممكناً للنموذج الثنائي أيضاً؛ ويطلق على هذا الاتجاه طريقة السمبلكس الأصلية.

الطريقة الثانية: وتقوم هذه الطريقة علي أساس أنه بدلاً من التحرك من حل أساسي أصلي ممكن إلى آخر، فانه يمكن البدء بالأساس الثنائي الممكن أولاً والتوصل منه إلى الأساس الأصلي الممكن، عن طريق الانتقال من جدول ثنائي ممكن إلى آخر؛ ويطلق على هذا الاتجاه طريقة السمبلكس الثانية.

وتستخدم هذه الطريقة نفس جدول السمبلكس الذي يمثل طريقة السمبلكس الأصلية، ولكن تشترط أن تكون كل معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي (ر و - ص و) معاملات غير سالبة للتوصل إلى الحل الأمثل، كما تستلزم أن تكون جوانب الجانب الأيسر - المجموع الكمي - غير سالبة؛ وعلى ذلك فإنها تستخدم القواعد الرياضية التي تساعد علي جعل ثوابت الجانب الأيسر غير سالبة، مع عدم الإخلال في نفس الوقت بالمعاملات غير السالبة في صف التقييم النهائي (ر و - ص و)؛ ويمكن القول في ضوء ذلك، أن هناك دائماً حلاً أساسياً، ويكون ممكناً ثنائياً، ولكن ليس أساسياً ممكناً أصلياً ناتجاً من الانتقال من حل إلي آخر؛ وتتوقف قواعد طريقة السمبلكس الثنائية عندما تصبح كل ثوابت الجانب الأيسر غير سالبة، ويكون لدينا جدولاً يتضمن حلاً ممكناً أصلياً وثنائياً وبالتالي حلاً أمثلاً؛ ويتم تطبيقها كالاتي:

١- اختيار متغير أساسي ليترك الأساس:

ويتم ذلك باختيار المتغير الأساسي المتسبب في جعل الحل الحالي غير ممكن، بمعنى أنه يتم اختيار المتغير الأساسي الخارج الذي تكون قيمته سالبة، والمتغير الأساسي الذي يكون له أكبر قيمة سالبة يتم اختياره أولاً ليترك الأساس.

٢- اختيار متغير غير أساسي ليدخل الأساس:

يتم اختيار العمود الرئيس بحيث يحقق الشرطين الآتيين:

(أ) يجب أن يقلل عدم الإمكانية في النموذج الأصلي بقدر الإمكان، بمعنى أنه يتم اختيار تلك المتغيرات غير الأساسية (س ر) والتي لها معاملات سالبة في صف المتغير الذي سيترك الأساس لأنها تحقق التوصل إلى ثابت الجانب الأيسر الموجب.

(ب) أن يظل الجدول التالي - بعد عملية الانتقال إلى جدول آخر - ممكناً ثنائياً؛ ويمكن ضمان تحقيق ذلك لو أن المتغير غير الأساسي الذي سيدخل الأساس قد تم اختياره طبقاً لقاعدة أقصى معدل: إذا كان النموذج الثنائي يهدف إلى تعظيم الربح؛ أو قاعدة أدنى معدل: إذا كان النموذج الثنائي يهدف إلى تدنية التكاليف.

وبتطبيق طريقة السمبلكس الثنائية على الجدول السابق الذي نتج عنه حل أساسي غير ممكن فإننا نتبع الآتي:

- ١- المتغير س_٢ له قيمة سالبة، وبالتالي يجب أن يترك الأساس.
- ٢- اختيار المتغير غير الأساسي الذي يدخل الأساس طبقاً لقاعدة أدنى معدل، لأن النموذج الثنائي لهذا النموذج الأصلي يهدف إلى تدنية التكاليف؛ ويتم حساب هذا المعدل كالآتي:

المعدلات	معاملات المتغيرات في صف س _٢ ؛	معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي	المتغيرات غير الأساسية
$\frac{3}{2}$	٢-	٣-	س _٢
$\frac{5}{2}$	٢-	٥-	غ _١
١	١-	١-	غ _٢

ويكون أدنى معدل هو (١) وهو يناظر المتغير غ_٢؛ وعلي ذلك يتم اختيار المتغير غ_٢ ليُدخل الأساس ويحل محل س_٢؛ ورقم المفتاح (١-) ويتم تعديل الصفوف طبقاً للقاعدة المتبعة المعروفة؛ مع ملاحظة أن الطريقة السابقة التي اتبعت في تحديد المتغير الداخل للأساس، قد قامت علي النموذج الثنائي؛ فمعاملات المتغيرات (س_٢) في صف التقييم النهائي (ر و - ص) هي القيم التجريبية للمتغيرات الثنائية - كما سبق أن ذكرنا - كما أن المعاملات السابقة لهذه المتغيرات في صف س_٢ تناظر معاملات أحد الأعمدة في المصفوفة المحورة للنموذج الثنائي؛ ويظهر جدول السمبلكس الأمثل الجديد كالآتي:

ر و	٢	٣	١	صفر	صفر	صفر
	س _١	س _٢	س _٣	س _٤	غ _١	غ _٢
٢	١	صفر	١	١-	٦	صفر
٣	صفر	١	صفر	١	٣-	صفر
صفر	صفر	صفر	٢	١-	٢	١
اختبار المثالية ص و	٧	٢	٣	٢	٣	صفر
ر و - ص و		صفر	صفر	١-	٣-	صفر

ويعتبر الجدول السابق جدولاً أمثلاً، حيث يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل الجديد على أساس أن: $s_1 = 2$ وحدة، $s_2 = 1$ وحدة؛ وقد انخفض أقصى ربح من ٨ جنيهات، إلى ٧ جنيهات، حيث يلاحظ هنا أن سبب ذلك هو إضافة قيد جديد؛ ويعتبر ذلك حقيقة مؤكدة في كل مشاكل البرمجة الخطية، بمعنى أن إضافة قيد جديد لا يمكن أن يحسن قيمة دالة الهدف؛ ودائماً ما تكون القيمة المثلى القديمة أفضل من القيمة الجديدة.

مثال (٢):

تقوم إحدى المنشآت الصناعية بإنتاج مجموعة من المنتجات، يستلزم إنتاجها استخدام ثلاثة أنواع من الموارد: ١. الخدمات الفنية والإنتاجية؛ ٢. العمل؛ ٣. الخدمات الإدارية؛ ويوضح الجدول الآتي نوعية وكميات احتياجات كل منتج من المنتجات من كل مورد من الموارد، والطاقة المتاحة في كل مورد، وهامش مساهمة كل منتج؛ وذلك كمل يتبين مما يلي:

هامش مساهمة (الوحدة)	احتياجات الموارد (بالساعات)			المنتجات
	الخدمات الإدارية	العمل	الخدمات الفنية	
١٠ جنيهات	٢	١٠	١	المنتج الأول
٦ جنيهات	٢	٤	١	المنتج الثاني
٤ جنيهات	٦	٥	١	المنتج الثالث
	٣٠٠	٦٠٠	١٠٠	الطاقة المتاحة بالساعات

ولكي يمكن تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعمل على تعظيم الأرباح، فإنه قد تم حل البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{المطلوب تعظيم أرباح} = 10s_1 + 6s_2 + 4s_3$$

وذلك طبقاً للقيود الآتية:

$$100 \geq s_1 + 2s_2 + 3s_3 \quad (\text{مورد الخدمات الإنتاجية})$$

$$600 \geq 10s_1 + 4s_2 + 5s_3 \quad (\text{مورد العمل})$$

$$300 \geq 2s_1 + 2s_2 + 6s_3 \quad (\text{مورد الخدمات الإدارية})$$

وطبقاً لشرط عدم السلبية فإن: $s_1 \geq 0$ ؛ $s_2 \geq 0$ ؛ $s_3 \geq 0$

وقد تحدد الحل الأمثل بالجدول الآتي حيث تعتبر غ_١، غ_٢، غ_٣ بمثابة

المتغيرات الراكدة:

ر و	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	١٠	٦	٤	صفر	صفر	صفر
٦	٢س	٤٠٠/٦	صفر	١	٥/٦	١غ	٢غ	٣غ
١٠	١س	٢٠٠/٦	١	صفر	١/٦	٤غ	١غ	صفر
صفر	٣غ	١٠٠	صفر	صفر	٤	٢-	صفر	١
اختبار المثالية ص و		٤٤٠٠/٦	١٠	٦	٤٠/٦	٢٠/٦	٤/٦	صفر
ر و - ص و			صفر	صفر	١٦/٦	٢٠/٦	٤/٦	صفر

والمطلوب: استخدام تحليل الحساسية (للنموذج الذي يمثل حله الأمثل الجدول

المبين أعلاه) في تحديد الإجابات المناسبة لكل مما يأتي:

١- ما هو الربح الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج س_٣ حتى يمكن إقرار إنتاجه؟
استخرج المزيغ الإنتاجي الأمثل الأكثر ربحية، إذا علمت أن ربح الوحدة من المنتج س_٣ قد زاد إلى $\frac{50}{6}$ جنيهاً؟

٢- ما هو المدى الذي يمكن أن يتغير فيه ربح الوحدة من المنتج س_١، بحيث يظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه؟

٣- يدعي بعض المسؤولين بالمنشأة بأن تقديرات الساعات المتاحة من مورد الخدمات الإنتاجية: قد تكون غير صحيحة؛ وأن التقدير الصحيح يبلغ ١٠٠ + ١٠ β؛ حيث β معلومة غير معروفة. استخرج مدى التغير في β لكي يظل المزيغ الإنتاجي الأمثل على ما هو عليه؟

٤- حدد أسعار الظل لكل مورد من الموارد.

٥- اقترح قسم الإنتاج بالمصنع: أن يتم القيام بإنتاج منتج جديد يحتاج إلى: ١ ساعة من مورد الخدمات الإنتاجية؛ و ٤ ساعات من العمل؛ و ٣ ساعات خدمات إدارية؛ كما تنبأ قسم التسويق والمبيعات بأن هذا المنتج يمكن أن يباع بما يحقق هامش مساهمة للوحدة يبلغ ٨ جنيهاً؛ بماذا تنصح الإدارة؟

٦- على افتراض أن المنشأة قررت أن تنتج ١٠ وحدات على الأقل من المنتج س٣؛
فما هو المزيج الإنتاجي الأمثل؟

الإجابة

(أولاً): يتبين من جدول المزيج الإنتاجي الأمثل أن: المنتج س٣ اعتبر منتجاً غير أساسي، ولم يتم إنتاجه بسبب انخفاض هامش مساهمة الوحدة منه أي (ب٣) حيث تبلغ ٤ جنيهات؛ ومن الواضح أن أي تخفيض في المعامل ب٣ إلى أقل من ٤ جنيهات، لن يكون له تأثير على الحل الأمثل الحالي، لأن المنتج س٣ سوف يظل غير مربح.

إلا أننا إذا نظرنا إلي صف التقييم النهائي (ر و - ص و) : فإننا نجد أن معامل س٣ أي ب٣ = $-\frac{1}{16}$ ، وهي تمثل مقدار التخفيض في القيمة المثلى لدالة الهدف، والتي تنتج من زيادة وحدة واحدة منه؛ وفي نفس الوقت فإن هذا المعامل يعتبر بمثابة أقصى إضافة موجبة لمعاملات دالة الهدف؛ وعلى ذلك فإن أقصى زيادة في الربح من المتغير س٣ هي: $\frac{16}{6}$ جنيهاً؛ ويعني ذلك أن هامش مساهمة الوحدة منه يجب أن يزيد من ٤ جنيه إلى أكثر من $\frac{40}{6} (٤ + \frac{16}{6})$ وذلك لكي يكون مربحاً؛ كما يمكن القول بأن معامل س٣ في دالة الهدف يمكن أن يقع بين (صفر، $\frac{40}{6}$) ويظل الحل الحالي حلاً أمثلاً؛ إلا أنه لكي يتقرر إنتاجه فإن هامش مساهمة الوحدة منه يجب أن يكون أكبر من $\frac{40}{6}$ جنيهاً.

كما أنه عندما يكون ربح الوحدة من س٣ = $\frac{50}{6}$ جنيهاً؛ فإن هذا يعني أن هناك تغيير عن المدى (صفر، $\frac{40}{6}$) الذي يظل فيه المزيج الإنتاجي على ما هو عليه؛ وحينئذ فإن ب٣ = $\frac{50}{6} - \frac{40}{6} = \frac{10}{6}$ ومزيج الإنتاج الحالي لن يكون أمثلاً؛ لأنه يمكن زيادة الأرباح القصوي بإنتاج المنتج س٣؛ وبذلك لن جدول السمبلكس السابق هو الجدول الأمثل؛ ذلك لأنه يمكن إدخال س٣ في الأساس لزيادة قيمة دالة الهدف؛ وفي ضوء هذا التغيير في معامل س٣ في دالة الهدف، فإنه يجري التعديل الآتي:

أ- عمود المتغير س٣ سيصبح هو عمود المفتاح: لأن له أكبر قيمة موجبة + $\frac{10}{6}$ = $(\frac{40}{6} - \frac{50}{6})$

- ب - باختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل س_٣ محله: نجد أن صف س_١ هو صف المفتاح، لأنه يشمل أصغر قيمة موجبة (١٠٠ ÷ ٤) ج - رقم المفتاح (٤).
 د - يتم تعديل صف المفتاح: بقسمة الأرقام الظاهرة فيه على رقم المفتاح (٤) لينتج صف س_٣ الجديد.
 هـ - يتم تعديل الصفوف الأخرى طبقاً للقاعدة المعروفة؛ حيث يظهر جدول السمبلكس الأمثل على النحو الآتي:

ر و		١٠	٦	$\frac{50}{6}$	صفر	صفر	صفر
قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	س _١	س _٢	س _٣	غ _١	غ _٢	غ _٣
$\frac{275}{6}$	س _٢	صفر	١	صفر	$\frac{25}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$
$\frac{175}{6}$	س _١	١	صفر	صفر	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
٢٥	س _٣	صفر	صفر	١	$\frac{1}{2}$	صفر	$\frac{1}{4}$
$\frac{4650}{6}$	اختبار المثالية ص و	١٠	٦	$\frac{50}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$
	ر و - ص و	صفر	صفر	صفر	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$

ويتحدد المزيج الإنتاجي الأمثل الجديد على النحو الآتي:

$$س_١ = \frac{175}{6} \text{ وحدة، } س_٢ = \frac{275}{6} \text{ وحدة، } س_٣ = ٢٥ \text{ وحدة.}$$

وتبلغ قيمة أقصى ربحية ممكنة: $\frac{4650}{6}$ جنيهاً؛ وهو يزيد عن قيمة دالة

الهدف السابقة.

(ثانياً): لتحديد المدى الذي يمكن أن يتغير فيه معامل المتغير الأساس س_١، ولا يتأثر الحل الأمثل السابق بإيجاده: فإنه يجب تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لهذا التغير في معامل س_١ (أي ب_١)؛ ولتحديد مدى التغير في ب_١، فإنه يجب أن نلاحظ هنا أن أي تغيير يحدث في ب_١ من شأنه أن يغير متجه

ربح الوحدة ب ر = (ب_١ ، ب_٢)؛ غير أن هذا التغيير لن يؤثر علي معاملات هذه المتغيرات الأساسية في صف التقييم النهائي (ر و - ص و) وهي ب_١ ، ب_٢ ؛ حيث تظل قيم هذه المعاملات = صفر؛ إلا أن هذا التغيير سوف يؤثر علي معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي (ر و - ص و) ، وهي ب_٣ ، ب_٤ ، ب_٥ ؛ إلا أنه طالما أن معاملات هذه المتغيرات تظل سالبة: فإن الجدول الأمثل السابق سيظل يمثل الجدول المثلى.

ويمكن التعبير عن قيم ب_٣ ، ب_٤ ، ب_٥ كدالة للمعامل ب_١ كالاتى:

$$ب_٣ = -٤ = (ب_١ ، ٦ ، صفر) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ ٤ \end{bmatrix} = ١ - ب_١ \frac{1}{6}$$

$$ب_٤ = صفر - (ب_١ ، ٦ ، صفر) = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{10}{6} \\ ٢ \end{bmatrix} = ١٠ - ب_١ \frac{4}{6}$$

$$ب_٥ = صفر - (ب_١ ، ٦ ، صفر) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ صفر \end{bmatrix} = ١ + ب_١ \frac{1}{6}$$

ومما سبق يمكن لنا أن نتبين أن:

$$ب_٣ \geq صفر \quad طالما أن ب_١ \leq ٦$$

$$ب_٤ \geq صفر \quad طالما أن ب_١ \leq ١٥$$

$$ب_٥ \geq صفر \quad طالما أن ب_١ \leq ٦$$

كما أن الجدول المثل السابق سيظل أمثلاً طالما أن التغير في ب₁ يقع في الحدود التي حددتها المتغيرات غير الأساسية؛ وهنا يجب أن نلاحظ أن مدى التغير في ب₁ هو (٦، ١٥): أي أن ب₁ يمكن أن تتغير من ٦ فأكثر إلى أقل من أو يساوي ١٥، وسيظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه، وتظل معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي (ر و - ص و) سالبة.

(ثالثاً): لتحديد مدى قيم β التي تحقق التقدير الصحيح لعدد الساعات المتاحة من مورد الخدمات الإنتاجية بحيث يكون $10 + 100\beta$ ويظل المزيج الإنتاجي الأمثل على ما هو عليه؛ فلا بد أن نحدد أولاً مدى التغير في عدد الساعات المتاحة من الخدمات الإنتاجية ومن خلاله يمكننا أن نستنتج مدى قيم β .

نلاحظ هنا أن مورد الخدمات الإنتاجية يمثل المورد الأول ج₁ في جدول السمبلكس المبني؛ فإذا كانت ج₁ هي قيمة الثوابت الجديدة فهي تظهر كالاتي:

$$\vec{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 600 \end{bmatrix}$$

ويجب هنا أن نلاحظ أنه لكي يظل الأساس الأمثل (مزيج الإنتاج) على ما هو عليه؛ فإن حاصل ضرب كل عمود من أعمدة المتغيرات الراكدة (في جدول السمبلكس الأمثل) \times قيم متجه الثوابت الجديد: يجب أن يكون \leq الصفر؛ بمعنى أن:

$$\begin{bmatrix} 400 - 1 \cdot \frac{10}{6} \\ 100 + 1 \cdot \frac{10}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - \frac{10}{6} \\ \frac{1}{6} - \frac{4}{6} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{س} ٢ \\ \text{س} ١ \end{matrix}$$

ويكون حاصل الضرب موجباً طالما أن:

$$\begin{aligned} \frac{10}{6} - 400 &\leq \text{صفر أو ج} ١ \leq 240 \\ \frac{10}{6} + 100 &\leq \text{صفر أو ج} ١ \leq 600 \end{aligned}$$

ويعني ذلك أن: س_٢، س_١ سوف تبقى هي بمثابة المزيج الأمثل للإنتاج، طالما أن ساعات الخدمات الإنتاجية تتغير ما بين (٢٤٠، ٦٠٠) إلا أن الحل الأمثل سيتغير، وكذلك سوف تتغير قيمة أقصى ربحية؛ ويكون قد توفر لدينا مدى من المحلول المثلى الذي تكون فيه:

$$٢٤٠ \geq ج١ \geq ٦٠٠ \text{ وتتحدد كالاتي:}$$

$$س٢ = \left(\frac{10}{6}ج١ - ٤٠٠\right) \text{ أي أن: } س٢ \text{ عند أدنى حد} = \text{صفر؛}$$

وأن: س_٢ عند أعلى حد = ٦٠٠ وحدة.

$$س١ = \left(-\frac{10}{6}ج١ + ١٠٠\right) \text{ أي أن: } س١ \text{ عند أدنى حد} = ٦٠ \text{ وحدة؛}$$

وأن: س_١ عند أعلى حد = صفر.

$$\text{وأن أقصى ربح} = ٦ \left(\frac{10}{6}ج١ - ٤٠٠\right) + ١٠ \left(-\frac{1}{6}ج١ + ١٠٠\right) = \frac{50}{6}ج١ - ١٤٠٠$$

ويعني ذلك أن: أقصى ربح يمكن أن يتحقق في ضوء الحد الأدنى للتغيير في ج_١ هو: ٦٠٠ جنيهاً $\left(\frac{50}{6} \times ٢٤٠ - ١٤٠٠\right)$ ؛

وأن أقصى ربح يمكن أن يتحقق في ضوء الحد الأقصى للتغيير في ج_١ هو: ٣٦٠٠ جنيهاً $\left(\frac{50}{6} \times ٦٠٠ - ١٤٠٠\right)$ ؛

أي أنه لن يقل عن ٦٠٠ جنيهاً ولن يزيد عن ٣٦٠٠ جنيهاً. هذا، ويمكننا تحديد مدى قيم β من المدى السابق للتغيير في ج_١ وذلك

$$\text{على النحو الآتي: } ج١ = ١٠٠ + \beta ١٠$$

$$٢٤٠ = ١٠٠ + \beta ١٠ \text{ أي أن } \beta ١٠ = ١٠٠ - ٢٤٠$$

$$\underline{\underline{\beta ١٠ = ١٤٠}} \quad \therefore \underline{\underline{\beta = ١٤}}$$

$$ج١ = ١٠٠ + \beta ١٠$$

$$٦٠٠ = ١٠٠ + \beta ١٠ \text{ أي أن } \beta ١٠ = ٦٠٠ - ١٠٠$$

$$\underline{\underline{\beta ١٠ = ٥٠٠}} \quad \therefore \underline{\underline{\beta = ٥٠}}$$

ويعني ذلك أن β يمكن أن تتغير بحيث تكون: $٥٠ \geq \beta \geq ١٤$

ويظل المزيج الإنتاجي الأمثل على ما هو عليه.

(رابعاً): أسعار ظل كل مورد من الموارد تتحدد على أنها: معاملات المتغيرات الراكدة في صف التقييم النهائي (ر و - ص و) في جدول السمبلكس الأمثل، وهي تظل تحت أعمدة المتغيرات الراكدة غ_١، غ_٢ في صف التقييم النهائي (- $\frac{20}{6}$ ، - $\frac{4}{6}$) وهي عبارة عن الزيادة أو الإضافة في مستوى الربح عن كل وحدة يتم إضافتها من مورد معين؛ فإضافة ساعة واحدة من الساعات المتاحة من المورد الأول (الخدمات الإنتاجية): سوف يؤدي إلى تحسين مستوى الأرباح بمقدار $\frac{20}{6}$ جنيهاً عن كل وحدة يتم إضافتها؛ حيث يتحدد التأثير النهائي على مستوى الأرباح كالاتي:

$$\text{بالنسبة للمنتج س}_٢ : + \frac{10}{6} (٦) = ١٠ +$$

$$\text{بالنسبة للمنتج س}_١ : - \frac{4}{6} (١٠) = -\frac{40}{6}$$

∴ التأثير النهائي على مستوى الأرباح = $+\frac{20}{6}$ جنيه.

وبالنسبة للمورد الإنتاجي الثاني (وهو ساعات العمل): فإن إضافة ساعة واحدة من الساعات المتاحة من هذا المورد (ساعات العمل): سوف يؤدي إلى تحسين مستوى الأرباح بمقدار $\frac{4}{6}$ جنيهاً عن كل وحدة يتم إضافتها؛ حيث يتحدد التأثير النهائي على مستوى الأرباح كالاتي:

$$\text{بالنسبة للمنتج س}_٢ : - \frac{1}{6} (٦) = ١ -$$

$$\text{بالنسبة للمنتج س}_١ : + \frac{1}{6} (١٠) = +\frac{10}{6}$$

∴ التأثير النهائي على مستوى الأرباح = $+\frac{4}{6}$ جنيه.

أما بالنسبة للمورد الثالث (وهو الخدمات الإدارية): فإن سعر الظل الخاص به = صفر؛ ويمثله المتغير الراكد غ_٣؛ وهذا يوضح زيادة كمية المعروض من هذا المورد؛ حيث تتمثل هذه الطاقة الفائضة في ١٠٠ ساعة عاطلة في المورد الثالث ويعبر عنها المتغير الراكد غ_٣ والذي يمثل هذا المورد؛ ونلاحظ هنا أن إضافة وحدة واحدة من الطاقة المتاحة في هذا المورد

لن تؤدي إلى تحسين مستوي الأرباح؛ ذلك أن سعر ظل هذا المورد = صفر؛
ومن ثم فإن أي إضافة للعرض الفائض لن يكون له أية قيمة.
وعلي ذلك فإن سعر ظل الموارد الثلاثة يتحدد كالآتي:

$$\text{مورد الخدمات الإنتاجية} = \frac{20}{4} \text{ جنيهاً.}$$

$$\text{مورد العمل} = \frac{4}{6} \text{ جنيهاً.}$$

$$\text{مورد الخدمات الإدارية} = \text{صفر.}$$

(خامساً): إن اقترح قسم الإنتاج بالمصنع، بإنتاج منتج جديد وليكن

س، يعتبر - من الناحية الرياضية - معادلاً لإضافة متغير جديد له عمود

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

في جدول السمبلكس المبدئي؛ حيث نلاحظ هنا أن المزيج الإنتاجي
الأمثل الحالي السابق تحديده، سيظل أمثلاً؛ طالما أن معامل ربح هذا المنتج
الجديد في صف التقييم النهائي (ر و - ص و) أي ب؛ معاملاً سالباً؛ ولكي
يمكن إيجاد معامل هذا المنتج الجديد في صف التقييم النهائي؛ فإنه يجب أولاً
أن نحسب تأثير إضافة وحدة واحدة من كل مورد لإنتاج المنتج الجديد على
مستوى الأرباح الحالي؛ بإضافة وحدة من مورد الخدمات الإنتاجية لإنتاج س؛
سيؤدي إلى زيادة ما ينتج من س_٢ بمقدار $(\frac{10}{6})$ ؛ وتخفيض ما ينتج من س_١
بمقدار $(\frac{4}{6})$ ، وتخفيض الطاقة العاطلة من الخدمات الإدارية بمقدار (-2) ؛
كما أن إضافة وحدة واحدة من مورد العمل لإنتاج المنتج الجديد سيؤدي إلى
تخفيض ما ينتج من س_٢ بمقدار $(\frac{1}{6})$ ؛ وزيادة ما ينتج من س_١ بمقدار $(\frac{1}{6})$ ؛
كما أن إضافة وحدة واحدة من مورد الخدمات الإدارية لإنتاج المنتج الجديد لن
يؤثر على مستوى الأرباح، نظراً لوجود طاقة عاطلة فائضة في هذا المورد؛
ويحسب التأثير على الربح من إنتاج وحدة واحدة من المنتج الجديد س؛
كالآتي:

$$\left(\text{صفر}, \frac{4}{6}, \frac{20}{6} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{10}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \text{صفر} & \frac{2}{6} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{س} ٢ \\ \text{س} ١ (٦, ١٠, \text{صفر}) \\ \text{س} ٢- \end{matrix}$$

$$٢ + = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \\ ٣ \end{bmatrix} \text{ ويكون معامل س} ١ = -٨ \left(\text{صفر}, \frac{4}{6}, \frac{20}{6} \right)$$

ويلاحظ أن ب؛ أو معامل س؛ في صف التقييم النهائي (ر و - ص و) يمثل التأثير النهائي على مستوى الأرباح، من إنتاج وحدة واحدة من هذا المنتج الجديد، طبقاً لاحتياجات الوحدة منه من كل مورد من الموارد؛ كما يلاحظ أنه تم ضرب احتياجات الوحدة المنتجة من المنتج الجديد من طاقة كل مورد (١، ٤، ٣) على الترتيب \times سعر الظل الخاص بكل مورد $\left(\frac{4}{6}, \frac{20}{6}, \text{صفر} \right)$ ؛ حيث يوضح المعامل الموجب أن: إنتاج المنتج الجديد س؛ سوف يساهم في تحسين القيمة الحالية لأقصى ربحية للمنشأة؛ ومن ثم فإننا ننصح الإدارة هنا باتخاذ قرار بإدخال هذا المنتج في المزيج الإنتاجي؛ ويمكن في هذه الحالة تطبيق طريقة السمبلكس لتحديد الحل الأمثل الجديد.

(سادساً): إذا قررت إدارة المنشأة إنتاج ١٠ وحدات على الأقل من المنتج س٣: فإن هذا يعني إضافة قيد جديد يأخذ الصورة الآتية:

$$\text{س} ٣ \leq ١٠$$

ويظهر هذا القيد ضمن التكوين والصياغة الأصلية للمشكلة. حيث يتبين من ذلك أن: مزيج الإنتاج الحالي لن يحقق هذا القيد الجديد، لأن المنتج س٣ قد استبعد من المزيج الإنتاجي الأمثل؛ وعلى ذلك فإن إضافة هذا القيد سوف يغير هذا المزيج ولن يظل حلاً أمثلاً؛ ولكي يمكن إيجاد الحل

الأمثل الجديد: فإنه يجب إضافة القيد الجديد كصف رابع في جدول السمبلكس الأمثل السابق، وذلك بعد وضع المتباينة في صورة أصغر من أو يساوي لمشاكل تعظيم الأرباح

$-س_٣ \geq ١٠$ ومنها فإن: $-س_٣ + غ_٤ = ١٠$ ويظهر جدول

السمبلكس على النحو الآتي:

ر و	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	١٠	٦	٤	صفر	صفر	صفر	صفر
٦	٢س	٤٠٠	صفر	١	١	١٠	صفر	صفر	صفر
١٠	١س	٢٠٠	١	صفر	١	١٠	صفر	صفر	صفر
صفر	٢غ	١٠٠	صفر	صفر	٤	١٠٠	صفر	١	صفر
صفر	غ٤	١٠	صفر	صفر	١	١٠	صفر	صفر	١
اختبار المثالية ص و	٤٠٠	١٠	١٠	٦	٤٠	٢٠	٤	صفر	صفر
ر و - ص و		صفر	صفر	صفر	١٦	٢٠	٤	صفر	صفر

وبالنظر إلى الجدول السابق يتبين لنا أن: هذا الجدول ليس له حلاً

أساسياً ممكناً؛ وذلك بسبب ظهور المتغير غ٤ في الأساس بإشارة سالبة؛ غير أننا يمكننا التوصل إلى الحل الأمثل، باستخدام طريقة السمبلكس الثنائية كما

يتبين مما يلي:

١- المتغير غ٤: يترك الأساس؛ لأنه المتسبب في عدم إمكانية الحل وله أكبر قيمة سالبة.

٢- يتم اختيار المتغير غير الأساسي الذي يدخل الأساس، طبقاً لقاعدة أدنى معدل $(-\frac{16}{6} / -1)$ ، لأن النموذج الثنائي لهذا النموذج الأصلي، يهدف إلى تدنية أو تخفيض التكاليف؛ ويكون أدنى معدل مناظر للمتغير س٣.

٣- رقم المفتاح هو: (١-)

٤- يتم تعديل صف المفتاح: بقسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ رقم المفتاح (١-)

٥- يتم تعديل الصفوف الأخرى، طبقاً للقاعدة المتفق عليها، والتي تم شرحها فيما سبق (راجع صفحة ٨٧)؛ ويظهر جدول السمبلكس الذي يمثل المزيج الإنتاجي الأمثل الجديد على النحو الآتي:

ر و	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	١٠	٦	٤	صفر	صفر	صفر	صفر
٦	٢س	٣٥٠/٦	صفر	١	صفر	١٠/٦	١/٦	صفر	٢غ؛
١٠	١س	١٩٠/٦	١	صفر	صفر	٤/٦	١/٦	صفر	١غ؛
صفر	٢غ	٦٠	صفر	صفر	صفر	٢	صفر	١	٤
٤	٣س	١٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١ -
اختبار المثالية ص و		٤٢٤٠/٦	١٠	٦	٤	٢٠/٦	٤/٦	صفر	١٦/٦
ر و - ص و			صفر	صفر	صفر	٢٠/٦	٤/٦	صفر	١٦/٦ -

حيث يتحدد المزيج الإنتاجي الأمثل الجديد على النحو الآتي:

$$١س = \frac{190}{6} \text{ وحدة ؛ } ٢س = \frac{350}{6} \text{ وحدة ؛ } ٣س = ١٠ \text{ وحدات}$$

ويحقق هذا المزيج أقصى ربحية ممكنة، وتبلغ $\frac{4240}{6}$ جنيهاً.

ونلاحظ هنا أن الحل السابق: يعتبر حلاً ممكناً للنموذج الأصلي؛ بل

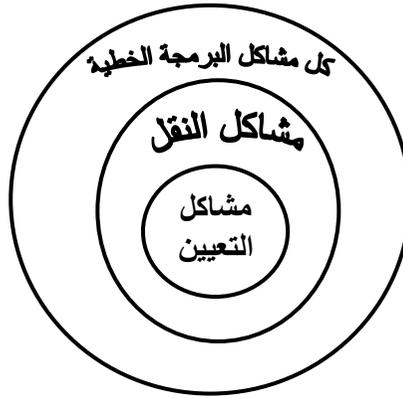
وممكننا أيضاً للنموذج الثنائي له، وعلى ذلك فإنه يعتبر حلاً أمثلاً.

الفصل الثامن

طرق النقل والتعيين

مقدمة:

تعتبر مشاكل النقل والتعيين من المشاكل الخاصة للبرمجة الخطية وقد أمكن من خلال البحث والدراسة التوصل إلى طرق أكثر كفاءة في حل مثل هذه المشاكل من الطريقة العامة للبرمجة الخطية (السملكس) ويمكن تصوير العلاقة بين مشاكل البرمجة الخطية ومشكلتي النقل والتعيين في الشكل التالي:



شكل (١/٨)

يوضح العلاقة بين مشاكل النقل والتعيين بمشاكل البرمجة الخطية

يتضح من الشكل السابق (١/٨) أن مشكلة التعيين يمكن اعتبارها ضمن مشاكل النقل وأنه يمكن حلها بطريقة النقل، كما أن كل من مشكلة النقل ومشكلة التعيين يمكن حلها باستخدام الطريقة العامة للبرمجة الخطية (السملكس)، ولكن حل هاتين المشكلتين يكون أسهل وأبسط باستخدام طريقة النقل وطريقة التعيين اللتان سيتم تناولهما أن شاء الله بالدراسة والتحليل خلال هذا الفصل.

١/٨ طريقة النقل:

تعتبر طريقة النقل **Transportation Method** طريقة خاصة من طرق البرمجة الخطية تستخدم لمعالجة توزيع السلع، والمنتجات ونقلها من المصادر المختلفة **Sources** إلى أماكن التوزيع أو أماكن الاستخدام المطلوب نقلها إليها **Destinations** وذلك في ظل اختلاف فئات تكلفة النقل بما يحقق أقصى أرباح ممكنة أو تحمل أقل تكاليف نقل ممكنة.

هذا ومن المناسب الإشارة إلى أن أول محاولة علمية لحل مشكلة النقل كانت في عام ١٩٤١م بواسطة **F.L.Hitcol** وفي عام ١٩٥١م تطورت طرق حل مشاكل النقل بواسطة كل من **Dantzing and Cooper** وفي عام ١٩٥٣م اقترح كل من **Charnes and Cooper** أول طريقة مبسطة لحل مشكلة النقل، تلك الطريقة التي تعرف بطريقة حجر الوطء (أو الحجر المتحرك) **Stepping Stone Method** وفي عام ١٩٥٥م قام **Dantzing** بتطوير هذه الطريقة مما جعلها أكثر سهولة وأقل مجهوداً وأصبحت الطريقة تسمى بطريقة التوزيع المعدلة **The Modified Distribution Method** وفي نفس العام أي عام ١٩٥٥م اقترح فوجل **W.R. Vogel** طريقة الشهيرة في تحديد الحل المبدئي.

هذا وقبل تناول طريقة النقل بالدراسة والتحليل فإنه يبدو من المناسب

الإشارة إلى ما يلي:

- ١- طريقة النقل كغيرها من طرق الحل بالبرمجة الخطية تسير وفقاً لمبدأ التابعية في الوصول إلى الحل الأمثل. أي أنها تبدأ بحل مبدئي ممكن للمشكلة ثم يتطور هذا الحل إلى حل آخر أفضل منه.. وهكذا حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة.
- ٢- يتطلب حل المشكلة بطريقة النقل ضرورة تساوي مجموع المعروض عند المصادر (أو المنابع) مع مجموع المطلوب عند النهايات أو نقاط الاستخدام المختلفة.

- ٣- حيث أن مشاكل النقل نوع خاص من مشاكل البرمجة الخطية فإنه لحل المشكلة بطريقة النقل يلزم توافر الشروط الواجب توافرها لاستخدام الطرق المختلفة لحل بالبرمجة الخطية والتي تتلخص فيما يلي:
- أ. ضرورة تحديد ووضوح الهدف (الأهداف) المراد تحقيقه.
 - ب. وجود قيود على تحقيق الأهداف والتي تتمثل في الموارد المختلفة المتاحة للاستخدام.
 - ج. وجود علاقة خطية بين متغيرات المشكلة.
 - د. وجود أو توافر بدائل مختلفة للحل تحقق الهدف المنشود مع اختلاف عوائد هذه البدائل.
 - هـ. عدم السالبية أي أن تكون قيم كل المتغيرات أكبر من أو تساوى صفر.
- ١/١/٨ طريقة السمبلكس ومشاكل النقل:
- تعتبر مشاكل النقل من مشاكل البرمجة الخطية ذات الطابع الخاص ولذلك يمكن حلها بطريقة النقل أو بطريقة السمبلكس، فأى مشكلة نقل يمكن حلها بطريقة النقل يمكن حلها بطريقة السمبلكس ويمكن توضيح كيفية تطبيق طريقة السمبلكس على مشاكل النقل من خلال المثال التالي:
- مثال ١/٨:
- تنتج أحدي الشركات منتجا متجانسا من خلال مصنعين (أ، ب) يقعان في منطقتين مختلفتين تبلغ طاقتهما الإنتاجية السنوية ١٠٠٠ وحدة، ٢٠٠٠ وحدة على الترتيب، ويتم تسويق الإنتاج من خلال منفذين للتوزيع هما (ب، ب) تبلغ احتياجاتهما السنوية ١٨٠٠ وحدة، ١٢٠٠ وحدة على الترتيب.
- وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المصنع أ، إلى المنفذ ب، بمبلغ ٤ جنيهه وإلى ب، ب، ٦ جنيهه، ومن المصنع أ، إلى المنفذ ب، ٢ جنيهه، ومن أ، إلى ب، ٨ جنيهه، هذا وترغب إدارة الشركة في التعرف على البرنامج الأمثل للنقل الذي يمكن من نقل الكميات المنتجة إلى منافذ التوزيع بأقل تكلفة نقل ممكنة. على ضوء هذه البيانات يمكن صياغة مشكلة النقل على النحو التالي بفرض أن س تعبر عن الكمية.

١ - دالة الهدف:

$$\text{تخفيض د(ت)} = ٢س١١ + ٦س٢١ + ٢س١٢ + ٨س٢٢$$

٢ - القيود:

تتمثل القيود في طاقات المصادر (المصانع) واحتياجات منافذ التوزيع، وحيث أنه في المثال السابق يوجد مصدرين (مصنعين) ومنفذين للتوزيع، بذلك تكون هناك أربعة قيود اثنان للمصادر واثنان لجهات الوصول (المنافذ).

أ - قيود المصادر:

تسمى بقيود الطاقة حيث ترتبط الكميات المنقولة (س) إلى جهات الوصول بالطاقة المتاحة لكل مصدر من المصادر بذلك تكون القيود على النحو التالي:

قيود المصدر الأول:

$$١٠٠٠ = ٢١س + ١١س$$

أي يجب أن تتساوى الكمية المنقولة من المصنع أ، إلى المنفذين ب، مع طاقة المصنع أ.

قيود المصادر الثاني:

$$٢٠٠٠ = ٢٢س + ١٢س$$

أي أن الكمية المنقولة من المصنع أ، إلى المنفذين ب، يجب أن تتساوى مع طاقة المصنع أ.

ب - قيود الطلب (المنافذ وجهات الوصول):

تسمى هذه القيود بقيود الاحتياجات حيث تربط الكميات المنقولة (س) من المصادر إلى جهات الوصول بكمية الاحتياجات المطلوبة لكل جهة وصول. قيود المنفذ الأول:

$$١٨٠٠ = ١٢س + ١١س$$

أي أن الوحدات المرسله من المصنعين أ، إلى منفذ التوزيع ب، يجب أن تتساوى مع احتياجاته.

قيد المنفذ الثاني:

$$1200 = 21س + 22س$$

أي يجب أن تتساوى الكميات المنقولة من المصنعين أ، ب، إلى منفذ التوزيع ب مع احتياجات ب.

٣ - شرط عدم السالبة:

حيث أنه لا يسمح بنقل كميات سالبة، أي إما أن تكون هناك كميات منقولة فتكون قيم المتغيرات موجبة، أو لا تكون هناك كميات منقولة فتكون قيم المتغيرات صفر، ويجب توافر هذا الشرط أو الغرض لحل مشكلة النقل، وعلى ذلك فإن:

$$11س + 21س + 12س \leq 22س \text{ صفر}$$

هذا وبإضافة المتغيرات الصورية ط_١، ط_٢، ط_٣، ط_٤ إلى القيود السابقة، يكون النموذج الرياضي للمشكلة السابقة كما يلي:

دالة الهدف:

$$\text{تخفيض د(ت) = } 21س + 12س + 21س + 8س$$

$$م ط + م ط + م ط + م ط$$

تحت القيود:

$$1000 = 11س + 21س + ط$$

$$2000 = 12س + 22س + ط$$

$$1800 = 11س + 12س + ط$$

$$1200 = 21س + 22س + ط$$

شرط عدم السالبة:

$$11س، 21س، 12س، 22س، ط، ط، ط، ط \leq \text{صفر}$$

وعلى ضوء النموذج الرياضي السابق يمكن إعداد جدول الحل المبدي

كما يلي:

جدول (١/٨) الحل المبدي لمشكلة النقل بطريقة السمبلكس

م ط؛	م ط٢	م ط٣	م ط٤	٢٢س٨	١٢س٢	٢١س٦	١١س٤	د(ت)		
								قيم المتغيرات	معاملات المتغيرات	المتغيرات الأساسية
صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١	١	١٠٠٠	م	ط١
صفر	صفر	١	صفر	١	١	صفر	صفر	٢٠٠٠	م	ط٢
صفر	١	صفر	صفر	صفر	١	صفر	١	١٨٠٠	م	ط٣
١	صفر	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر	١٢٠٠	م	ط٤
م	م	م	م	م٢	م٢	م٢	م٢	م٦٠٠٠	أ ت	
صفر	صفر	صفر	صفر	م٢-٨	م٢-٢	م٢-٦	م١-٤		د ت- أ ت	

هذا ويمكن بنفس الأسلوب المتبع في طريقة السمبلكس اختبار مثالية الحل السابق والاستمرار في تحسين الحل حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل غير أن ذلك يتطلب وقتا وجهدا كبيرا خاصة في حالة زيادة عدد المصادر وعدد المنافذ.

هذا ما دعى للدراسة والبحث عن طريقة خاصة لحل مشكلة النقل وهو ما تحقق فعلا بفضل الله تعالى، ثم بفضل جهود الباحثين والعلماء، وهو ما سوف نتناوله بإذن الله في الصفحات التالية. التي تتناول معالجة مشاكل النقل بطريقة خاصة بها بدلا من معالجتها بالطريقة العامة للبرمجة الخطية. وحيث أن الهدف من معالجة مشكلة النقل قد يكون تخفيض التكاليف وقد يكون تعظيم الأرباح فسيتم بإذن الله تناول طريقة النقل وتخفيض التكاليف ثم طريقة النقل وتعظيم الأرباح.

٢/١/٨ طريقة النقل وتخفيض التكاليف:

قد تمتلك المنشأة مصانع متعددة تنتج نفس المنتج وتكون تكلفة إنتاج الوحدة متساوية في جميع المصانع، ويسوق هذا المنتج (أو يخزن) في أسواق (أو مخازن) متعددة ولكن بنفس سعر البيع (أو بنفس تكلفة التخزين)، في مثل هذه الحالة تكون تكاليف النقل عاملا أساسيا في تحديد أرباح المنشأة

فكلما استطاعت المنشأة تخفيض تكاليف النقل من المصانع إلى الأسواق أو المخازن. كلما زادت أرباحها. وبذلك يكون الهدف في معالجة مشاكل النقل هو تدنية تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن.

ويمكن توضيح خطوات تطبيق طريقة النقل في حل مشاكل تخفيض تكاليف النقل من خلال المثال التالي:

مثال ٢/٨:

تمتلك إحدى المنشآت أربعة مصانع هي أ_١، أ_٢، أ_٣، أ_٤ تبلغ الطاقة الإنتاجية السنوية لهذه المصانع ٢٩٠٠، ٢٠٠٠، ١١٠٠، ٧٥٠ وحدة على التوالي، ويتم توزيع هذا الإنتاج من خلال ثلاثة منافذ للتسويق هي ب_١، ب_٢، ب_٣، تبلغ الاحتياجات السنوية لهذه المنافذ ٢٥٠٠، ٣٠٠٠، ١٢٥٠ وحدة على التوالي، وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المصانع المختلفة إلى منافذ التوزيع المختلفة كما يلي:

تكلفة نقل الوحدة (بالجنيه)			المصانع
ب _٣	ب _٢	ب _١	
٢	٧	٣	أ _١
٥	٥	٢	أ _٢
٤	٢	٧	أ _٣
٥	٣	٦	أ _٤

هذا وترغب إدارة المنشأة في التعرف على برنامج النقل الأمثل الذي يمكن من نقل إنتاج المصانع وتلبية احتياجات منافذ التوزيع بأقل تكلفة نقل ممكنة.

يتم الوصول إلى الحل الأمثل على مرحلتين، حيث يتم في المرحلة الأولى تصميم حل مبدئي، ثم اختباره وتحسينه إذا لزم الأمر في المرحلة الثانية.

١/٢/١/٨ تصميم الحل المبدئي:

لتصميم الحل المبدئي يتم إعداد مصفوفة النقل، حيث ترتب بيانات مشكلة النقل في مصفوفة على شكل جدول يطلق عليه جدول النقل، ويخصص في هذا الجدول صف لكل مصدر بالإضافة إلى صف للمجموع، وكذلك يخصص عمود لكل جهة وصول (منفذ) بالإضافة إلى عمود للمجموع (يمكن أن يتم العكس بأن تخصص الصفوف للمنافذ والأعمدة للمصادر). هذا ويسمى المربع الذي يقع عند تقاطع الصف مع العمود بالخلية cell وتعرف الخلية برقم (أو رمز) الصف ورقم (أو رمز) العمود اللذين تقع الخلية عند تقاطعهما، ويسجل في الركن الأيمن العلوي للخلية تكلفة نقل الوحدة من المصنع (أو المصدر) إلى المنفذ.

هذا ويمكن ترتيب بيانات المثال السابق (٢/٨) في الجدول التالي:

جدول (٢/٨)

الطاقات	المنافذ			المصانع
	ب _٣	ب _٢	ب _١	
٢٩٠٠	٢	٧	٣	أ _١
٢٠٠٠	٥	٥	٢	أ _٢
١١٠٠	٤	٢	٧	أ _٣
٧٥٠	٥	٣	٦	أ _٤
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الإجمالي

يتضح من الجدول السابق (٢/٨) ما يلي:

- ١- توازن مجموع كميات الاحتياجات مع مجموع كميات الطاقات وإجمالي كل منهما ٦٧٥٠ وحدة.

٢- الكمية التي تكتب داخل كل خلية تمثل الكمية المنقولة من المصدر إلى المنفذ اللذين تقع عند تقاطعهما الخلية، فمثلا الكمية التي تكتب في الخلية أ_٣ ب_٢ تشير إلى الكمية التي يتم نقلها من المصنع أ_٣ إلى المنفذ ب_٢ وبتكلفة قدرها ٢ جنيه للوحدة الواحدة.

هذا وبعد إعداد مصفوفة النقل يتم إعداد أو تصميم الحل المبدئي، ويمكن إعداد الحل المبدئي عشوائيا، وذلك بمحاولة تلبية احتياجات منافذ التوزيع في ضوء طاقات المصانع، ولكن هناك عديد من الطرق العلمية المنطقية التي أمكن الوصول إليها لإعداد الحل المبدئي والتي تجعل الحل أكثر سهولة وتوصل إلى الحل الأمثل بصورة أيسر وأسرع ومن هذه الطرق ما يلي:

أولاً: طريقة الركن الشمالي الشرقي. North- East Corner method.

ثانياً: طريقة أقل تكلفة Least- Cost method.

ثالثاً: طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation method.

وبالتطبيق على بيانات المثال السابق (٢/٨) يمكن توضيح كيفية إعداد

الحل المبدئي باستخدام الطرق السابقة وذلك على النحو التالي:

أولاً: طريقة الركن الشمالي الشرقي:

طبقاً لهذه الطريقة يتم البدء بملء الخلية التي تقع في الركن الشمالي من الجدول أي التي تقع عند تقاطع الصف الأول مع العمود الأول (وهي الخلية أ_١ ب_١)، وذلك بغض النظر عن تكلفة هذه الخلية، أي أن هذه الطريقة لا تأخذ في الاعتبار تكلفة النقل بل تقضي بالبدء بالخلية أ_١ ب_١ حتى ولو كانت تكلفة النقل إليها أكبر من تكلفة النقل إلى الخلايا الأخرى بالجدول.

وعلى ذلك يتم البدء بتخصيص كمية من الوحدات للخلية أ_١ ب_١ تغطي احتياجات المنفذ ب_١ وتكون هذه الكمية في حدود طاقة المصدر أ_١، أي تخصص للخلية أ_١ ب_١ كمية في حدود احتياجات المنفذ الأول وطاقة المصدر الأول أيهما أقل. ثم الانتقال إلى الخلية التي أسفل منها مباشرة في عمودها (أ_٢ ب_١) أو إلى الخلية التي على يسارها في نفس صفها (أ_١ ب_٢) وذلك يتوقف

على طاقة أ_١ واحتياجات ب_١. فإذا كانت طاقة أ_١ أكبر من احتياجات ب_١ فيتم الانتقال إلى الخلية أ_٢ ب_٢، ما إذا كانت احتياجات ب_١ أكبر من طاقة أ_١ فيتم الانتقال إلى الخلية أ_٢ ب_١ وهكذا.

هذا ويمكن توضيح ذلك من خلال تصميم الحل المبدئي للمثال السابق (٢/٨)، وذلك كما يلي:

١- يتم البدء بالتخصيص للخلية أ_١ ب_١، وحيث أن طاقة أ_١ ٢٩٠٠ وحدة، واحتياجات ب_١ ٢٥٠٠ وحدة، لذلك تخصص للخلية أ_١ ب_١ ٢٥٠٠ وحدة وبذلك تكون احتياجات ب_١ قد استكملت بالكامل ولكن هل استخدمت طاقة أ_١؟ لا لم تستنفذ بعد!

٢- بالتحرك بعد ذلك أفقياً في نفس الصف الأول إلى الخلية أ_٢ ب_٢، يتضح أن احتياجات ب_٢ ٣٠٠٠ وحدة ولكن الباقي من طاقة أ_٢ ٤٠٠ وحدة فقط (٢٩٠٠ - ٢٥٠٠ خصصت للخلية أ_١ ب_١)، لذلك تدرج كل الـ ٤٠٠ وحدة للخلية أ_٢ ب_٢، وبذلك تكون طاقة أ_٢ قد استنفدت بالكامل. ولكن هل استكملت احتياجات ب_٢؟

٣- مازالت احتياجات ب_٢ لم تستكمل، لذلك يتم التحرك إلى أسفل لاستخدام طاقة أ_٢ في سداد احتياجات ب_٢، لذلك يتم التحرك إلى الخلية أ_٢ ب_٣، وحيث أن طاقة أ_٢ ٢٠٠٠ وحدة في حين أن باقي احتياجات ب_٢ ٢٥٠٠ وحدة (٢٩٠٠ وحدة - ٤٠٠ خصصت للخلية أ_١ ب_١)، لذلك تخصص كل طاقة أ_٢ للخلية أ_٢ ب_٣ بالكامل في حين أن احتياجات ب_٢ لم تستكمل بعد.

٤- لاستكمال احتياجات ب_٢ يلزم التحرك إلى أسفل أي إلى الخلية أ_٣ ب_٢ وهنا يتضح أن باقي احتياجات ب_٢ ٦٠٠ وحدة (٣٠٠٠ - ٤٠٠) في حين أن طاقة أ_٣ ١١٠٠، لذلك تخصص للخلية أ_٣ ب_٢ ٦٠٠ وحدة، وبذلك تستكمل احتياجات ب_٢، ولكن لم تستنفذ بعد كل طاقة أ_٣، فمازالت ٥٠٠ وحدة متاحة.

٥- حيث قد تم حتى الآن استكمال احتياجات ب_١، ب_٢، فيتم التحرك لاستكمال احتياجات ب_٣، لذلك التحرك يكون أفقياً إلى الخلية أ_٣ ب_٣، وحيث أن المتبقي من طاقة أ_٣ ٥٠٠ وحدة (١١٠٠ - ٦٠٠ خصصت للخلية أ_٣ ب_٣) واحتياجات ب_٣ ١٢٥٠ وحدة، إذن تخصص كل الـ ٥٠٠ وحدة للخلية أ_٣ ب_٣ وبذلك تستنفد كل طاقة أ_٣.

٦- الانتقال بعد ذلك إلى أسفل لاستكمال احتياجات ب_٣ من طاقة أ_٤، وحيث أن طاقة أ_٤ ١٢٥٠ وحدة وباقي احتياجات ب_٣ ٧٥٠ وحدة (١٢٥٠٠ - ٥٠٠ خصصت للخلية أ_٣ ب_٣) فيتم تخصيص كل الـ ٧٥٠ وحدة للخلية أ_٤ ب_٣ وبذلك تستنفد كل طاقة أ_٤ وتستكمل كل احتياجات ب_٣. وبالتالي تستكمل احتياجات المنافذ.

وعلى ضوء ذلك فإن الحل المبدئي بإتباع طريقة الركن الشمالي الشرقي يظهر بالجدول التالي (٣/٨).

جدول (٣/٨) الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي

الطاقات	ب _٣	ب _٢	ب _١	المنافذ المصانع
٢٩٠٠	٢	٧	٣	أ _١
		٤٠٠	٢٥٠٠	
٢٠٠٠	٥	٥	٢	أ _٢
		٢٠٠٠		
١١٠٠	٤	٢	٧	أ _٣
	٥٠٠	٦٠٠		
٧٥٠	٥	٣	٦	أ _٤
	٧٥٠			
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الإجمالي

يتضح من الجدول السابق (٣/٨) ما يلي:

١- تم البدء من الركن الشمالي الشرقي أي من الخلية أ_١ ب_١ بدون النظر إلى التكلفة، ثم تم الاتجاه إلى الجنوب الغربي في مسار على شكل سلم.

٢- تكاليف النقل وفقاً لهذا الحل تتمثل في مجموع حاصل ضرب الكمية المنقولة إلى كل خلية في تكلفة نقل الوحدة إلى هذه الخلية ويمكن حسابها كما يلي: $2 \times 2500 + 7 \times 400 + 5 \times 2000 + 2 \times 600 = 27200$ جنيه

٣- عدد الخلايا المشغولة (أي التي تم النقل إليها) ٦ خلايا، أي تساوى (م) + (١ - ١) يعنى تساوى عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١ بذلك يكون هذا الحل مسموح به أي ممكن اختبار مثاليته والوصول إلى حل أفضل منه إذا لم يكن هل حل أمثل.
ثانياً: طريقة أدنى تكلفة:

طبقاً لهذه الطريقة يتم تخصيص طاقات المصادر لمنافذ التوزيع المختلفة مع الأخذ في الاعتبار تكلفة النقل، لذلك فيتم البدء بالتخصيص للخلية ذات أقل تكلفة نقل في حدود طاقة المصدر واحتياجات المنفذ أيهما أقل، ثم الانتقال إلى الخلية التي تكبرها مباشرة في تكلفة النقل، وهكذا حتى يتم تخصيص كل طاقات المصادر إلى جميع منافذ التوزيع.

هذا ويمكن توضيح ذلك بالتطبيق على بيانات المثال السابق (٢/٨) وذلك على النحو التالي:

١- بفحص تكلفة النقل للخلايا في جدول (٢/٨) يتضح أن أقل تكلفة نقل في الجدول قدرها ٢ جنيه، ولكن توجد أكثر من خلية لها نفس التكلفة، وهي الخلايا ١، ٣، ٢، ١، ٣، ٢، وفي هذه الحالة يمكن البدء بالتخصيص لأي خلية منهم ولكن للوصول إلى الحل الأمثل بصورة أسرع ولتقليل عدد المحالات والجداول لتحسين الحل فإنه يمكن البدء بالتخصيص للخلية التي تستوعب أكبر عدد من الوحدات من بين هذه الخلايا الثلاثة، ثم العودة للخلايا (التي لها نفس التكلفة) وتخصص لها احتياجاتها إذا كان يمكن ذلك، أي إذا كان شغل الخلية التي تستوعب وحدات أكثر لم يؤثر على إمكانية شغل هذه الخلايا.

ومن فحص الجدول (٢/٨) يتضح أن:

- الخلية أ_١ ب_٣ يمكن أن تخصص لها ١٢٥٠ احتياجات المنفذ ب_٣.
- الخلية أ_٢ ب_١ يمكن أن تخصص لها ٢٠٠٠ وحدة وهي طاقة المصدر أ_٢.
- الخلية أ_٣ ب_٢ يمكن أن تخصص لها ١١٠٠ وحدة وهي طاقة المصدر أ_٣.
- إذن يتم البدء بالتخصيص للخلية أ_٢ ب_١ وتخصص لها ٢٠٠٠ وحدة وحيث أن الخلية أ_١ ب_٣ لم تتأثر بملء أ_٢ ب_١ لذلك تخصص لها ١٢٥٠ وحدة وكذلك تخصص للخلية أ_٣ ب_٢ ١١٠٠ وحدة.
- ٢- الانتقال بعد ذلك إلى الخلية أ_١ ب_١، والخلية أ_٢ ب_٢ حيث أن تكلفة النقل لهما متساوية وقدرها ٣ جنيه، وبفحص كل خلية لتحديد الكمية التي يمكن نقلها إلى كل منهما، يتضح أن الخلية أ_١ ب_١ يمكن أن تخصص لها ٥٠٠ وحدة فقط حيث أن احتياجات ب_١ ٢٥٠٠ وحدة تم تخصيص ٢٠٠٠ وحدة للخلية أ_١ ب_١ فيكون الباقي ٥٠٠ فقط، أما الخلية أ_٢ ب_٢ فإن أقصى كمية يمكن تخصيصها لها فهي ٧٥٠ وحدة طاقة المصدر أ_٢. لذلك تخصص ٧٥٠ وحدة للخلية أ_٢ ب_٢ ثم تخصص ٥٠٠ وحدة للخلية أ_١ ب_١ لأن ملء إحداهما لا يؤثر على الأخرى.
- ٣- الانتقال بعد ذلك إلى الخلية أ_٣ ب_٣ حيث أن تكلفة النقل لها ٤ جنيه، ولكن يتضح أن احتياجات ب_٣ قد استكملت بملء الخلية أ_٣ ب_٣ (في الخطوة ١) وكذلك طاقة المصدر أ_٣ قد استنفدت أيضا بملء الخلية أ_٣ ب_٣ (في الخطوة ١) لذلك لا تخصص للخلية أ_٣ ب_٣ أي كمية.
- ٤- بعد ذلك يتم الانتقال إلى الخلايا أ_٢ ب_٢، أ_٢ ب_٣، أ_٢ ب_٣، وتكلفة النقل إلى كل منها ٥ جنيه، ولكن بفحص هذه الخلايا يتضح أنه لا يمكن أن تخصص لها أي كمية نظرا لاكتمال طاقة اعتمدها (الخلية أ_٢ ب_٣) أو صفوفها (الخلية أ_٢ ب_٢) أو اعتمدها و صفوفها (الخلايا أ_٢ ب_٣، أ_٢ ب_٣).
- ٥- الانتقال بعد ذلك إلى الخلية أ_١ ب_١ وتكلفة النقل إليها ٦ جنيه، ولكن بفحصها يتضح أنه لا يمكن النقل إليها لاكتمال طاقة صفها وعمودها.
- ٦- تبقى بعد ذلك الخلية أ_١ ب_٢ وتكلفة النقل إليها ٧ جنيه، ولا خيار سوى شغلها بالكمية الباقية من المصدر أ_١ وقدرها ١١٥٠ وحدة وهي تمثل في نفس الوقت الكمية اللازمة لاستكمال احتياجات المنفذ ب_٢.

بذلك يكون قد تم تخصيص كل طاقات المصانع لسد احتياجات جميع منافذ التوزيع ويكون جدول الحل المبدئي كما يلي (جدول ٤/٨).

جدول (٤/٨) الحل المبدئي بطريقة أدنى تكلفة

الطاقات	ب _٣	ب _٢	ب _١	المنافذ المصانع
٢٩٠٠	٢ ١٢٥٠	٧ ١١٥٠	٣ ٥٠٠	أ _١
٢٠٠٠	٥	٥	٢ ٢٠٠٠	أ _٢
١١٠٠	٤	٢ ١١٠٠	٧	أ _٣
٧٥٠	٥	٣ ٧٥٠	٦	أ _٤
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الإجمالي

يتضح من الجدول السابق (٤/٨) ما يلي:

– عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١

$$١ - ٣ + ٤ = ٦$$

أي أن هذا الحل يعتبر حلاً ممكناً

– تكلفة النقل طبقاً لهذا الحل تحسب كما يلي:

$$١١٠٠ + ٢ \times ٢٠٠٠ + ٢ \times ١٢٥٠ + ٧ \times ١١٥٠ + ٣ \times ٥٠٠$$

$$٢٠٥٠٠ = ٣ \times ٧٥٠ + ٢ \times$$

– بمقارنة التكلفة الكلية للحل المبدئي بإتباع طريقة أدنى تكلفة يتضح

أنها (٢٠٥٠٠ جنيهه) أقل من التكلفة الكلية للحل المبدئي بإتباع

طريقة الركن الشمالي الشرقي حيث كانت ٢٧٢٥٠ جنيهه، وهذا يرجع

إلى أن طريقة الركن الشمالي الشرقي لا تأخذ في الاعتبار تكلفة النقل.

ثالثاً: طريقة فوجل التقريبية:

تتميز طريقة فوجل التقريبية مثل سابقتها (طريقة أدنى تكلفة) بأنها تأخذ

في الاعتبار تكلفة النقل عند إعداد الحل المبدئي غير أنها تتميز عنها في أنها

(عادة) توصل إلى حل مبدئي لمشكلة النقل أقرب إلى الحل الأمثل. أي أنه للوصول إلى الحل الأمثل نحتاج لخطوات وجداول أقل (بعد إعداد الحل المبدئي) مما نحتاج إليه في حالة إتباع الطريقتين السابقتين.

هذا وفيما يلي توضيح للخطوات الرئيسية لطريقة فوجل التقريبية:

١- حيث أن هذه الطريقة تقوم على أساس حساب الفروق بين أصغر قيمة (تكلفة) والقيمة (التكلفة) التي تليها بالنسبة لكل صف ولكل عمود وتسجيل القيمة (فرق التكلفة) مقابل كل صف وكل عمود، فإن ذلك يتطلب عمودا هامشيا لتسجيل فروق الصفوف وصفا هامشيا لتسجيل فروق الأعمدة.

٢- يتم حساب الفرق بين أقل تكلفة نقل والتكلفة التي تليها مباشرة في كل صف وكذلك بالنسبة لكل عمود، ثم تسجل فروق التكلفة في العمود والصف اللذين أضيفا إلى جدول النقل لهذا الغرض.

٣- تحديد العمود أو الصف صاحب أكبر فرق تكلفة (في حالة تساوى أكثر من عمود أو أكثر من صف أو صف وعمود في أكبر فرق تكلفة يتم اختيار أحدهم عشوائيا) ثم يتم البحث عن الخلية ذات أقل تكلفة نقل في هذا الصف أو العمود صاحب أكبر فرق تكلفة، ثم يتم تخصيص أكبر كمية ممكنة لهذه الخلية في حدود طاقة المصدر واحتياجات المنفذ أيهما أقل، ويتم خصم الكمية التي تم تخصيصها لهذه الخلية من الكميات المطلوبة (الاحتياجات) ومن الكميات المنتجة (الطاقات).

٤- يشطب العمود الذي يتم تلبية كل احتياجاته أو الصف الذي تم استنفاد كل طاقاته.

هذا وفي حالة تلبية احتياجات عمود واستنفاد طاقة صف في وقت واحد، لا يتم شطبهما معا، بل يشطب أحدهما ويخصص للأخر قيمة صفرية في خانة الطلب أو في خانة العرض، ولا يستخدم الصف أو العمود الذي عينت له قيمة صفرية في حساب الفروق بعد ذلك.

وهناك حل آخر في حالة اكتمال احتياجات عمود واستنفاد طاقة صف في وقت واحد ويتمثل هذا الحل في البحث عن الخلية التي لها أقل تكلفة في الصف أو العمود الذي لم يشطب ثم تخصص قيمة صفرية لها ثم يشطب هذا الصف أو العمود ويتم إعادة تصوير جدول النقل بعد شطب العمود أو الصف الذي تقرر شطبه.

٥- يتم تكرار الخطوات السابقة من الخطوة (٢) حتى الخطوة (٤) حتى يتم تخصيص طاقات المصادر إلى المنافذ المختلفة. هذا وإذا تبقى بعد الخطوة (٤) السابقة عمود واحد (وعدة صفوف) أو صف واحد (وعدة أعمدة) فلا داعي لحساب الفروق، بل يتم تخصيص الكميات الباقية للخلايا غير المشغولة في هذا الصف أو هذا العمود حسب الترتيب التصاعدي لتكلفة النقل في هذه الخلايا.

ولتوضيح هذه الخطوات يمكن الاسترشاد ببيانات المثال السابق (٢/٨) وذلك على النحو التالي:

١ - إعداد جدول فروق تكاليف النقل كما يظهر بالجدول التالي (٥/٨).

جدول (٥/٨) النقل والفروق الأولي

المنافذ المصانع	ب ^١	ب ^٢	ب ^٣	الطاقات	فروق الصفوف
أ ^١	٣	٧	٢	٢٩٠٠	١
أ ^٢	٢ ٢٠٠٠	٥	٥	٢٠٠٠ (٢٠٠٠)	٣
أ ^٣	٧	٢	٤	١١٠٠	٢
أ ^٤	٦	٣	٥	٧٥٠	٢
الاحتياجات	٢٥٠٠ (٢٠٠٠)	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠	
فروق الأعمدة	١	١	٢		

٢ - تحديد العمود أو الصف صاحب أكبر فرق تكلفة وإجراء التخصيص، وبفحص الفروق كما تظهر بالجدول السابق (٥/٨) يتضح أن أكبر فرق هو ٣ ويوجد أمام الصف الثاني (أ) وبفحص خلايا هذا الصف يلاحظ أن الخلية (أ١ ب١) تحتوى على أقل تكلفة نقل في هذا الصف، وبالتالي يتم تخصيص أكبر كمية ممكنة لهذه الخلايا، وقدرها ٢٠٠٠ وحدة حيث أن طاقة المصدر أ١ ٢٠٠٠ وحدة في حين أن احتياجات المنفذ ب١ ٢٥٠٠ وحدة.

يتضح من نتيجة هذا التخصيص استنفاد كل طاقة المصدر أ١ وعلى ذلك يشطب الصف الثاني من الجدول ويظهر العمود الأول أ١ بالباقي من احتياجاته وهو ٥٠٠ وحدة (٢٥٠٠ - ٢٠٠٠).

٣ - يعاد تصوير جدول النقل من جديد (بعد استبعاد الصف الثاني وتغيير مجموع العمود الأول) وحساب الفروق من جديد بنفس الطريقة السابقة ويظهر جدول الفروق الجديد كما يلي جدول رقم (٦/٨).

جدول (٦/٨) النقل وحساب الفروق الثانية

المنافذ المصانع	ب١	ب٢	ب٣	الطاقات	فروق الصفوف
أ١	٣	٧	٢	٢٩٠٠ (٥٠٠)	١
أ٣	٧	٢	٤	١١٠٠	٢
أ٤	٦	٣	٥	٧٥٠	٢
الاحتياجات	٥٠٠ (٥٠٠)	٣٠٠٠	١٢٥٠	٤٧٥٠	
فروق الأعمدة	٣	١	٢		

يتضح من الجدول السابق (٦/٨) أن أكبر الفروق أمام العمود الأول (أ) وبفحص خلايا هذا العمود يتضح أن الخلية أ_١ ب_١ لها أقل تكلفة نقل في هذا العمود، لذلك يخصص لها أقصى كمية ممكنة، وبفحص طاقة صفها أ_١ واحتياجات عمودها ب_١ يلاحظ أن طاقة أ_١ ٢٩٠٠ وحدة في حين أن احتياجات ب_١ ٥٠٠ وحدة فقط (حيث تم تخصيص ٢٠٠٠ وحدة من احتياجات العمود ب_١) في الجدول السابق (٦/٨).

لذلك يتم تخصيص ٥٠٠ وحدة للخلية أ_١ ب_١، وبذلك تكتمل كل احتياجات ب_١، وبذلك يشطب العمود الأول من الجدول وتخفض طاقة أ_١ بمقدار ٥٠٠ وحدة وتصبح ٢٤٠٠ (٢٩٠٠ - ٥٠٠)، ويعد جدول النقل الجديد.

٤ - يعاد حساب فروق التكلفة من جديد وذلك بإعداد جدول جديد للفروق بعد استبعاد العمود الأول (ب_١) وتعديل طاقة الصف الأول (أ_١) ويكون هذا الجدول الجديد (٧/٨) على النحو التالي:

جدول (٧/٨) جدول النقل وحساب الفروق الثالثة

المنفذ	ب _١	ب _٢	الطاقات	فروق الصفوف
أ _١	٧	٢	٢٤٠٠ (١٢٥٠)	٥
أ _٢	٢	٤	١١٠٠	٢
أ _٣	٣	٥	٧٥٠	٢
الاحتياجات	٣٠٠٠	١٢٥٠	٤٢٥٠ (١٢٥٠)	
فروق الأعمدة	١	٢		

يتضح من الجدول السابق (٧/٨) أن الصف الأول أ_١ هو صاحب أكبر فرق تكلفة، وبفحص خلاياه يلاحظ أن الخلية أ_١ ب_٢ لها أقل تكلفة نقل، وبفحص طاقة صفها واحتياجات عمودها يتضح أن أقصى كمية يمكن تخصيصها لهذه الخلية هي ١٢٥٠ وحدة، وبذلك يتم استيفاء كل احتياجات المنفذ ب_٢ ويتم شطبه من الجدول.

هذا وبشطب العمود الأول في الخطوة السابقة، وشطب العمود الثالث ب_٣ في هذه الخطوة، يتبقى عمود واحد هو العمود الثاني ب_٢، لذلك لا داعي لحساب الفرق ويتم التخصيص لخلايا هذا العمود وفق تكلفتها وفي حدود احتياجاتها.

يتم تخصيص ١١٠٠ وحدة للخلية ب_٢ ب_٢، ثم تخصيص ٧٥٠ وحدة للخلية أ_١ ب_٢ وتتبقى بعد ذلك ١٥٠ وحدة. (٣٠٠٠ طاقة أ_٢ - ١١٠٠ + ٧٥٠) تخصص للخلية أ_١ ب_٢.

وبذلك يكون قد تم تخصيص كل طاقات المصادر لتلبية احتياجات جميع المنافذ.

وعلى ضوء ذلك يمكن تصوير جدول الحل المبدئي طبقاً لطريقة فوجل التقريبية وإظهار جميع الفروق التي سبق حسابها في الخطوات السابقة في الجدول (٨/٨) التالي:

جدول (٨/٨) الحل المبدئي بطريقة فوجل التقريبية

المنافذ المصانع	ب _١	ب _٢	ب _٣	الطاقات	فروق الصفوف
أ _١	٣	٧	٢	٢٩٠٠	١ → (٥)
أ _٢	٢	٥	٥	٢٠٠٠	(٣) → -
أ _٣	٧	٢	٤	١١٠٠	٢ ٢ ٢
أ _٤	٦	٣	٥	٧٥٠	٢ ٢ ٢
الاحتياجات	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٢٥٠	٦٧٥٠	
فروق الأعمدة	١	١	٢		
	(٣) ↑	١	٢		
	-	١	١		

يتضح من الجدول السابق (٨/٨) والذي يمثل الحل المبدئي بطريقة فوجل التقريبية ما يلي:

١ - تم استخدام ٦ خلايا (٦ متغيرات أساسية) وعلى ذلك يكون هذا الحل حلا ممكنا ومسموحا به لأنه يحقق القاعدة التي تقضي بضرورة أن يكون عدد الخلايا المشغولة يساوي عدد المصادر + عدد المنافذ - ١.

٢ - تكلفة النقل طبقا لهذا الحل المبدئي تحسب كما يلي:

$$2 \times 500 + 3 \times 1100 + 7 \times 1250 + 2 \times 1200 + 2 \times 2000 + 1100 \times 1$$

$$2 + 3 \times 750 = 20500 \text{ جنيه}$$

هذا وبمقارنة تكلفة برنامج النقل المبدئي طبقا لطريقة فوجل بتكاليف برنامج الحل المبدئي بالطريقتين السابقتين يتضح أن طريقة فوجل تحقق أقل تكلفة وقدرها ٢٠٥٠٠ جنيه وتتساوى معها في التكلفة في هذا المثال طريقة التكلفة الدنيا (وليس بالضرورة أن يتحقق ذلك في جميع الحالات) في حين أن طريقة الركن الشمالي تعطي تكلفة أكبر وقدرها ٢٧٢٥٠ جنيه.

وبعد هذا فالسؤال الآن هو هل الحلول المبدئية السابق إعدادها بالطرق الثلاثة هي أفضل الحلول ولا توجد فرصة أو إمكانية لتخفيض التكاليف الكلية للنقل إلى أقل من ذلك؟ هذا ما سوف يتضح إن شاء الله في النقطة التالية الخاصة باختبار مثالية الحل.

٢/٢/١/٨ اختبار المثالية:

يقصد باختبار مثالية الحل التعرف على ما إذا كان هذا الحل هو الحل الأمثل أم أن هناك حل (أو حلول) آخر أفضل منه، وبعبارة أخرى تحديد ما إذا كان يمكن تخفيض التكلفة للنقل بملء خلية أو أكثر خلاف تلك الخلايا التي تم شغلها في الحل السابق (المبدئي) (أي إدخال متغيرات غير أساسية في الحل لتصبح متغيرات أساسية).

هذا ويتم فيما يلي إتباع طريقتين لاختبار مثالية الحل هما:

أولاً: طريقة حجر الوطاء **Stepping Stone Method**.

ثانياً: طريقة التوزيع المعدل **Modified Distribution Method**.

أولاً: طريقة حجر الوطاء:

طبقاً لهذه الطريقة يتم تقويم الخلايا الفارغة بتحديد تكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية فارغة، فإذا كانت تكلفة الفرصة المضاعة لجمع الخلايا الفارغة سالبة أو صفر يكون الحل أمثل، أما إذا كانت تكلفة الفرصة لخلية أو أكثر من الخلايا الفارغة موجبة فإن الحل يكون غير أمثل، ويمكن تصميم حل آخر أفضل منه، وذلك باستخدام الخلية الفارغة ذات أكبر تكلفة فرصة مضاعة موجبة.

هذا ويمكن بلورة خطوات تطبيق طريقة حجر الوطاء في اختبار المثالية

كما يلي:

١ - تحديد المسار المغلق للخلايا الفارغة:

تتم عملية تقويم الخلايا الفارغة عن طريق تحديد مسار مغلق (أو طريق دائري) **Closed Loop** يبدأ من الخلية الفارغة التي يتم تقويمها وينتهي عندها، وعند تحديد المسار المغلق تراعى الاعتبارات التالية:

أ - يمر خط السير على خلايا مشغولة حتى يمكن نقل وحدات منها، ويكون عدد خلايا المسار المغلق عدد زوجي لا يقل عن أربع خلايا (٤، ٦، ٨) جميعها تكون مشغولة عدا الخلية التي يتم تقويمها.

ب - يمكن لخط السير أن يمر على خلايا مشغولة دون أن يخصم منها وذلك للحفاظ على توافر مجاميع الصفوف والأعمدة.

ج - لا يتم تقويم أكثر من خلية فارغة واحدة في آن واحد ولكن تقوم كل خلية فارغة على حدة.

د - يتم وضع إشارات موجبة وسالبة على التوالي في الخلايا المستخدمة في المسار المغلق على أن تكون إشارة الخلايا التي يتم النقل إليها موجبة والتي يتم النقل منها سالبة.

جدول (٩/٨) يوضح المسار المغلق للخلية أ_١ ب_١

ب _٢		ب _١		المنافذ المصادر
٤٠٠	٧	٢٥٠٠	٣	أ _١
١+		١-		
٢٠٠٠	٥		٢	أ _٢
١-		١+		

يتضح من الجدول السابق (٩/٨) ما يلي:

١- المسار المغلق للخلية أ_١ ب_١ يتحدد على النحو التالي

$$أ٢ ب١ - أ١ ب١ + أ١ ب٢ - أ٢ ب٢$$

بدأ المسار المغلق بالخلية الفارغة أ_١ ب_١ وانتهى بها وعدد خلاياه زوجي جميعها مشغولة عدا الخلية أ_١ ب_١. ويترتب على هذا المسار زيادة الخلية أ_٢ ب_١ بوحدة واحدة ونقص الخلية أ_١ ب_١ بوحدة واحدة وللحفاظ على توازن الصفوف والأعمدة تقل الخلية أ_١ ب_١ بوحدة واحدة وتزيد الخلية أ_١ ب_٢ بوحدة واحدة أيضا.

٢- حيث أن نقل وحدة إلى خلية يؤدي إلى زيادة تكاليف النقل بمقدار تكلفة نقل واحدة إلى هذه الخلية وكذلك نقل وحدة من خلية يعني تخفيض تكاليف النقل بمقدار تكلفة نقل وحدة لها. فإنه يمكن حساب أثر نقل وحدة إلى الخلية أ_١ ب_١ (وفق المسار المغلق السابق تحديده) على تكلفة النقل كما يلي:

- إضافة وحدة إلى الخلية أ_١ ب_١ يؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار = ٢+.
- خصم وحدة من الخلية أ_١ ب_١ يؤدي إلى نقص التكاليف بمقدار = ٣-.
- إضافة وحدة من الخلية أ_١ ب_٢ يؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار = ٧+.
- خصم وحدة إلى الخلية أ_١ ب_٢ يؤدي إلى نقص التكاليف بمقدار = ٥-.

الأثر النهائي على تكلفة النقل = $1 + = 5 - 7 + 3 - 2 +$

أي أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية أ₁ ب₁ = ١ -

معنى ذلك أن نقل وحدة واحدة إلى الخلية أ₁ ب₁ يؤدي إلى زيادة التكاليف الكلية للنقل بمقدار جنيه واحد. وذلك بالطبع ليس في صالح الشركة. هذا ويمكن تقويم باقي الخلايا الفارغة في جدول (٣/٨) بنفس الطريقة السابقة ويوضح الجدول التالي (١٠/٨) ملخصاً لنتائج تقويم هذه الخلايا الفارغة.

جدول (١٠/٨) يوضح المسار المغلق للخلايا الفارغة

تكلفة الفرصة	التغير في التكلفة	المسار المغلق	الخلية الفارغة
٧	$٧ - = ٧ - ٢ + ٤ - ٢ +$	$٢ + ١ ب - ٣ أ ب + ٣ ب - ٢ ب - ١ ب$	أ ₁ ب ₁
١ -	$١ = ٥ - ٧ + ٣ - ٢ +$	$١ + ٢ ب - ١ ب - ١ ب + ١ ب - ٢ ب$	أ ₂ ب ₁
٢	$٢ - = ٥ - ٢ + ٤ - ٥ +$	$٢ + ٣ ب - ٢ ب - ٢ ب + ٢ ب - ١ ب$	أ ₂ ب ₂
٩ -	$٩ = ٢ - ٧ + ٣ - ٧ +$	$٢ + ٣ ب - ١ ب - ١ ب + ١ ب - ٢ ب$	أ ₃ ب ₁
٧ -	$٧ = ٥ - ٤ + ٢ - ٧ + ٣ - ٦ +$	$٢ + ١ ب - ١ ب - ١ ب + ١ ب - ٢ ب - ٢ ب + ٢ ب - ١ ب$	أ _٤ ب _١
صفر	$صفر = ٢ - ٤ + ٥ - ٣ +$	$٢ + ١ ب - ٢ ب - ٢ ب + ٢ ب - ١ ب$	أ _٤ ب _٢

بفحص الجدول السابق (١٠/٨) يلاحظ ما يلي:

١ - توجد أكثر من خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة (كما يظهر من عمود تكلفة الفرصة) ومعنى ذلك أن الحل المبدئي الظاهر بالجدول (٣/٨) ليس حل أمثل ويمكن تحسينه.

٢ - لتحسين الحل توجد أكثر من خلية فارغة يمكن استخدامها في التحسين، ومن عمود تكلفة الفرصة المضاعة يلاحظ وجود خليتين لهما تكلفة فرصة موجبة هما الخلية أ₁ ب₁، الخلية أ₂ ب₁ وللمفاضلة بينهما يتم اختيار

الخلية أ، ب لأن لها أكبر تكلفة فرصة موجبة وقدرها ٧ أي أن كل وحدة يمكن نقلها إلى الخلية أ، ب تخفض التكاليف الكلية للنقل بمقدار ٧ جنيه.

٣ - لتحسين الحل يتم إعداد حل جديد بإتباع الخطوات التالية:

أ - تحديد أثر النقل إلى الخلية أ، ب على خلايا المسار المغلق لها.

الخلية أ، ب = صفر + ٤٠٠ = ٤٠٠ وحدة

الخلية أ، ب = ٤٠٠ - ٥٠٠ = ١٠٠ وحدة

الخلية أ، ب = ٤٠٠ + ٦٠٠ = ١٠٠٠ وحدة

الخلية أ، ب = ٤٠٠ - ٤٠٠ = صفر

أما باقي خلايا الجدول فلا تتأثر وتظل كما هي:

ب - إعداد جدول النقل الجديد (الثاني) كما يظهر بالجدول التالي (١١/٨)

جدول (١١/٨) جدول النقل الثاني

الطاقات	ب	ب	ب	المنافذ المصانع
٢٩٠٠	٢ ٤٠٠	٧	٣ ٢٥٠٠	أ
٢٠٠٠	٥	٥ ٢٠٠٠	٢	أ
١١٠٠	٤ ١٠٠	٢ ١٠٠٠	٧	أ
٧٥٠	٥ ٧٥٠	٣	٦	أ
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الاحتياجات

ج - تكلفة النقل للحل الثاني = $٥ \times ٢٠٠٠ + ٢ \times ٤٠٠ + ٣ \times ٢٥٠٠$

$= ١٠٠٠٠ + ٨٠٠ + ٧٥٠٠ = ٢٤٤٥٠$ جنيه

أي أن البرنامج الثاني للنقل أدى إلى تخفيض تكاليف النقل بمقدار

٢٨٠٠ جنيه (٢٧٢٥٠ - تكلفة الحل الأول = ٢٤٤٥٠ - تكلفة الحل الثاني).

هذا ويمكن حساب مقدار التخفيض في تكلفة النقل بضرب الكمية التي تم نقلها إلى الخلية أ₁ ب₂ في تكلفة الفرصة لهذه الخلية، أي تساوى ٤٠٠ وحدة $7 \times 2800 =$ جنيه.

اختبار مثالية جدول النقل الثاني:

بفحص جدول النقل السابق (١١/٨) يلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة ٦ خلايا (أي يساوى عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١). ومعنى ذلك أن هذا الحل يعتبر حلاً مسموحاً به ويمكن اختبار مثالية. ويوضح الجدول التالي (١٢/٨) نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في الجدول السابق (١١/٨) وفقاً لطريقة حجر الوطء.

جدول (١٢/٨) يوضح المسار المغلق للخلايا الفارغة

الخلية الفارغة	المسار المغلق	التغير في التكلفة	تكلفة الفرصة
أ ₁ ب ₂	+ أ ₁ ب ₂ - أ ₁ ب ₁ + أ ₂ ب ₁ - أ ₂ ب ₂	$7 = 2 - 4 + 2 - 7 +$	- ٧
أ ₂ ب ₁	+ أ ₂ ب ₁ - أ ₂ ب ₂ + أ ₁ ب ₂ - أ ₁ ب ₁	$- 2 + 4 - 2 + 3 - 2 +$ $6 = 5$	٦
أ ₂ ب ₂	+ أ ₂ ب ₂ - أ ₂ ب ₁ + أ ₁ ب ₁ - أ ₁ ب ₂	$2 = 4 - 2 + 5 - 5 +$	٢
أ ₁ ب ₁	+ أ ₁ ب ₁ - أ ₁ ب ₂ + أ ₂ ب ₂ - أ ₂ ب ₁	$2 = 4 - 2 + 3 - 7 +$	٢
أ ₂ ب ₁	+ أ ₂ ب ₁ - أ ₂ ب ₂ + أ ₁ ب ₂ - أ ₁ ب ₁	$صفر = 5 - 2 + 3 - 6 +$	صفر
أ ₁ ب ₂	+ أ ₁ ب ₂ - أ ₁ ب ₁ + أ ₂ ب ₁ - أ ₂ ب ₂	$صفر = 5 - 4 + 2 - 2 +$	صفر

يتضح من الجدول السابق (١٢/٨) أن هناك أكثر من خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة، وبذلك لا يكون الحل السابق (١١/٨) حل أمثل ولتحسينه يتم ترشيح الخلية أ₁ ب₂ للدخول في الحل الجديد لأن لها أكبر تكلفة فرصة موجبة.

ولإدخال الخلية أ₁ ب₂ في الحل الجديد تتبع الخطوات التالية:

أ - تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية أ_٢ ب_١
 بفحص المسار المغلق للخلية أ_١ب_٢ يتضح أن الخلايا التي إشارتها سالبة في هذا المسار (يعنى الخلايا التي يتم النقل منها) هي الخلية أ_١ ب_١، الخلية أ_٣ ب_٣، والخلية أ_٢ ب_٢ وأقل كمية في هذه الخلايا الثلاثة هي ١٠٠ وحدة في الخلية أ_٢ ب_٣، وبذلك تكون أقصى كمية يمكن نقلها إلى الخلية أ_٢ ب_١ هي ١٠٠ وحدة.

ب - تحديد أثر النقل إلى الخلية أ_٢ ب_١ على خلايا المسار المغلق لها.

$$\text{الخلية أ} \text{ ب} \text{ ١} = \text{صفر} + ١٠٠ = ١٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{الخلية أ} \text{ ١} \text{ ب} \text{ ١} = ١٠٠ - ٢٥٠٠ = ٢٤٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{الخلية أ} \text{ ١} \text{ ب} \text{ ٣} = ١٠٠ + ٤٠٠ = ٥٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{الخلية أ} \text{ ٣} \text{ ب} \text{ ٣} = ١٠٠ - ١٠٠ = \text{صفر وحدة}$$

$$\text{الخلية أ} \text{ ٢} \text{ ب} \text{ ٢} = ١٠٠ + ١٠٠٠ = ١١٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{الخلية أ} \text{ ٢} \text{ ب} \text{ ١} = ١٠٠ - ٢٠٠٠ = ١٩٠٠ \text{ وحدة}$$

وهذا تظل باقي خلايا الجدول كما هي دون تغيير.

ج - إعداد جدول النقل الجديد (الثالث):

يوضح الجدول التالي (١٣/٨) الحل الثالث:

جدول (١٣/٨) جدول الحل الثالث

الطاقات	المنافذ			المصانع
	ب _٣	ب _٢	ب _١	
٢٩٠٠	٥٠٠	٢	٧	أ _١
٢٠٠٠		٥	٥	أ _٢
١١٠٠		٤	٢	أ _٣
٧٥٠	٧٥٠	٥	٣	أ _٤
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الاحتياجات

د - تكلفة النقل للحل الثالث:

$$= 1100 \times 5 + 1900 \times 2 + 100 \times 2 + 500 \times 2 + 2400 \times 3 = 23850 \text{ جنيه.}$$

أي أن برنامج النقل الثالث أدى إلى تخفيض تكاليف النقل بمقدار 600 جنيه (24450 - 23850 تكلفة الحل الثاني - 23850 تكلفة الحل الثالث).

وهذا التخفيض يمكن حسابه عن طريق ضرب الكمية التي تم نقلها إلى الخلية أ₁ ب₁ في تكلفة الفرصة المضاعة لهذه الخلية، أي 100 وحدة × 6 = 600 جنيه.

اختبار مثالية الحل الثالث:

بفحص جدول النقل السابق (١٣/٨) يلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة ٦ خلايا (أي يساوي عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١)، وهذا يعني أن هذا الحل يعتبر حلاً مسموحاً به ويمكن اختبار مثاليته.

يوضح الجدول التالي (١٤/٨) نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في الجدول السابق (١٣/٨) وفقاً لطريقة حجر الوطء.

الخلية	المسار المغلق	التغير في التكلفة	تكلفة الفرصة
أ ₁ ب ₁	+ أ ₁ ب ₁ - أ ₁ ب ₂ + أ ₁ ب ₃ - أ ₂ ب ₁	+ ٧ - ٣ - ٥ = ١	١ -
أ ₂ ب ₁	+ أ ₂ ب ₁ - أ ₂ ب ₂ + أ ₂ ب ₃ - أ ₁ ب ₁	+ ٥ - ٢ - ٣ = ٤	٤ -
أ ₃ ب ₁	+ أ ₃ ب ₁ - أ ₃ ب ₂ + أ ₃ ب ₃ - أ ₂ ب ₁	+ ٧ - ٢ - ٥ = ٨	٨ -
أ ₁ ب ₂	+ أ ₁ ب ₂ - أ ₁ ب ₁ + أ ₁ ب ₃ - أ ₂ ب ₂	+ ٤ - ٢ - ٣ + ٥ = ٤	٤ -
أ ₂ ب ₂	- أ ₂ ب ₂ + أ ₂ ب ₁ + أ ₂ ب ₃ - أ ₁ ب ₂	= ٦	٦ -
أ ₃ ب ₂	+ أ ₃ ب ₂ - أ ₃ ب ₁ + أ ₃ ب ₃ - أ ₂ ب ₂	+ ٦ - ٣ - ٥ = ٠	صفر
أ ₁ ب ₃	+ أ ₁ ب ₃ - أ ₁ ب ₂ + أ ₁ ب ₁ - أ ₂ ب ₃	+ ٣ - ٢ + ٥ - ٥ = ١	١ +

يتضح من الجدول السابق (١٤/٨) أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية أ₁ ب₁ موجبة، وبذلك يكون الحل السابق (جدول ١٣/٨) ليس حل أمثل ولتحسينه يتم إدخال الخلية أ₁ ب₁ في الحل وذلك على النحو التالي:

أ - تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية أ؛ ب_٢.

بفحص المسار المغلق للخلية أ؛ ب_٢ يتضح أن الخلايا التي أشارتها سالبة في هذا المسار (يعنى الخلايا التي يتم النقل منها) هي الخلايا أ؛ ب_٣، أ_٢ ب_٢، أ_١ ب_١، وأقل كمية في هذه الخلايا الثلاثة هي ٧٥٠ وحدة، إذن يتم نقل ٧٥٠ وحدة إلى الخلية أ؛ ب_٢.

ب - تحديد أثر النقل إلى الخلية أ؛ ب_٢ على خلايا المسار المغلق لها.

الخلية أ؛ ب_٢ = صفر + ٧٥٠ = ٧٥٠ وحدة

الخلية أ؛ ب_٣ = ٧٥٠ - ٧٥٠ = صفر وحدة

الخلية أ_٢ ب_١ = ٧٥٠ + ١٠٠ = ٨٥٠ وحدة

الخلية أ_٢ ب_٢ = ٧٥٠ - ١٩٠٠ = ١١٥٠ وحدة

الخلية أ_١ ب_٣ = ٧٥٠ + ٥٠٠ = ١٢٥٠ وحدة

الخلية أ_١ ب_١ = ٧٥٠ - ٢٤٠٠ = ١٦٥٠ وحدة

هذا وتظل باقي خلايا الجدول كما هي دون تغيير.

جدول (١٥/٨)

يوضح الحل الرابع

الطاقات	ب _٢	ب _١	ب _٣	المنافذ المصانع
٢٩٠٠	٢ ١٢٥٠	٧	٣ ١٦٥٠	أ _١
٢٠٠٠	٥	٥ ١١٥٠	٢ ٨٥٠	أ _٢
١١٠٠	٤	٢ ١١٠٠	٧	أ _٣
٧٥٠	٥	٣ ٧٥٠	٦	أ _٤
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الاحتياجات

د - تكلفة النقل للحل الرابع.

$$2 \times 1100 + 5 \times 1150 + 2 \times 850 + 2 \times 1250 + 3 + 1650 = 3 \times 750 + 19350 = 3 \times 750 + 19350$$

يتضح من ذلك أن برنامج النقل الرابع يخفض تكلفة النقل بمقدار ٤٥٠٠ جنيه (٢٣٨٥٠ - ١٩٣٥٠ تكلفة الحل الثالث - ١٩٣٥٠ تكلفة الحل الرابع). وهذا التخفيض يتمثل في تكلفة الفرصة المضاعة للكمية التي تم نقلها للخلية أ، ب. (وهي ٦ × ٧٥٠ وحدة).

اختبار المثالية الحل الرابع:

حيث أن عدد الخلايا المشغولة في الجدول السابق (١٥/٨) ٦ خلايا فإن هذا الحل يعتبر حلاً مسموحاً به ويمكن اختبار مثاليته. ويوضح الجدول التالي (١٦/٨) نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في الجدول السابق (١٥/٨) وفقاً لطريقة حجر الوطء.

الخلية	المسار المغلق	التغير في التكلفة	تكلفة الفرصة
أ١ ب٢	+ أ١ ب٢ - أ١ ب١ + أ٢ ب١ - أ٢ ب٢	+ ٧ - ٣ - ٥ + ١ = ١	- ١
أ٢ ب٢	+ أ٢ ب٢ - أ٢ ب١ + أ١ ب١ - أ١ ب٢	+ ٥ - ٢ - ٣ + ٢ = ٤	- ٤
أ٣ ب١	+ أ٣ ب١ - أ٣ ب٢ + أ٢ ب١ - أ٢ ب٢	+ ٧ - ٢ - ٥ + ٢ = ٨	- ٨
أ٣ ب٢	+ أ٣ ب٢ - أ٣ ب١ + أ٢ ب١ + أ١ ب١ - أ١ ب٢	+ ٤ - ٢ - ٥ + ٢ - ٣ = ٦	- ٦
أ٤ ب١	+ أ٤ ب١ - أ٤ ب٢ + أ١ ب١ + أ٢ ب١ - أ٢ ب٢	+ ٦ - ٢ - ٥ + ٣ = ٦	- ٦
أ٤ ب٢	+ أ٤ ب٢ - أ٤ ب١ + أ٢ ب١ + أ١ ب١ - أ١ ب٢	+ ٥ - ٣ - ٥ + ٢ = ٦	- ٦

يتضح من الجدول السابق (١٦/٨) أن تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة أي لا توجد خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة، وبذلك يكون الحل السابق (جدول الحل الرابع ١٦/٨) هو الحل الأمثل.

هذا وعلى ضوء جدول الحل الأمثل (١٦/٨) يكون برنامج النقل الأمثل على النحو التالي:

- طاقة المصنع أ_١ ينقل منها ١٦٥٠ وحدة لتلبية احتياجات المنفذ ب_١، ١٢٥٠ لتلبية المنفذ ب_٣.
- طاقة المصنع الثاني أ_٢ ينقل منها ٨٥٠ وحدة لتلبية احتياجات المنفذ ب_١، ١١٥٠ وحدة لتلبية احتياجات المنفذ ب_٢.
- طاقة المصنع الثالث أ_٣ تنقل بالكامل لتلبية احتياجات المنفذ ب_٢.
- طاقة المصنع الرابع أ_٤ تنقل بالكامل لتلبية احتياجات المنفذ ب_٢.
- وتكون تكلفة النقل وفقا لهذا البرنامج ١٩٣٥٠ جنيه.

ثانيا: طريقة التوزيع المعدل:

يتضح مما سبق (في طريقة حجر الوطاء) أنه لتقويم الخلايا الفارغة فإنه يلزم حساب تكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية فارغة، وذلك بتحديد المسار المغلق لكل خلية فارغة وحساب الأثر على التكلفة، وتنفيذ ذلك يتطلب جهدا ووقتا ليس بالقصير، لذا فإن طريقة التوزيع المعدل تحاول تجنب ذلك، وذلك بعدم تحديد المسار المغلق لجميع الخلايا الفارغة، بل يتم الاكتفاء بتحديد المسار المغلق لخلية واحدة وهي الخلية الفارغة المرشحة للدخول في الحل الجديد.

هذا ويمكن توضيح خطوات تطبيق طريقة التوزيع المعدل على النحو

الآتي:

١ - حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة:

حيث أن طريقة النقل تعتبر طريقة خاصة من طرق البرمجة الخطية فإن نفس المبادئ والقواعد التي تنطبق في حالة استخدام طريقة السمبلكس يمكن تطبيقها في حالة استخدام طريقة النقل، ولما كانت تكلفة الفرصة المضاعة (أسعار الظل في صف التقويم النهائي) للمتغيرات الأساسية (الممثلة في الحل) تساوى صفر وذلك في حالة إتباع طريقة السمبلكس، فإنه بنفس المنطق فإن

الخلايا المشغولة في طريقة النقل تمثل المتغيرات الأساسية، وبالتالي فإن تكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية مشغولة تكون صفر.

وطبقاً للقاعدة التي تقضي بأن يكون عدد الخلايا المشغولة يساوي عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١ فإنه لا بد من وجود خلية مشغولة على الأقل في كل صف وفي كل عمود وعلى ضوء ذلك يمكن تقدير قيم الصفوف وقيم الأعمدة وفقاً للمعادلة الآتية:

تكلفة الخلية المشغولة (ت) = قيمة صفها (ف) + قيمة عمودها (ع)

$$\text{أى أن } ت = ف + ع \quad (١)$$

$$\text{أو } ف + ع - ت = \text{صفر}$$

ولحساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة وفقاً لهذه المعادلة يتم تعيين قيمة صفر لأي صف أو أي عمود يتم اختياره عشوائياً^(١)، ويتطلب حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة إضافة صف جديد لحساب قيم الأعمدة وعمود جديد لحساب قيم الصفوف.

٢ - حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة (ص).

باستخدام المعادلة السابقة (رقم ١) يمكن حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلية الفارغة (المتغير غير الأساس) وفقاً للمعادلة الآتية:

تكلفة الفرصة المضاعة للخلية الفارغة (ص)

$$= \text{قيمة صفها (ف) + قيمة عمودها (ع) - تكلفتها (ت)}$$

$$\text{أو } ص = ف + ع - ت \quad (٢)$$

٣ - تقويم الحل وتحديد الخلية الفارغة المرشحة للدخول في الحل المبدئي الجديد وهي الخلية الفارغة صاحبة أكبر تكلفة فرصة مضاعة موجبة.

٤ - تحديد المسار المغلق للخلية الفارغة المرشحة للدخول في الحل.

٥ - تصميم جدول الحل الجديد وحساب تكلفة النقل.

٦ - تكرار الخطوات السابقة (١ حتى ٥) حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل.

(١) للتسهيل يمكن تعيين الصفر للصف أو العمود الذي به أكبر عدد من الخلايا المشغولة بالجدول.

هذا ويمكن تطبيق هذه الخطوات باستخدام بيانات جدول الحل المبدئي السابق إعداده طبقاً لطريقة فوجل التقريبية^(١) جدول (٨/٨) وذلك على النحو الآتي:

١- حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة:

يظهر من جدول (٨/٨) وجود ٦ خلايا مشغولة يمكن استخدام تكلفتها في حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة. وبفرض أن قيمة الصف الأول (ف١) = صفر. وبتطبيق المعادلة $ت + ف = ع$ فإنه يمكن حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة كما يلي:

$$ت١ = ف١ + ع١$$

$$٣ = صفر + ع٢$$

$$\therefore ع١ = ٣$$

$$ت٢ = ف٢ + ع١$$

$$٧ = صفر + ع٢$$

$$\therefore ع٢ = ٧$$

$$ت٣ = ف٣ + ع١$$

$$٢ = صفر + ع٢$$

$$\therefore ع٣ = ٢$$

$$ت٤ = ف٤ + ع٢$$

$$٢ = ف٤ + ع٣$$

$$\therefore ف٤ = ١ - ٢ = ١$$

$$ت٥ = ف٥ + ع٣$$

$$٢ = ف٥ + ع٤$$

$$\therefore ف٥ = ٥ - ٢ = ٣$$

$$ت٦ = ف٦ + ع٤$$

$$٣ = ف٦ + ع٥$$

$$\therefore ف٦ = ٤ - ٣ = ١$$

وعلى ذلك فإن:

قيم الصفوف هي ف١ = صفر، ف٢ = ١، ف٣ = ٥، ف٤ = ١، ف٥ = ٣، ف٦ = ١

قيم الأعمدة هي ع١ = ٣، ع٢ = ٧، ع٣ = ٢، ع٤ = ١

(١) يمكن تطبيق التوزيع المعدل (وكذلك طريقة حجر الوطاء) على أي جدول نقل يراد اختبار مثاليته سواء كان حلاً مبدئياً أو غير مبدئي، وسواء تم إعداد الحل المبدئي بطريقة فوجل التقريبية أو غيرها من طرق إعداد الحل المبدئي.

هذا ويبدو من المناسب الإشارة إلى أنه إذا تم تعيين قيمة صفر لصف آخر خلاف الصف (ف_١) أو لأي عمود فسوف يتم التوصل إلى قيم للصفوف وللأعمدة قد تختلف عن القيم السابق التوصل إليها غير أن تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة سوف لا تتأثر، أي أن تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة لا تتأثر باختلاف قيم الصفوف وقيم الأعمدة.

هذا وتظهر بيانات الجدول (٨/٨) بعد إضافة عمود قيم الصفوف وقيم الأعمدة في الجدول التالي (١٧/٨).

	٢ = ٢ع	٧ = ٢ع	٣ = ١ع	قيم الأعمدة	
الطاقات	ب _٢	ب _٢	ب _١	المنافذ المصانع	قيم الصفوف
٢٩٠٠	٢ ١٢٥٠	٧ ١١٥٠	٣ ٥٠٠	أ _١	ف _١ = صفر
٢٠٠٠	٥	٥	٢ ٢٠٠٠	أ _٢	ف _٢ = ١-
١١٠٠	٤	٢ ١١٠٠	٧	أ _٣	ف _٣ = ٥-
٧٥٠	٥	٣ ٧٥٠	٦	أ _٤	ف _٤ = ٤-
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الاحتياجات	

٢ - حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

تحسب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة وفقا للمعادلة الآتية:

$$ص = ف + ع - ت$$

$$ص = ٢٢ = ٢ف + ٢ع - ٢ت$$

$$١ = ٥ - ٧ + ١ =$$

$$\text{ص} = ٣٢ = ٢\text{ف} + ٢\text{ع} - ٣\text{ت}$$

$$٦ = ٥ - ٢ + ١ =$$

$$\text{ص} = ١٣ = ٢\text{ف} + ١\text{ع} - ١٣\text{ت}$$

$$٩ = ٧ - ٣ + ٥ =$$

$$\text{ص} = ٣٣ = ٣\text{ف} + ٢\text{ع} - ٣\text{ت}$$

$$٧ = ٤ - ٢ + ٥ =$$

$$\text{ص} = ١٤ = ١\text{ف} + ١\text{ع} - ١\text{ت}$$

$$٧ = ٦ - ٣ + ٤ =$$

$$\text{ص} = ٣٤ = ٣\text{ف} + ٤\text{ع} - ٣\text{ت}$$

$$٧ = ٥ - ٢ + ٤ =$$

٣ - تقويم الحل واقتراح التغييرات اللازمة:

يتضح مما سبق أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية أ_١ ب_١ موجبة وهذا يعنى أن هذا حل غير أمثل ولتحسين هذا الحل فإنه يلزم إدخال الخلية أ_١ ب_١ في الحل.

٤ - تحديد المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل:

يتم تحديد المسار المغلق للخلية أ_١ ب_١ بنفس الطريقة السابق توضيحها عند تطبيق طريقة حجر الوطء.

وعلى ضوء بيانات الجدول السابق (١٧/٨) يكون المسار المغلق للخلية

الفارغة أ_١ ب_١ كما يلي:

$$+ \text{أ} \text{ب} - \text{أ} \text{ب} + \text{أ} \text{ب} - \text{أ} \text{ب} + \text{أ} \text{ب} - \text{أ} \text{ب}$$

هذا وتتحدد الكمية التي يمكن نقلها إلى الخلية أ_١ ب_١ (كما هو الحال عند

تطبيق طريقة حجر الوطء) بأقل كمية في الخلايا المسموح بالنقل منها للخلية

أ_١ ب_١ (أي الخلايا التي إشارتها سالبة في المسار المغلق لها) وهي الخلية

أ_١، وبها ١١٥٠ وحدة وبالتالي فإن أقصى كمية نقلها إلى الخلية أ_١ ب_٢ هي ١١٥٠ وحدة.

وبذلك تكون الكميات بالخلايا التي تأثرت بهذا التغيير كما يلي:

$$\text{أ ب } ٢ = \text{صفر} + ١١٥٠ = ١١٥٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{أ ب } ١ = ١١٥٠ - ٢٠٠٠ = ٨٥٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{أ ب } ١ = ١١٥٠ + ٥٠٠ = ١٦٥٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{أ ب } ١ = ١١٥٠ - ١١٥٠ = \text{صفر}$$

وتظل باقي خلايا الجدول كما هي دون تغيير.

وبذلك يكون جدول الحل الثاني كما يظهر بالجدول التالي (١٨/٨). مع

إضافة عمود لحساب قيم الصفوف وصف لحساب قيم الأعمدة.

	٣ع = ٤-	٢ع = صفر	١ع = ٣	قيم الأعمدة	
الطاقات	ب _٢	ب _١	ب _١	المنافذ المصانع	قيم الصفوف
٢٩٠٠	٢ ١٢٥٠	٧	٣ ١٦٥٠	أ _١	ف _١ = ٦
٢٠٠٠	٥	٥ ١١٥٠	٢ ٨٥٠	أ _٢	ف _٢ = ٥
١١٠٠	٤	٢ ١١٠٠	٧	أ _٣	ف _٣ = ٢
٧٥٠	٥	٣ ٧٥٠	٦	أ _٤	ف _٤ = ٣
٦٧٥٠	١٢٥٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠	الاحتياجات	

يتضح من جدول النقل السابق (١٨/٨) أن عدد الخلايا المشغولة ٦ خلايا أي أنه حل مسموح به وتكلفة النقل طبقاً لهذا الحل كما يلي:

$$+ 2 \times 1100 + 5 \times 1150 + 2 \times 850 + 2 \times 1250 + 3 \times 1650 = 3 \times 750 = 19350 \text{ جنيته.}$$

اختبار مثالية الحل الثاني:

يتم اختبار المثالية بنفس الخطوات السابقة:

١ - حساب قيم الصفوف والأعمدة:

بفرض تعيين قيمة صفر للعمود الأول ع_١، وبتطبيق المعادلة السابقة رقم

(١) يمكن حساب قيم الصفوف والأعمدة كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{ت}_2 &= \text{ف}_2 + \text{ع}_2 \\ \text{ف}_2 &= 5 - \text{ع}_2 \\ \text{ت}_3 &= \text{ف}_3 + \text{ع}_3 \\ \text{ف}_3 &= 2 - \text{ع}_3 \\ \text{ت}_4 &= \text{ف}_4 + \text{ع}_4 \\ \text{ف}_4 &= 3 - \text{ع}_4 \\ \text{ت}_5 &= \text{ف}_5 + \text{ع}_5 \\ \text{ع}_5 &= 2 - \text{ع}_5 \\ \text{ت}_6 &= \text{ف}_6 + \text{ع}_6 \\ \text{ف}_6 &= 3 - (-3) \\ \text{ت}_7 &= \text{ف}_7 + \text{ع}_7 \\ \text{ع}_7 &= 3 - 6 \end{aligned}$$

وتظهر هذه القيم أمام الصفوف والأعمدة كما هو موضح بالجدول

السابق (١٨/٨).

٢ - حساب تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

يتم استخدام المعادلة رقم (٢) السابق ذكرها وتكون تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة كما يلي:

$$\text{ص} ٢١ = \text{ف} ١ + \text{ع} ٢ - \text{ت} ٢١$$

$$١- = ٧ - \text{صفر} + ٦ =$$

$$\text{ص} ٣٢ = \text{ف} ٢ + \text{ع} ٣ - \text{ت} ٣٢$$

$$٤- = ٥ - (٤-) + ٥ =$$

$$\text{ص} ١٣ = \text{ف} ٣ + \text{ع} ١ - \text{ت} ١٣$$

$$٨- = ٧ - (٣-) + ٢ =$$

$$\text{ص} ٣٣ = \text{ف} ٣ + \text{ع} ٣ - \text{ت} ٣٣$$

$$٦- = ٤ - (٤-) + ٣ =$$

$$\text{ص} ١٤ = \text{ف} ٤ + \text{ع} ١ - \text{ت} ١٤$$

$$٦- = ٦ - (٣-) + ٣ =$$

$$\text{ص} ٣٤ = \text{ف} ٤ + \text{ع} ٣ - \text{ت} ٣٤$$

$$٦- = ٥ - (٤-) + ٣ =$$

٣ - تقويم الحل:

يتضح مما سبق أن تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة أي لا توجد تكلفة مضاعة موجبة، وبذلك يكون الحل السابق (جدول ١٧/٨) هو الحل الأمثل.

وبذلك يكون برنامج النقل الأمثل على النحو التالي:

- يتم تخصيص ١٦٥٠ وحدة من طاقة أ_١ للمنفذ ب_١، ٢٥٠ وحدة للمنفذ ب_٣.

- يتم تخصيص ٨٥٠ وحدة من طاقة أ_٢ للمنفذ ب_١، ١١٥٠ وحدة للمنفذ ب_٢.

- يتم تخصيص كل طاقة أ_٣ (١١٠٠ وحدة) للمنفذ ب_٢.

- يتم تخصيص كل طاقة أ_٤ (٧٥٠ وحدة) للمنفذ ب_٢.

وتكون أقل تكلفة نقل ممكنة طبقاً لهذا البرنامج ١٩٣٥٠ جنيه، بمقارنة بيانات جدول الحل الأمثل في حالة اختبار المثالية بطريقة حجر الوطء (جدول ١٥/٨) وبرنامج النقل وتكلفة النقل مع بيانات جدول الحل الأمثل في حالة اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل (جدول ١٨/٨) يتضح أن كلي الطريقتين يوصل إلى نفس النتائج غير أن طريقة التوزيع المعدل تتطلب جهداً ووقتاً أقل ما تتطلبه طريقة حجر الوطء.

٣/١/٨ طريقة النقل وتعظيم الأرباح:

في كثير من الحالات وبالنسبة لكثير من المنشآت قد يتم الإنتاج لسلعة متجانسة في مصانع مختلفة وبتكاليف إنتاج مختلفة نظراً لظروف الإنتاج ومدى توافر المواد الخام أو غير ذلك من الأسباب، وكذلك قد يتم تسويق نفس السلعة في منافذ توزيع مختلفة ولكن بأسعار بيع مختلفة بسبب ظروف موقع كل سوق ومدى المنافسة وأذواق المستهلكين ومستوى الدخل.

في مثل هذه الحالة لا تكون تكاليف النقل هي العامل المؤثر على الأرباح ولكن تتأثر الأرباح بتكاليف الإنتاج وأسعار البيع وتكاليف النقل، وهنا يكون الهدف المناسب للمنشأة هو تعظيم الأرباح وليس تخفيض تكلفة النقل فقط.

وهنا يثار سؤال عن مدى إمكانية تطبيق طريقة النقل (السابق شرحها عند معالجة مشكلة تخفيض التكاليف) في حالة مشاكل تعظيم الأرباح، والجواب على السؤال نعم يمكن تطبيق النقل على مشاكل تعظيم الأرباح وبنفس الأسلوب والخطوات مع مراعاة الفروق والاختلافات الآتية:

١ - حيث أن الهدف تعظيم الأرباح فإنه يتم استبدال تكلفة نقل الوحدة (التي تظهر في أعلى يمين الخلية) في جدول النقل بهامش ربح الوحدة المنقولة ويحسب هامش ربح الوحدة المنقولة وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\text{هامش مساهمة الوحدة} =$$

$$\text{سعر بيع الوحدة} - (\text{تكلفة صنع الوحدة} + \text{تكلفة نقل الوحدة})$$

٢ - عند إعداد الحل المبدئي في مشاكل تعظيم الأرباح تطبق نفس الطرق

التي سبق ذكرها في مشاكل تخفيض التكاليف على النحو التالي:

أ - طريقة الركن الشمالي الشرقي تطبق بنفس الأسلوب والخطوات التي سبق توضيحها في مشاكل تخفيض التكاليف دون أية اختلافات.

ب - طريقة أدنى تكلفة تصبح طريقة أقصى ربح، حيث يتم البدء بشغل الخلية التي لها أكبر هامش ربح للوحدة أولاً ثم الخلية التي تقل عنها مباشرة في الربح وهكذا.

ج - طريقة فوجل التقريبية تطبق بنفس الأسلوب والخطوات كما سبق تطبيقها في مشاكل تخفيض التكاليف، غير أنه يتم حساب الفرق بين أكبر هامش مساهمة للوحدة وهامش الربح الذي يقل عنه مباشرة (بدلاً من حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وكل عمود)، وعند التخصيص يتم للخلية التي لها أكبر هامش ربح بالعمود أو الصف صاحب أكبر فرق ربح.

٣ - اختبار مثالية الحل في مشاكل تعظيم الأرباح يتم بنفس الأسلوب وبنفس الطرق السابق توضيحها (حجر الوطاء والتوزيع المعدل) غير أنه في مشاكل التعظيم يكون الحل أمثل إذا كانت تكلفة الفرصة المضاعفة لجميع الخلايا الفارغة موجبة أو صفر (عكس مشاكل التخفيض) أما إذا وجدت تكلفة فرصة سالبة لخلية فارغة أو أكثر لا يكون الحل أمثل ولتحسينه ترشح الخلية الفارغة صاحبة أكبر تكلفة فرصة سالبة للدخول في الحل الجديد (عكس مشاكل التخفيض).

٤/١/٨ حالات خاصة بمشاكل النقل:

قد اظهر أثناء حل مشكلة النقل بعض الحالات الخاصة التي يمكن معالجتها بطريقة خاصة أيضاً، ومن هذه الحالات الخاصة ما يلي:

١ - حالة عدم التوازن:

تظهر هذه الحالة عندما لا يتساوى مجموع طاقات المصادر (العرض) مع مجموع احتياجات المنافذ أو النهايات (الطلب) وتعالج هذه الحالة كما يلي:

أ - إذا كان مجموع طاقات المصادر (العرض) أكبر من مجموع احتياجات المنافذ (الطلب) يتم إضافة منفذ وهمي (صوري) تنقل إليه الكمية الزائدة وتكون تكلفة النقل إلى المنافذ الوهمي صفر. ويعنى هذا المنفذ الوهمي أن هناك كمية (مقدار الفرق بين العرض والطلب) لن يتم نقلها من المصانع إلى المنافذ بل ستخزن بالمصانع.

ب - إذا كان مجموع طاقات المصادر (العرض) أقل من مجموع احتياجات المنافذ (الطلب) يتم إضافة مصدر وهمي تنقل منه الكمية التي تكمل احتياجات المنافذ وتكون تكلفة النقل من المصدر الوهمي إلى المنافذ صفر، ويعنى هذا المصدر الوهمي أن هناك كمية (مقدار الفرق بين العرض والطلب) لن تنقل من المصانع إلى المنافذ بل سيتم تدبيرها من خارج مصانع الشركة أي من منافذ التوزيع نفسها.

٢ - حالة تعدد الحلول المثلي:

تظهر هذه الحالة إذا كانت خلية (أو أكثر) غير مشغولة وغير أساسية (يعنى لم تدخل في الحل) في جدول الحل الأمثل ولها تكلفة فرصة مضاعفة صفر. فإدخال هذه الخلية في الحل قد يغير من برنامج النقل ولكن لن يؤثر على التكلفة الكلية للنقل.

وهذه الحالة تعطي الإدارة فرصة اختيار برنامج النقل الذي يناسب ظروفها وإمكانيتها ويراعي العوامل الأخرى التي لا تقاس ماليا مثل النواحي النفسية ومراعاة رغبات منافذ التوزيع إلى غير ذلك من الاعتبارات دون تحمل لتكاليف نقل أكثر.

٣ - حالة الحل غير المنتظم:

تظهر مشكلة الحل غير المنتظم (الاعتلال) Degenerate solution عندما يكون عدد الخلايا المشغولة، أقل من العدد المسموح به، أي أن قاعدة الحل الممكن غير متوافرة، ويترتب على هذه المشكلة عدم إمكانية تحديد المسار المغلق لبعض الخلايا الفارغة.

هذا وقد تظهر هذه المشكلة عند إعداد الحل المبدئي للمشكلة وفي هذه الحالة يتم تعيين كمية صفرية لأي خلية فارغة يتم اختيارها عشوائياً، ولكن للتوصل إلى الحل الأمثل بصورة أسرع يمكن تعيين قيمة صفرية لخلية فارغة تكون لها أقل تكلفة نقل في الجدول (وفي حالة التعظيم يكون لها أكبر هامش مساهمة بين الخلايا الفارغة).

أما إذا ظهرت مشكلة الحل غير المنتظم في مرحلة الحل الوسيطة أو عند الحل الأمثل فإنه يمكن علاجها بإنشاء خلية (أو عدد من الخلايا) المشغولة بكمية صفرية، وتعامل هذه الخلية (أو الخلايا) نفس معاملة الخلايا المشغولة أصلاً (التي في الحل الأساسي) ويتم اختيار الخلية (أو الخلايا) الصفرية عشوائياً. أو تخصص القيمة الصفرية لإحدى الخليتين اللتين أصبحتا فارغتين نتيجة عملية تحسين الحل، وذلك عندما تتساوى الكميات التي في الخلايا المرشحة للخروج من الحل (أي الخلايا ذات الإشارة السالبة في المسار المغلق).

هذا وعند تحسين الحل غير المنتظم توجد ثلاثة احتمالات هي:

أ - الخلية الصفرية تظل كما هي ولا تتأثر بعملية تحسين الحل وذلك إذا لم تقع ضمن خلايا المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد، ويظهر ذلك من الشكل التالي بفرض أن الخلية المرشحة للدخول في الحل

هي ١، ب ١.

	ب ١	ب ٢	
أ ١	٥	٦	
أ ٢	٤	٢	صفر
أ ٣	٣	٩	٧

	أ ١	ب ١	
أ ١	٥	٦	
أ ٢	٤	٢	صفر
أ ٣	٣	٩	٢

يلاحظ من الشكل السابق أن الخلية α_1 لم تتأثر بعملية تحسين الحل ودخول الخلية α_1 في الحل الجديد لأنها لم تكن ضمن خلايا المسار المغلق للخلية المرشحة في الدخول في الحل الجديد.

ب - الخلية الصفرية تملأ بكمية فعلية وتصبح متغير فعال في المشكلة، وذلك إذا كانت ضمن الخلايا التي أشارتها موجبة (أي يضاف لها) في المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد. ويظهر ذلك من الشكل التالي بفرض أن الخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد هي α_1 .

	α_1	α_2	
α_1	5	3	3
α_2	2	4	4
			3

	α_1	α_2	
α_1	5	3	3
α_2	2	4	4
			3

	α_1	α_2	
α_1	5	3	3
α_2	2	4	4
			3

يوضح الشكل السابق كيف أصبحت الخلية الصفرية α_1 بعد تحسين الحل خلية مشغولة بكمية فعلية.

ج - تنتقل الخلية الصفرية من مكانها دون أن يتأثر الحل وتظل تكلفته كما هي، وذلك إذا كانت الخلية الصفرية ضمن الخلايا التي أشارتها سالبة (ينقل منها) في المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل- الجديد ويظهر في ذلك من الشكل التالي بفرض أن الخلية المرشحة للدخول في الحل هي α_2 .

	α_1	α_2	
α_1	5	3	3
α_2	2	4	4
			3

	α_1	α_2	
α_1	5	3	3
α_2	2	4	4
			3

	α_1	α_2	
α_1	5	3	3
α_2	2	4	4
			3

ويظهر الشكل السابق كيف انتقلت الخلية الصفرية من مكانها فبدل أن كانت أ، ب، الخلية الصفرية أصبحت أ، ب، هي الخلية الصفرية دون أن تتأثر تكلفة الحل ولا الحل نفسه.

٤ - حالة الخلايا غير الممكنة (غير الممكن شغلها):

قد يصعب في بعض الحالات العملية تلبية احتياجات كل منافذ التوزيع من كل مصدر من المصادر، فقد تمنع الظروف العملية نقل كميات من المصدر الأول مثلا للمنفذ الثالث مثلا (بل النقل للمنفذين الأول والثاني فقط). في مثل هذه الحالة تكون الخلية أ، ب، غير ممكن شغلها.

ولعلاج هذه المشكلة يتم تعيين تكلفة كبيرة جدا لهذه الخلية غير الممكنة حتى تخرج من الحل ولا تدرج فيه (كما هو الحال عند استخدام طريقة السمبلكس حيث يتم تعيين تكلفة كبيرة رمزها م مثلا للمتغيرات الصورية حتى تخرج من الحل). ويتم ذلك الإجراء إذا كان يتم حل مشكلة النقل باستخدام الحاسبات الإلكترونية، أما إذا كان حل مشكلة النقل يتم يدويا، فيمكن تجاهل هذه الخلية الممكنة تماما وتكملة الحل وكأنها غير موجودة.

ويوضح الشكل التالي شكل جدول النقل في حالة وجود خلية غير ممكنة، وذلك بفرض أن الخلية غير الممكنة هي أ، ب، وبفرض إعداد الحل بطريقة الركن الشمالي الشرقي.

الطاقات	ب _٣	ب _٢	ب _١	
١٠٠	٨	٧	٥	أ _١
		٥٠	٥٠	
٣٠		٧	٤	أ _٢
		٣٠		
٥٠	١٥	٩	٣	أ _٣
	٤٠	١٠		
١٨٠	٤٠	٩٠	٥٠	الاحتياجات

٢/٨ طريقة التعيين: The Assignment Method

تعتبر مشكلة التعيين (كما سبق القول) حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، حيث يكون الهدف فيها مقابلة (تعيين) عدد معين من المصادر (الموارد أو الإمكانيات) بنفس العدد من الغايات (الاستخدامات أو الأعمال) بصورة تمكن من تحقيق أدنى تكلفة ممكنة أو أقل وقت ممكن (أو تحقيق أقصى ربح ممكن في حالة تعظيم الأرباح).

هذا ويتم التعيين على أساس الربط بين واحد من المصادر (الموارد) وواحد فقط من الاستخدامات (الغايات) أو العكس أي ربط غاية واحدة بمصدر (مورد) واحد فقط حيث يجب تساوى عدد المصادر مع عدد الغايات. ونظرا لهذه الطبيعة الخاصة بمشاكل التعيين وطريقة التعيين فإن النموذج الرياضي لها يتصف ببعض الصفات منها ما يلي:

أ - تكون المقابلة بين واحد من المصادر وواحد فقط من الاستخدامات، أي عدد الموارد المطلوبة للاستخدامات في أي صف تساوى واحد صحيح (على فرض أن الصفوف تمثل الموارد) وكذلك فإن عدد الاستخدامات المعينة للمورد في أي عمود تساوى واحد صحيح (على فرض أن الأعمدة تمثل الاستخدامات).

ب - ضرورة تحقيق المساواة بين عدد المصادر وعدد الغايات أي تكون مصفوفة معاملات الخلايا مربعة^(١).

ج - الكمية التي تخصص لكل خلية أما أن تكون واحد صحيح (أي تكون الخلية مشغولة) أو صفر (أي تكون فارغة) ولا يخصص للخلية أكثر من واحد صحيح.

هذا ويبدو من المناسب الإشارة إلى أن مشكلة التعيين يمكن أن تحل بطرق متعددة، مثل استخدام الطريقة العامة للبرمجة الخطية أو بطريقة للنقل

(١) في حالة عدم التساوى يتم الاستعانة بمتغيرات صورية كما سيتم إنشاء الله توضيح ذلك في نهاية هذه النقطة ٢/٢.

باعتبار أن مشكلة التعيين تعد حالة خاصة لمشاكل النقل، كذلك يمكن حلها إذا كانت صغيرة، (عدد المتغيرات صغير) عن طريق أسلوب الحصر المباشر أو السرد Enumeration وذلك بإيجاد كل التباديل الممكنة لربط الموارد بالاستخدامات ولما كانت لها هيكل خاص يميزها عن المشاكل الأخرى للبرمجة الخطية التي يمكن حلها بطريقة السمبلكس أو طريقة النقل، فقد بذلت جهود وأجريت دراسات توصلت في النهاية إلى طريقة تناسب حل مشاكل التعيين بصورة أفضل وأكفا ويتم إنشاء الله تناول هذه الطريقة والتي تسمى بالطريقة المجرية The Hungarian Method على النحو التالي:

خطوات طريقة التعيين:

حيث أن مشاكل التعيين وكما سبق القول تعتبر نوع خاص من مشاكل البرمجة الخطية، فإن خطوات حلها وتتابع هذه الخطوات لا تختلف كثيرا عن خطوات حل مشاكل البرمجة الخطية الأخرى، وتتمثل خطوات حل مشاكل التعيين طبقا لطريقة التعيين فيما يلي:

١ - إعداد مصفوفة تكلفة الفرصة المضاعة (تمثل الحل المبدئي).

٢ - اختبار مثالية الحل.

٣ - تحسين الحل إذا لم يكن أمثل والاستمرار في تعديل مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة (تحسين الحل) وإعادة اختبار المثالية حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل.

٤ - وضع برنامج التعيين الأمثل وحساب التكاليف أو الأرباح الكلية.

هذا ويمكن توضيح خطوات التعيين من خلال المثال التالي:

لدى إحدى الشركات الصناعية في أحد الأقسام الإنتاجية أربع آلات يمكن لكل آلة أن تنفذ أي أمر من أوامر التشغيل الموكلة تنفيذها لإدارة هذا القسم الإنتاجي ولكن بتكاليف مختلفة، ويوضح الجدول التالي التكاليف المتوقعة لإتمام كل أمر تشغيل من هذه الأوامر على كل آلة (بالجنيه).

د	ج	ب	أ	الأمر الإنتاجي الألة
٥٢	٨٠	٤٤	٦٢	س
٦٠	٥٤	٥٢	٤٠	ص
٣٦	٥٨	٤٠	٤٦	ع
٥٠	٧٦	٦٤	٦٦	ل

هذا وترغب إدارة الشركة في جدولة الأوامر الإنتاجية على الآلات بصورة تحمل الشركة أقل تكلفة تعيين ممكنة.

تقوم طريقة التعيين (الطريقة المجرية) على ما يسمى بعمليات تقليص المصفوفة **Matrix Reduction** وذلك عن طريق طرح وإضافة قيم معينة في المصفوفة وتتلخص خطوات هذه الطريقة في أربع مراحل أساسية (كما سبق ذكرها) يمكن توضيحها على النحو التالي بالتطبيق على بيانات المثال السابق.

أولاً: إعداد مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة:

توضع هذه المصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة التي ستتحملها الشركة نتيجة عدم إتباع الطريقة الأمثل في تعيين الآلات لتنفيذ أوامر التشغيل. ويتم إعداد هذه المصفوفة على خطوتين كما يلي:

١ - تطرح أصغر مفردة (تكلفة) في كل صف من باقي قيم نفس الصف (يمكن البدء بالأعمدة) فتكون المصفوفة كما يلي:

د	ج	ب	أ	
٨	٣٦	صفر	١٨	س
٢٠	١٤	١٢	صفر	ص
صفر	٢٢	٤	١٠	ع
صفر	٢٦	١٤	١٦	ل

توضح المصفوفة السابقة تكلفة الفرصة المضاعة لكل آلة، فتعيين الآلة س لتنفيذ الأمر (أ) (يتضمن تكلفة إضافية) بالمقارنة بأفضل فرصة تعيين في هذا الصف) تعادل $62 - 44 = 18$ ، في حين أن تعيين الآلة س لتنفيذ الأمر الإنتاجي ج يتضمن تكلفة إضافية تعادل $80 - 44 = 36$ ، وتعيين الآلة س لتنفيذ الأمر الإنتاجي د يتضمن تكلفة إضافية تعادل $52 - 44 = 8$ وهذا ما يظهر من الصف الأول في المصفوفة وهكذا.

٢ - تطرح أصغر مفردة في كل عمود (في المصفوفة السابقة في خطوة ١) من باقي عناصر نفس العمود. وبالنظر إلى المصفوفة السابقة يتضح أن أصغر مفردة في العمود الثالث تطرح من باقي القيم في نفس العمود أما باقي الأعمدة فأقل قيمة فيها صفر فتظل قيم هذه الأعمدة كما هي، وبذلك تكون مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة كما يلي:

د	ج	ب	أ	
٨	٢٢	صفر	١٨	س
٢٠	صفر	١٢	صفر	ص
صفر	٨	٤	١٠	ع
صفر	١٢	١٤	١٦	ل

توضح المصفوفة السابقة تكلفة الفرصة المضاعة الكلية أي بالأخذ في الاعتبار كل من تكلفة المضاعة للآلة وتكلفة الفرصة المضاعة للأمر الإنتاجي. ثانياً: اختبار المثالية:

يتم التوصل إلى الحل الأمثل إذا تم تقليص مصفوفة البدائل حتى تكون قيمة أحد الحلول الممكنة مساوية للصفر، أي نستمر في تقليص المصفوفة حتى يتوافر عدد من الخلايا الصفيرية المستقلة مساوي لعدد الصفوف أو عدد الأعمدة (ومن الضروري تساوي عدد الصفوف مع عدد الأعمدة) وفي هذه الحالة تكون تكلفة الفرصة المضاعة للتعيين صفر.

وللتحقق من ذلك يتم رسم عدد من الخطوط تغطي الخلايا (المفردات) الصفرية في مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة، فإذا كان أقل عدد ممكن من الخطوط يساوي (أو يزيد عن) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة يكون الحل الأمثل (أي تكون هناك خلايا صفرية مستقلة تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة)، يعني يكون هناك حل تكلفة الفرصة المضاعة له صفر. وتوضح المصفوفة التالية مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة بعد رسم الخطوط التي تمر بالخلايا الصفرية.

د	ج	ب	أ	
٨	٢٢	صفر	١٨	س
١٠	صفر	١٢	صفر	ص
صفر	٨	٤	١٠	ع
صفر	١٢	١٤	١٦	ل

يتضح من المصفوفة السابقة أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي تغطي الخلايا الصفرية هو ثلاثة خطوط وهذا العدد من الخطوط يقل عن عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، وبذلك لا يكون هذا حل أمثل ويلزم تحسينه.

ثالثاً: تحسين الحل واختبار مثاليته:

لتحسين الحل يلزم زيادة عدد الخلايا الصفرية بحيث يتوافر عدد من الخلايا الصفرية المستقلة يساوي (أو يزيد عن) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة حتى يمكن تعيين كل آلة لأمر إنتاجي معين بدون تحمل تكلفة فرصة مضاعة، ولتحقيق ذلك تتبع الخطوات التالية:

١ - تطرح أصغر قيمة في الخلايا التي لم يمر عليها خط أو خطان (غير المغطاة) من جميع القيم في الخلايا التي لم يمر عليها خط أو خطان (غير المغطاة).

- ٢ - تضاف نفس القيمة التي تم طرحها من الخلايا غير المغطاة على جميع الخلايا التي تقع عند تقاطع الخطوط (أي مر عليها خطان).
- ٣ - تظل قيم الخلايا التي مر عليها خط واحد كما هي دون تغيير.
- ٤ - تكرر الخطوات السابقة (١ حتى ٣) حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل.
- بتطبيق هذه الخطوات على مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة السابقة في الخطوة ثانيا يلاحظ وجود ٦ خلايا غير مغطاة هي ع أ، ع ب، ع ج، ل أ، ل ب، ل ج، وأقل قيمة في هذه الخلايا هي ٤ في الخلية ع ب وقد وضعت في مستطيل، وبطرح الرقم ٤ من القيم في الست خلايا غير المغطاة السابق ذكرها وإضافة نفس الرقم ٤ إلى الخلايا س د، ص د لأنهما خلايا التقاطع وتكرر كتابة قيم باقي الخلايا التي مر عليها خط واحد كما هي يتم التوصل إلى المصفوفة التالية:

د	ج	ب	أ	
١٢	٢٢	صفر	١٨	س
٤	صفر	١٢	صفر	ص
صفر	٤	صفر	٦	ع
صفر	٨	١٠	١٢	ل

وبرسم خطوط على الخلايا الصفرية يتضح أن أقل عدد ممكن من الخطوط هو ثلاثة خطوط فقط أي أقل من عدد الصفوف أو عدد الأعمدة إذن ليس هذا حل أمثل ويلزم تحسينه وذلك بتكرار الخطوات الأربع السابق ذكرها في ثالثا.

بفحص المصفوفة السابقة يلاحظ أن أقل قيمة لم يمر عليها خط هي ٤ (في الخلية ع ج) ووضع حولها مربع، وبطرحها من جميع القيم التي لم يمر عليها خط وجمعها على القيم التي تقع عند تقاطع الخطوط تكون مصفوفة تكاليف الفرصة المضاعة كما يلي:

د	ج	ب	أ	
١٢	١٨	صفر	١٤	س
١٨	صفر	١٦	صفر	ص
صفر	صفر	صفر	٢	ع
صفر	٨	١٠	٨	ل

برسم خطوط على الخلايا الصفيرية في المصفوفة السابقة، يتضح أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي أمكن رسمها هو ٤ خطوط تساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، يعنى هذا حل أمثل، أي يمكن تعيين الآلات لأوامر التشغيل دون تحمل تكلفة فرصة مضاعفة، أي تكون تكاليف الفرصة المضاعفة صفر.

رابعاً: برنامج التعيين الأمثل:

لتحديد برنامج التعيين الأمثل يتم البحث عن الخلية الصفيرية التي تكون وحيدة في صفها أو عمودها ثم تتم المقابلة (التعيين) بين الآلة والأمر الإنتاجي اللذين يتقابلان عند هذه الخلية الصفيرية، ثم يتم حذف الصف والعمود اللذان يتقاطعان عند هذه الخلية الصفيرية، يتم البحث عن خلية صفيرية أخرى تكون هي الوحيدة في صفها أو عمودها وتجرى المقابلة (التعيين) بين الآلة والأمر الإنتاجي اللذين يتقابلان عند هذه الخلية وهكذا حتى يتم التعيين الكامل لجميع الآلات والأوامر.

وبالتطبيق على المصفوفة السابقة يكون التعيين على النحو التالي:

- الصف الأول به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة س للأمر الإنتاجي ب ويتم استبعاد الصف الأول والعمود الثاني عند تكملة التعيين.
- العمود الأول به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة ص للأمر الإنتاجي أ.
- بحذف الصف الثاني يكون العمود الثالث به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة ع للأمر الإنتاجي ج.
- الصف الرابع به صفر واحد لذلك يتم تعيين الآلة ل للأمر الإنتاجي د.

ولحساب تكلفة برنامج التعيين يتم الرجوع للمصفوفة الأصلية وحساب التكاليف الكلية وفقا للتعين الذي تم إجرائه وبذلك يكون برنامج التعيين الأمثل والتكاليف كما يلي:

- تعيين الآلة س للأمر الإنتاجي ب بتكلفة ٤٤ جنيه.
- تعيين الآلة ص للأمر الإنتاجي أ بتكلفة ٤٠ جنيه.
- تعيين الآلة ع للأمر الإنتاجي ج بتكلفة ٥٨ جنيه.
- تعيين الآلة ل للأمر الإنتاجي د بتكلفة ٥٠ جنيه.
- التكلفة الكلية لبرنامج التعيين الأمثل = ٤٤ + ٤٠ + ٥٨ + ٥٠ = ١٩٢ جنيه.

طريقة التعيين وتعظيم الأرباح:

ليس من الضروري أن يكون هدف متخذ قرار التعيين هو تخفيض التكاليف، بل قد يكون أيضا تعظيم الأرباح، وذلك في الحالات التي يؤثر فيها قرار التعيين واختيار برنامج معين للتعين على أرباح المنشأة، كأن يتعلق برنامج التعيين مثلا برجال البيع يحققون نتائج أعمال مختلفة باختلاف مناطق البيع التي يخصصون لها.

هذا وعند تطبيق طريقة التعيين في حالة تعظيم الأرباح يتم إتباع نفس الخطوات السابق ذكرها في حالة تخفيض التكاليف غير أنه عند إعداد مصفوفة الأرباح المضاعة يتم طرح جميع مفردات الصف (يمكن البدء بالأعمدة) من أكبر مفردة في هذا الصف على أساس أن أكبر مفردة هي التي تعظم الأرباح والفرق بينها وبين المفردات الأخرى (الأقل منها طبعا) يمثل أرباح مضاعة، أي أن الأرقام بعد إجراء عملية الطرح تعنى أن عدم إجراء التعيين الأمثل يحمل المنشأة تكاليف فرصة مضاعة تتمثل في الأرباح المضاعة نتيجة عدم التعيين الأمثل.

ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي:

تقوم أحدي المنشآت الصناعية بتسويق منتجاتها في أربع مناطق هي ب١، ب٢، ب٣، ب٤ ولديها أربع رجال بيع هم أ١، أ٢، أ٣، أ٤، وعلى ضوء تجارب الماضي ودراسة أداء رجال البيع في الفترات السابقة أمكن توفير البيانات والمعلومات التالية عن الأرباح (أو الخسائر) التي يتوقع أن يحققها كل رجل بيع في منطقة من مناطق البيع. (الأرقام بالآلاف جنيه).

		مناطق البيع			
		ب١	ب٢	ب٣	ب٤
رجال البيع	أ١	٦	٨	٩	٥
	أ٢	٨	٥	٥	٧
	أ٣	٩	٧	٨	٨
	أ٤	٧	٩	٧	١٠

هذا وترغب إدارة المنشأة في معرفة برنامج التعيين الأمثل الذي يحقق للمنشأة أقصى أرباح ممكنة.

أولاً: إعداد مصفوفة الأرباح المضاعة:

أ- تطرح عناصر كل صف (يمكن البدء بالأعمدة) من أكبر مفردة في هذا الصف، وبذلك تكون مصفوفة الأرباح المضاعة كما يلي:

		ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٣	١	صفر	٤	
أ٢	صفر	٣	١٣	١	
أ٣	صفر	٢	١	١	
أ٤	٣	١	٣	صفر	

توضح المصفوفة السابقة الأرباح المضاعة لكل رجل بيع، حيث تعيين أ١ مثلاً في منطقة البيع ب١، يعنى ضياع أرباح قدرها ٣٠٠٠ جنيه وهي الفرق بين أرباح أ١ في المنطقة ب١ وبين أرباح أ١ في المنطقة ب٣ (٩ - ٦ = ٣). كذلك تعيين أ٢ في المنطقة ب٣ يعنى ضاع أرباح قدرها ١٣٠٠٠ جنيه لأن

تعيين أ₁ في ب₁ يحقق أرباح قدرها ٨٠٠٠ جنيه في حين أن تعيينه في ب_٢ يحقق خسارة قدرها ٥٠٠٠، إذن مقدار الأرباح المضاعة في حالة تعيينه في ب_٢ = ٨٠٠٠ - (٥٠٠٠-) = ١٣٠٠٠ جنيه وهكذا.

ب - تطرح أصغر مفردة في كل عمود (في المصفوفة السابقة في خطوة ١) من جميع عناصر هذا العمود، وبذلك تكون مصفوفة الأرباح المضاعة كما يلي:

	ب _١	ب _٢	ب _٣	ب _٤
أ _١	٣	صفر	صفر	٤
أ _٢	صفر	٢	١٣	١
أ _٣	صفر	١	١	١
أ _٤	٣	صفر	٣	صفر

توضح المصفوفة السابقة للأرباح المضاعة الكلية، أي المرتبطة برجال البيع وبمناطق التوزيع.

ثانياً: اختبار المثالية:

يتم رسم خطوط تغطي جميع الخلايا الصفرية، وبرسم أقل عدد ممكن من الخطوط ليغطي الخلايا الصفرية في المصفوفة السابقة، تكون المصفوفة والخطوط المرسومة على الأصفر كما يلي:

	ب _١	ب _٢	ب _٣	ب _٤
أ _١	٣	صفر	صفر	٤
أ _٢	صفر	٢	١٣	١
أ _٣	صفر	١	١	١
أ _٤	٣	صفر	٣	صفر

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط هو ثلاثة خطوط أي أقل من عدد الأعمدة أو الصفوف، إذن ليس هذا الحل أمثل ويلزم تحسينه.

ثالثاً: تحسين الحل واختبار مثاليته:

ب طرح أصغر مفردة في الخلايا التي لم يمر عليها خط (وهي ١) من جميع الخلايا غير المغطاة وجمع نفس هذه المفردة على الخلايا التي تقع عند تقاطع الخطوط ونقل باقي الخلايا كما هي تكون المصفوفة كما يلي:

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٤	صفر	صفر	٤
أ٢	صفر	١	١٢	صفر
أ٣	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٤	٤	صفر	٣	صفر

حيث أن أقل عدد ممكن رسمه لتغطيه جميع الخلايا الصفرية في المصفوفة السابقة هو ٤ خطوط أي يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة إذن يعتبر الحل السابق هو الحل الأمثل. وبذلك يمكن وضع برنامج التعيين الأمثل وحساب الأرباح الكلية.

رابعاً: برنامج التعيين الأمثل وحساب الأرباح:

بفحص المصفوفة السابق يلاحظ وجود أكثر من خلية صفرية في كل صف وفي كل عمود ومعنى ذلك وجود أكثر من حل أمثل، يعني يمكن وضع أكثر من برنامج تعيين أمثل على النحو التالي:

البرنامج الأول:

- ١. يعين في ب١ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيه.
 - ٢. يعين في ب٢ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيه.
 - ٣. يعين في ب٣ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيه.
 - أ٤، يعين في ب٤ بربح قدره ١٠٠٠٠ جنيه.
- الأرباح الإجمالية ٣٤٠٠٠ جنيه

البرنامج الثاني:

- ١. يعين في ب٢ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيه.
- ٢. يعين في ب٣ بربح قدره ٧٠٠٠ جنيه.

أ٣ يعين في ب١ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيته.
 أ٤ يعين في ب٢ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيته.
 الأرباح الإجمالية ٣٤٠٠٠ جنيته
 البرنامج الثالث:

أ١ يعين في ب٢ بربح قدره ٩٠٠٠ جنيته.
 أ٢ يعين في ب١ بربح قدره ٨٠٠٠ جنيته.
 أ٣ يعين في ب٢ بربح قدره ٧٠٠٠ جنيته.
 أ٤ يعين في ب١ بربح قدره ١٠٠٠٠ جنيته.
 الأرباح الإجمالية ٣٤٠٠٠ جنيته

حالات خاصة في مشاكل التعيين:

عند معالجة مشاكل التعيين قد تظهر بعض المشاكل الخاصة التي تتطلب معالجة خاصة ومن هذه الحالات الخاصة ما يلي:

١ - عدم تساوى عدد العناصر المطلوب تخصيصها مع عدد المهام أو الوظائف المطلوب التخصيص لها أو عليها:

يمكن علاج هذه الحالة بإضافة عمود (أو عدة أعمدة) وهمي إذا كان عدد الموارد (الآلات مثلا) أكبر من عدد الاستخدامات (الأوامر الإنتاجية مثلا) وحيث أن تكلفة أداء الوظيفة الوهمية ستكون متساوية لجميع الموارد (الآلات) لذلك يفترض أنها صفر. أي أن عناصر العمود الوهمي تكون جميعها أصفار. ومعنى ذلك أن الآلة التي تخصص لتنفيذ الأمر الإنتاجي الوهمي تظل متوقفة لا تعمل.

هذا وفي حالة ما إذا كان عدد الأوامر الإنتاجية (الأعمدة) أكثر من عدد الآلات (الصفوف) تضاف آلة وهمية (صف وهمي) ومعنى ذلك بقاء أمر تشغيل دون إتمام لعدم وجود آلة حقيقية تنفذ هذا الأمر الإنتاجي.

هذا ويبدو من المناسب الإشارة إلى أنه يمكن إضافة أي عدد من الأعمدة أو أي عدد من الصفوف لتحقيق المساواة بين عدد المصادر وعدد الاستخدامات ولكن لا يصح إضافة عمود أو أعمدة مع إضافة صف أو صفوف في نفس الحالة. بل أما تضاف أعمدة فقط أو تضاف صفوف فقط.

٢ - حالة تعدد الحلول:

كما هو الحال في طريقة السمبلكس وفي طريقة النقل فإنه في طريقة التعيين أيضا يمكن أن تظهر مشكلة تعدد الحلول المثلي. هذا وإذا ظهرت في طريقة التعيين حالة تعدد الحلول قبل التوصل إلى الحل الأمثل يتم إهمال هذه الحلول البديلة والاستمرار في تحسين الحل يتم التوصل إلى الحل الأمثل. أما إذا ظهرت حالة تعدد الحلول المثلي أي بعد التوصل إلى الحل الأمثل، فإنه يلزم تحديد هذه الحلول المثلي وكما سبق توضيح ذلك في المثال الخاص بتعظيم الأرباح حتى تكون أمام الإدارة لتختار من بينها ما يناسب ظروفها، فمع أن جميع الحلول المثلي البديلة تعطي نفس النتيجة (نفس التكلفة أو نفس الأرباح) إلا أنه قد تكون هناك اعتبارات أخرى (كالتفضيل الشخصي لمتخذ القرار، عوامل نفسية... الخ) تؤخذ في الحسبان عند المفاضلة بين الحلول البديلة.

٣ - وجود بدائل تعيين غير مرغوب في استخدامها في الحل الأمثل:

يمكن توضيح هذه الحالة بالمثال التالي:

استأجرت إحدى الشركات التجارية معرضا جديدا، وتم توزيع المساحة المتاحة بالمعرض على الأقسام البيعية المختلفة، غير أنه مازالت هناك أربعة أماكن (س، ص، ع، ل) لم يتم تعيينها بعد لأقسام بيعية معينة، وفي نفس الوقت مازالت هناك أربعة أقسام للبيع لم يتم تخصيص أماكن لها وهي الأقسام أ، ب، ج، د.

هذا وترغب إدارة الشركة في تحديد برنامج التعيين الأمثل لهذه الأقسام بما يحقق أقصى أرباح ممكنة مع مراعاة أنه على ضوء الخبرة السابقة لإدارة المبيعات فإنه من غير المرغوب فيه تخصيص الموقع ص للقسم ج لأن ذلك سيؤثر على الحركة داخل المعرض ككل مما يعوق العمل. وقد أمكن توفير التقديرات التالية لأرباح كل قسم في كل موقع (الأرقام بالألف جنيه).

المواقع الأقسام	س	ص	ع	ل
أ	٤٠	٦٠	٣٠	٥٠
ب	٧٠	٣٠	٥٠	٤٠
ج	٩٠	٧٠	٦٠	١٠٠
د	١٠٠	٩٠	٧٠	٦٠

يمكن علاج مشكلة عدم الرغبة في تخصيص الموقع ص للقسم ج بطريقتين على النحو التالي:

١ - الطريقة الأولى:

يتم وضع قيمة متناهية في الكبر بالسالب ولتكن (-م) وذلك في حالة تعظيم الأرباح (وبالموجب (+م) في حالة تخفيض التكاليف) لأن هذه القيمة الكبيرة لن تصبح صفراً وبالتالي يستبعد هذا البديل عند الاختيار أي توضع بيانات الحالة السابقة على النحو التالي ثم تتبع الخطوات السابقة ذكرها للتوصل إلى الحل الأمثل.

المواقع الأقسام	س	ص	ع	ل
أ	٤٠	٦٠	٣٠	٥٠
ب	٧٠	٣٠	٥٠	٤٠
ج	٩٠	-م	٦٠	١٠٠
د	١٠٠	٩٠	٧٠	٦٠

٢ - الطريقة الثانية:

يتم تظليل هذا البديل وإهماله تماماً في أثناء إجراء خطوات التوصل إلى برنامج التعيين الأمثل. أي توضع بيانات الحالة السابقة على النحو التالي:

المواقع الأقسام	س	ص	ع	ل
أ	٤٠	٦٠	٣٠	٥٠
ب	٧٠	٣٠	٥٠	٤٠
ج	٩٠		٦٠	١٠٠
د	١٠٠	٩٠	٧٠	٦٠

الفصل التاسع

أسلوب تقييم ومراجعة البرامج

(بيرت)

Program Evaluation and Review Technique (P E R T)

١ / ٩ - مقدمة:

تتصف المشروعات الكبيرة بضخامتها وإحتياجها لموارد طائلة ووقت طويل لإتمامها. كما أنها تتكون من أنشطة كثيرة ومتشابكة، فإذا حدث تأخير فى وقت أحد الأنشطة ربما أدى ذلك الى تأخير إتمام المشروع، وذلك لأن المشروع يعتبر سلسلة مترابطة من الأنشطة.

هذا وتعطى أغلب المؤسسات إهتماماً كبيراً للمشروعات الإنشائية ومحاولة إتمامها فى مواعيدها المخططة، ذلك لأن أى تأخير فى إتمام مشروع عن الموعد المحدد له، يترتب عليه نتائج خطيرة، تختلف باختلاف طبيعة وأهمية المشروع وأهدافه. يضاف الى ما سبق ضخامة الموارد المطلوبة لإتمام مثل هذا النوع من المشروعات الكبيرة، مما يجعل عملية الرقابة على التكاليف ذات أهمية بالغة.

لكل ذلك فكر الباحثون فى أسلوب يمكن من تخطيط ورقابة وتقييم المشروعات بأفضل كفاءة ممكنة، وقد توصل الباحثون الى أسلوب أطلقوا عليه إسم " أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت) " كما توصل بعض الباحثين الى طريقة المسار الحرج (C P M) .

هذا وترجع طريقة المسار الحرج الى أواخر عام ١٩٥٦، فى حين نشأ أسلوب بيرت خلال عام ١٩٥٨-١٩٥٩. ويعتبر أسلوب بيرت تطويراً لطريقة المسار الحرج، لذلك فهما يتفقان فى المبادئ والإجراءات الأساسية ويختلفان فى أن أسلوب بيرت يهتم بكل الأنشطة فى حين أن طريقة المسار الحرج تركز على أنشطة المسار الحرج فقط، كما أن أسلوب بيرت يأخذ فى

الإعتبار الإحتمالات المصاحبة لتقديرات الوقت للأنشطة، ويتم تقدير ثلاثة أوقات لكل نشاط في حين أن طريقة المسار الحرج تحدد تقديراً "واحداً" ثابتاً لوقت النشاط، أى لا تأخذ في الإعتبار ظروف عدم التأكد. وحيث أن الإجراءات الأساسية وقواعد رسم شبكة الأعمال وحساب أوقات الأنشطة، تتطابق تماماً في كلا الأسلوبين، فإنه يمكن القول أنهما يشكلان معاً "أسلوباً" واحداً"، وتعتبر الفروق بين الأسلوبين في الواقع فروق تاريخية. وعلى ذلك فسيتم تناول الأسلوبين على أنهما أسلوب واحد دون الفصل بينهما.

وقد نشأ أسلوب بيرت وإستخدم أولاً للتحكم في تقدم مشروع صواريخ بولاريس الأمريكية الذى أشارك فيه عدة آلاف من شركات المقاولات ، ويقال أن استخدام أسلوب بيرت ساعد على تنسيق العمل بين هذا العدد الكبير من الشركات وإختصار مدة إتمام المشروع بنحو سنتين كاملتين. إلا أنه بعد ذلك بدأ استخدام أسلوب بيرت في الأغراض المدنية.

٢/٩- أهمية أسلوب بيرت في مجال المحاسبة:

يعتبر أسلوب بيرت من الأساليب ذات الأهمية خاصة للمحاسبين لعدة مبررات منها:

- أ- يساعد أسلوب بيرت/ تكلفة في إعداد الموازنات التخطيطية للمشروعات وخاصة الموازنات النقدية.
- ب- يساعد أسلوب بيرت / تكلفة أيضاً في إحكام الرقابة على التكاليف، وتهيئة الوسائل المناسبة لتقييم أداء الأفراد والأقسام المختلفة، مما يدعم بدرجة كبيرة نظام محاسبة المسئولية.
- ج- يمكن أسلوب بيرت من إدخال عامل الوقت في قياس الأداء وفي قياس وتحليل النتائج الفعلية، وبذلك لا يكون تركيز النظام المحاسبى على البيانات المالية فقط.
- د- يساعد أسلوب بيرت على إتخاذ القرارات الرشيدة،

٩ / ٣- استخدامات أسلوب بيرت:

هناك استخدامات عديدة لأسلوب بيرت منها على سبيل المثال لا الحصر

ما يلي:

- أعمال الإنشاءات أو التشييد الضخمة.
- أعمال الصيانة الضخمة.
- بناء السفن والترسانات البحرية.
- تخطيط تقديم منتج جديد أو تطوير منتج قائم.
- التخطيط المالي .
- غلق مصنع للتجديد الشامل أو إنشاء مصنع جديد.
- تصميم نظام جديد للحاسب الإلكتروني.
- عمليات التعدين.

يتضح مما سبق أن أسلوب بيرت يمكن استخدامه في تخطيط ورقابة وقت وتكاليف المشروعات. لذلك سنتناول في هذه الوحدة دور أسلوب بيرت في تخطيط ورقابة الوقت، وفي الوحدة التالية نتناول دور أسلوب بيرت في تخطيط ورقابة التكاليف .

٩ / ٤- المفاهيم والمصطلحات الأساسية لأسلوب بيرت:

هناك بعض المفاهيم الأساسية المرتبطة بأسلوب بيرت وطريقة المسار

الخرج والتي تتمثل في الآتى:

أ - الحدث (Event) :

وهو يمثل لحظة بدء نشاط معين أو الإنتهاء من تنفيذه، وهو لا يستنفد وقتا ولا تكلفة ولا موارد. ويعبر عنه فى شبكة الأعمال بدائرة داخلها رقم . وتأخذ الأحداث فى شبكة الأعمال أرقاما مسلسلة: ١ ، ٢ ، ٣ الخ.

ب- النشاط (Activity) :

ويمثل النشاط القيام بمهمة أو عمل معين، وهو بذلك يحتاج الى موارد (مال ووقت وجهد) ويصل النشاط بين حدثين، ويعبر عنه فى شبكة الأعمال بسهم عليه عادة حرف أبجدى، أو يعرف برقمى حدث البداية وحدث النهاية،

حيث الحدث الذي في بداية (ذيل) السهم يمثل حدث البداية للنشاط والحدث الذي في نهاية (رأس) السهم يمثل حدث النهاية للنشاط. أنظر شكل (١/٩).

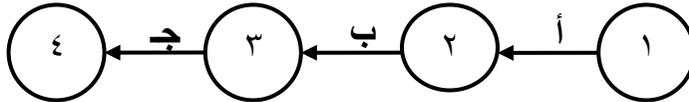


الشكل رقم (١/٩) يوضح الحدث والنشاط

من الرسم السابق يمكن التعبير عن النشاط الذي يربط بين الحدثين ١ ، ٢ بالرمز أ أو نقول النشاط (١-٢) أى النشاط الذي يبدأ من الحدث (١) وينتهي عند الحدث (٢) .

وهناك عدة أنواع للأنشطة منها:

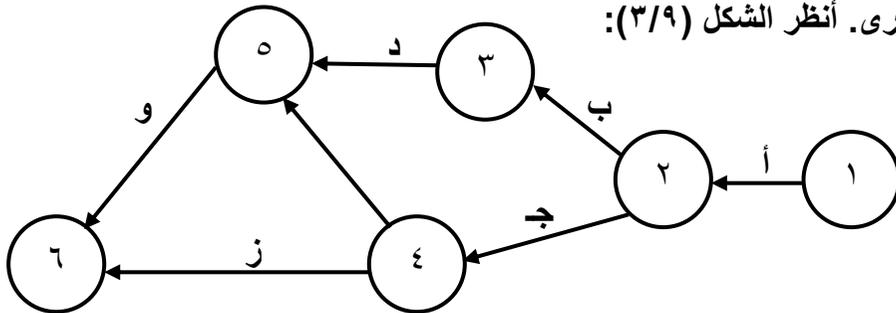
١- أنشطة متتالية: وهى أنشطة تحدث بتسلسل وتعاقب محدد. أنظر الشكل رقم (٢ / ٩):



الشكل رقم (٢/٩) يوضح الأنشطة المتتالية

من الرسم السابق ، نجد أن النشاط أ يحدث أولاً" ثم يتبعه النشاط ب ثم ج .

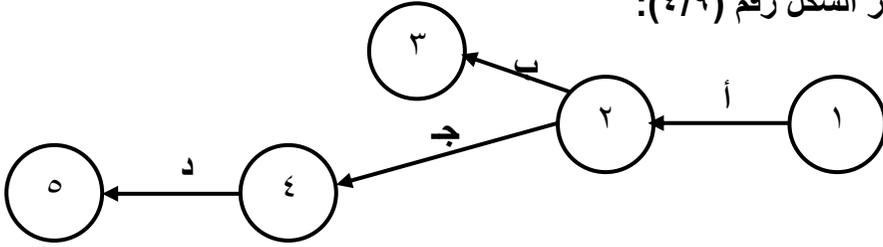
٢- أنشطة متوازية : وهى أنشطة يتم تنفيذها فى نفس وقت تنفيذ أنشطة أخرى. أنظر الشكل (٣/٩):



الشكل رقم (٣/٩) يوضح الأنشطة المتوازية

من الرسم السابق ، نجد أن الأنشطة ب ، د ، و تحدث فى نفس وقت تنفيذ الأنشطة ج ، هـ ، ز .

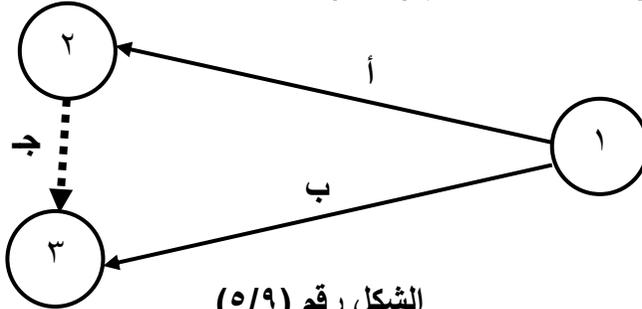
٣- النشاط المعلق: هو نشاط ينتهى بحدث ولا يوجد نشاط بعد هذا الحدث.
أنظر الشكل رقم (٤/٩):



الشكل رقم (٤/٩) يوضح النشاط المعلق

فى الرسم السابق، نجد أن النشاط ب لا توجد أنشطة بعده، فهو يعتبر نشاط معلق.

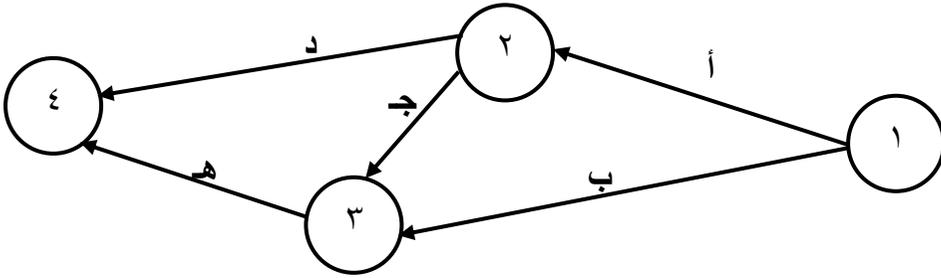
٤- النشاط الوهمى: هو نشاط صورى لا يمثل نشاطاً حقيقياً، وبالتالي فهو لا يستغرق وقتاً (وقته صفر) ولا يستهلك موارد ولا تكلفة (تكلفته صفر)، ويرسم فى الشبكة لتحقيق العلاقات التتابعية بين الأنشطة، أو من أجل تفادى الربط بين حدثين بأكثر من نشاط، أو لربط الشبكة بعضها البعض. ولتمييز النشاط الوهمى عن النشاط الحقيقى، فإنه يرسم فى شكل سهم متقطع (- - - -) أنظر الشكل رقم (٥/٩):



الشكل رقم (٥/٩)

ج- شبكة الأعمال:

هى رسم بيانى يوضح العلاقة بين الأحداث والأنشطة التى يتكون منها المشروع ، وتوضح شبكة الأعمال علاقات التتابع والتسلسل المنطقى والأسبقية بين الأنشطة ، وكذلك الوقت المطلوب لإنجاز كل نشاط . ويوضح الشكل رقم (٦/٩) التالى، شبكة الأعمال لمشروع يتكون من خمسة أنشطة (أ-ب- ج- د- هـ) وأربعة أحداث (١-٢-٣-٤):



الشكل رقم (٦/٩)

د- المسار:

ويتمثل في مجموعة من الأنشطة المتتابعة تبدأ من الحدث الأول في المشروع وينتهي عند آخر حدث في المشروع، وليس من الضروري أن يمر المسار بجميع الأحداث على الشبكة، كما أنه ليس من الضروري أن يمر المسار على أحداث متسلسلة. وبملاحظة الشكل السابق رقم (٦/٩) يمكن تحديد ثلاثة مسارات هي:

- المسار الأول: أ، د أي المسار الذي يتكون من النشاطين: (أ) و (د). أو المسار ١ ، ٢ ، ٤ . أي المسار الذي يمر بالأحداث ١ ، ٢ ، ٤ .
- المسار الثاني: أ، ج، هـ أو ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .
- المسار الثالث: ب، هـ أو ١ ، ٣ ، ٤ .

هـ - المسار الحرج :

هو أطول المسارات وقتاً في شبكة الأعمال. ويعبر مجموع أوقات أنشطة المسار الحرج عن أطول وقت يمكن أن يستغرقه المشروع. ويوجد في كل شبكة أعمال مسار حرج واحد على الأقل، وقد يكون هناك أكثر من مسار حرج في الشبكة الواحدة.

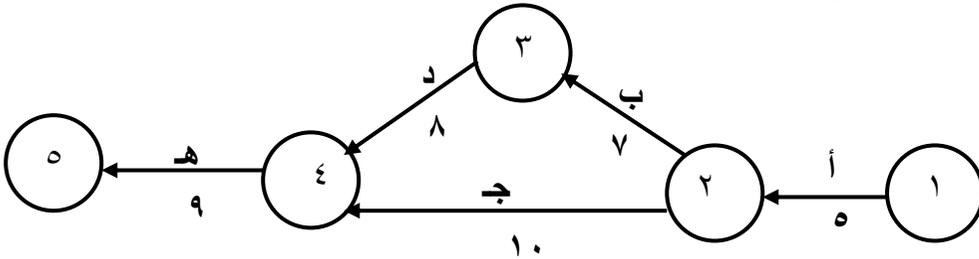
٥ /٩ - قواعد رسم شبكة الأعمال بيرت:

- هناك العديد من الإعتبارات التي يجب مراعاتها عند رسم شبكة بيرت من أهمها ما يلي:
- أ- التحديد الدقيق لجميع أنشطة المشروع وعلاقات التابع (التسلسل) المنطقية بينها.

- ب- يجب أن تتضمن الشبكة حدثاً واحداً للبداية وحدثاً واحداً للنهاية.
 ج- يجب أن يكون لكل نشاط حدث بداية واحد وحدث نهاية واحد. لكن يجوز أن تبدأ عدة أنشطة من حدث واحد أو تنتهي عدة أنشطة عند حدث واحد .
 د- تحديد رقم لكل حدث، ويجب ألا يتكرر رقم الحدث أكثر من مرة واحدة على شبكة الأعمال. وكل حدث يجب أن يمثل نهاية نشاط (أو أكثر) سابق، وبداية نشاط (أو أكثر) لاحق، ماعدا حدث بداية المشروع فلا تسبقه أنشطة لأنه نقطة البداية، وحدث نهاية المشروع لا توجد أنشطة بعده لأنه يمثل نقطة النهاية.

- هـ- السهم المعبر عن النشاط، يكون متجهاً من اليمين الى اليسار، ومن الرقم الأصغر للحدث الى الرقم الأكبر.
 و- يجب التأكد عند رسم شبكة الأعمال من عدم وجود أنشطة معلقة .
 ز- إذا تعددت الأنشطة السابقة لحدث ما، وكان ذلك الحدث نقطة نهاية لعدة مسارات، فإن وقت هذا الحدث يكون أطول وقت للمسارات التي تسبقه.

كما يتضح من الشكل التالي (٧ / ٩):



الشكل رقم (٧ / ٩)

- في الشكل السابق، الحدث رقم (٤) نهاية للنشاطين (ج ، د) أي أنه لن يقع حتى يتم كلا النشاطين، وحيث ان النشاط (ج) يتم بعد مرور ١٥ أسبوعاً من بداية المشروع (٥ + ١٠) في حين أن النشاط (د) ينتهي بعد مرور ٢٠ أسبوعاً من بداية المشروع (٥+٧+٨) فيكون بذلك وقت حدوث الحدث (٤) هو ٢٠ أسبوعاً من بداية المشروع، لأن الحدث (٤) لا يقع حتى يتم النشاطين (ج ، د). وقد يترتب على ذلك حدوث فترات إنتظار لبعض الأنشطة. فمثلاً

- النشاط (هـ) لا يبدأ بعد إنتهاء النشاط (ج) بل لابد أن ينتظر حتى يتم النشاط (د) ويقع الحدث (٤) الذى يرتبط بإنهاء النشاطين (ج ، د).
- ح- يمكن إستحداث أى عدد من الأنشطة الوهمية لتحقيق تتابع الأنشطة ولتوفير النواحي الفنية والإدارية المختلفة.
- ويمكن توضيح كيفية رسم شبكة الأعمال بيرت ، بإستخدام بيانات المثال

التالى:

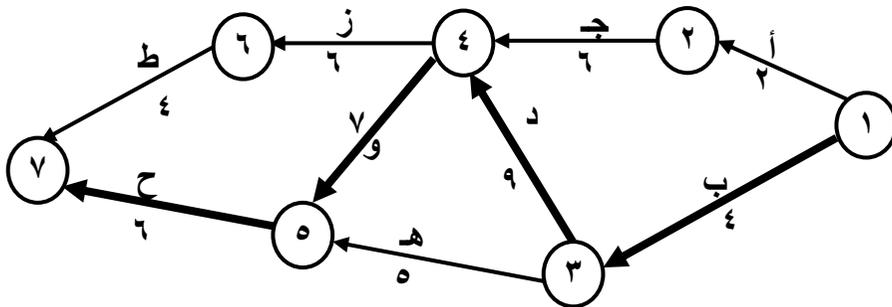
مثال :

يوضح الجدول التالى الأنشطة التى يتضمنها تنفيذ أحد المشروعات ومسارها والوقت المتوقع لكل نشاط:

النشاط	المسار	الوقت المتوقع
أ	٢-١	٢
ب	٣-١	٤
ج	٤-٢	٦
د	٤-٣	٩
هـ	٥-٣	٥
و	٥-٤	٧
ز	٦-٤	٦
ح	٧-٥	٦
ط	٧-٦	٤

المطلوب: رسم شبكة الأعمال بيرت وتحديد المسار الحرج.

الحل



الشكل رقم (٨ / ٩)

كما سبق وتم تعريف المسار بأنه مجموعة أنشطة متتابعة، يبدأ من أول حدث في المشروع وينتهي عند آخر حدث، ومن ثم يمكن تحديد المسارات التالية على الرسم السابق (٨ / ٩):

المسار	بالأنشطة	بالأحداث	الوقت بالأسبوع
الأول	أ ج ز ط	٧ ٦ ٤ ٢ ١	١٨
الثاني	ا ج و ح	٧ ٥ ٤ ٢ ١	٢١
الثالث	ب د ز ط	٧ ٦ ٤ ٣ ١	٢٣
الرابع	ب د و ح	٧ ٥ ٤ ٣ ١	٢٦
الخامس	ب ه ح	٧ ٥ ٣ ١	١٥

يلاحظ أن جميع المسارات بدأت من الحدث رقم (١) وانتهت عند آخر حدث على الشبكة رقم (٧). وأن المسار الحرج هو المسار الرابع صاحب أطول وقت .

٦ / ٩ - تخطيط وقت الأنشطة :

يستخدم نموذج بيرت ثلاث تقديرات للوقت، يتم جمعهم إحصائياً للتوصل الى تقديرات إحصائية لوقت إتمام المشروع، وهذه التقديرات هي:

١ - الوقت المتفائل (ف) : Optimistic Time

ويمثل أقل وقت يمكن تنفيذ النشاط خلاله، بفرض أن الظروف مواتية، ويسير التنفيذ الفعلي للنشاط بشكل أحسن مما ينتظر عادة". وفي الواقع العملي تكون فرصة تحقق الوقت المتفائل قليلة.

٢ - الوقت المتشائم (ش) : Pessimistic Time

هو أطول وقت يمكن فيه إتمام النشاط بفرض أن الظروف غير مواتية، أي يتم التنفيذ الفعلي في ظل أسوأ الظروف الممكنة. وأيضا تقل في الواقع العملي فرصة إتمام النشاط في هذا الوقت.

٣ - الوقت الأكثر احتمالا" (ح) : Most - Probable Time

وهو الوقت الذي يأخذ في الاعتبار الظروف المتوقعة للتنفيذ الفعلي، ولذلك تكون فرصة تحقيقه أكبر من فرصة تحقق الوقت المتفائل والوقت المتشائم.

وفى ضوء التقديرات الثلاثة السابقة للوقت، يتم حساب الوقت المتوقع (م) اللازم لإتمام النشاط والانحراف المعياري له (6)، باستخدام نموذج بيتا الإحتمالي - وهو نموذج إحصائي- كما يلي :

$$\frac{\text{الوقت المتفائل} + (4 \times \text{الوقت الأكثر احتمالاً}) + \text{الوقت المتشائم}}{6} = \text{الوقت المتوقع للنشاط}$$

$$\frac{ف + 4 ح + ش}{6} = م$$

$$\frac{\text{الوقت المتشائم} - \text{الوقت المتفائل}}{6} = \text{الانحراف المعياري لوقت النشاط}$$

$$\frac{ش - ف}{6} = 6$$

وبعد تحديد الوقت المتوقع لكل نشاط، يتم كتابة هذا الوقت على السهم الممثل للنشاط تمهيدا" لتحديد المسارات المختلفة وأطوالها وبالتالي تحديد وقت إتمام المشروع والإحتمالات المختلفة المرتبطة بأوقات إتمام المشروع، بما يعمل على توفير المعلومات اللازمة لمساعدة الإدارة عند إتخاذ القرارات المختلفة المتعلقة بالمشروع.

ويمكن توضيح كيفية حساب الوقت المتوقع لكل نشاط وتحديد مسارات المشروع بالإسترشاد ببيانات المثال التالى الذى يوضح أنشطة أحد المشروعات وتقديرات الوقت لكل نشاط.

مثال :

توفرت لديك البيانات التالية اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات:

تقديرات الوقت بالأسبوع			المسار	النشاط
المتشائم (ش)	الأكثر احتمالاً (ح)	المتفائل (ف)		
٢٠	١١	٨	٢ - ١	أ
٢٧	٢١	١٥	٣ - ١	ب
٥١	٣٢	٢٥	٦ - ١	ج
١٢	٩	٦	٣ - ٢	د
٢٤	١٦	٨	٤ - ٢	هـ
١٨	١٥	١٢	٤ - ٣	و
٢٢	١٨	١٤	٥ - ٣	ز
٩	٧	٥	٥ - ٤	ح
٢٦	٢٢	١٨	٧ - ٤	ط
١٤	١٢	١٠	٧ - ٥	ى
٣٠	٢٤	١٨	٧ - ٦	ك

المطلوب:

- ١- تحديد الوقت المتوقع والانحراف المعياري لكل نشاط .
- ٢- رسم شبكة بيرت .
- ٣- حساب الوقت اللازم لإتمام المشروع.

الحل

- ١- حساب الوقت المتوقع (م) والانحراف المعياري (٥) للأنشطة :

يحسب الوقت المتوقع والانحراف المعياري لكل نشاط، كما يظهر بالجدول

التالي رقم (٦ / ١) التالي ووفقاً للعلاقتين التاليتين:

$$\frac{\text{ف} + \text{ح} + \text{ش}}{٦} = \text{الوقت المتوقع (م)}$$

$$\frac{\text{ش} - \text{ف}}{٦} = \text{الانحراف المعياري (٥)}$$

جدول رقم (١/٩)

حساب الوقت المتوقع والانحراف المعياري للأنشطة

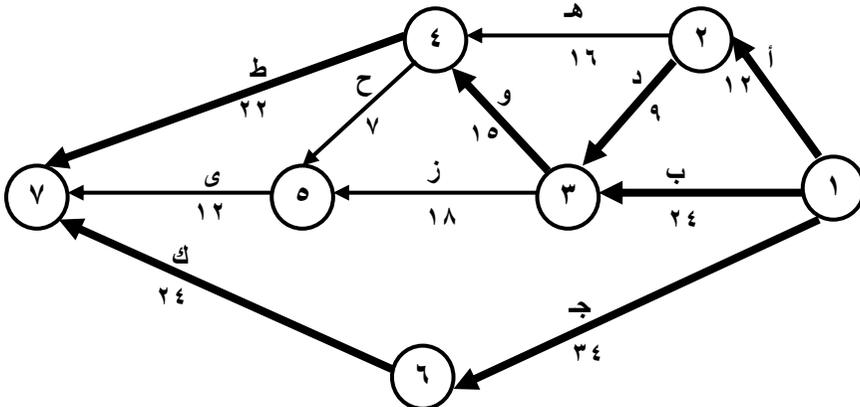
النشاط	ف	ح	ش	م	ب
أ	٨	١١	٢٠	١٢	٢
ب	١٥	٢١	٢٧	٢١	٢
ج	٢٥	٣٢	٥١	٣٤	٦/٢٦
د	٦	٩	١٢	٩	١
هـ	٨	١٦	٢٤	١٦	٦/١٦
و	١٢	١٥	١٨	١٥	١
ز	١٤	١٨	٢٢	١٨	٦/٨
ح	٥	٧	٩	٧	٦/٤
ط	١٨	٢٢	٢٦	٢٢	٦/٨
ى	١٠	١٢	١٤	١٢	٦/٤
ك	١٨	٢٤	٣٠	٢٤	٢

$$١٢ = \frac{٧٢}{٦} = \frac{٢٠ + (١١ \times ٤) + ٨}{٦} = \text{الوقت المتوقع للنشاط (أ)}$$

$$٢ = \frac{٨ - ٢٠}{٦} = \text{الانحراف المعياري للنشاط (أ)}$$

وهكذا بالنسبة لباقي الأنشطة.

٢- رسم شبكة الأعمال بيروت:



شكل رقم (٩/٩)

٣- حساب الوقت اللازم لإتمام المشروع:

لحساب الوقت اللازم لإتمام المشروع، يلزم تحديد المسارات التي تتكون منها شبكة بيرت، وأطول المسارات على الشبكة هو المسار الحرج ووقته هو الوقت اللازم لإتمام المشروع.
ومن الشكل رقم (٩/٩) السابق يمكن تحديد المسارات المحتملة على الشبكة على النحو التالي:

المسار	أنشطة المسار	وقت المسار بالأسبوع
الأول	أ هـ ط	٥٠
الثاني	أ د و ط	٥٨
الثالث	أ د و ح ي	٥٥
الرابع	أ هـ ح ي	٤٧
الخامس	أ د ز ي	٥١
السادس	ب و ط	٥٨
السابع	ب و ح ي	٥٥
الثامن	ب ز ي	٥١
التاسع	ج ك	٥٨

يلاحظ ما يلي:

- هناك ثلاثة مسارات حرجة هي: أ د و ط ، ب و ط ، ج ك . ووقت كل من هذه المسارات هو ٥٨ أسبوعاً، وبذلك يكون الوقت اللازم لإتمام المشروع هو ٥٨ أسبوعاً.
- يجب على الإدارة التركيز على أنشطة المسارات الحرجة ومراقبتها لأن التأخير في أحد أنشطة المسارات الحرجة ولو كان تأخيراً "بسيطاً" فإنه يؤدي إلى تأخير إتمام المشروع لمدة مماثلة للتأخير في إتمام ذلك النشاط الحرج.

٧/٩- حساب الوقت المبكر والوقت المتأخر والوقت الراكد:

تحتاج الإدارة المسئولة عن تنفيذ المشروع وجهات أخرى مختلفة، لبعض المعلومات عن أوقات وقوع الأحداث وبالتالي حدوث الأنشطة التي تربط بين هذه الأحداث، والأوقات التي يمكن انتظار وقوع الأحداث بمقدارها دون تأثير على الوقت اللازم لإتمام المشروع. وتفيد هذه المعلومات في حالة الرغبة في إعادة جدولة الأنشطة أو إعادة توزيع الموارد المحدودة بهدف

إتمام المشروع في أقل وقت ممكن وفي حدود الموارد المتاحة. ولتوفير هذه المعلومات يلزم حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة والراكدة للأحداث وللأنشطة على النحو التالي:

١/٧/٩- الوقت المبكر للحدث:

هو الوقت الذي لا يمكن أن يبدأ النشاط قبله نظراً لأرتباطه بالأنشطة السابقة له. وإذا تعددت الأنشطة السابقة لحدث معين، وكان ذلك الحدث نقطة نهاية لعدة مسارات، فإن الوقت المبكر لهذا الحدث يكون أطول وقت للمسارات التي تسبق الحدث. ويمكن حساب الوقت المبكر للحدث عن طريق إضافة الوقت المبكر للحدث السابق له على الوقت المتوقع للنشاط الذي يقع بين الحدثين.

وبناء على ذلك يمكن حساب الوقت المبكر للأحداث في مثالنا السابق الذي يمثلته الشكل رقم (٩/٩) خلال الجدول التالي:

الجدول رقم (٢/٩) حساب الوقت المبكر للأحداث

الوقت المبكر للحدث	طول المسارات	المسارات المؤدية إليه	الحدث
صفر	صفر	---	١
١٢	١٢	أ	٢
	$٢١ = ٩ + ١٢$	أد	٣
٢١	٢١	ب	٤
	$٢٨ = ١٦ + ١٢$	أه	
	$٣٦ = ١٥ + ٩ + ١٢$	أدو	
٣٦	٣٦	بو	٥
	$٣٥ = ٧ + ١٦ + ١٢$	أهح	
	$٤٣ = ٧ + ١٥ + ٩ + ١٢$	أدوح	
	$٣٩ = ١٨ + ٩ + ١٢$	ادز	
	$٣٩ = ١٨ + ٢١$	بز	
٤٣	$٤٣ = ٧ + ١٥ + ٢١$	بوح	٦
٣٤	٣٤	ج	٧
	$٥٠ = ٢٢ + ١٦ + ١٢$	أهظ	
	$٥٥ = ١٢ + ٧ + ١٥ + ٩ + ١٢$	أدوحى	
	$٥٥ = ١٢ + ٧ + ١٥ + ٢١$	بوحى	
	$٥٨ = ٢٢ + ١٥ + ٢١$	بوط	
	$٥١ = ١٢ + ١٨ + ٢١$	بزى	
	$٥٨ = ٢٤ + ٣٤$	جك	
	$٥٨ = ٢٢ + ١٥ + ٩ + ١٢$	أدوط	
	$٥١ = ١٢ + ١٨ + ٩ + ١٢$	ادزى	
٥٨	$٤٧ = ١٢ + ٧ + ١٦ + ١٢$	أهحى	

٧/٩ / ٢ - الوقت المتأخر للحدث:

هو الوقت الذى يجب ألا يتأخر عنه تحقق الحدث، حتى يتم تنفيذ المشروع فى الوقت المحدد له دون تأخير.

ويتم حساب الوقت المتأخر للحدث على عكس طريقة حساب الوقت المبكر، وذلك بأن نبدأ من آخر حدث فى المشروع ونعود الى الخلف أى الى أول حدث فى المشروع. وعلى ذلك فإننا نبدأ بحساب الوقت المتأخر للحدث الأخير فى المشروع، وحيث أنه لا توجد أحداث لاحقة له، فيكون وقته المتأخر هو نفسه وقته المبكر، وهو يمثل فى نفس الوقت طول المسار الحرج، الذى يمثل بدوره الوقت الكلى اللازم لإتمام المشروع.

ويحسب الوقت المتأخر لأى حدث (ما عدا الحدث الأخير) بطرح وقت النشاط الذى يعقب الحدث (المراد حساب وقته المتأخر) من الوقت المتأخر للحدث اللاحق. وفى حالة وجود أكثر من نشاط يعقب الحدث، معنى ذلك وجود عدة أوقات متأخرة لذلك الحدث، لذا نختار أقل وقت متأخر، حتى يتسع الوقت لجميع الأنشطة اللاحقة للحدث كى تتم فى الوقت المحدد لها.

ويمكن حساب الأوقات المتأخرة للأحداث فى مثالنا السابق الممثل فى

الشكل رقم (٨/٩) كما يظهر فى الجدول التالى رقم (٣/٩) التالى:

جدول رقم (٣/٩) حساب الوقت المتأخر للأحداث

الوقت المتأخر للحدث	الوقت المتأخر للحدث اللاحق - وقت النشاط اللاحق	الأنشطة اللاحقة	الحدث
٥٨	-----	-----	٧
٣٤	٣٤ = ٢٤ - ٥٨	ك	٦
٤٦	٤٦ = ١٢ - ٥٨	ى	٥
	٣٩ = ٧ - ٤٦	ح	٤
٣٦	٣٦ = ٢٢ - ٥٨	ط	
	٢١ = ١٥ - ٣٦	و	٣
٢١	٢٨ = ١٨ - ٤٦	ز	
	١٢ = ٩ - ٢١	د	٢
١٢	٢٠ = ١٦ - ٣٦	هـ	
	١٢ = ١٢ - ١٢	أ	١
	٢١ = ٢١ - ٢١	ب	
صفر	٣٤ = ٣٤ - ٣٤	جـ	

يلاحظ من الجدول السابق ما يلي:

- الوقت المتأخر للحدث الأخير (٧) هو نفس وقته المبكر ٥٨ أسبوعاً".
- وكذلك الوقت المتأخر للحدث الأول (١) هو نفس وقته المبكر صفر.
- يعقب الحدث (٤) أكثر من نشاط وبذلك يكون له أكثر من وقت متأخر، أقل هذه الأوقات ٣٦ أسبوعاً" ويعتبر هذا وقته المتأخر. ونفس الملاحظة بالنسبة للأحداث أرقام ١ ، ٢ ، ٣ .

٣/٧/٩- الوقت الراكد للحدث :

هو الفترة التي يمكن تأجيل وقوع الحدث بمقدارها دون أن يؤثر ذلك على الوقت الكلي لإتمام المشروع، أي دون أن يتأخر وقوع الأحداث اللاحقة للحدث عن موعدها المحدد. يتحدد الوقت الراكد للحدث بالفرق بين الوقت المتأخر والوقت المبكر للحدث.

وعلى ضوء ما ورد في الجدولين (٢/٩) ، (٣/٩) يمكن حساب الوقت الراكد للأحداث في مثالنا السابق، كما يظهر في الجدول رقم (٤/٩) التالي:

الجدول رقم (٤/٩) الوقت الراكد للأحداث

الحدث (١)	الوقت المتأخر (٢)	الوقت المبكر (٣)	الوقت الراكد (٤) = ٣ - ٢
١	صفر	صفر	صفر
٢	١٢	١٢	صفر
٣	٢١	٢١	صفر
٤	٣٦	٣٦	صفر
٥	٤٦	٤٣	٣
٦	٣٤	٣٤	صفر
٧	٥٨	٥٨	صفر

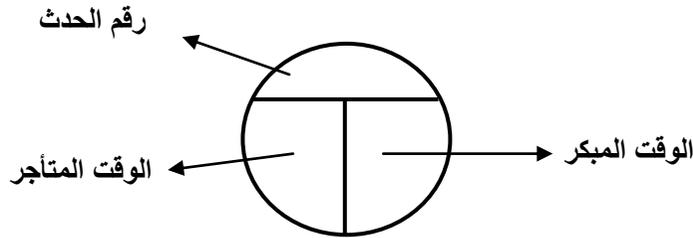
يلاحظ من الجدول رقم (٤/٩) السابق ما يلي:

- كل الأحداث - ما عدا الحدث رقم ٥ - ليس لها وقت راكم وذلك لأنها جميعاً تقع على المسار الحرج. ويرجع ذلك إلى أن المسار الحرج يجب ألا تتأخر أنشطته ولا أحداثه عن موعدها وإلا تأخر وقت المشروع ككل.

- الحدث رقم (٥) له وقت راكد (٣ أسابيع) لأنه لا يقع على المسار الحرج، وهذا يعنى أنه يمكن أن يتأخر عن مواعده لمدة (٣ أسابيع) ولا يؤثر ذلك على وقت إتمام المشروع، حيث أنه خلال فترة التأجيل للحدث رقم (٥) تكون أنشطة المسارات سارية دون تأجيل.

وعلى ذلك يمكن القول بأن جميع الأحداث التي تقع على المسار الحرج، لا يكون لها وقت راكد.

ويمكن توضيح الأوقات المبكرة والمتأخرة على شبكة الأعمال، وذلك بتقسيم دائرة الحدث الى ثلاثة أجزاء الجزء العلوى لرقم الحدث والجزء الأيمن للوقت المبكر والجزء الأيسر من أسفل للوقت المتأخر كما يتضح من الشكل التالى:



٤/٧/٩- الوقت المبكر والمتأخر والراكد للأنشطة:

تحسب الأوقات المبكرة والمتأخرة والراكد للأنشطة، حتى تكون أمام الإدارة صورة واضحة تمكنها من إعادة جدولة الأنشطة بما يتناسب مع الموارد المتاحة.

أولاً: الوقت المبكر للنشاط:

حيث أن النشاط يمثل عملاً " فعلياً " يستغرق وقتاً، فإنه يكون له وقت بداية ووقت نهاية- بعكس الحدث الذى له وقت واحد فقط لأنه يمثل لحظة زمن تعبر عن بداية أو نهاية نشاط معين- وعلى ذلك فإنه يحسب لكل نشاط وقت مبكر للبداية ووقت مبكر للنهاية. ويتم الاستفادة من الأوقات المبكرة للأحداث فى حساب الوقت المبكر للأنشطة على النحو التالى:

- أ- الوقت المبكر لبداية النشاط: ويعبر عن الوقت الذى لا يمكن للنشاط أن يبدأ قبله، إما لنواحي فنية أو لعدم إتمام الأنشطة السابقة له. ويتحدد الوقت المبكر لبداية النشاط بالوقت المبكر للحدث الذى يبدأ عنده هذا النشاط.
- ب- الوقت المبكر لنهاية النشاط: يعبر عن الوقت الذى لا يمكن للنشاط أن ينتهى قبله إذا تم العمل وفقاً لما هو مخطط دون إسراع فى الأداء، ويحسب كما يلى :

$$\text{الوقت المبكر لنهاية النشاط} = \text{الوقت المبكر لبداية النشاط} + \text{الوقت المتوقع لذلك النشاط.}$$

ثانياً: الوقت المتأخر للنشاط:

- يمكن أيضاً حساب وقت متأخر لبداية النشاط ووقت متأخر لنهاية النشاط، وذلك على النحو التالى:
- أ- الوقت المتأخر لبداية النشاط: يعبر عن الوقت الذى يجب ألا تتأخر عنه بداية النشاط وإلا ترتب على ذلك تأخر إتمام النشاط عن مواعيد المخطط وبالتالي التأثير على مواعيد بداية الأنشطة اللاحقة له.

$$\text{ويكون الوقت المتأخر لبداية النشاط} = \text{الوقت المتأخر للحدث الذى عنده ينتهى النشاط} - \text{الوقت المتوقع للنشاط.}$$

- ب- الوقت المتأخر لنهاية النشاط: يعبر عن الوقت الذى يجب ألا تتأخر نهاية النشاط عنه وإلا ترتب على ذلك تأخر بداية الأنشطة اللاحقة له، بصورة يترتب عليها تأخر إتمام المشروع عن مواعيد المحدد. ويتحدد الوقت المتأخر لنهاية النشاط بالوقت المتأخر للحدث الذى عنده ينتهى هذا النشاط.
- #### ثالثاً: الوقت الراكد للنشاط:

- هو ذلك الوقت الذى يمكن تأجيل النشاط بمقداره دون أن يؤثر ذلك على إتمام المشروع فى وقته المبكر المحدد. ويحسب على النحو التالى:

$$\text{الراكد الكلى} = \text{الوقت المتأخر لنهاية النشاط} - \text{الوقت المبكر لنهاية النشاط.}$$
$$\text{أو} = \text{الوقت المتأخر لبداية النشاط} - \text{الوقت المبكر لبداية النشاط.}$$

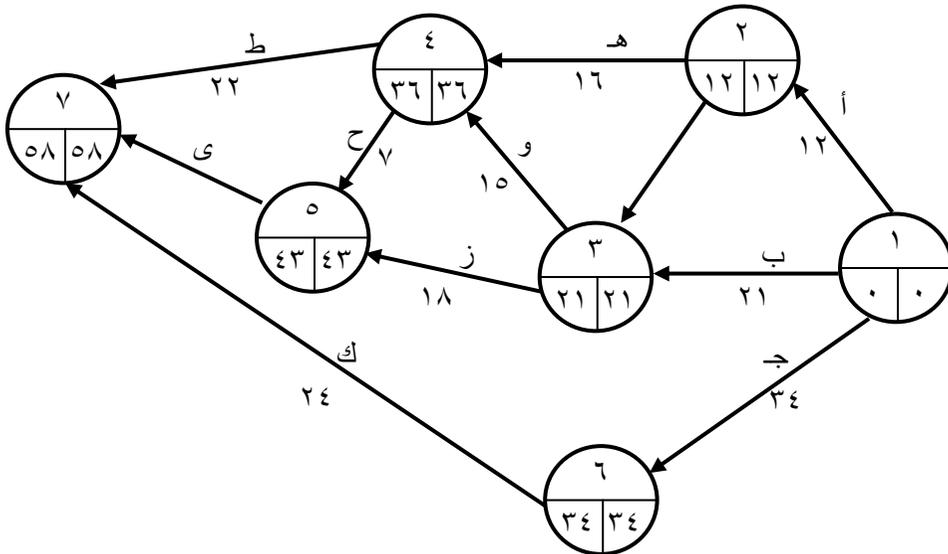
رابعاً: الوقت الراكد الحر:

هو ذلك الوقت الذى يمكن تأجيل تنفيذ النشاط بمقداره، دون أن يؤدي هذا الى تحويل المسارات شبه الحرجة الى مسارات حرجة. ويحسب كما يلي:

$$\text{الراكد الحر} = \text{الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط} - \text{الوقت المبكر لحدث بداية النشاط} - \text{الوقت المتوقع.}$$

يتضح مما سبق أهمية معرفة الوقت الراكد الكلى والراكد الحر، فالنشاط صاحب الوقت الحر يمكن تأجيل تنفيذه بمقدار الراكد الحر دون الحاجة الى البحث عن أثر ذلك على الأنشطة الأخرى، لأنه لن يؤثر عليها. أما الراكد الكلى فقد يترتب على تأجيل النشاط بمقداره، ظهور مسارات حرجة أخرى أو التأثير على أوقات إتمام أنشطة أخرى.

ويمكن على ضوء ما سبق حساب الوقت المبكر والمتأخر والراكد للأنشطة وإظهارها على الشبكة بالتطبيق على المثال السابق كما يظهر فى الشكل رقم (١٠/٩) والجدول رقم (٥/٩) التاليين:



الشكل رقم (١٠/٩)

جدول رقم (٥/٩)

الوقت الراكد الكلي ٥-٧=(٨) أو ٤-٦	الوقت المتأخر		الوقت المبكر		الوقت المتوقع (٣)	المسار (٢)	النشاط (١)
	نهاية (٧)	بداية ٣-٧=(٦)	نهاية ٤+٣=(٥)	بداية (٤)			
٠	١٢	٠	١٢	٠	١٢	٢-١	أ *
٠	٢١	٠	٢١	٠	٢١	٣-١	ب *
٠	٣٤	٠	٣٤	٠	٣٤	٦-١	ج *
٠	٢١	١٢	٢١	١٢	٩	٣-٢	د *
٨	٣٦	٢٠	٢٨	١٢	١٦	٤-٢	هـ
٠	٣٦	٢١	٣٦	٢١	١٥	٤-٣	و *
٧	٤٦	٢٨	٣٩	٢١	١٨	٥-٣	ز
٣	٤٦	٣٩	٤٣	٣٦	٧	٥-٤	ح
٠	٥٨	٣٦	٥٨	٣٦	٢٢	٧-٤	ط *
٣	٥٨	٤٦	٥٥	٤٣	١٢	٧-٥	ى
٠	٥٨	٣٤	٥٨	٣٤	٢٤	٧-٦	ك *

↓
من الشبكة

↓
من الشبكة

ملاحظات على الجدول رقم (٥ / ٩) :

- ١- العمود رقم (٤) يمثل وقت البداية المبكر للنشاط، وهو عبارة عن الوقت المبكر لحدث بداية النشاط (الجزء الأيمن السفلى فى الدائرة التى عند بداية النشاط فى الشكل (٩/٩).
- ٢- العمود (٥) = العمود (٤) + العمود (٣).
- ٣- العمود (٧) يمثل الوقت المتأخر لنهاية النشاط ، وهو عبارة عن الوقت المتأخر لحدث نهاية النشاط . (الجزء الأيسر السفلى فى الدائرة التى فى نهاية النشاط فى الشكل (٩/٩).
- ٤- العمود (٦) = العمود (٧) - العمود (٣).
- ٥- العمود (٨) = العمود (٧) - العمود (٥) أو العمود (٦) - العمود (٤).
- ٦- الأنشطة أ ، ب ، ج ، د ، و ، ط ، ك. ليس لها وقت راكد لأنها تقع على المسار الحرج، ولأنه لا يمكن تأجيلها وإلا زادت فترة إتمام المشروع عن الوقت المحدد له.

٨/٩- دراسة احتمال تنفيذ المشروع فى مدة معينة (وقت مستهدف) أو بموازنة معينة:

من المعروف أن أوقات الأنشطة فى أسلوب بيرت أوقات احتمالية وليست مؤكدة. وعلى ذلك فإن الوقت الفعلى لكل نشاط قد يتفق مع هذه الأوقات أو لا يتفق معها، وبالتالي فإن المشروع قد يتم وفقا للأوقات المخططة أو قد لا يتم خلالها.

وغالبا ما يتم التعاقد على تنفيذ المشروع فى ضوء الوقت المحسوب لإتمام المشروع فى ظل الأوقات الاحتمالية، لذلك فإنه يكون من الضرورى دراسة احتمال إتمام المشروع طبقا للأوقات المخططة من عدمه. حيث أن التأخير فى التنفيذ قد يترتب عليه نتائج غير مستحبة كغرامات تأخير مثلا، وكذلك الإسراع فى التنفيذ قد يترتب عليه تحمل تكاليف أكبر.

ولحساب احتمال إتمام المشروع فى وقت معين فإنه من الضرورى معرفة الانحراف المعيارى لوقت المشروع، ولما كان المسار الحرج يمثل الوقت اللازم لإتمام المشروع، فإن الانحراف المعيارى لوقت المشروع يتمثل فى الانحراف المعيارى لوقت المسار الحرج. (فى حالة وجود أكثر من مسار حرج يتم إختيار المسار الحرج صاحب أكبر انحراف معيارى). وفى ضوء معرفة الوقت المتوقع لإتمام المشروع والانحراف المعيارى لوقت المشروع وباستخدام منحنى التوزيع الطبيعى لوقت إتمام المشروع وجداول توزيع الاحتمال الطبيعى، يمكن توفير معلومات هامة منها:

- احتمال إتمام المشروع خلال فترة زمنية محددة.
- احتمال إتمام المشروع بعد وقته المخطط بمدة معينة.
- احتمال إتمام المشروع بموازنة معينة.

ولما كان احتمال حدوث المتوسط الإحصائى فى كثير من جداول التوزيعات الاحتمالية الطبيعية هو ٥٠ % فإنه يمكن القول بأن احتمال إتمام المشروع خلال الزمن المخطط للإنتهاء من المسار الحرج يكون أيضا ٥٠%.

ولحساب هذا الإحتمال يمكن استخدام قانون المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي، وذلك بحساب Z التي تمثل القيمة المعيارية لوحدة القياس في جدول التوزيع الطبيعي وسنرمز لها بالرمز (ق) وتحسب كما يلي:

$$ق = \frac{\text{الوقت المستهدف} - \text{طول المسار الحرج}}{\text{الإنحراف المعياري لوقت المشروع}}$$

وبحساب قيمة (ق) يتم الكشف عن الإحتمال المقابل لها من واقع جدول توزيع الإحتمال الطبيعي، ثم يتم جمع (أو طرح) ٥٠% على هذا الإحتمال لنحصل على إحتمال إتمام المشروع خلال الوقت المستهدف أو بموازنة معينة. ويمكن تلخيص كيفية تحديد إحتمال إتمام المشروع خلال زمن معين أو بموازنة معينة في الخطوات التالية:

١- حساب الإنحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج، (ش - ف) / ٦.

٢- حساب الإنحراف المعياري لوقت المشروع =

$$\sqrt{\text{مجموع مربعات الإنحرافات المعيارية لأنشطة المسار الحرج}}$$

٣- حساب قيمة (ق).

٤- الكشف عن قيمة (ق) وتحديد الإحتمال المقابل لها.

٥- إحتمال إتمام المشروع خلال الوقت المستهدف = ٥٠% + الإحتمال المقابل لقيمة (ق).

٦- إحتمال إتمام المشروع خلال وقت يزيد عن الوقت المستهدف =

١٠٠% - إحتمال إتمام المشروع خلال الوقت المستهدف.

٩/٩- وقت إتمام المشروع باحتمال أو بدرجة ثقة معينة:

قد يكون طلب الإدارة حساب وقت إتمام المشروع باحتمال (درجة ثقة)

معين فيتم حساب ذلك باعلاقة التالية:

وقت إتمام المشروع بدرجة ثقة محددة
 = وقت المسار الحرج \pm [معامل ثابت مقابل لدرجة الثقة المطلوبة \times
 الانحراف المعياري لوقت المشروع]

ويوضح الجدول التالي رقم (٦/٩) بعض المعاملات الثابتة المستخرجة من جدول لتوزيع الاحتمال الطبيعي بحسب درجات ثقة معينة.

المعامل الثابت (ق)	درجة الثقة
٠,٣٥ انحراف معياري	٦٠%
٠,٨٤ انحراف معياري	٨٠%
١,٠٠ انحراف معياري	٨٤%
١,٢٨ انحراف معياري	٩٠%
١,٦٤ انحراف معياري	٩٥%
٢,٢٢ انحراف معياري	٩٩%

وفى ضوء ما تقدم يمكن فى مثالنا السابق، الإجابة على الإستفسارات التالية:

١. ماهو الإنحراف المعيارى لوقت إتمام المشروع ؟
٢. ماهو إحتمال إتمام المشروع خلال ٦٠ أسبوعاً ؟
٣. ماهو إحتمال إتمام المشروع خلال مدة تزيد عن ٦٠ أسبوعاً ؟
٤. ما هو احتمال إتمام المشروع بموازنة إجمالية ٢٨٠٠٠ ج إذا كانت التكلفة التقديرية للأسبوع ٢٠٠٠ ج.
٥. ما هو وقت إتمام المشروع بدرجة ثقة ٩٠%.

الإجابة

أولاً: الإنحراف المعيارى لوقت إتمام المشروع:

هناك ثلاثة مسارات حرجة فى شبكة بيرت، لذلك تحسب الإنحرافات المعيارية للثلاثة مسارات ثم نأخذ أكبر إنحراف معيارى ليعبر عن الإنحراف المعيارى لوقت إتمام المشروع .

المسارات هى : ب و ط ، ج ك ، أ د و ط

ويمكن إستخراج الإنحرافات المعيارية لهذه الأنشطة من الجدول رقم

(٦/٩) السابق.

المسار الأول : ب و ط :

$$2.6 = \sqrt{36/64 + 1 + 4}$$

الإحتراف المعياري :

المسار الثاني: ج ك:

$$4,773 = \sqrt{4 + (6/26)^2}$$

الإحتراف المعياري :

المسار الثالث : أ د و ط :

$$3.026 = \sqrt{36/64 + 1 + 1 + 4}$$

الإحتراف المعياري :

أى أن الإحتراف المعياري لوقت إتمام المشروع = 4,773 .

ثانياً : إحتمال إتمام المشروع خلال 60 أسبوعاً :

$$ق = \frac{58 - 60}{4,773} = 0,419 \text{ أو } 0,42 \text{ تقريباً}$$

الرقم المقابل من الجدول = 0,1628 أى الإحتمال = 0,50 + 0,1628 = 66 % تقريباً.

ثالثاً: إحتمال إتمام المشروع خلال مدة تزيد عن 60 أسبوعاً = 100% - 66% = 34% .

رابعاً: احتمال إتمام المشروع بموازنة قدرها 128000 ج إذا علمت أن التكلفة التقديرية للأسبوع 2000 ج.

بقسمة الموازنة الإجمالية ÷ التكلفة الأسبوعية تنتج المدة المطلوب حساب احتمال إتمام المشروع خلالها ثم يتم حساب الاحتمال كما سبق في الخطوة السابقة.

$$\text{مدة إتمام المشروع بموازنة } 126000 = 126000 \div 2000 = 63 \text{ اسبوع}$$

$$\therefore ق = (58 - 63) \div 4,773 = 1,26$$

$$\text{الرقم المقابل من الجدول} = 0,3962$$

$$\therefore \text{الاحتمال} = 0,3962 + 0,50 = 0,896 \text{ تقريباً } 90\%$$

خامساً: وقت إتمام المشروع بدرجة ثقة 90%

$$= 58 + (1,28 \times 4,773) = 6,11 + 58 = 64,11 \text{ أسبوع}$$

الفصل العاشر

تخطيط ورقابة التكاليف باستخدام أسلوب بيرت

تناولنا في الفصل السابق مفهوم أسلوب بيرت وكيفية الاستفادة منه في تخطيط وقت المشروع، لكننا لم نتعرض للعلاقة بين وقت وتكلفة المشروع، فالتكلفة تعتبر عنصراً هاماً عند تخطيط المشروع، إذ لا يكفي فقط تخطيط وقت المشروع دون مراعاة حجم الموارد المتاحة وحجم الموارد المطلوبة للمشروع. إن توفير معلومات عن علاقة وقت المشروع بتكلفته يعتبر أمراً هاماً وضرورياً للإدارة حيث يساعدها على الموازنة بين إتمام المشروع في وقت أقل وبتكلفة عالية أو في الوقت المخطط وبتكلفة أقل.

ونتناول في هذا الفصل كيفية الاستفادة من أسلوب بيرت في تخطيط ورقابة تكاليف المشروعات وهو ما يعرف باسم بيرت تكلفة - PERT COST حيث يفيد أسلوب بيرت/ تكلفة في توفير المعلومات التي ترشد الإدارة عند اتخاذ عديد من القرارات مثل:

- قرار المفاضلة بين إتمام المشروع في وقته المخطط والذي قد يكون أطول من الوقت المتعاقد عليه، وتحمل غرامات وجزاءات تأخير، وبين الإسراع في تنفيذ المشروع حتى يتم خلال الوقت المتعاقد عليه وتحمل تكاليف إضافية مقابل الإسراع.
- قرار المفاضلة بين الإسراع في إتمام المشروع وتشغيله للحصول على أرباح مبكرة، مع تحمل تكاليف إضافية وبين إتمام المشروع في وقته المخطط وفقد هذه الأرباح المبكرة وعدم تحمل تكاليف إضافية.
- قرار استخدام موارد إضافية أو إعادة توزيع الموارد المتاحة بين الأنشطة المختلفة.

١/١٠ : علاقة تكاليف النشاط بالوقت:

من الأمور الأساسية لاستخدام أسلوب بيرت/ تكلفة ضرورة التعرف على علاقة تكاليف كل نشاط بوقت النشاط، حيث على ضوء هذه العلاقة يمكن تخطيط ورقابة تكاليف الأنشطة بالارتباط بوقت كل نشاط.

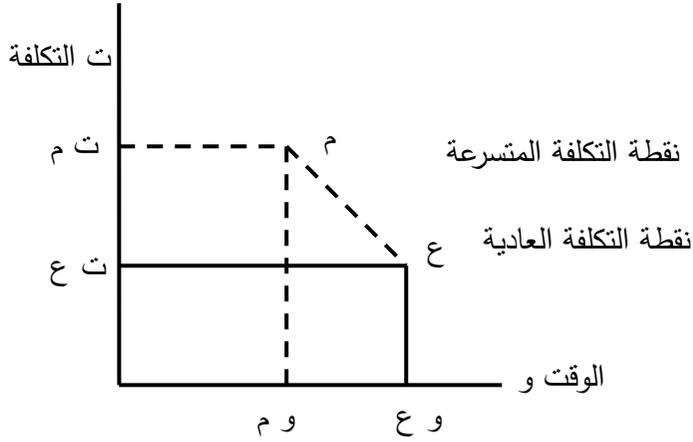
يمكن تقسيم تكاليف الأنشطة من حيث علاقتها بالنشاط إلى مجموعتين، تتمثل المجموعة الأولى في تكاليف مباشرة على النشاط يمكن تخصيصها له بدقة وسهولة، واعتبارها من مسنولية النشاط وتحمل عليه مباشرة، مثل تكاليف المواد المستخدمة في النشاط وأجور العمال المخصصين للقيام بهذا النشاط بما فيها أجور المشرف على هؤلاء العمال، وإهلاك وإيجار الآلات المخصصة لهذا النشاط، وتتمثل المجموعة الثانية في تكاليف غير مباشرة تحدث من أجل المشروع (الأنشطة) ككل وبالتالي يصعب ربطها وتخصيصها لنشاط معين مثل مرتبات إدارة المشروع وتكاليف المنافع العامة، وإهلاك الإنشاءات المؤقتة لإيواء العمال والمشرفين والمهندسين.

كذلك يمكن تقسيم تكاليف الأنشطة من حيث علاقتها بحجم النشاط إلى مجموعتين هما:

١- تكاليف متغيرة Variable Costs :

يتغير مجموعها مع تغير حجم النشاط، أي كلما زاد حجم العمل زاد مجموع التكاليف، مثل تكلفة المواد وأجور العمال، وهذه التكاليف علاقتها مع وقت النشاط علاقة عكسية فإذا قل وقت النشاط (يعني زاد حجم العمل نظراً لمحاولة إنجاز نفس العمل في وقت أقل) يزيد مجموعها حيث قد يتحمل المشروع أجور عمال إضافية أعلى من الأجور العادية، أو شراء المواد الخام بسعر أعلى والعكس إذا زاد وقت النشاط يعني قل حجم العمل حيث سيتم إنجاز نفس العمل في وقت أطول، يقل مجموعها حيث قد يتم استخدام عمالة أقل مهارة، الانتظار وشراء المواد بسعر أقل.

يوضح الشكل التالي علاقة التكاليف المتغيرة بوقت النشاط.



(شكل ١/١٠)

يوضح علاقة التكلفة المتغيرة بوقت النشاط

يتضح من الشكل السابق (١/١٠) أن العلاقة بين وقت النشاط وتكلفته المتغيرة علاقة عكسية ، فمع انخفاض الوقت من و ع إلى و م زادت التكلفة من ت ع إلى ت م حيث:

و ع = الوقت العادي للنشاط **Normal Time** وهو أطول وقت مسموح به لإتمام النشاط أو هو الوقت الطبيعي لإتمام النشاط.

ت ع = التكلفة العادية للنشاط **Normal Cost** أي أقل تكلفة لإتمام النشاط في وقته العادي.

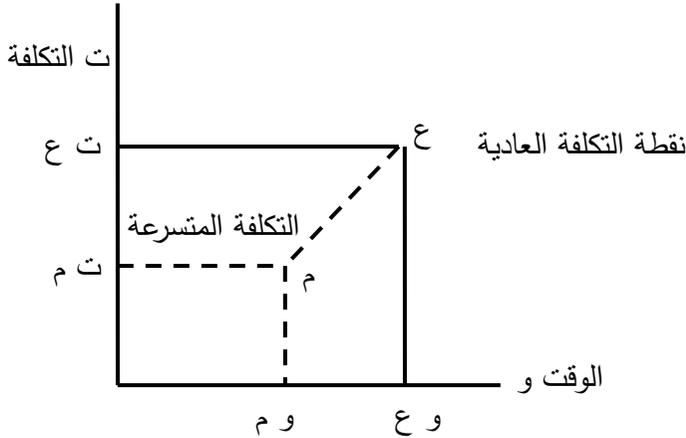
و م = الوقت المتسرع للنشاط **Crash Time** ويمثل أقصر وقت يمكن إتمام النشاط خلاله.

ت م = التكلفة المتسرفة للنشاط **Crash Cost** وتمثل أقصى تكلفة للنشاط، أي تكلفة إتمام النشاط في وقته المتسرع.

٢- تكاليف ثابتة: Fixed Costs

لا يتغير مجموعها مع تغير حجم النشاط، أي لا يزيد مبلغها مع زيادة حجم العمل خلال نفس الفترة ولا ينقص مع نقص حجم العمل. حيث ترتبط بالزمن لذلك تسمى تكاليف زمنية **Period Costs** فإذا انخفض وقت النشاط يقل مجموعها وإذا زاد وقت النشاط يزيد مجموعها مثل إيجار المعدات ومرتبات الملاحظين وإيجار المخازن، فكل هذه البنود مرتبطة بالزمن لا بحجم الاستفادة، منها فإيجار المعدات مرتبط أساساً بفترة الإيجار لا بكمية العمل خلال فترة الإيجار.

ويوضح الشكل التالي العلاقة بين التكاليف الثابتة ووقت النشاط.



شكل (٢/١٠)

يوضح العلاقة بين التكاليف الثابتة ووقت النشاط.

يتضح من الشكل السابق (٢/١٠) أن العلاقة بين وقت النشاط والتكاليف الثابتة للنشاط علاقة طردية، فإذا أمكن تقصير وقت النشاط من (م و) إلى (ع و) يقل مبلغ التكلفة الثابتة للنشاط من (ت ع) إلى (ت م).

على ضوء ما سبق يتضح أن التكلفة المتغيرة للنشاط تزيد مع نقص وقت النشاط وتقل مع زيادة وقت النشاط، وبالعكس فإن التكلفة الثابتة للنشاط تزيد مع زيادة وقت النشاط وتقل مع نقص وقت النشاط. وعلى ذلك فإن سلوك التكلفة الكلية للنشاط سيتوقف على نسبة التكاليف المتغيرة ونسبة التكاليف

الثابتة إلى إجمالي تكلفة النشاط، فإذا كانت التكاليف المتغيرة تمثل الجزء الأكبر فإن تكلفة النشاط ككل تزيد من تقصير وقت النشاط (وبالعكس)، أما إذا كانت التكاليف الثابتة للنشاط تمثل الجزء الأكبر من تكلفة النشاط، فإن تكلفة النشاط ككل تقل مع نقص وقت النشاط (وبالعكس).

ونظراً لأن الجزء الأكبر من تكاليف النشاط يتمثل غالباً في التكاليف المباشرة المتغيرة (قد لا ينطبق هذا الفرض على جميع الأنشطة) فإنه يمكن القول بأن التكاليف الكلية للنشاط تتغير مع تغير وقت النشاط ولكن بعلاقة عكسية، وللتسهيل العملي تقرب العلاقة بين الوقت والتكلفة باستخدام الخط المستقيم الذي يصل نقطة الوقت المتسرع بالتكلفة المتسرعة ونقطة الوقت العادي بالتكلفة العادية. وهذا يعني أن العلاقة بين الوقت والتكلفة خطية **Linear relation** وهذا يعني أيضاً أن معدل الزيادة في تكلفة النشاط بسبب تخفيض الوقت ثابت لا يتغير مع تغير وقت النشاط أي أن ميل التكلفة **Cost slope** ثابت وهذا راجع لفرض الخطية.

يتمثل ميل التكلفة في مقدار التغير في تكلفة النشاط نتيجة تغير وقت هذا النشاط بوحدة زمنية واحدة (يوم/أسبوع...) ويحسب ميل التكلفة كما يلي:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التغير في التكلفة}}{\text{التغير في الوقت}}$$

$$= \frac{\text{التكلفة المتسرعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسرع}} = \frac{\text{ت م} - \text{ت ع}}{\text{و ع} - \text{و م}}$$

٢/١٠: تقصير وقت إتمام المشروع بأقل تكلفة:

قد تفكر الإدارة (كما سبق القول) في ظروف معينة في اتخاذ قرار بالإسراع في إتمام المشروع ومحاولة تنفيذه في فترة أقل من الفترة العادية، وحتى يمكن للإدارة اتخاذ مثل هذا القرار فإنه يلزم إمدادها بمعلومات كافية عن الزيادة في التكاليف التي ينتظر تحملها نتيجة هذا الإسراع، وما هي

البدائل الممكنة للإسراع في التنفيذ، وما هي تكلفة كل بديل، وذلك حتى يمكن للإدارة المفاضلة بين هذه البدائل واختيار أقلها تكلفة. ولتوفير مثل هذه المعلومات من خلال استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة تتبع الخطوات التالية:

- ١- رسم شبكة بيرت وتحديد المسار الحرج والوقت المبكر والمتأخر والراكد لكل نشاط.
- ٢- تحديد الفترة المراد تقصير وقت إتمام المشروع بمقدارها.
- ٣- حساب ميل التكلفة للأنشطة.
- ٤- تقصير وقت المشروع عن طريق تخفيض الوقت اللازم لإتمام نشاط أو أكثر وذلك باختيار البديل الذي يترتب عليه أقل زيادة في التكاليف ونستمر في عملية تقصير وقت المشروع حتى نصل إلى المدة المطلوب تنفيذ المشروع خلالها طبقاً للتعاقد أو طبقاً لطلب الإدارة. هذا ولتطبيق الخطوات السابقة ولتوفير المعلومات المناسبة للإدارة يلزم مراعاة الاعتبارات التالية:

- ١- يتم تخفيض وقت الأنشطة الحرجة (التي على المسار الحرج) لأن تخفيض وقت الأنشطة غير الحرجة يترتب عليه تحمل تكاليف إضافية دون فائدة حيث لن ينخفض وقت إتمام المشروع.
- ٢- عند الرغبة في تخفيض وقت المسار الحرج نبدأ بتخفيض وقت النشاط الذي له أقل ميل تكلفة ضمن أنشطة المسار الحرج.
- ٣- عند تخفيض وقت أي نشاط يراعى أن فترة التخفيض ليست بلا حدود، بل تتحدد بالفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع للنشاط لأن الاعتبارات الفنية تمنع تقصير وقت النشاط عن وقته المتسرع.
- ٤- قد يترتب على تخفيض وقت أحد الأنشطة الحرجة ظهور مسار حرج آخر (أو تحول المسار الحرج) ففي هذه الحالة يلزم تخفيض وقت جميع المسارات الحرجة، في وقت واحد وبنفس المدة. وتحقيق ذلك يتطلب دراسة البدائل الممكنة واختيار أقلها تكلفة، فقد يتم تخفيض وقت نشاط من كل مسار حرج وبنفس المدة، وقد يتم اختيار نشاط

يشارك بين المسارات الحرجة يكون ميل تكلفته أقل من مجموع ميل التكلفة لأكثر من نشاط كل نشاط على مسار حرج مختلف.

هذا ويمكن توضيح كيفية تقصير وقت المشروع على ضوء القواعد والاعتبارات السابقة من خلال المثال التالي:

مثال (١):

فيما يلي بعض البيانات الخاصة بوقت وتكاليف أنشطة أحد المشروعات لإحلال آلات أحد المصانع.

التكلفة بالجنيه	تقديرات الوقت		الأحداث	النشاط
	عادية	بالتسريع		
٤٦٠٠	٣٦٠٠	٤	٦	٢-١ أ
٦٤٠٠	٤٨٠٠	٤	٨	٤-٢ ب
١٩٠٠٠	١٦٠٠٠	٤	١٠	٣-٢ ج
٤٠٠٠	٤٠٠٠	٢	٢	٤-٣ د
٧٠٠٠	٤٤٠٠	٤	٨	٥-٤ هـ

جدول (١/١٠)

تقديرات الوقت والتكلفة للمشروع

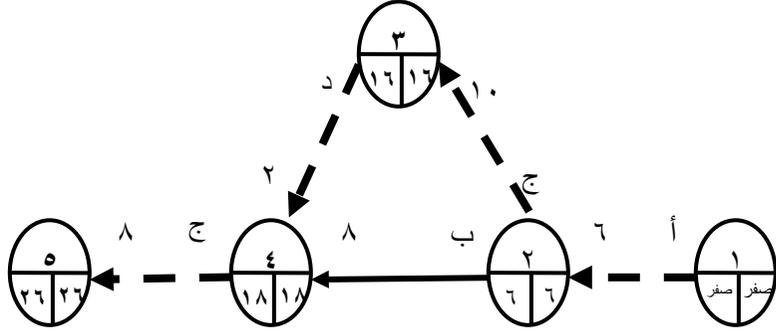
وترغب الإدارة في معرفة أقل تكلفة ممكنة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن.

لتوفير المعلومات اللازمة للإدارة تتبع الخطوات التالية:

أولاً: رسم شبكة بيرت:

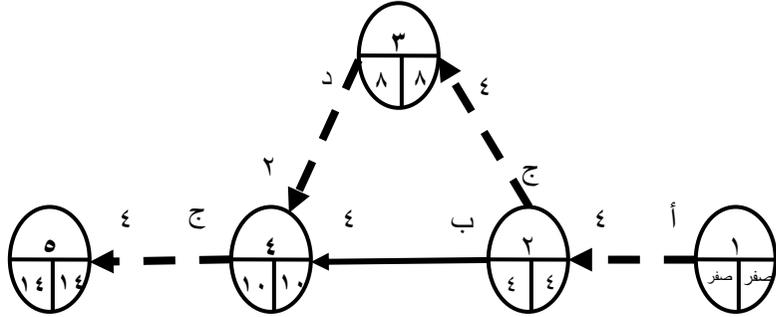
حتى يمكن تحديد الفترة التي يمكن تخفيض وقت المشروع بمقدارها يتم رسم شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي وطبقاً للوقت المتسرع.

أ- شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي:



شكل (٣/١٠) شبكة
بيرت طبقاً للوقت العادي

ب- شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع:



شكل (٤/١٠)
شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع

يتضح من شكل (٣/١٠) أن المسار الحرج طبقاً للوقت العادي هو أ ج د هـ وطوله ٢٦ أسبوعاً.

كما يتضح من شكل (٤/١٠) أن المسار الحرج طبقاً للوقت المتسرع هو أ ج د هـ وطوله ١٤ أسبوعاً.

وعلى ضوء ذلك فإنه يمكن تقصير زمن المشروع بمقدار ١٢ أسبوعاً وهو الفرق بين المسار الحرج طبقاً للوقت العادي والمسار الحرج طبقاً للوقت المتسرع.

ثانياً: حساب ميل التكلفة:

يوضح الجدول التالي ميل التكلفة لجميع الأنشطة:

النشاط	تغير التكلفة (متسرة- عادية)	تغير الوقت (عادي- متسرع)	ميل التكلفة $3 \div 2 = 1.5$
(١)	(٢)	(٣)	(٤)
أ	١٠٠٠	٢	٥٠٠
ب	١٦٠٠	٤	٤٠٠
ج	٣٠٠٠	٦	٥٠٠
د	صفر	صفر	صفر
هـ	٢٦٠٠	٤	٦٥٠

جدول (٢/١٠)

يوضح ميل التكلفة للأنشطة

ثالثاً: تقصير وقت المشروع:

لتقصير وقت المشروع يتبع الآتي:

- ١- تحديد النشاط صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج ويتضح أن النشاطين (أ، ج) لهما أقل ميل تكلفة ضمن أنشطة المسار الحرج وحيث أن النشاط (أ) مشترك في المسارين فتكون له الأولوية حيث يترتب على تقصير وقته تخفيض وقت المسارين وبنفس التكلفة، إذن نبدأ بتخفيض وقت النشاط (أ).
- ٢- تحديد حدود فترة التخفيض للنشاط المراد تخفيض وقته، وبالنسبة للنشاط (أ) حدود فترة التخفيض له أسبوعين (الفرق بين الوقت العادي والوقت المتسرع).
- ٣- قد يترتب على تخفيض وقت أحد الأنشطة الحرجة تحول المسار الحرج أو ظهور مسار حرج آخر، ولعلاج ذلك يتم حساب الراكد الحر لجميع الأنشطة غير الحرجة ثم يتم تخفيض وقت النشاط المراد تخفيضه في حدود ما يسمح به وقت النشاط وأقل راکد حر عل الرسم أيهما أقل.

لذلك نحسب الراكد الحر للنشاط (ب) لأنه غير حرج

الراكد الحر = نهاية مبكرة - بداية مبكرة - طول النشاط

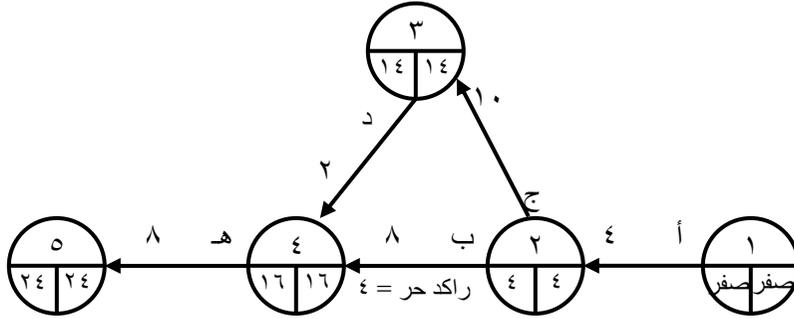
$$= 18 - 6 - 8 = 4 \text{ أسابيع.}$$

∴ يخفض وقت النشاط (أ) أسبوعين في حدود فترة التخفيض الخاصة به لأنها أقل من الراكد الحر.

وبذلك يصبح وقت المشروع 26 - 2 = 24 أسبوع.

وتزيد تكلفة المشروع بمقدار 1000 جنيهه (2 أسبوع × 500 جنيهه ميل التكلفة).

وتكون شبكة بيرت بعد تخفيض وقت النشاط (أ) كما يلي:



شكل (٥/١٠)

شبكة بيرت بعد تقصير (أ) أسبوعين

يتضح من الشكل السابق (٥/١٠) أن المسار الحرج لم يتغير وما زال أ

ج د هـ وطوله 24 أسبوعاً.

التخفيض الثاني:

- النشاط (ج) له أقل ميل تكلفة على المسار الحرج.

- حدود فترة التخفيض للنشاط (ج) 6 أسابيع.

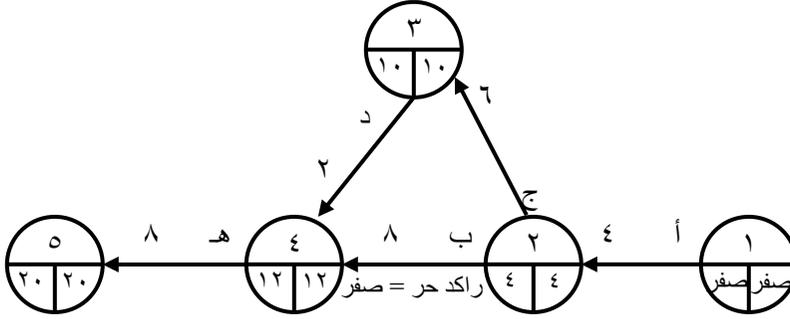
∴ يخفض وقت النشاط (ج) بمقدار 4 أسابيع فقط ويصبح طول وقت

المشروع 24 - 4 = 20 أسبوع.

ويترتب على تخفيض وقت النشاط (ج) 4 أسابيع زيادة تكلفة المشروع

بمبلغ 2000 جنيهه (4 أسابيع × 500 جنيهه ميل التكلفة).

وتكون شبكة بيرت بعد تخفيض وقت النشاط (ج) كما يلي:



شكل (٦/١٠)

شبكة بيرت بعد تقصير (ج) ٤ أسابيع

التخفيض الثالث:

يتضح من الشكل السابق (٦/١٠) أنه أصبح هناك مساران حرجان طول كل منهما ٢٠ أسبوع وهما (أ ج د هـ) ، (أ ب هـ).

وهنا يلزم تقصير وقت المسارين معاً وبنفس المدة ويتضح من الشكل (٦/١٠) أن هناك بديلان للتخفيض هما:

- تخفيض وقت النشاط (ج) أسبوعين ووقت النشاط (ب) بأسبوعين حيث أن النشاط (ب) يسمح بأربعة أسابيع في حين أن النشاط (ج) يسمح بأسبوعين فقط. وتكون تكلفة هذا البديل

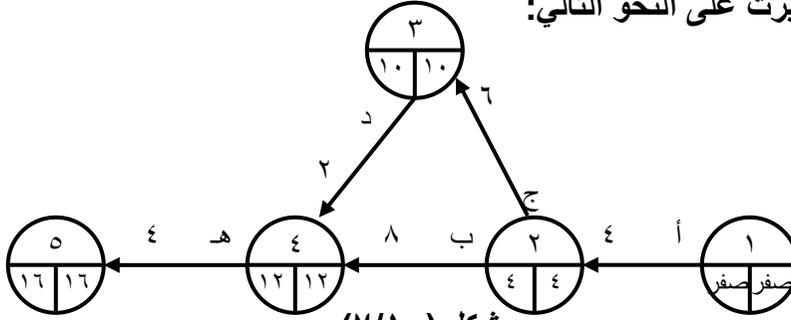
= (٢ أسبوع × ٥٠٠ ميل تكلفة (ج) + ٢ أسبوع × ٤٠٠ ميل تكلفة (ب)) = ١٨٠٠ جنيه.

- تخفيض وقت النشاط (هـ) بمقدار أسبوعين، فهو نشاط مشترك في المسارين الحرجين وتخفيض وقته يترتب عليه تخفيض وقت المسارين معاً.

وتكون تكلفة هذا البديل = ٢ أسبوع × ٦٥٠ ميل تكلفة (هـ) = ١٣٠٠ جنيه.

يتضح من ذلك أن تكلفة البديل الثاني أقل، وبذلك يتم تخفيض وقت النشاط (هـ) وحيث أنه يسمح بأربعة أسابيع وأنه مشترك في المسارين ولا يوجد راكد حر لأي نشاط فيمكن تقصير وقته بأربعة أسابيع.

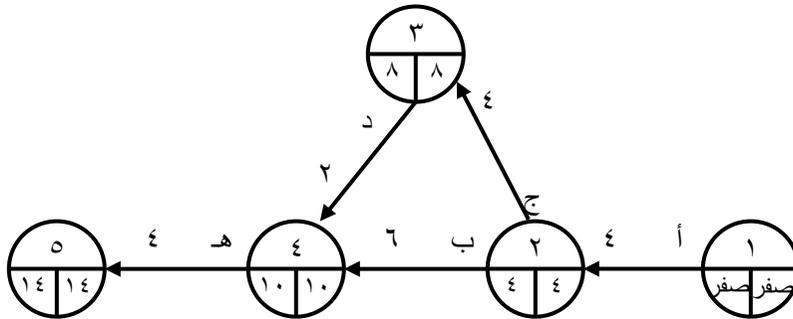
وبذلك يقل وقت المشروع من ٢٠ أسبوع إلى ١٦ أسبوع وتزيد تكلفة المشروع بمبلغ ٢٦٠٠ جنيهه (٤ أسابيع × ٦٥٠ جنيهه للأسبوع) وتكون شبكة بيرت على النحو التالي:



شكل (٧/١٠)
شبكة بيرت بعد تقصير النشاط (هـ)

التخفيض الرابع:

يتضح من الشكل السابق (٧/١٠) أنه مازال هناك مساران حرجان طول كل منهما ١٦ أسبوع وهما (أ ج د هـ) ، (أ ب هـ) لم تعد هناك أنشطة يمكن تخفيض وقتها سوى النشاط ج، ب ولذلك يتم تخفيض وقت النشاط (ج) على المسار الأول بمقدار أسبوعين (النشاط ج يسمح بـ ٦ أسابيع وخفض قبل ذلك بأربعة أسابيع) وفي نفس الوقت يتم تخفيض وقت النشاط (ب) بمقدار أسبوعين فقط مع أنه يسمح بأربعة أسابيع. وعلى ذلك يصبح وقت المشروع ١٤ أسبوعاً (٢-١٦). وتزيد تكلفة المشروع بمبلغ ١٨٠٠ جنيهه (٢ أسبوع × ٥٠٠ جنيهه ميل تكلفة (ج) + ٢ أسبوع × ٤٠٠ جنيهه ميل تكلفة (ب)) وتكون شبكة بيرت على النحو التالي:



شكل (٨/١٠)
شبكة بيرت بعد تخفيض وقت النشاطين (ج، ب)

يتضح من كل ما سبق ما يلي:

- أقل وقت لإتمام المشروع هو ١٤ أسبوعاً.
- أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن
- = مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة + تكلفة التخفيضات في الوقت
- = ٣٢٨٠٠ ت عادية
- + ٧٤٠٠ تكلفة جميع التخفيضات (تكاليف إضافية)

٤٠٢٠٠ جنيه

يلاحظ على الطريقة السابقة التي اتبعت في تقصير وقت المشروع أننا مع كل تخفيض نعيد رسم شبكة بيرت من جديد ونحسب من جديد الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة وهذا التكرار يترتب عليه كثرة العمليات الحسابية وتعددتها، ولذلك يمكن استخدام طريقة أخرى تعطي نفس النتائج بل وتوفر للإدارة معلومات أكثر ولا نحتاج فيها إلى تكرار رسم شبكة بيرت ولا نحتاج لحساب الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة.

وتتبلور هذه الطريقة في إعداد جدول يوضح مراحل التخفيض وطول المسارات المختلفة عند كل مرحلة والتكاليف الإضافية المترتبة على كل مرحلة، كما يتضح من الجدول التالي:

٥	٤	٣	٢	١	التعديلات والأنشطة
ب، ج	ج	ب	أ	لا إسراع	المسارات
١٤	١٦	٢٠	٢٤	٢٦	أ ب ج هـ
١٤	١٦	٢٠	٢٠	٢٢	أ ب هـ
١٨٠٠	٢٦٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠	-	تكاليف إضافية
٧٤٠٠	٥٦٠٠	٣٠٠٠	١٠٠٠	-	تكاليف إضافية متجمعة

جدول (٣/١٠)

يوضح مراحل التخفيض

ملاحظات على الجدول السابق (٣/١٠)

- ١- التعديل الأول: لا إسراع ومعنى ذلك عدم تحمل تكاليف إضافية وبقاء وقت المشروع كما هو دون تخفيض أي ٢٦ أسبوع
- ٢- التعديل الثاني: تخفيض وقت النشاط (أ) أسبوعين ويترتب على ذلك، انخفاض وقت المشروع بمقدار أسبوعين وتحمل تكاليف إضافية ١٠٠٠ ج ومازال المسار أ ج د هـ هو المسار الحرج.
- ٣- التعديل الثالث: تخفيض وقت النشاط (ج) بأربعة أسابيع ويترتب على ذلك تخفيض وقت المشروع بمقدار أربعة أسابيع وتحمل تكاليف إضافية ٢٠٠٠، وأصبح هناك مساران حرجان هما (ا ج د هـ، أ ب هـ)

ويلاحظ أننا لم نحفض النشاط (ج) بستة أسابيع كما تسمح به حدود فترة التخفيض للنشاط (ج) وذلك لأن المسار الآخر طوله ٢٠ أسبوع وإذا تم تخفيض (ج) ب ٦ أسابيع يتحول المسار الحرج ويتم تحمل تكلفة أسبوعين دون أن يقل وقت المشروع مقابل هذه التكلفة.

٤- التعديل الرابع: يخفض وقت النشاط (هـ) بمقدار ٤ أسابيع وحيث أنه مشترك في المسارين فيقل وقت المسارين معاً بنفس الفترة، وبذلك يقل وقت المشروع بمقدار ٤ أسابيع وتزيد تكاليف المشروع بمبلغ ٢٦٠٠ جنيه ومازال هناك مساران حرجان.

٥- التعديل الخامس: يخفض وقت النشاط (ج) أسبوعين ويخفض وقت النشاط (ب) أسبوعين ويترتب على ذلك انخفاض وقت إتمام المشروع إلى ١٤ أسبوع وتحمل تكلفة إضافية ١٨٠٠ جنيه.

ويلاحظ أنه كان يمكن تقصير وقت النشاط (ب) بمقدار ٤ أسابيع ولكن المسار أ ج د هـ لا يمكن تقصيره عن ١٤ أسابيع لذلك يخفض (ب) أسبوعين لأن أي تخفيض بعد ذلك للنشاط (ب) لا يترتب عليه تقصير وقت إتمام المشروع ويترتب عليه تحمل تكاليف إضافية دون مقابل أو دون مبرر.

٣/١٠ - دور أسلوب بيرت/ تكلفة في إمداد الإدارة بالمعلومات:

- قد ترغب الإدار في التعرف على إجابة عديد من الاستفسارات بما يرشد عملية اتخاذ القرارات الإدارية ومن أمثلة هذه الاستفسارات ما يلي:
- ما هي أقل تكلفة ممكنة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن؟
 - ما هي أقل تكلفة لإتمام المشروع خلال وقت معين؟
 - ما هي التكلفة الإضافية اللازمة لتخفيض وقت المشروع بمدة معينة؟
 - ما هو الوقت اللازم لإتمام المشروع في حدود موازنة مالية معينة؟
 - أيهما أفضل للإدارة، الإسراع في إتمام المشروع وتجنب دفع غرامة تأخير، أم إتمام المشروع في وقته العادي وتحمل غرامات تأخير؟
- يمكن توضيح أهمية أسلوب بيرت/ تكلفة في توفير مثل هذه المعلومات للإدارة من خلال متابعة المثال التالي:

مثال عام:

أمكن تجميع البيانات والمعلومات التالية عن مشروع عملية صيانة لأحد المصانع الكبرى:

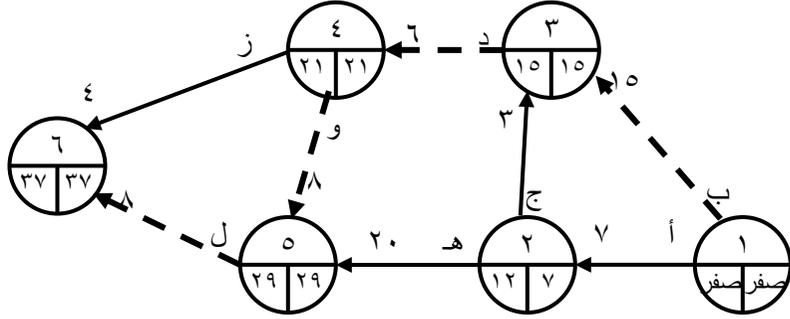
النشاط	الأحداث	الوقت بالأسبوع		التكلف بالجنيه	
		متسرع	عادي	عادية	متسرفة
أ	٢-١	٥	٢	١٥٠٠	٢٠٠٠
ب	٣-١	١٥	١٥	٧٠٠٠	٧٠٠٠
ج	٣-٢	٢	٣	٢٠٠٠	٣٠٠٠
د	٤-٣	٣	٦	٤٠٠٠	٤٦٠٠
هـ	٥-٢	١٥	٢٠	٢٠٠٠	٤٥٠٠
و	٥-٤	٥	٨	٢٠٠٠	٣٥٠٠
ز	٦-٤	٣	٤	٤٠٠٠	٥٠٠٠
ل	٦-٥	٣	٨	٦٠٠٠	١٣٥٠٠
				٢٨٥٠٠	٤٣١٠٠

جدول (٤/١٠)

يوضح بيانات الوقت والتكلفة للمشروع

المطلوب:

- ١- رسم شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي موضحاً عليه المسار الحرج.
- ٢- حساب الوقت المبكر والمتأخر والراكد الكلي والراكد الحر لكل نشاط.
- ٣- حساب أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن.
- ٤- حساب التكلفة الإضافية اللازمة لإتمام المشروع خلال ٣٢ أسبوع.
- ٥- حساب وقت إتمام المشروع بموازنة مالية إجمالية قدرها ٣٧١٠٠ جنيه.
- ٦- بفرض أن هذا المصنع يحقق ربحاً أسبوعياً قدره ٧٠٠ جنيه فما هو الوقت الأمثل لإتمام مشروع الصيانة؟
أولاً: رسم شبكة بيرت وتحديد المسار الحرج:



شكل (٩/١٠)

شبكة بيرت طبقاً للوقت العادي

لتحديد المسار الحرج يتم حصر جميع المسارات على الرسم وأطولها

يكون هو المسار الحرج كما يلي:

المسار	الوقت اللازم لأنشطة المسار	طول المسار
ب د ز	٤ + ٦ + ١٥	٢٥ أسبوع
ب د و ل	٨ + ٨ + ٦ + ١٥	٣٧ أسبوع
أ ج د ز	٤ + ٦ + ٣ + ٧	٢٠ أسبوع
أ ج د و ل	٨ + ٨ + ٦ + ٣ + ٧	٣٢ أسبوع
أ ه ل	٨ + ٢٠ + ٧	٣٥ أسبوع

جدول (٥/١٠)

يوضح المسارات على الرسم السابق

∴ المسار الحرج طبقاً للوقت العادي هو ب د ل وطوله ٣٧ أسبوع.
أي أن أطول وقت لإتمام المشروع هو ٣٧ أسبوع بتكلفة ٢٨٥٠٠ جنيهه
(مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة).
ثانياً: حساب الوقت المبكر والتأخر والراكد:
بالرجوع إلى قواعد حساب الوقت المبكر والمتأخر والراكد للأحداث
وللأنشطة كما سبق ذكرها في الفصل السابق أمكن حساب الوقت المبكر
والمتأخر والراكد للأنشطة في مثالنا الحالي كما يوضحها الجدول التالي:

الراكد الحر (٨)	الراكد الكلي (٧)	الوقت المتأخر		الوقت المبكر		وقت النشاط (٢)	النشاط (١)
		نهاية(٦)	بداية(٥)	نهاية(٤)	بداية(٣)		
صفر	٥	١٢	٥	٧	صفر	٧	أ
صفر	صفر	١٥	صفر	١٥	صفر	١٥	ب
٥	٥	١٥	١٢	١٠	٧	٣	ج
صفر	صفر	٢١	١٥	٢١	١٥	٦	د
٢	٢	٢٩	٩	٢٧	٧	٢٠	هـ
صفر	صفر	٢٩	٢١	٢٩	٢١	٨	و
١٢	١٢	٣٧	٣٣	٢٥	٢١	٤	ز
صفر	صفر	٣٧	٢٩	٣٧	٢٩	٨	ل

جدول (٦/١٠)

يوضح الوقت المبكر والمتأخر والراكد لأنشطة

ملاحظات على الجدول السابق (٦/١٠):

- العمود (٧) = (٥-٣) أو (٦-٤).
- العمود ٨ حسب من على الرسم (٩/٥) بتطبيق العلاقة التالية:
الراكد الحر = وقت النهاية المبكر - وقت البداية المبكر - طول النشاط.
- الأنشطة ب، د، و، ل ليس لها وقت راكد لأنها أنشطة حرجة.
- الأنشطة أ، ج، هـ، ز لها وقت راكد كلي لأنها أنشطة غير حرجة.

ثالثاً: حساب ميل التكلفة:

يوضح الجدول التالي ميل التكلفة لجميع الأنشطة.

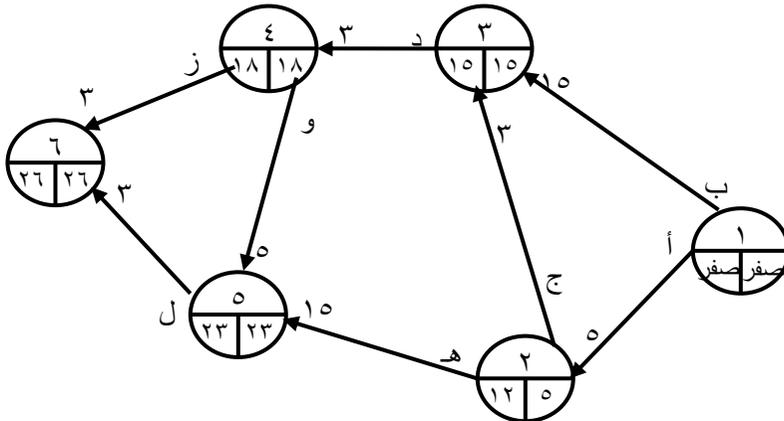
النشاط	تغير التكلفة (متسرة- عادية)	تغير الوقت (عادي- متسرع)	ميل التكلفة $3 \div 2 = 1.5$
(١)	(٢)	(٣)	
أ	٥٠٠	٢	٢٥٠
ب	صفر	صفر	صفر
ج	١٠٠٠	١	١٠٠٠
د	٦٠٠	٣	٢٠٠
هـ	٢٥٠٠	٥	٥٠٠
و	١٥٠٠	٣	٥٠٠
ز	١٠٠٠	١	١٠٠٠
ل	٧٥٠٠	٥	١٥٠٠

جدول (٧/١٠) ميل التكلفة للأنشطة.

رابعاً: حساب أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن:

أ- لتحديد أقل وقت ممكن لإتمام المشروع يلزم تحديد المسار الحرج طبقاً للوقت المتسرع، لذلك نرسم شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع على النحو التالي:

شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع:



شكل (١٠/١٠) شبكة بيرت طبقاً للوقت المتسرع

يتضح من الشكل السابق (١٠/١٠) أن أطول مسار طبقاً للوقت المتسرع هو المسار ب د و ل وطوله ٢٦ أسبوع.
 .: أقل وقت ممكن لإتمام المشروع هو ٢٦ أسبوع.
 ب- حساب أقل تكلفة لإتمام المشروع في أقل وقت:
 يتم تحديد التعديلات التي تجرى وحساب التكاليف الإضافية كما يوضحها الجدول التالي:

٥	٤	٣	١٢	١	صفر	التعديلات والأنشطة
ل	و، هـ	أ، و	د، أ	د	لا إسرار	المسارات
٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٣	٢٥	ب د ز
٢٦	٣١	٣٣	٣٤	٣٥	٣٧	ب د و ل
١٥	١٥	١٥	١٦	١٨	٢٠	أ ج د ز
١٩	٢٤	٢٦	٢٨	٣٠	٣٢	أ ج د و ل
٢٦	٣١	٣٣	٣٤	٣٥	٣٥	أ هـ ل
٧٥٠٠	٢٠٠٠	٧٥٠	٤٥٠	٤٠٠	-	تكاليف إضافية
١١١٠٠	٢٦٠٠	١٦٠٠	٨٥٠	٤٠٠	-	تكاليف إضافية متجمعة

جدول (١٠/٨)

يوضح التعديلات في أوقات الأنشطة.

ملاحظات على الجدول السابق (١٠/٨):

- ١- التعديل صفر. يعني عدم الإسرار في تنفيذ المشروع وبقاء الوضع على ما هو عليه وبالتالي يكون وقت المشروع ٣٧ أسبوع وعدم تحمل تكلفة إضافية.
- ٢- التعديل (١) النشاط (د) صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج ب د و ل ويمكن تخفيض وقته بمدة ٣ أسابيع ولكن المسار أ هـ ل طوله ٣٥ أسبوع، لذلك يخفض وقت النشاط (د) بمقدار أسبوعين فقط لأن تخفيضه بأكثر من أسبوعين يعني تقصير وقت المشروع عن ٣٥ أسبوع طول المسار الحرج الجديد أ هـ ل. ويترتب على تقصير النشاط (د) أسبوعين ما يلي:

- تقصير وقت المشروع من ٣٧ أسبوع إلى ٣٥ أسبوع.
- تحمل تكاليف إضافية قدرها $200 \times 2 = 400$ جنيه.
- أصبح هناك مساران حرجان هما أ هـ ل، ب د و ل وطول كل منهما ٣٥ أسبوع.
- ٣- التعديل رقم (٢) حيث يوجد أكثر من مسار حرج فإنه يلزم تخفيض كل المسارات الحرجة في وقت واحد وبنفس المدة ويوجد لدينا عدة بدائل هي:
الأول: تخفيض وقت النشاط (أ) على المسار أ هـ ل أسبوع بتكلفة قدرها ٢٥٠ جنيه مع تخفيض وقت النشاط (د) على المسار ب د و ل أسبوع بتكلفة قدرها ٢٠٠ جنيه وتكون تكلفة هذا البديل ٤٥٠ جنيه.
- الثاني: تخفيض وقت النشاط (ل) بمقدار أسبوع بتكلفة ١٥٠٠ جنيه فهو نشاط مشترك في المسارين.
- الثالث: تخفيض (أ) أسبوع بتكلفة ٢٥٠ جنيه مع تخفيض (و) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتكون تكلفة هذا البديل ٧٥٠ جنيه.
- الرابع: تخفيض (هـ) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتخفيض (د) أسبوع بتكلفة ٢٠٠ وتكون تكلفة هذا البديل ٧٥٠ جنيه.
- الخامس: تخفيض (هـ) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتخفيض (و) أسبوع بتكلفة ٥٠٠ جنيه وتكون تكلفة هذا البديل ١٠٠٠ ج.
- يلاحظ أن البديل الأول هو أقل هذه البدائل تكلفة.
يتم اختياره ويترتب على ذلك.
- تخفيض وقت المشروع من ٣٥ إلى ٣٤ أسبوع.
- تحمل تكلفة إضافية قدرها ٤٥٠ جنيه.
- مازال هناك مساران حرجان هما ب د و ل، أ هـ ل طول كل منهما ٣٤ أسبوع.
- ٤- تعديل رقم (٣): بالمفاضلة بين البدائل السابق ذكرها في التعديل الثالث نجد أن البديل الرابع لم يعد يصلح لأنه لم يعد يمكن تخفيض وقت النشاط (د). وعلى ذلك يكون البديل الثالث هو أفضل البدائل المتاحة.

∴ تخفيض وقت النشاط (أ) بأسبوع لأنه لم يعد يسمح بأكثر من أسبوع،
وتخفيض وقت النشاط (و) أسبوع مع أنه يسمح بثلاثة أسابيع.
ويترتب على ذلك:

- انخفاض وقت إتمام المشروع من ٣٤ إلى ٣٣ أسبوع.
- تحمل تكلفة إضافية قدرها $250 + 500 = 750$ جنيه.
- مازال هناك مساران حرجان هما ب د و ل، أ هـ ل.
- ٥- التعديل رقم (٥): بالمقارنة بين البديلين المتبقين من البدائل السابق ذكرها وهما البديل الثاني والبديل الخامس نجد أن البديل الخامس أقل تكلفة ويتم اختياره.

∴ يخفض وقت النشاط (و) أسبوعين لأنه يسمح بذلك وفي نفس الوقت
يخفض وقت النشاط (هـ) بأسبوعين مع أنه يسمح بـ ٥ أسابيع ويترتب
على ذلك:

- انخفاض وقت المشروع من ٣٣ إلى ٣١ أسبوع.
- تحمل تكاليف إضافية قدرها $2 \times 500 + 2 \times 500 = 2000$ ج
- ٦- التعديل رقم (٦): بالنسبة للمسار ب د و ل لم تعد هناك أنشطة يمكن تخفيض وقتها سوى النشاط (ل) وهذا النشاط مشترك في المسارين، إذن هذا هو البديل الوحيد الممكن.

∴ يخفض وقت النشاط (ل) بمقدار ٥ أسابيع فهو يسمح بهذه المدة، كما
أننا نحتاج ٥ أسابيع حتى نصل إلى أقل وقت ممكن لإتمام المشروع وهو
٢٦ أسبوع.

ويترتب على ذلك:

- انخفاض وقت المشروع من ٣١ إلى ٢٦ أسبوع.
- تحمل تكلفة إضافية قدرها $5 \times 1500 = 7500$ جنيه.

وعلى ضوء ما سبق يمكن استخلاص النتائج التالية:

- ١- أقل وقت ممكن لإتمام المشروع هو ٢٦ أسبوع.
- ٢- أقل تكلفة ممكنة لإتمام المشروع في أقل وقت ممكن
= مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة
+ التكلفة الإضافية المتجمعة
= $28500 + 11100 = 39600$ جنيه

٣- بمقارنة جملة التكاليف المتسرعة لجميع الأنشطة ٤٣١٠٠ ج مع التكلفة السابق حسابها لإتمام المشروع في أقل وقت (٣٩٦٠٠ ج) نجد أن التكلفة المتسرعة تزيد بمبلغ ٣٥٠٠ ج وهذا يوضح مدى أهمية وفائدة أسلوب بيرت/ تكلفة حيث أنه باستخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لم يخفض وقت جميع الأنشطة.

- النشاط (ج) غير حرج ولم يخفض وقته وبذلك تم توفير ١٠٠٠ جنيه.

- النشاط (ز) غير حرج ولم يخفض وقته وبذلك تم توفير ١٠٠٠ جنيه.

- النشاط (هـ) غير حرج ولم يخفض المدة الباقية المسموح بها وقدرها ٣ أسابيع وبذلك أمكن توفير ٣ × ٥٠٠ = ١٥٠٠ جنيه.

فيكون المجموع = ١٠٠٠ + ١٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٣٥٠٠ ج.

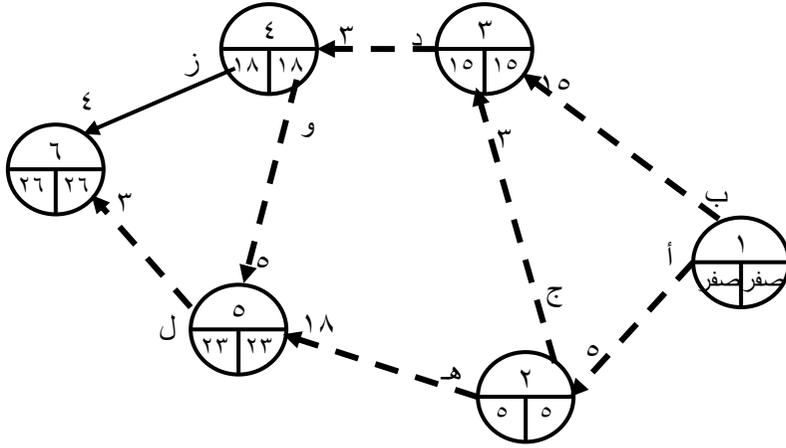
هذا ويمكن توضيح وقت وتكلفة كل نشاط قبل وبعد التعديلات على النحو

التالي:

النشاط	قبل التعديلات		بعد التعديلات	
	الوقت	التكلفة	الوقت	التكلفة
أ	٧	١٥٠٠	٥	٢٠٠٠
ب	١٥	٧٠٠٠	١٥	٧٠٠٠
ج	٣	٢٠٠٠	٣	٢٠٠٠
د	٦	٤٠٠٠	٣	٤٦٠٠
هـ	٢٠	٢٠٠٠	١٨	٣٠٠٠
و	٨	٢٠٠٠	٥	٣٥٠٠
ز	٤	٤٠٠٠	٤	٤٠٠٠
ل	٨	٦٠٠٠	٣	١٣٥٠٠
		٢٨٥٠٠		٣٩٦٠٠

جدول (٩/١٠) يوضح وقت وتكلفة الأنشطة قبل وبعد التعديلات

وتكون شبكة بيرت بعد التعديلات كما يلي:



شكل (١١/١٠) شبكة بيرت بعد التعديلات

خامساً: حساب التكاليف الإضافية اللازمة لإتمام المشروع في ٣٢ أسبوع:
بالرجوع إلى جدول التعديلات السابق (٨/١٠) نجد أن مدة ٣٢ أسبوع
تتخصر بين التعديل رقم (٣) والتعديل رقم (٤) وعلى ذلك فإنه عند التعديل
رقم (٤) يمكن الاكتفاء بتخفيض أسبوع واحد (بدل أسبوعين) من وقت كل
من النشاطين (و، هـ) وتكون التكلفة الإضافية في هذه الحالة ٥٠٠ + ٥٠٠ =
١٠٠٠ جنيه وبذلك تكون التكلفة الإضافية المتجمعة ٢٦٠٠ جنيه والوقت
٣٢ أسبوع.

∴ أقل تكلفة إضافية لإتمام المشروع خلال ٣٢ أسبوع هي ٢٦٠٠ جنيه وأقل
تكلفة كلية = ٢٨٥٠٠ + ٢٦٠٠ = ٣١١٠٠ ج.

سادساً: وقت إتمام المشروع بموازنة إجمالية ٣٧١٠٠ جنيه:
حيث أن الموازنة المتاحة ٣٧١٠٠ جنيه والتكلفة العادية للمشروع
٢٨٥٠٠ فتكون التكلفة الإضافية المتاحة ٨٦٠٠ جنيه (٣٧١٠٠ - ٢٨٥٠٠).
بالبحث في جدول التعديلات السابق (٨/١٠) نجد أنه حتى التعديل رقم
(٤) يتم تحمل تكاليف إضافية ٣٦٠٠ جنيه ويكون المتبقي من التكاليف
الإضافية المتاحة ٥٠٠٠ جنيه (٨٦٠٠ - ٣٦٠٠) وحيث أن ميل التكلفة
للنشاط (ل) (الذي يتم تخفيض وقته في التعديل رقم (٥)) هو ١٥٠٠ جنيه،

فإن المبلغ المتبقي من التكلفة الإضافية يكفي لتخفيض وقت النشاط (ل) ٣ أسابيع بمبلغ ٤٥٠٠ جنيهه (٣ × ١٥٠٠) ويتبقى من الموازنة ٥٠٠ جنيهه، بذلك يصبح وقت إتمام المشروع ٢٨ أسبوع وليس ٢٦ أسبوع. إذن وقت إتمام المشروع بموازنة إجمالية ٣٧١٠ جنيهه هو ٢٨ أسبوع. سابعاً: تحديد الوقت الأمثل لإتمام عملية الصيانة:

حيث أن كل أسبوع يتم تخفيضه من وقت مشروع عملية صيانة الآلات يترتب عليه تحقيق صافي أرباح قدره ٧٠٠ جنيهه، وفي نفس الوقت يترتب عليه تحمل تكاليف إضافية، فإن الوقت الأمثل لإتمام عملية الصيانة يتحدد بمقارنة صافي الأرباح مع التكاليف الإضافية على النحو التالي:

- التعديل رقم (١) يخفض وقت المشروع أسبوعين مقابل زيادة في التكاليف قدرها ٤٠٠ جنيهه أي ٢٠٠ جنيهه للأسبوع، معنى ذلك أن الربح الذي يحققه المصنع خلال هذين الأسبوعين (١٤٠٠ جنيهه) يبرر زيادة التكلفة.

- كذلك التعديل رقم (٢) يترتب عليه تخفيض وقت المشروع أسبوع مقابل زيادة في التكاليف قدرها ٤٥٠ جنيهه، وبذلك مازال هناك مبرر لزيادة التكاليف فالربح الأسبوعي ٧٠٠ جنيهه.

- أما التعديل رقم (٣) يخفض وقت المشروع واحد مقابل زيادة في التكلفة قدرها ٧٥٠ جنيهه، وهنا نجد أن أرباح المصنع خلال الأسبوع لا تبرر هذه الزيادة في التكلفة وعلى ذلك يكتفي بالتعديلين رقم (١)، (٢) ويكون الوقت الأمثل لإتمام مشروع الصيانة هو ٣٤ أسبوع.

هذا وقد يكون القرار الذي يواجهه الإدارة هو المفاضلة بين إتمام المشروع في وقته العادي الذي قد يزيد عن الوقت المتعاقد عليه وبالتالي تحمل غرامات وجزاءات تأخير، وبين الإسراع في إتمام المشروع ليتم في وقت التعاقد مع تحمل تكاليف إضافية. لترشيد الإدارة تتم المقارنة بين التكاليف الإضافية نتيجة الإسراع في التنفيذ وبين غرامات التأخير التي يمكن توفيرها. (يتبع ما سبق ذكره في النقطة السابقة مباشرة (سابعاً)).

الفصل الحادي عشر نظرية المباراة

١١ / ١ : مقدمة:

تواجه الإدارة في أغلب منظمات الأعمال بمشكلة اتخاذ القرار في ظروف التنافس والصراع والتعارض في المصالح بين أطراف عديدة ، ولا يتوقف ناتج القرار في مثل هذه الظروف علي ناتج القرار فقط ، بل يتوقف علي قرارات الأطراف المتنافسون ، ولذلك يستوجب الأمر أن تتنبأ الإدارة بالإستراتيجيات المحتمل أن يختارها هؤلاء الأطراف المتنافسون حتى يمكنها أن تختار أمثلها لتحقيق أهدافها المرجوة. وتعتمد الإدارة في تنبؤاتها بسلوك واستراتيجيات المتنافسون علي خبرتها وممارستها لوظائفها في هذا الإطار، ولذا يجب عليها أن تعظم منفعتها بعد أخذ استراتيجيات المتنافسون في اعتبارها. وعادة ما يتعذر ويصعب علي الإدارة التنبؤ باستراتيجيات المتنافسون ، نظراً لأن كل منهم يسعى إلي تعظيم منفعته علي حساب الآخر، ولذلك يلجأ الأطراف المتنافسون إلي التخمين والتوقع باستراتيجيات خصومه. وتنطوي أغلب حالات اتخاذ القرار علي قدر من التنافس والتباري والصراع والتعارض في المصالح بين اثنين أو أكثر من متخذي القرار، والذي يحاول كل منهما فيها أن يحسم الصراع والمنافسة ويحرز السبق وينهي ويكسب المباراة ويحقق النتيجة والعائد لصالحه ، ويوجد في مشكلة المباراة اثنين أو أكثر من المتبارين أو الخصوم يفترض فيهم أنهم علي أعلى درجة من الذكاء وكل منهم يحاول أن يعظم عائد قراره علي حساب خصومه ومنافسيه، ويتوقف اتخاذ القرار علي العديد من العوامل يمكن تبويبها في مجموعتين أولها مجموعة العوامل التي تخضع لتحكم وسيطرة ورقابة الإدارة، ومن هذه العوامل تحديد مستويات الإنتاج، وحجم ونسب استغلال الطاقة الإنتاجية، واختيار منافذ التوزيع المناسبة، وكفاءة ومهارة العمالة، ومستوى جودة الآلات والمنتجات. أما المجموعة الثانية فتعرف بالعوامل التي لا تخضع لتحكم وسيطرة الإدارة، وتتمثل هذه العوامل في السياسات

والقرارات والتشريعات التي تصدرها الحكومة، أو القرارات والاستراتيجيات التي يختارها المنافسون.

ويستخدم الأطراف المشتركون في المباراة (اللاعبون أو الخصوم) قواعد المنطق والرياضيات لتطوير وإعداد استراتيجيات لكسب المباراة علي حساب منافسه أو منافسيه (خصومه). وتعد عملية تحديد الاستراتيجيات المثلي لحالات اتخاذ القرارات التنافسية لب وجوهر وموضوع نظرية المباراة. وتختلف نظرية المباراة بقدر ما عن معظم نماذج اتخاذ القرار التي عرضت في هذا المؤلف في أن هذه الأساليب تعالج اتخاذ القرارات الفردية التي لا توجد بين أطراف متنافسون ، بينما أن نظرية المباراة تعالج المشاكل التي تنطوي علي وتتضمن اثنين أو أكثر من متخذي القرار ، ولهذا يمكن القول بأن نظرية المباراة تعد أداة مفيدة عند اتخاذ القرارات في الحالات التي تتسم بتعارض المصالح بين المتنافسين ، والتي يتوقف اختيار أحد هذه الحالات على المواقف أو الاستراتيجيات التي يحتمل أن يختارها المتنافسون الآخرون الذين يخضعون لنفس ظروف اتخاذ القرار. وعادة ما يستخدم مصطلح المباراة للتعبير والتدليل علي الحالات أو المواقف أو الظروف التي تتسم بتعارض المصالح بين اللاعبين (الخصوم) خلال فترة من الزمن.

لقد توصل وطور كل من Neumann و Morgenstern نموذج نظرية المباراة في كتابهما الشهير نظرية المباراة والسلوك الاقتصادي سنة ١٩٤٤ ومنذ هذه اللحظة انتشرت وشاعت الاستخدامات والتطبيقات العملية لنظرية المباراة ، والتي لم يعد لها حدود. وقد استخدمت نظرية المباراة في تخطيط العمليات العسكرية وعمليات التفاوض والمساومة ، وتخطيط عمليات التأمين علي الحياة، كما كان لنظرية المباراة دوراً بارزاً عند صياغة وتطوير طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية ، كما كان لها دوراً بارزاً في تأثيرها على مجال نظرية القرار .

٢/١١- شروط استخدام نظرية المباراة:

يشترط لاستخدام نظرية المباراة في اتخاذ القرار ضرورة توافر الشروط التالية:

- ١- ضرورة توافر اثنان أو أكثر من المتنافسين (اللاعبين أو الخصوم)، وعادة ما يطلق علي الخصم أو المتنافس مصطلح "لاعب".
- ٢- أن يكون لكل متنافس عدد من الاستراتيجيات التي يمكنه الاختيار من بينها، ولا يلزم أن تكون هذه الإستراتيجيات مماثلة ومطابقة ومتوافقة مع اللاعب الأخر.
- ٣- يفترض أن كل متنافس علي علم ومعرفة ودراية وإدراك بالتحركات المرتقبة المتاحة لباقي المتنافسين مقدماً ومسبقاً، إلا أنه ليس متأكد بالإستراتيجية التي سيختارها المتنافس إلا بعد أن يختارها، وعندما يختار هذا المتنافس أحد هذه الإستراتيجيات فإنه بذلك يكون قد أدى أو لعب المباراة.
- ٤- تتوقف نتيجة المباراة (عائد أو مكاسب المباراة) التي يحققها أحد المتنافسين علي الإستراتيجيات التي يختارها باقي المتنافسين ، كما توقف علي الإستراتيجيات التي يختارها هذا المتنافس.
- ٥- تؤدي كل مجموعة من الإستراتيجيات التي يختارها المتنافسون (بواقع إستراتيجية لكل واحد منهم) إلي تحقيق نتيجة أو حصيلة معروفة ومحددة تسمى حصيلة المباراة.
- ٦- إمكانية تقدير جميع النتائج (العوائد) المحتملة لكل إستراتيجية ، وتعتبر قيمة المباراة عن متوسط العائد الذي يمكن أن يحققه أحد الخصوم(المتنافسون)إذا اختار المتنافسون الآخرون أفضل إستراتيجيتهم).
- ٧- تمثل الإستراتيجية التي يختارها أحد المتنافسون قاعدة القرار التي يستخدمها المتنافس عند إقراره للإجراء الذي يتخذه ، ويوجد نوعين من الإستراتيجيات أولهما يعرف بالإستراتيجية المطلقة ، وهي التي تنطوي على تحرك واحد محدد ، أما النوع الثاني فيعرف بالإستراتيجية المختلطة وتعني تلك التي تتضمن عدة تحركات يستخدم كل منها لفترة من الزمن.

١١ / ٣: أنواع المشاكل التي تعالجها نظرية المباراة:

يمكن تبويب المشاكل التي تعالجها نظرية المباراة وفقاً لوجهات نظر عديدة ، فمن وجهة نظر عدد متخذي القرار المتنافسين أو عدد اللاعبين التي تنطوي عليهم المباراة، فإن المباراة (المشكلة أو حالة القرار) التي تنطوي وتشتمل عليها اثنان من اللاعبين فتعرف ويشار إليها بالمباراة الثنائية ، أما المباراة التي تشتمل علي عدد من اللاعبين قدره (ن) من اللاعبين حيث (ن) ≤ 2 فتعرف المباراة المتعددة الأطراف أو ذات (ن) من الأطراف. وتجدر الإشارة إلي أن المشاكل التي تعالجها نظرية المباراة والتي تتضمن ثلاثة أو أكثر من اللاعبين عادة ما تكون في غاية من الصعوبة من الناحية النظرية والحسابية، وستقتصر معالجتنا علي مشاكل المباريات الثنائية التي تتضمن وتنطوي علي خصمين أو متنافسين فقط في هذا الفصل.

كما يمكن تبويب المباريات وفقاً للعائد الكلي من المباراة والذي يكون متاح للاعبين، والمباراة التي يكون مجموع مكاسب وخسائر اللاعبين مساوياً للصفري فيشار إليها بالمباراة الثنائية الصفيرية أو المباراة ذات القيمة الصفيرية. كما تعرف المباراة التي يكون فيها عائد أو مكسب اللاعب الأول مساوياً تماماً لخسائر اللاعب الثاني بالمباراة الثنائية الصفيرية، وهذا النوع من المباريات سيكون موضع النقاشات التالية ، كما يوجد نوع آخر من المباريات التي يختلف فيها مجموع (إجمالي) مكاسب (أو خسائر اللاعبين عن الصفري، ويعرف هذا النوع من المباريات بالمباراة غير الصفيرية وهذا النوع من المباريات من الصعب تحليله نظرياً وحسابياً ولن نناقشه في طيات هذا الفصل. أما وجهة النظر الثالثة لتبويب مشاكل المباريات فتبويب المباريات وفقاً لنوعية الإستراتيجيات التي يستخدمها اللاعبون في المباراة، ففي بعض المباريات فإن الإستراتيجيات التي يتبعها كل لاعب ستكون هي نفس الإستراتيجية بصرف النظر عن الاستراتيجية التي يتبعها اللاعب الأخر أي اختيار الإستراتيجية لا يتأثر ولا يتوقف علي اختيار الخصم المثلثي، ويشار إلي هذا النوع من النتائج بالاستراتيجيات المطلقة فقط عندما تحل المباراة وتعتبر عن حالة التساوي أو التعادل أو نقطة التلاقي . أما المباريات التي ليس

لها نقطة تلاقي فإن اللاعبين سيلعبون في كل إستراتيجية بنسبة معينة أو لفترة ما من الزمن ، ويعرف هذا النوع من المباريات بالإستراتيجية المختلطة: وسناقش المؤلف كل من المباراة ذات الإستراتيجية المطلقة أو المباريات ذات الاستراتيجيات المختلطة في الأجزاء التالية من هذا الفصل.

١١/٤- المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المطلقة:

تنشأ وتتحقق وتتواجد هذه المباراة عندما يكون عدد أطرافها اثنان (متنافسان أو خصمان) ، ويكون مجموع العوائد (المكاسب) التي يحققها أحدهما مستويًا تماماً لمجموع الخسائر التي لحقت وتحققت للمتنافس الآخر، ويعني ذلك أن إجمالي المكاسب التي حققها وأحرزها الطرفين يساوي صفرًا، ويعبر عن هذا النوع من المباريات في شكل مصفوفة نتائج (عوائد) المباراة. ونناقش نظرية المباراة خلال هذا الفصل حيث نقدم ونعرض مباراة ثنائية صفرية من خلال عرض مصفوفة عوائد المباراة التالية بين المتنافسين س، و ص والتي تظهر علي النحو التالي:

ص

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \text{ س}$$

وتفسر عناصر هذه المصفوفة من خلال الجدول رقم (١/١١) التالي :

جدول رقم (١/١١)

ص		س
ص _٢	ص _١	
س يربح ٦	س يربح ٨	س _١
ص يخسر ٦	ص يخسر ٨	
س يخسر ٥	س يربح ١٢	س _٢
ص يربح ٥	ص يخسر ١٢	

ويوضح الجدول رقم (١/١١) السابق أعلاه أن المباراة تتضمن لاعبان (متنافسان) هما اللاعب س واللاعب ص ، وأن كل منهما أمامه بديلين (إستراتيجيتان)، وتشير القيم المذكورة والموضحة بكل من المصفوفة رقم (١/١١) والجدول رقم (١/١١) إلي النتائج (العوائد) المحتمل تحققها في حالة اختيار أحد المتنافسين لإحدى إستراتيجيته، وتوضح صفوف المصفوفة الإستراتيجيتين اللاتين يمكن أن يختارهما المتنافس س، كما توضح أعمدة المصفوفة الاستراتيجيتين اللاتين يمكن أن يختارهما اللاعب ص، وتشير الأرقام الموجبة في المصفوفة إلي المكسب أو العائد الذي يحققه اللاعب س الذي يلعب في الصفوف، أما الأرقام السالبة المبينة بالمصفوفة فتشير إلي المكاسب أ العوائد التي يحققها اللاعب ص الذي يلعب في الأعمدة. ويمكن تحليل إستراتيجيتي كل من اللاعبين س ، و ص علي النحو التالي:

- ١- يربح المتنافس س إذا اختار إستراتيجيته الأولى س_١ بشرط أو إذا اختار أو لعب المتنافس ص إستراتيجيته الأولى ص_١ ويربح اللاعب س ٦ إذا اختار اللاعب ص إستراتيجيته الثانية ص_٢ ، ونظراً لأن المكسب مضمون ومؤكد للمتنافس س إذا اختار إستراتيجيته الأولى س_١ فإنه من المؤكد أنه سيختار هذه الإستراتيجية ويفضلها علي إستراتيجيته الثانية س_٢.
- ٢- إذا اختار المتنافس س إستراتيجيته الثانية س_٢ فإنه يربح فقط ١٢ إذا اختار المتنافس ص إستراتيجيته الأولى ص_١، ويخسر ٥ إذا اختار المتنافس ص إستراتيجيته الثانية ص_٢.
- ٣- ونظراً لأن المتنافس ص يدرك ويعلم تماماً بأن المتنافس س سيختار إستراتيجيته الأولى س_١ دائماً ، لذلك فإن المتنافس ص سيحاول تدنية خسائره (الأرباح المحتمل أن يحصل عليها المتنافس س)، ولذلك سيختار إستراتيجيته الثانية ص_٢ ، وفي هذه الحالة يربح المتنافس س ٦ فقط، ويخسر المتنافس ص ٦ وتكون قيمة المباراة بالنسبة للمتنافس س تساوي ٦ وبالنسبة للمتنافس ص تساوي ٦ ، وعلي الرغم من أن المتنافس ص قد خسر

المباراة إلا أنه قد اختار إستراتيجيته المثلي ص ٧ التي تدني خسائره، ولو أنه اختار إستراتيجيته الأولى ص ١ فكان سيخسر ٨.

وهكذا يتضح أن المباراة السابقة تعد مباراة ثنائية صفرية نظراً لأن مجموع المكاسب التي يحققها س البالغة ٦ تعادل وتساوى تماماً الخسائر الخاصة بالمتنافس ص والبالغة ٦ أيضاً.

١١ / ١/٤ : القواعد الواجب إتباعها لتحديد أفضل إستراتيجية بالنسبة لمنافسي المباراة الثنائية الصفرية:

أ- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف: يختار أسوأ نتائجه والتي تتمثل في أكبر قيمة سالبة في كل صف أو صفر أو أصغر قيمة موجبة في الصف في حالة عدم وجود أي قيمة سالبة بالصف حيث تمثل القيم السالبة مكسب للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة ، وكلما عظمت وكبرت القيمة السالبة فإن هذا يعني زيادة مكسب المتنافس الذي يلعب في الأعمدة، وبالتالي زيادة خسائر المتنافس الذي يلعب في الصفوف ، وفي حالة عدم وجود قيم سالبة بالصف . وكانت كل قيم عناصره موجبة فإن أسوأ نتيجة بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف تكون أقل قيمة موجبة في هذه الحالة .

ب- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة: يختار أسوأ نتائجه، والتي تتمثل في أكبر قيمة موجبة في كل عمود أو أصغر قيمة سالبة في العمود إذا كان العمود لا يحتوي علي أرقام سالبة فقط ، ويفسر ذلك بأن القيمة في العمود تمثل مكسباً (ربحاً) بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف، وفي نفس الوقت خسارة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة. أما إذا كان كل قيم عناصر العمود سالبة فقط فإن أقل رقم سالب يمثل أدنى ربح يمكن أن يحققه المتنافس الذي يلعب في الأعمدة.

ج- أن القيمة الأكبر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) تتمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الصفوف .

د- أن القيمة الأصغر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) تتمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة .

هـ- تمثل قيمة المباراة الرقم الذي يلتقي عنده صف أفضل إستراتيجية بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف مع عمود أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة .

مثال:

بفرض أن لدينا حالة يحاول فيها اللاعب س أن يشتري أو يستأجر محلاً من مالكة (اللاعب ص)، وبافتراض أن اللاعب س لديه إستراتيجيتين استثماريتين ، وكل منهما يرتبطان بمحاولة السيطرة والاستحواذ علي المتجر بالكامل أو علي جزء منه بالنسبة للاعب س وتقضي الإستراتيجية الأولى س_١ للاعب س باستثمار ٦ مليون جنيها بينما تقضي الإستراتيجية الثانية س_٢ الخاصة باستثمار ٣ مليون جنيها، بالإضافة إلي ذلك فإننا نفترض أن المالك (اللاعب) ص لديه إستراتيجيتين، وتقضي إستراتيجيته الأولى ص_١ بإمكانية بيعه جزء من المتجر للاعب س، كما نفترض أن عوائد (نتائج) هذه المباراة تتجسد وتتمثل وتقاس بصافي القيمة الحالية للعائد الذي يتحقق من مزيج الإستراتيجيتين التي يختارهما اللاعبان س ، و ص.

ويفترض في هذه المباراة أيضاً أن كل لاعب ملم ومدرك وعلي علم ومعرفة دقيقة بالمكاسب والعوائد التي تنتج من كل توليفة من إستراتيجيات الاستثمار لكل من اللاعبين س ، و ص ، وأن كل عائد أو مكسب يمثل مقدار ثابت من النقود، كما يفترض أن هذا المقدار من النقود له نفس قيمة المنفعة لكل لاعب من اللاعبين، بالإضافة إلي ذلك يفترض أنه إذا اللاعب س حصل علي العائد أو المكسب فإن اللاعب ص يجب أن يفقد ويخسر قيمة هذا العائد أو المكسب. ولهذا فأننا نكون أمام مباراة ثنائية صفرية ، والتي فيها يكون مجموع النتائج الموجبة (المكاسب أو الأرباح) للاعب س ومجموع النتائج السالبة (الخسائر) مساوياً للصفر.

ويوضح الجدول التالي رقم (٢/١١) مصفوفة المكاسب للاعب س - عرْفياً تبين العوائد بالنسبة لأحد اللاعبين فقط (اللاعب س في هذا المثال) - وكما ذكرنا من قبل فإن الرقم الموجب للاعب س يعني أنه يكسب ، أما بالنسبة

للاعب ص فإنه يعني أن اللاعب ص يخسر والعكس صحيح فإن الرقم السالب يعني أن اللاعب س يخسر والملاعب ص يكسب.

جدول رقم (٢/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

ص _٢ استتجار المتجر	ص _١ بيع المتجر	إستراتيجية اللاعب ص
		إستراتيجية اللاعب س
١٢ مليون جنيهاً	١٠ مليون جنيهاً	س _١ استثمار ٦ مليون جنيهاً
(٢٠) مليون جنيهاً	٥ مليون جنيهاً	س _٢ استثمار ٣ مليون جنيهاً

وتنطوي مصفوفة نتائج المباراة علي مباراة ذات إستراتيجية مطلقة، وكنتيجة لذلك فإن الإستراتيجية التي يختارها كل لاعب من اللاعبين ستكون هي ذاتها بصرف النظر عن إستراتيجية اللاعب أو اللاعبين الآخرين، وسيكون لهذه المباراة نقطة تلاقي.

ويمكن تحديد الإستراتيجيات للاعبين س ، و ص وإيجاد نقطة التلاقي

للمباراة علي النحو التالي:

١- سيختار اللاعب س دائما الإستراتيجية س_١ ، ونظراً لأن أسوأ نتيجة في حالة اختيار الإستراتيجية الأولى س_١ تساوي ١٠ مليون جنيهاً ، وأفضل نتيجة في حالة اختيار الإستراتيجية الثانية تساوي ٥ مليون جنيهاً.

٢- نظراً لأن ص لديه إلمام ومعرفة تامة بنتائج المباراة، ولهذا سيختار دائماً الإستراتيجية الأولى له ص_١، ويرجع ذلك لأن اختيار الإستراتيجية الأولى ص_١ سيفقد وسيخسر ١٠ مليون جنيهاً ، بينما إذا اختار الإستراتيجية الثانية ص_٢ فإنه سيخسر وسيفقد ١٢ مليون جنيهاً.

٣- سيتبع كل من اللاعبين إستراتيجية مطلقة، وهذه المباراة لها نقطة تلاقي، وتمثل القيمة الرقمية لنقطة التلاقي نتيجة أو عائد المباراة، وهي تساوي في هذه الحالة ١٠ مليون جنيهاً والتي تمثل نقطة تلاقي (تقتطع) الإستراتيجية المثلي (الأفضل) المطلقة للاعب س (علي سبيل المثال س_١) و الإستراتيجية المثلي (الأفضل) المطلقة للاعب ص (علي سبيل المثال ص_١) .

ويمكن تلخيص حل نقطة التلاقي لهذه المشكلة كما هو موضح بالجدول رقم (٣/١١) التالي:

وتعرف قيمة المباراة بالقيمة المتوسطة أو المتوقعة لنتيجة المباراة إذا لعبت المباراة عدد لانهايي من المرات فإن قيمة نقطة التلاقي تساوي ١٠ مليون جنيه.

جدول رقم (٣/١١) حل نقطة التلاقي.

ص ^٢ استئجار المتجر	ص ^١ بيع المتجر	إستراتيجية اللاعب ص إستراتيجية اللاعب س
١٢ مليون جنيهاً (٢٠) مليون جنيهاً	١٠ مليون جنيهاً ٥ مليون جنيهاً	الإستراتيجية المطلقة المثلي للاعب س س ^١ استثمار ٦ مليون جنيهاً س ^٢ استثمار ٣ مليون جنيهاً
		الإستراتيجية المطلقة المثلي للاعب ص

نقطة التلاقي

٢/٤/١١: معياري تدنية أقصى خسارة وتعظيم أدني عائد:

يمكن تطبيق معياري تدنية أقصى خسارة وتعظيم أدني عائد علي المباراة السابقة ، والمبينة بالجدول رقم (٣/١١) السابق بافتراض أن اللاعب س متشائم ، ولهذا سيختار اللاعب س الإستراتيجية التي تعظم المكاسب من بين المكاسب الممكنة ، وعلي العكس من ذلك ، يفترض أن اللاعب ص متفائل ، ولهذا سيختار الإستراتيجية التي تدني الخسائر من بين أقصى الخسائر المحتملة او الممكنة. ويستخدم معيار تدنية أقصى خسارة . ولإيضاح وبيان ذلك استناداً إلي بيانات مثالنا السابق والذي يمكن منه التوصل إلي القيم المبينة بالجدول رقم (٤/١١) الذي يشتمل علي عمود إضافي يوضح ويظهر أدني قيمة في صف عوائد اللاعب س ، وصف إضافي آخر يبين أعلي قيمة في أعمدة خسائر اللاعب ص .

جدول رقم (٤/١١) مثال معياري تدنية أقصى خسارة ، وتعظيم أدني عائد

أدني قيمة في عوائد صفوف اللاعب س	ص _٢ استنجاز المتجر	ص _١ بيع المتجر	إستراتيجية اللاعب ص إستراتيجية اللاعب س
١٠ مليون جنيهاً	١٢ مليون جنيهاً	١٠ مليون جنيهاً	س _١ استثمار ٦ مليون جنيهاً
(٢٠) مليون جنيهاً	(٢٠) مليون جنيهاً	٥ مليون جنيهاً	س _٢ استثمار ٣ مليون جنيهاً
	١٢ مليون جنيهاً	١٠ مليون جنيهاً	أقصى قيمة في خسائر أعمدة اللاعب ص

يتضح من الجدول السابق رقم (٤/١١) أن اللاعب س يطبق إستراتيجية تعظيم أدني عائد بتحديدده لأصغر عائد لكل إستراتيجية من إستراتيجيته (س_١ ، س_٢) ، ومن ثم فإن اللاعب س سيختار أكبر عائد من بين هذين القيمتين الأدنيتين ، ولهذا فإن أكبر عائد من بين القيمتين الأدنيتين يساوي ١٠ مليون جنيهاً ، ولهذا يجب عليه اختيار الإستراتيجية الأولى له س_١ ، وعلي العكس من ذلك يطبق اللاعب ص معيار تدنية أقصى خسارة بتحديدده لأكبر خسارة في كل إستراتيجية من إستراتيجيته (ص_١ ، ص_٢) ، ومن ثم فإن اللاعب ص يجب أن يختار أدني خسارة من بين هذه القيم القصوى (العظمى) ، والقيمة الأدنى من بين أقصى الخسائر تساوي ١٠ مليون جنيهاً، ولهذا سيختار الإستراتيجية الأولى له وهي ص_١ .

ويبين تحليل الإستراتيجيات التي يختارها اللاعبان س ، و ص أننا يجب أن نحصل علي حل يحقق هدفي كل من اللاعبين (علي سبيل المثال تعظيم أدني عائد للاعب س وتدنية أقصى خسارة للاعب ص)، ونكرر مرة أخرى أن كل لاعب من اللاعبين له إستراتيجية مطلقة والتي تتمثل في حل نقطة التلاقي، ومع ذلك يجب أن نركز علي ونذكر ونعرف أن معيار تدنية أقصى خسارة أو تعظيم أدني عائد إلي الحل الأمثل لكل لاعب طالما أن كل لاعب رشيد ويلتزم بهذه الإستراتيجيات.

٣/٤/١١ : نقطة التلاقي والإستراتيجية المطلقة:

يتضح من الأمثلة السابقة أنه يجب علي كل متنافس أن يختار إستراتيجية واحدة من الإستراتيجيات المتاحة له، ولذلك يعرف هذا النوع من المباريات

بالمباريات الثنائية الصفرية ذات إستراتيجيات المطلقة ، حيث يهدف كل لاعب إلى تعظيم عائد هو تحقيق أفضل نتيجة للمباراة، ولهذا تتمثل أفضل قيمة بالنسبة للاعب الذي يلعب في الأعمدة في أصغر قيمة في أي صف، كما تتمثل أفضل قيمة بالنسبة للاعب الذي يلعب في الصفوف أكبر قيمة في كل عمود، وبناء علي ذلك إذا وجدت مفردة أو قيمة تتوافر فيها هاتين السمتين أو الشرطين، بمعنى إذا كانت هذه المفردة تمثل اصغر قيمة في صفها وأكبر قيمة في عمودها في آن واحد فإن هذه المفردة أو القيمة تعرف بنقطة التلاقي. وإذا وجدت نقطة تلاقي للمباراة فإن هذا يعني أن كل لاعب قد اختار ولعب أفضل إستراتيجياته، وتمثل نقطة التلاقي قيمة المباراة. ونورد فيما يلي بعض الأمثلة في شكل جداول توضح مصفوفات نتائج(عوائد) المباراة لكي نوضح نقطة التلاقي الخاصة بكل مصفوفة أن وجدت .

مثال:

يوضح الجدول رقم (٥/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللعبين س ، و ص.

جدول رقم (٥/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

ص	س	استراتيجية اللاعب ص
		إستراتيجية اللاعب س
٩	٦	١س
٢١	١٥ -	٢س

والمطلوب : إيجاد نقطة التلاقي.

الحل

لإيجاد نقطة التلاقي نحسب الآتي:

أصغر مفردة في الصف الأول ٦ أكبر مفردة في العمود الأول

أصغر مفردة في الصف الثاني - ١٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٢١

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود

الأول للاعب ص ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي ٦ .

مثال:

يوضح الجدول رقم (٦/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، و ص

جدول رقم (٦/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) للاعب س

ص ،	ص٣	ص٢	ص١	إستراتيجيات اللاعب ص
				إستراتيجيات اللاعب س
٦	١٥	٠	٤٥	١س
٩	٢١-	٢٧-	٢٤ -	٢س
٦٥	٣٠	١٨-	٢١	٣س

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

- أصغر مفردة في الصف الأول ٠ أكبر مفردة في العمود الأول ٤٥
 أصغر مفردة في الصف الثاني - ٢٧ أكبر مفردة في العمود الثاني ٠
 أصغر مفردة في الصف الثالث - ١٨ أكبر مفردة في العمود الثالث ٣٠
 أكبر مفردة في العمود الرابع ٦٥

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود الثاني للاعب و ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي صفر.

مثال:

يوضح الجدول رقم (٧/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة

باللاعبين س ، و ص

جدول رقم (٧/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) للاعب س

ص٢	ص١	إستراتيجيات اللاعب ص
		إستراتيجيات اللاعب س
٠	٥٠	١س
٤٥-	٢٥	٢س
٥٥-	٤٠-	٣س

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة.

- أصغر مفردة في الصف الأول ٠ أكبر مفردة في العمود الأول ٥٠
 أصغر مفردة في الصف الثاني - ٤٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٠
 أصغر مفردة في الصف الثالث - ٥٥

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود الثاني للاعب ص ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي مساوية للصفر.
 مثال: يوضح الجدول رقم (٨/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللعبين س ، وص.

جدول رقم (٨/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) للاعب س

ص؛	ص٣	ص٢	ص١	إستراتيجيات اللاعب ص
				إستراتيجيات اللاعب س
٣	١١	٨	٣	س١
٥-	٤	٦	٢	س٢
١	٠	٧-	٢	س٣
٢-	١٨	٩-	١١-	س٤

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

أصغر مفردة في الصف الأول ٣ أكبر مفردة في العمود الأول ٣
 أصغر مفردة في الصف الثاني - ٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٨
 أصغر مفردة في الصف الثالث - ٧ أكبر مفردة في العمود الثالث ١٨
 أصغر مفردة في الصف الرابع - ١١ أكبر مفردة في العمود الرابع ٣
 يلاحظ أن هذه المباراة لها نقطتي تلاقي حيث أن أصغر قيمة في الصف الأول هي أكبر قيمة في العمود الأول، وتساوي ٣، كما أن أصغر قيمة في الصف الأول هي أيضا ٣ وأكبر قيمة في العمود الرابع تساوي ٣.
 وعلي ذلك يتضح أنه يوجد أكثر من حل (يوجد حل بديل) لهذه المباراة حيث يختار المتنافس س الإستراتيجية الأولى له س١ بينما أن المتنافس ص يمكن أن يختار إستراتيجيته الأولى أو إستراتيجيته الرابعة أو مزيج منهما، وتكون قيمة المباراة في هذه الحالة تساوي ٣.

مثال:

يوضح الجدول رقم (٩/١١) التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، وص

جدول رقم (٩/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

ص	س	إستراتيجيات اللاعب ص
		إستراتيجيات اللاعب س
٨	٦	١س
٤	١٨	٢س

والمطلوب : إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

أصغر مفردة في الصف الأول ٦ أكبر مفردة في العمود الأول ١٨

أصغر مفردة في الصف الثاني ٤ أكبر مفردة في العمود الثاني ٨

يلاحظ أن هذه المباراة ليس لها نقطة تلاقي نظراً لعدم وجود مفردة تمثل أصغر قيمة في صفها وأكبر قيمة في عمودها ، مما يعني أن هذه المباراة ليست مباراة ذات إستراتيجية مطلقة بل نحن أمام مباراة ذات إستراتيجية مختلطة وهو ما نناقشه في الجزء التالي

٤/٤/١١ : المباريات الثنائية الصفيرية ذات الاستراتيجيات المختلطة وطرق

حلها:

إذا لم يوجد للمباراة نقطة تلاقي فيعني هذا أننا أمام مباراة ذات إستراتيجية مختلطة وليست مطلقة، ويستوجب هذا علي كل لاعب من اللاعبين أن يلعب (يختار) في كل إستراتيجية من الإستراتيجيات لفترة محددة من الوقت، ويشار إلي هذا النوع من المباريات بالمباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة. ولبيان المباريات الثنائية الصفيرية ذات الإستراتيجيات المختلطة المثال التالي:

مثال

تتنافس الشركتان س ، وص في قطاع صناعي معين، وترغبان في اتخاذ قرار استثماري لتحقيق ميزة تكنولوجية تنافسية، وأمام هاتين الشركتين أن

تحقق وتنشأ استثمارات الأغلبية أو الأقلية، وبناء علي قيم استثماراتها الرأسمالية المختلفة، فإن الشركة س ستزيد أو تنقص حصتها السوقية في هذا القطاع الصناعي المذكور بناء إلي قيم الاستثمارات الرأسمالية المختلفة التي تنشئها الشركة ص.

ويوضح الجدول التالي رقم (١٠/١١) مصفوفة النتائج الخاصة بهذه الحالة، ويمثل الناتج في هذه المصفوفة النسب المئوية التي تمثل مقدار الزيادات في الحصة السوقية للشركة س .

جدول رقم (١٠/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

ص ٢ استثمار الأغلبية %	ص ١ استثمار الأقلية %	إستراتيجيات اللاعب ص إستراتيجيات اللاعب س
١٠ ٤	٦- ٨	استثمار الأقلية س ١ استثمار الأغلبية س ٢

يلاحظ انه لا يوجد في مصفوفة النتائج القيمة الرقمية التي ترضي وتحقق كل من شرطي (سمتي) نقطة التلاقي، فبينما أن نسبة ٨% تمثل أكبر قيمة في العمود الأول ص ١ إلا أنها لا تمثل القيمة الأصغر في الصف الثاني س ٢ ، وبالمثل بينما أن نسبة ١٠% تمثل أكبر قيمة في العمود الثاني ص ٢ إلا أنها لا تمثل القيمة الأصغر في الصف الأول س ١، ولهذا نعجز عن ولا نستطيع أن نحدد أو نحصل على حل نقطة التلاقي لهذه المباراة، ولهذا يمكن الجزم بأن هذه المباراة لا تعد مباراة ذات إستراتيجية مطلقة، وإنما نحن نواجه مباراة ذات إستراتيجية مختلطة.

ويوجد العديد من الطرق التي يمكن استخدامها لحل المباريات الثنائية الصفرية ذات إستراتيجية مختلطة ، وتتمثل هذه الطرق في الآتي:

- ١- الطريقة الحسابية. ٢- طريقة الاحتمالات المشتركة. ٣- طريقة العائد والخسارة المتوقعة. ٤- طريقة البرمجة الخطية. ٥- الطريقة البيانية.

ينطوي حل المباراة الثنائية الصفرية ذات الإستراتيجيات المختلطة علي تحديد جزء أو نسبة من الزمن لكل إستراتيجية يجب أن تستخدم لتعظيم العوائد أو لتدنية الخسائر. ويحاول كل لاعب أن يصيغ ويحدد الإستراتيجية التي يتحقق عندها حالة السواء أي يتساوي عنده اختيار إستراتيجية الخصم، ويمكن تحقيق هذا باختيار كل إستراتيجية بنسبة معينة من الوقت بالأسلوب الذي يجعل المكاسب المتوقعة أو الخسائر المتوقعة للاعب متساوية بصرف النظر عن الإستراتيجية التي يختارها الخصم، ويتحقق هذا التساوي أو حالة السواء بتحديد احتمال معين لاختيار الإستراتيجية ، ويمكن تحديد هذا الاحتمال باتباع أحدي الطلاق التالية:

١١/٤/٤/١ : حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بالطريقة الحسابية:

يقتصر استخدام الطريقة الحسابية في تحديد الإستراتيجيات المثلي للمباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة التي تتكون من صفين وعمودين أي علي المصفوفات التي تتكون من صفين وعمودين [٢×٢] وهي المباريات التي يكون أمام متخذ القرار أو اللاعب إستراتيجيتين يختار من بينهما، وتتمثل خطوات الحل وفقاً لهذه الطريقة الحسابية في الآتي:

- ١- إيجاد فروق الصفوف لكل صف من صفوف مصفوفة نتائج المباراة، ويحسب الفرق بطرح القيمة الأصغر من القيمة الأكبر.
- ٢- إيجاد فروق الأعمدة لكل عمود من أعمدة مصفوفة نتائج المباراة، ويحسب الفرق بطرح القيمة الأصغر من القيمة الأكبر.

واستناداً إلي البيانات الواردة بالجدول رقم (١٠/١١) السابق تظهر المصفوفة موضحاً بها فروق الصفوف والأعمدة علي النحو التالي:

ص	%	%	
فروق الصفوف	١٠	٦-	س
١٦	٤	٨	
٤	٦	١٤	
			فروق الأعمدة

٣ - تبديل مواقع فروق الصفوف وتبديل مواقع فروق الأعمدة كما يلي:

$$\begin{array}{ccc} \text{ص} & & \\ \text{فروق الصفوف بعد التبديل} & \begin{array}{cc} \% & \% \\ \left(\begin{array}{cc} ١٠ & ٦- \\ ٤ & ٨ \\ ١٤ & ٦ \end{array} \right) & \end{array} & \text{س} \\ ٤ & & \\ ١٦ & & \end{array}$$

فروق الأعمدة بعد التبديل

٤ - لإيجاد نسبة قيمة كل فرق بعد التبديل إلي مجموع الفروق سواء للصفوف أو الأعمدة لتظهر المصفوفة كما يلي:

$$\begin{array}{ccc} \text{ص} & & \\ \text{فروق الصفوف بعد التبديل} & \begin{array}{cc} \% & \% \\ \left(\begin{array}{cc} ١٠ & ٦- \\ ٤ & ٨ \\ ١٤ & ٦ \end{array} \right) & \end{array} & \text{س} \\ \frac{٤}{٢٠} & & \\ \frac{١٦}{٢٠} & & \\ \frac{٢٠}{٢٠} & & \end{array}$$

فروق الأعمدة بعد التبديل

$$\begin{array}{ccc} \text{ص} & & \\ \text{فروق الصفوف بعد التبديل} & \begin{array}{cc} \% & \% \\ \left(\begin{array}{cc} ١٠ & ٦- \\ ٤ & ٨ \\ ٧ & ٣ \end{array} \right) & \end{array} & \text{س} \\ ٠,٢ = \frac{٢}{١٠} & & \\ ٠,٨ = \frac{٨}{١٠} & & \\ ٠,٧ & & ٠,٣ \end{array}$$

فروق الأعمدة بعد التبديل

وهكذا يتضح أن احتمال أن الشركة س تختار إستراتيجيتها الأولى س_١ يساوي ٠,٢ واحتمال اختيارها لإستراتيجيتها الثانية س_٢ يساوي ٠,٨، وبالتالي فإن مكاسبها المتوقعة تكون متساوية بصرف النظر عن اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها س_١ أو ص_٢ والتي تحدد احتمال اختيار كل منهما بـ ٠,٣، ٠,٧، علي التوالي، فعلي سبيل المثال لو اختارت الشركة ص إستراتيجيتها الأولى س_١ فإن النتائج المحتملة للشركة س تساوي ٦%، و٨%، وإذا الشركة س اختارت إستراتيجيتها الأولى س_١ باحتمال قدره ٠,٢

ولهذا فإنها ستختار إستراتيجيتها الثانية س_٢ باحتمال قدره ٠,٨، وبالتالي فإن القيمة المتوقعة للعائد تساوي الآتي:

$$٥,٢ = (٨) ٠,٨ + (٦-) ٠,٢$$

وهو يساوي إستراتيجية العوائد للشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولى ص_١

وأيضاً إذا الشركة ص اختارت إستراتيجيتها الثانية ص_٢ فإن العوائد المتوقعة للشركة س تساوي الآتي:

$$٥,٢ = (٤) ٠,٨ + (١٠) ٠,٢$$

وهذه القيمة تساوي المكاسب المتوقعة لإستراتيجية الشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية ص_٢.

أما إذا حسبنا الخسائر المتوقعة للشركة ص بصرف النظر عن اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولى س_١ فعلي سبيل المثال إذا الشركة س اختارت إستراتيجيتها الأولى س_١ فإن الخسائر المحتملة للشركة ص تكون (-٦%)، و١٠%، وبالتالي فإن الخسائر المتوقعة للشركة ص تساوي الآتي:

$$٥,٢ = (١٠) ٠,٧ + (٦-) ٠,٣$$

أما الخسائر المحتملة للشركة ص حالة اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الثانية س_٢ فتساوي (٨% و ٤%) وبالتالي فإن الخسائر المتوقعة للشركة ص فتساوي في هذه الحالة الآتي:

$$٥,٢ = (٨) ٠,٧ + (٤) ٠,٣$$

ويلاحظ تطابق النتائج مع تلك التي نتجت للشركة س. وتنتقد الطريقة الحسابية بعدم إمكانية استخدامها لحل المباريات الثنائية الصفرية ذات الإستراتيجيات المختلطة التي يزيد فيها عدد الإستراتيجيات عن إستراتيجيتين. ٢/٤/٤/١١: حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بطريقة الاحتمالات المشتركة:

تستخدم هذه الطريقة لتحديد قيمة المباراة استناداً إلي أن تحقق كل عنصر من عناصر مصفوفة نتائج المباراة يتوقف ويرتهن باحتمال اختيار إستراتيجية الصف الذي يقع فيه العنصر، واحتمال اختيار إستراتيجية العمود

الذي يقع فيه هذا العنصر، وبناء علي ذلك فإن القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر مصفوفة نتائج المباراة يمكن حسابه بالمعادلة رقم (١/١١) التالية:

القيمة المتوقعة للعنصر = قيمة العنصر × الاحتمال المشترك لحدوث العنصر (١/١١)

ويحسب الاحتمال المشترك لحدوث العنصر وفقاً للمعادلة رقم (٢/١١) التالية:

الاحتمال المشترك لحدوث العنصر = احتمال اختيار إستراتيجية الصف الذي يقع فيها × احتمال اختيار إستراتيجية العمود الذي يقع فيها العنصر (٢/١١)

وليان وإيضاح كيفية تطبيق هذه الطريقة ، فإننا سنعود إلي عناصر مصفوفة نتائج المباراة التي حصلنا عليها بعد تطبيق الطريقة الحسابية عليها والتي تظهر علي النحو التالي:

		ص				
		فروق الصفوف بعد التبديل	%	%		
٠,٢	$\frac{2}{10}$	$\left[\begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{array} \right]$	$\frac{10}{10}$	$\frac{6-}{10}$	س	فروق الأعمدة بعد التبديل
٠,٨	$\frac{8}{10}$					
			$\frac{0,7}{0,3}$			

يلاحظ من المصفوفة أن احتمال اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولى س١ يساوي ٠,٢، وأيضاً احتمال اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الثانية س٢ يساوي ٠,٨ وجموع هذين الاحتمالين يساوي (٠,٨ + ٠,٢) واحد صحيح، وأيضاً احتمال اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولى ص١ يساوي ٠,٣، وأيضاً احتمال اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية ص٢ يساوي ٠,٧ وجموع هذين الاحتمالين يساوي (٠,٧ + ٠,٣) واحد صحيح.

وبفحص مصفوفة عوائد المباراة يتضح أن تحقق العنصر (-٦) يرتبط باحتمال اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولى البالغ ٠,٢، واحتمال اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولى ص١ البالغ ٠,٣ لإي آن واحد، ويعني هذا

أن احتمال تحقق العنصر (-٦) يساوي الاحتمال المشترك لاختيار الشركتين لإستراتيجية الأولى لكل منهما، ويتحدد هذا الاحتمال المشترك كالآتي:

$$\text{الاحتمال المشترك} = ٠,٢ \times ٠,٣ = ٠,٠٦ \quad (٢/١١)$$

ويتطلب حساب قيمة المباراة وفقاً لطريقة الاحتمالات المشتركة إجراء الخطوات التالية:

١- إيجاد الاحتمالات المشتركة لحدوث كل عنصر من عناصر مصفوفة عوائد المباراة وفقاً للمعادلة (٢/١١).

٢- ضرب قيمة العنصر في الاحتمال المشترك لحدوث العنصر وفقاً للمعادلة رقم (١/١١) السابقة.

٣- إيجاد مجموع حاصل ضرب عناصر مصفوفة نتائج المباراة في الاحتمالات المشتركة لتحقيق العناصر للحصول على قيمة المباراة .

ويوضح الجدول رقم (١١/١١) التالي كيفية تطبيق الخطوات الثلاثة السابقة والذي يظهر علي النحو التالي:

١	٢	٣	٣×١=٤
عناصر مصفوفة نتائج المباراة %	الإستراتيجيات التي تؤدي إلي تحقق العنصر		الاحتمال المشترك لتحقيق العنصر
	س	ص	
٦-	الأولي	الأولي	٠,٠٣٦-
١٠	الأولي	الثانية	٠,٠١٤
٨	الثانية	الأولي	٠,٠١٩٢
٤	الثانية	الثانية	٠,٠٢٢٤
القيمة المتوقعة لعوائد المباراة			٠,٠٥٢

وهكذا يتضح أن قيمة المباراة تساوي $٠,٠٥٢ = ٥,٢\%$ وهي نفس القيمة الناتجة عن تطبيق الطريقة الحسابية.

١١/٤/٤/٣: حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بطريقة المكاسب المتوقعة:

سبق أن أشرنا أن حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة ينطوي علي تحديد جزء أو نسبة من الوقت لكل إستراتيجية يجب علي اللاعبين أن يستخدموها لتعظيم العوائد أو لتدنية الخسائر، ولهذا يحاول كل لاعب أن يصيغ ويختار الإستراتيجية التي يتحقق عندها حالة السواء بصرف النظر عن الإستراتيجية التي يختارها الخصم، ويمكن تحقيق هذا باختيار كل إستراتيجية لفترة أو بنسبة من الوقت بالأسلوب الذي يجعل العوائد المتوقعة (أو الخسائر المتوقعة) متساوية بصرف النظر عن الإستراتيجية التي يختارها الخصم ، وتنشأ حالة السواء هذه بتحديد احتمال معين لاختيار الإستراتيجية.

ولتحديد هذا الاحتمال، فإننا نبين ونوضح بأن الشركة س ستختار من بين الإستراتيجيتين س_١ أو س_٢، وبالتالي فإن عوائدها المتوقعة تكون متساوية بصرف النظر عن اختيار الشركة ص لأحدي إستراتيجيتها ص_١ أو ص_٢ فعلي سبيل المثال إذا اختارت الشركة ص إستراتيجيتها الأولى ص_١ فإن العوائد المحتملة للشركة س تكون (-٦%) و(٨%)، وإذا اختارت الشركة س إستراتيجيتها الأولى ص_١ س باحتمال قدره ح وبالتالي ستختار إستراتيجيتها الثانية س_٢ باحتمال قدره (١- ح) ، ولهذا فإن عوائدها المتوقعة تساوي الآتي:

$$\text{العوائد المتوقعة للشركة س} = \text{ح}(-٦\%) + (١- ح)(٨\%) =$$

مكاسب الشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولى ص_١ أما إذا اختارت الشركة ص إستراتيجيتها الثانية ص_٢ فإن العوائد المتوقعة للشركة س تساوي الآتي:

$$\text{العوائد المتوقعة للشركة س} = \text{ح}(١٠\%) + (١- ح)(٤\%) =$$

مكاسب الشركة س بفرض اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية ص_٢ . ولكي تكون الشركة س في حالة سواء للإستراتيجية التي تختارها الشركة ص، فإن العائد المتوقع للشركة س في كل من الاختيارين للإستراتيجيتين المحتملتين للشركة ص يجب أن يكونا متساويان، ولذا فإننا سنساوي بين

المكسبين، وبحلها نستنتج قيمة الاحتمال ح الذي يحقق حالة السواء كما يتضح من الإجراء الآتي:

$$\begin{aligned}
 \text{اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الأولى س}_1 &= \text{اختيار الشركة ص لإستراتيجيتها الثانية ص}_2 \\
 \text{ح} (6\%) + (1-\text{ح}) (8\%) &= \text{ح} (10\%) + (1-\text{ح}) (4\%) \\
 -\text{ح} 0,08 + \text{ح} 0,06 &= \text{ح} 0,10 - \text{ح} 0,04 \\
 -\text{ح} 0,02 &= \text{ح} 0,06 \\
 \text{ح} 0,02 &= \text{ح} 0,06 \\
 \text{ح} &= 0,3 \\
 (1-\text{ح}) &= 0,7
 \end{aligned}$$

ووفقاً لذلك يجب علي الشركة س أن تختار إستراتيجيتها الأولى س₁ باحتمال قدره 20% أو 0,2 وأن تختار إستراتيجيتها الثانية س₂ باحتمال قدره 80% أو 0,8، وسينتج ويتحقق عن هذا نفس قيمة العوائد المتوقعة بصرف النظر عن الإستراتيجية التي تختارها الشركة ص.

ويجب علي الشركة ص أن تحدد احتمالي اختيار إستراتيجيتها ص₁ أو ص₂ بمساواة الخسائر المتوقعة للشركة ص حالة اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولى س₁ أو إستراتيجيتها الثانية س₂ ويتحقق هذا بإجراء الآتي:

$$\begin{aligned}
 \text{اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الأولى س}_1 &= \text{اختيار الشركة س لإستراتيجيتها الثانية س}_2 \\
 \text{ح} (6\%) + (1-\text{ح}) (10\%) &= \text{ح} (8\%) + (1-\text{ح}) (4\%) \\
 -\text{ح} 0,04 + \text{ح} 0,06 &= \text{ح} 0,08 - \text{ح} 0,04 \\
 -\text{ح} 0,02 &= \text{ح} 0,04 \\
 \text{ح} 0,02 &= \text{ح} 0,04 \\
 \text{ح} &= 0,3 \\
 (1-\text{ح}) &= 0,7
 \end{aligned}$$

وهكذا يجب علي الشركة ص أن تحدد احتمالي اختيار إستراتيجيتها الأولي ص_١ باحتمال قدره ٣٠% أو ٣٠,٠ وتحدد احتمال اختيار إستراتيجيتها الثانية ص_٢ بـ ٧٠% أو ٧٠,٠، وسينتج عن هذا نفس قيمة الخسائر المتوقعة للشركة ص بصرف النظر عن الإستراتيجية التي تختارها الشركة س سواء كانت إستراتيجيتها الأولي س_١ أو إستراتيجيتها الثانية س_٢. وتوجد لهذه المباراة قيمة مشتركة لكل من الشركتين س_١ و ص_٢ والتي أوجدناها وأخذت صورة القيمة المتوقعة لعوائد المباراة، وهذه القيم المتوقعة تحسب كما يلي:

العوائد المتوقعة للشركة س:

إذا الشركة ص اختارت إستراتيجيتها الأولي ص_١ :

$$٥,٢\% = ٨\% + ٠,٨ + ٦٠\% = ٥,٢\%$$

إذا الشركة ص اختارت إستراتيجيتها الثانية ص_٢ :

$$٥,٢\% = ٤\% + ٠,٨ + ١٠\% = ٥,٢\%$$

الخسائر المتوقعة للشركة ص إذا الشركة س اختارت إستراتيجيتها الأولي س_١ :

$$٥,٢\% = ١٠\% + ٠,٧ + ٦٠\% = ٥,٢\%$$

الخسائر المتوقعة للشركة ص إذا الشركة س اختارت إستراتيجيتها الثانية س_٢ :

$$٥,٢\% = ٤\% + ٠,٧ + ٨\% = ٥,٢\%$$

وهكذا يتضح من حل المباراة ذات الإستراتيجيات المختلطة أن القيمة المتوقعة لعوائد (لمكاسب أو لنواتج) المباراة ذات الإستراتيجيات المختلطة تساوي ٥,٢% ، وهي تعبر عن القيمة المتوقعة لعوائد الشركة في الأجل الطويل . وتجدر الإشارة هنا إلي أنه يمكن استخدام نموذج البرمجة الخطية وأيضا يمكن استخدام الطريقة البيانية لاشتقاق واستنتاج القيمة المتوقعة لعوائد (لمكاسب أو لنواتج) المباراة ذات الإستراتيجيات المختلطة إلا أن المقام لا يتسع هنا لمناقشتها.

١١ / ٥ : الاستراتيجيات المسيطرة :

إذا وجدت وظهرت مشكلة الإستراتيجيات المسيطر عليها في مصفوفة المباراة، فإن الأمر يقتضي استبعادها وعزلها وفصلها عن مصفوفة نتائج المباراة، حيث أن هذه الإستراتيجيات لا يلتفت إليها ولا يجب اختيارها أو اللعب فيها علي الإطلاق ، وبالتالي يستطيع اللاعب (المتنافس) أن يعزل أو يستبعد الإستراتيجيات المسيطر عليها من بين الإستراتيجيات المتاحة للاختيار من بينها، فإذا كان لهذا اللاعب إستراتيجية أخرى مسيطرة (أفضل) أي ستر عليه عوائد أفضل . ويمكن تخفيض حجم مصفوفة المباراة بتطبيق قواعد السيطرة، وحلها باستخدام أي من طريقة من طرق حل المباريات سواء المباريات ذات الإستراتيجيات المطلقة أو المختلطة، ولإيضاح مفهوم السيطرة وكيفية تطبيقه نفترض المثال الموضح بياناته في الجدول رقم (١٢/١١) التالي:

مثال:

يوضح الجدول التالي رقم (١٢/١١) مصفوفة النتائج الخاصة من وجهة نظر الشركة س

جدول رقم (١٢/١١) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

ص٣	ص٢	ص١	إستراتيجيات اللاعب ص
			إستراتيجيات اللاعب س
١٠	٨	٤-	١س
١٢	٦-	٠	٢س
١٢-	٢	١٠-	٣س

والمطلوب: إيجاد قيمة المباراة .

لتحديد قيمة المباراة باستخدام مفهوم السيطرة يقتضي الأمر تفسير قواعد السيطرة .

١١ / ١ / ٥ : قواعد السيطرة.

- مفهوم قاعدة السيطرة للاعب (لمتنافس) الصفوف:

نظراً لأننا نفترض أن القيمة الموجب في صف مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة تمثل ربح وعائد للاعب (لمتنافس) الصفوف ، وأن القيمة الموجبة الأكبر تكون مفضلة علي القيمة الموجبة الأصغر ، وبالتالي يجب علي هذا اللاعب أن يهمل ويتجاهل القيمة الموجبة الأصغر نظراً لسيطرة وأفضلية القيمة الموجبة الأكبر عليها ، وبالتالي يجب علي للاعب (لمتنافس) الصفوف إذا وجد صف عناصره أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في أي صف آخر مقارن به، أن يغفل ويتجاهل ويستبعد الصف ذو العناصر الأصغر من أو تساوي من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة، ويسمي هذا الصف بالصف المستبعد أو المسيطر عليه، أما الصف ذو العناصر الأكبر من أو تساوي في مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة فيعرف بالصف المسيطر أي المفضل .

- مفهوم قاعدة السيطرة للاعب (لمتنافس) الأعمدة:

نظراً لأننا نفترض أن القيمة الموجب في عمود مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة تمثل خسارة للاعب (لمتنافس) الأعمدة، وأن القيمة الموجبة الأصغر تكون مفضلة علي القيمة الموجبة الأكبر لأنها تمثل خسائر أقل، وبالتالي يجب علي هذا اللاعب أن يهمل ويتجاهل القيمة الموجبة الأكبر نظراً لسيطرة وتفضيل القيمة الموجبة الأصغر عليها، وبالتالي يجب علي للاعب (لمتنافس) الأعمدة إذا وجد صف عناصره أكبر من أو تساوي العناصر المناظرة لها في أي صف آخر مقارن به، أن يغفل ويتجاهل ويستبعد العمود ذو العناصر الأكبر من أو تساوي من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة، ويسمي هذا العمود بالعمود المستبعد أو المسيطر عليه، أما العمود ذو العناصر الأصغر من أو تساوي في مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة فيعرف بالعمود المسيطر أي المفضل .

١١ / ٥ / ٢: تطبيق قواعد السيطرة علي المثال:

وبتطبيق قواعد السيطرة علي استراتيجيات صفوف مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة القائمة علي البيانات الواردة بالجدول رقم (١٢/١١) السابق والتي تظهر علي النحو التالي :

ص			
٣ص	٢ص	١ص	
١٠	٨	٤-	١س
١٢	٦-	٠	٢س س
١٢-	٢	١٠-	٣س

- بمقارنة عناصر الصف الثالث س٣ (الإستراتيجية الثالثة س٣) بعناصر الصف الأول س١ (الإستراتيجية الأولى س١) يتضح أن الإستراتيجية الثالثة س٣ مسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة باعتبارها إستراتيجية رديئة غير جيدة وغير مربحة ومخسرة لتظهر المصفوفة المصغرة بعد استبعاد الصف الثالث علي النحو التالي:

ص			
٣ص	٢ص	١ص	
١٠	٨	٤-	١س
١٢	٦-	٠	٢س س

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة المصغرة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثالث ص٣ (الإستراتيجية الثالثة ص٣ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الثاني ص٢ (الإستراتيجية الثانية ص٢ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة ص٣ للشركة ص مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ، أما الإستراتيجية الثانية ص٢ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

ص

$$\begin{matrix} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ص} & ٨ & ٤- \\ \text{س} & ٦- & ٠ \end{matrix}$$

- ولإيجاد نقطة التلاقي يتم اختيار الآتي :

- أصغر مفردة في الصف الأول ٤- أكبر مفردة في العمود الأول
 - أصغر مفردة في الصف الثاني ٦- أكبر مفردة في العمود الثاني ٨
- ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي ٠ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، وأيضاً ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الثاني تساوي ٨ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، فلا توجد نقطة تلاقي للمباراة ، نظر لأننا أمام مصفوفة عوائد مباراة ليست ذات استراتيجيات مطلقة وإنما نحن أمام مصفوفة عوائد مباراة ذات استراتيجيات مختلطة . ويمكن حلها بأحدي طرق الخمس السابق ذكرها، وبتطبيق خطوات حل الطريقة الحسابية السابق عرضها نصل إلي اعتمالي اختيار كل إستراتيجية من الإستراتيجيتين بكل شركة وأيضاً القيمة المتوقعة لعوائد المباراة من وجهة نظر كل شركة من الشركتين س ، و ص والتي تظهر بالجدول التالي:

الشركة س	القيمة	الشركة ص	القيمة
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى س _١	٠,٣٣٣	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى ص _١	٠,٧٧٨
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى س _٢	٠,٦٦٧	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى ص _٢	٠,٢٢٢
قيمة المباراة	٠,٦٦٧	قيمة المباراة	٠,٦٦٧

١١ / ٦ : حل المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة بطريقة المباريات الفرعية:

ناقشنا في الجزء السابق مفهوم وقاعدتي السيطرة، كوسيلة لتصغير حجم مصفوفة عوائد المباراة التي تزيد عن صفين وعمودين [٢×٢] . وإذا أمكننا تخفيض حجم مصفوفة عوائد المباراة إلي مصفوفة من صفين، عمودين

أصبح من السهل حل المباراة. ، ولكن قد يصعب في بعض الأحيان تصغير حجم مصفوفة عوائد المباراة التي تزيد عن صفين وعمودين [2×2] لكي تصبح مصفوفة من صفين وعمودين [2×2] ، وهنا نلجأ إلي استخدام أسلوب المباريات الفرعية ، ونوضح ذلك من خلال المثال التالي:
مثال:

يوضح الجدول التالي رقم (13/11) مصفوفة النتائج الخاصة من وجهة نظر الشركة س.

جدول رقم (13/11) مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

ص	ص	ص	ص	ص	إستراتيجيات اللاعب ص
					إستراتيجيات اللاعب س
ص	ص	ص	ص	ص	س
ص	ص	ص	ص	ص	س

والمطلوب: إيجاد قيمة المباراة باستخدام قواعد السيطرة وأسلوب المباريات الفرعية.

لتحديد قيمة المباراة باستخدام قواعد السيطرة وأسلوب المباريات الفرعية نتبع الآتي:

١- إعداد مصفوفة عوائد المباراة:

ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ص	ص	ص

أ - بتطبيق قواعد السيطرة:

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثاني ص (الإستراتيجية الثالثة ص للشركة ص) بعناصر قيم العمود الأول ص (الإستراتيجية الأولى ص للشركة ص) نجد أن

الإستراتيجية الثانية ص_٢ للشركة ص مخرسة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة، أما الإستراتيجية الأولى ص_١ للشركة ص فتعد إستراتيجية مهيمنة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

ص

	ص _١	ص _٢	ص _٣	ص _٤
ص _١	٥	٢٥	٢٠	٤٠
ص _٢	٠	٦٠	٤٥	٥٠

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثاني ص_٢ (الإستراتيجية الثالثة ص_٣ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الأول ص_١ (الإستراتيجية الأولى ص_١ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة ص_٣ للشركة ص مخرسة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة، أما الإستراتيجية الأولى ص_١ للشركة ص فتعد إستراتيجية مهيمنة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي: ص

ص

	ص _١	ص _٢	ص _٣
ص _١	٥	٢٠	٤٠
ص _٢	٠	٤٥	٥٠

مما سبق يتضح أن قواعد السيطرة لم تؤدي إلي تصغير حجم مصفوفة عوائد المباراة إلي مصفوفة من صفين وعمودين [٢×٢]، ولا يمكن تطبيق قواعد السيطرة علي أعمدها لعدم توافر شرط قاعدتي السيطرة، ولكي نحل هذه المباراة نجزأ ونقسم مصفوفة عوائد المباراة المتبقية إلي ثلاثة مباريات فرعية بحيث تتكون كل مباراة فرعية من صفين وعمودين [٢×٢]، وتظهر هذه المباريات الفرعية الثلاثة علي النحو التالي:

المباراة الفرعية الأولى	المباراة الفرعية الثانية	المباراة الفرعية الثالثة
ص ١ ص ٢ $\begin{pmatrix} ٢٠- & ٥ \\ ٤٥ & ٠ \end{pmatrix}$	ص ١ ص ٢ $\begin{pmatrix} ٤٠- & ٢٠- \\ ٥٠ & ٤٥ \end{pmatrix}$	ص ١ ص ٢ $\begin{pmatrix} ٤٠- & ٥ \\ ٥٠ & ٠ \end{pmatrix}$

يلاحظ أن الشركة ص تتجاهل أحد الأعمدة الثلاثة، حيث تتجاهل العمود الثالث في المباراة الفرعية الأولى، وتتجاهل العمود الأول في المباراة الفرعية الثانية، وتتجاهل العمود الثالث في المباراة الفرعية الثالثة. وتحل كل مباراة فرعية من المباريات الفرعية الثلاثة سواء كانت مباراة فرعية ذات إستراتيجية مطلقة أو مختلطة، ويتم اختيار أصغر نتيجة لهذه المباريات الفرعية الثلاثة لتحديد نتيجة المباراة .

حل المباريات الفرعية

١- حل المباراة الفرعية الأولى بالطريقة الحسابية:

ص

ص ١ ص ٢	ص ١ ص ٢	ص ١ ص ٢
٥	٢٠-	٥
٠	٤٥	٠
١ س	٢ س	١ س
٢ س	٢ س	٢ س

ص

ص ١ ص ٢	ص ١ ص ٢	ص ١ ص ٢
٥	٢٠-	٥
٠	٤٥	٠
١ س	٢ س	١ س
٢ س	٢ س	٢ س
٥	٦٥	٥

ص

ص ١ ص ٢	ص ١ ص ٢	ص ١ ص ٢
٥	٢٠-	٥
٠	٤٥	٠
١ س	٢ س	١ س
٢ س	٢ س	٢ س
٥	٦٥	٥

ص

$$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 70 \\ 25 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ص؛} \\ \left(\begin{array}{cc} 20 & 5 \\ 45 & 0 \end{array} \right) \\ 5 \quad 65 \\ \hline 70 \quad 70 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \text{ س} \\ 2 \text{ س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 14 \\ 5 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ص؛} \\ \left(\begin{array}{cc} 20 & 5 \\ 45 & 0 \end{array} \right) \\ 1 \quad 13 \\ \hline 14 \quad 14 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \text{ س} \\ 2 \text{ س} \\ \text{س} \end{array}$$

$$\text{قيمة المباراة} = \text{ق} = 3 \frac{3}{14} = \frac{45}{14} = \frac{1}{14} \times 20 + \frac{13}{14} \times 5 = 3,214$$

٢- حل المباراة الفرعية الثانية بالطريقة العادية نظراً لأنها مباراة ذات إستراتيجية مطلقة:

ص

$$\begin{array}{c} \text{ص؛} \\ \left(\begin{array}{cc} 40 & 20 \\ 50 & 45 \end{array} \right) \\ 40 \quad 50 \\ \hline 50 \quad 50 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \text{ س} \\ 2 \text{ س} \\ \text{س} \end{array}$$

أصغر مفردة في الصف الأول 40- أكبر مفردة في العمود الأول 45
 أصغر مفردة في الصف الثاني 50 أكبر مفردة في العمود الثاني 50

ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي $45 = 45$ تمثل أصغر مفردة في صفها، فإن نقطة تلاقي المباراة (نتيجة المباراة) $45 = 45$
 ١- حل المباراة الفرعية الثالثة بالطريقة الحسابية:

ص

$$\begin{array}{cc|cc} & & \text{ص} & \text{ص} \\ & & \text{ص} & \text{ص} \\ \hline & & 40 & 5 \\ & & 50 & 0 \\ \hline & & \text{س} & \text{س} \\ & & \text{س} & \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{cc|cc} & & \text{ص} & \text{ص} \\ & & \text{ص} & \text{ص} \\ \hline 45 & & 40 & 5 \\ 50 & & 50 & 0 \\ \hline & & 90 & 5 \\ \hline & & \text{س} & \text{س} \\ & & \text{س} & \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{cc|cc} & & \text{ص} & \text{ص} \\ & & \text{ص} & \text{ص} \\ \hline 50 & & 40 & 5 \\ 45 & & 50 & 0 \\ \hline & & 5 & 90 \\ \hline & & \text{س} & \text{س} \\ & & \text{س} & \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{cc|cc} & & \text{ص} & \text{ص} \\ & & \text{ص} & \text{ص} \\ \hline 50 & & 40 & 5 \\ \hline 95 & & & \\ 45 & & & \\ \hline 95 & & & \\ \hline & & 5 & 90 \\ \hline & & 95 & 95 \\ \hline & & \text{س} & \text{س} \\ & & \text{س} & \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 19 \\ 9 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ص؛} \\ \left(\begin{array}{cc} 40 & 5 \\ 50 & 0 \end{array} \right) \\ 1 \quad 18 \\ \hline 19 \quad 19 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

$$\text{قيمة المباراة} = ق = \frac{12}{19} = \frac{45}{14} = \frac{1}{19} \times 40 + \frac{18}{19} \times 5 = 2,362$$

نتيجة المباراة الفرعية الثالثة	نتيجة المباراة الفرعية الثانية	نتيجة المباراة الفرعية الأولى
2,362	45	3,214

قيمة المباراة = ق = 2,362 = أصغر نتيجة مباراة فرعية وهي
المباراة الفرعية الثالثة.

**تطبيقات
وحالات عملية**

الفصل الأول

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

• تمرين رقم (١):

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، ويمر كل منتج منهم بمرحلتين صناعيتين هما: مرحلة التقطيع، ومرحلة التشطيب، ويوضح الجدول التالي الوقت اللازم لإنتاج الوحدة من كل منتج في كل مرحلة:

المنتج الرابع	المنتج الثالث	المنتج الثاني	المنتج الأول	المنتجات المراحل
٨	٩	٦	٧	مرحلة التقطيع
٦	٧	٨	٥	مرحل التشطيب

هذا، وتبلغ الساعات المتاحة في مرحلة التقطيع ٣٠٠ ساعة أسبوعياً وفي مرحلة التشطيب ٢٠٠ ساعة أسبوعياً، وفيما يلي البيانات المتوافرة عن أسعار البيع والتكاليف المتغيرة للوحدة من كل منتج:

المنتج الرابع	المنتج الثالث	المنتج الثاني	المنتج الأول	المنتجات بيانات المنتجات
٣٤	٢٨	٢٣	٢١	سعر البيع
				تكاليف الإنتاج:
٤	٦	٥	٣	تكلفة المواد المباشرة
٨	٨	٤	٥	التكلفة المتغيرة للتقطيع
٧	٥	٣	٢	التكلفة الثابتة للتقطيع
٦	٦	٨	٦	التكلفة المتغيرة للتشطيب
٩	٧	٦	٧	التكلفة الثابتة للتشطيب

• والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى

بما يحقق أقصى ربح ممكن.

الإجابة

⚡ نلاحظ هنا أننا يمكننا القيام بصياغة نموذج البرمجة الخطية - في ظل الخطوات المبينة سابقاً - وذلك على النحو التالي:

١- دراسة المشكلة:

تتمثل هذه المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى، حيث يوجد أمام هذه المنشأة مجموعة بدائل تتمثل في المنتجات الممكن إنتاجها، وتتمثل المشكلة في تحديد تشكيلة المنتجات المثلى من بين هذه المنتجات، وبحيث تحقق أقصى ربح ممكن في حدود الموارد والإمكانات المحدودة المتاحة للمنشأة.

٢- تحديد متغيرات القرار:

تتمثل متغيرات القرار في هذه المشكلة في التالي:

- إنتاج وبيع المنتج الأول، ويرمز له بالرمز س_١، للتعبير عن كمية الإنتاج

والمبيعات من هذا المنتج.

- إنتاج وبيع المنتج الثاني، ويرمز له بالرمز س_٢.

- إنتاج وبيع المنتج الثالث، ويرمز له بالرمز س_٣.

- إنتاج وبيع المنتج الرابع، ويرمز له بالرمز س_٤.

٣- صياغة دالة الهدف:

ترتيباً على أن الهدف هنا يتمثل في تعظيم الربح، فإن معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف تتمثل هنا في: هامش مساهمة الوحدة من كل منتج - حيث يمكن حساب هامش المساهمة عن طريق طرح التكاليف المتغيرة للوحدة من سعر بيع الوحدة - وذلك على النحو التالي:

المنتج الرابع	المنتج الثالث	المنتج الثاني	المنتج الأول	المنتجات
س _٤ ؛	س _٣	س _٢	س _١	بيانات المنتجات
٣٤	٢٨	٢٣	٢١	سعر بيع الوحدة
(١٨)	(٢٠)	(١٧)	(١٤)	(-) التكلفة المتغيرة للوحدة
١٦	٨	٦	٧	= هامش مساهمة الوحدة

وعلى ذلك فإننا نستطيع صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

المطلوب تعظيم الدالة:

$$R = 7س_١ + 6س_٢ + 8س_٣ + 16س_٤؛$$

٤- صياغة قيود المشكلة:

تتمثل الموارد المتاحة في هذه المشكلة في الطاقة المتاحة في مركزي: التقطيع والتشطيب، وتتطلب صياغة القيود ضرورة تحديد التالي:

أ- معاملات متغيرات القرار في القيود وتتمثل في احتياجات وحدة المنتج من الساعات في كل مرحلة من مراحل الإنتاج: حيث يحتاج المنتج الأول إلى: ٧ ساعات تقطيع، ٥ ساعات تشطيب، وعلى نفس هذا النمط يمكننا تحديد هذه المعاملات لباقي المنتجات.

ب- الكميات المتاحة من الموارد: وهي: ٣٠٠ ساعة تقطيع؛ و ٢٠٠ ساعة تشطيب أسبوعياً.

ويمكن تلخيص البيانات السابقة في الجدول التالي:

الكميات المتاحة من الموارد	س١	س٢	س٣	س٤	متغيرات القرار
١٩٠٠	٧	٦	٩	٨	طاقة التقطيع
١٦٠٠	٥	٨	٧	٦	طاقة التشطيب

ويتطلب الأمر صياغة قيد لكل مورد من الموارد، فإذا ما أخذنا المورد الأول، والذي يمثل طاقة التقطيع، فإننا نلاحظ أن الوحدة من المنتج الأول (س١) تحتاج إلى ٧ ساعات، ولذلك فإن المنتج الأول يحتاج إلى ٧ س١ من طاقة التقطيع، أما المنتج الثاني فيحتاج إلى ٦ س٢، والمنتج الثالث يحتاج إلى ٩ س٣، بينما يحتاج المنتج الرابع إلى ٨ س٤، وبالتالي فإن إجمالي الساعات التي يمكن تخصيصها من طاقة التقطيع لكل المنتجات = ٧س١ + ٦س٢ + ٩س٣ + ٨س٤، ويجب أن يكون هذا الإجمالي في حدود طاقة التقطيع أي في حدود ١٩٠٠ ساعة أسبوعياً، حيث يمكن التعبير عن ذلك في صورة المتباينة التالية:

$$7س١ + 6س٢ + 9س٣ + 8س٤ \geq 300$$

أما بالنسبة للمورد الثاني فإنه يمكن التعبير عنه رياضياً على نفس المنوال السابق، حيث يصبح هذا القيد في صورة المتباينة التالية:

$$5س١ + 8س٢ + 7س٣ + 6س٤ \geq 1600$$

وإذا أضفنا شرط عدم السالبة، فإن الصياغة الكاملة للنموذج تأخذ الشكل التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = 7س١ + ٦س٢ + ٨س٣ + ١٦س٤؛$$

وذلك في ظل القيود التالية:

$$1900 \geq ٧س١ + ٦س٢ + ٩س٣ + ٨س٤؛$$

$$1600 \geq ٥س١ + ٨س٢ + ٧س٣ + ٦س٤؛$$

$$س١، س٢، س٣، س٤ \leq \text{صفر}$$

وهنا نلاحظ ضرورة أن نراعي إمكانية أن يتضمن النموذج السابق

متغيرات جديدة، تأخذ في الحل الأمثل قيمة تعبر عن الطاقة غير المستغلة

(إن وجدت)؛ ويُطلق على هذه المتغيرات الجديدة: "المتغيرات الراكدة"،

وتأخذ في الحل قيمة تساوي أو أكبر من الصفر، حيث لا يتصور أن

تأخذ قيمة سالبة.

وإذا رمزنا للساعات غير المستغلة في مرحلة التجميع بالرمز (غ١)

وللساعات غير المستغلة في مرحلة التشطيب بالرمز (غ٢)، فإننا يمكننا إعادة

صياغة النموذج السابق، على النحو التالي:

المطلوب - تعظيم الدالة التالية:

$$R = 7س١ + ٦س٢ + ٨س٣ + ١٦س٤ + صفر غ١ + صفر غ٢؛$$

في ظل القيود التالية:

$$1900 = ٧س١ + ٦س٢ + ٩س٣ + ٨س٤ + غ١ + غ٢؛$$

$$1600 = ٥س١ + ٨س٢ + ٧س٣ + ٦س٤ + غ٢ + غ١؛$$

$$س١، س٢، س٣، س٤، غ١، غ٢ \leq \text{صفر}$$

هذا، ويجب مراعاة الملاحظات التالية على النموذج السابق:

١- تمثل س١، س٢، س٣، س٤ متغيرات القرار، أما غ١، غ٢ فتمثل الساعات غير المستغلة، وهي تقابل الطاقة والموارد غير المستغلة.

٢- الدالة المبينة في بداية النموذج، تمثل دالة الهدف، وهي تعبر عن إجمالي

هامش المساهمة لمستويات النشاط س١، س٢، س٣، س٤؛

- ٣- المعادلتان المبينتان عقب دالة الهدف، تمثلان قيود المشكلة بعد تحويلهما من متباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة؛ أما المتباينة الأخيرة فتمثل شرط عدم السالبة.
- ٤- الطاقة المتاحة في مرحلتى التقطيع والتشطيب، تمثل الموارد المتاحة، ويطلق علي الكميات المتاحة منها: قيم الطرف الأيسر للمعادلات أو المتباينات.
- ٥- أي قيم تأخذها المتغيرات $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ ، غ، غ: تمثل حلاً للمشكلة؛ فإذا كان هذا الحل يفى بقيود المشكلة: يطلق عليه حينئذ حل ممكن، أما إذا كان هذا الحل يحقق أقصى قيمة لدالة الهدف أيضاً، فإنه يعتبر الحل الأمثل.

• تمرين رقم (٢):

تنتج إحدى المنشآت أربع منتجات، حيث يتم الإنتاج في ثلاثة مراكز للإنتاج. والمطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المنشأة، لتحديد تشكيلة المنتجات المثلى التي تحقق لها أقصى ربح ممكن. هذا وتبلغ الطاقة المتاحة في مراكز الإنتاج والكميات المتاحة من المواد الخام ما يلي:

مركز الإنتاج الأول	٦٥٠,٠٠٠ ساعة
مركز الإنتاج الثاني	٥٢٠,٠٠٠ ساعة
مركز الإنتاج الثالث	٧٨٠,٠٠٠ ساعة
المادة الخام ط	١٩٥,٠٠٠ كيلو جرام
المادة الخام ق	١٣٠,٠٠٠ مل ليتر

وقد أسفرت دراسات السوق، عن أن أقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق من المنتج الأول هي ٦٥٠٠ وحدة، بينما يمكن استيعاب أي كميات من باقي المنتجات.

وفيما يلي الساعات اللازمة لإنتاج كل وحدة من المنتجات في مراكز الإنتاج، واحتياجات الوحدة من المواد الخام، وكذلك هامش مساهمة الوحدة:

المنتج الرابع	المنتج الثالث	المنتج الثاني	المنتج الأول	المنتجات بيانات المنتجات
ساعة	---	١٠٤	٦٥	مركز الإنتاج الأول
ساعة	٥٢	---	٢٦	مركز الإنتاج الثاني
ساعة	٣٩	١٥٦	---	مركز الإنتاج الثالث
كيلو جرام	---	٩١	---	مادة خام ط
ميلي لتر	١١٧	---	٦٥	مادة خام ق
جنيهاً	٦٥	٥٢	٧٨	هامش المساهمة

الإجابة

يلاحظ هنا أننا يمكننا صياغة النموذج على النحو التالي:

١- صياغة دالة الهدف: المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = ١٠٤س١ + ٧٨س٢ + ٥٢س٣ + ٦٥س٤$$

٢- صياغة القيود: يمكن تلخيص معاملات متغيرات القرار في القيود وكذلك الكميات المتاحة من الموارد في الجدول التالي:

الكميات المتاحة من الموارد	س٤	س٣	س٢	س١	متغيرات القرار الموارد
٦٥٠.٠٠٠	---	---	١٠٤	٦٥	مركز الإنتاج الأول
٥٢٠.٠٠٠	٥٢	---	---	٢٦	مركز الإنتاج الثاني
٧٨٠.٠٠٠	٣٩	١٥٦	---	١٣	مركز الإنتاج الثالث
١٩٥.٠٠٠	---	٩١	---	٥٢	مادة خام ط
١٣٠.٠٠٠	١١٧	---	٦٥	---	مادة خام ق

وبناءً على ذلك، فإننا يمكننا صياغة القيود على النحو التالي:

مركز الإنتاج الأول:

$$٦٥٠.٠٠٠ \geq ٦٥س١ + ١٠٤س٢$$

مركز الإنتاج الثاني:

$$٥٢٠.٠٠٠ \geq ٥٢س١ + ٢٦س٢$$

مركز الإنتاج الثالث:

$$780.000 \geq 13 \text{ س}_1 + 156 \text{ س}_2 + 39 \text{ س}_3$$

المادة الخام ط:

$$195.000 \geq 52 \text{ س}_1 + 91 \text{ س}_2$$

المادة الخام ق:

$$130.000 \geq 65 \text{ س}_2 + 117 \text{ س}_3$$

أما فيما يتعلق بأقصى كمية يمكن أن يستوعبها السوق بالنسبة للمنتج

الأول، فإنه يمكن صياغة هذا القيد على النحو التالي:

$$6500 \geq 1 \text{ س}_1$$

وعلي ذلك يمكن صياغة النموذج كلاً على النحو التالي:

المطلوب تعظيم الدالة التالية:

$$R = 104 \text{ س}_1 + 78 \text{ س}_2 + 52 \text{ س}_3 + 65 \text{ س}_4$$

وذلك في ظل القيود التالية:

$$650.000 \geq 65 \text{ س}_1 + 104 \text{ س}_2$$

$$520.000 \geq 52 \text{ س}_1 + 52 \text{ س}_2$$

$$780.000 \geq 13 \text{ س}_1 + 156 \text{ س}_2 + 39 \text{ س}_3$$

$$195.000 \geq 52 \text{ س}_1 + 91 \text{ س}_2$$

$$130.000 \geq 65 \text{ س}_2 + 117 \text{ س}_3$$

$$6500 \geq 1 \text{ س}_1$$

$$1 \text{ س}_1, 2 \text{ س}_2, 3 \text{ س}_3, 4 \text{ س}_4 \leq \text{صفر}$$

الفصل الثاني

الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس) حالة تعظيم الربح

تمرين رقم (١):

تنتج إحدى المنشآت ثلاثة منتجات: أ، ب، ج؛ يحقق كل منها عائد مساهمة للوحدة قدره: ٤، ٥، ٣ جنيهات علي الترتيب، والآتي بياناً يوضح احتياجات الوحدة من كل منتج من كل من: المواد الخام؛ وساعات الطاقة؛ والكميات المتاحة من هذه الموارد:

الموارد	احتياج وحدة المنتج من الموارد			المتاح من الموارد
	أ	ب	ج	
مادة خام م	١	١	٤	٦.٠٠٠ كيلو جرام
مادة خام ن	١	٢	١	٧.٠٠٠ كيلو جرام
ساعات الآلات	١	٤	٢	١٢.٠٠٠ ساعة

وقد استخدمت المشأة المذكورة نموذج البرمجة الخطية، لتحديد خليط الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن؛ وفيما يلي جدول السمبلكس الأمثل:

ر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
قيم متغيرات الحل	١س	٢س	٣س	٤س	٥س	٦س	٧س	٨س	٩س
قيم متغيرات الحل	٣.٠٠٠	٥.٠٠٠	١.٠٠٠						
اختبار المثالية ص									
ر - ص									

حيث تمثل س_١، س_٢، س_٣ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل غ_١، غ_٢، غ_٣ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود المادة الخام وساعات تشغيل الآلات.

والمطلوب:

١. صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.

٢. استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل.
 ٣. تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً.

٤. تحديد درجة استغلال الموارد المتاحة.
 ٥. تحديد أسعار ظل الموارد.
 ٦. المنتجات التي لا يتضمنها الحل الأمثل- والسبب في ذلك.
أولاً: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.

- ١- دالة الهدف: تعظيم $R = ٤س١ + ٥س٢ + ٣س٣$
 ٢- القيود: قيد المادة الخام م: $٤س١ + ٢س٢ + ٤س٣ \geq ٦.٠٠٠$
 قيد المادة الخام ن: $١س١ + ٢س٢ + ٣س٣ \geq ٧.٠٠٠$
 قيد ساعات الآلات: $١س١ + ٤س٢ + ٢س٣ \geq ١٢.٠٠٠$
 ٣- شرط عدم السالبة: $س١، س٢، س٣ \leq \text{صفر}$
 دالة الهدف = $٤س١ + ٥س٢ + ٣س٣ + ١غ١ + ٢غ٢ + ٣غ٣$

تحويل متباينات القيود إلى معادلات:

$$\begin{aligned} ٦.٠٠٠ &= ١س١ + ٢س٢ + ٤س٣ + ١غ١ \\ ٧.٠٠٠ &= ١س١ + ٢س٢ + ٣س٣ + ٢غ١ \\ ١٢.٠٠٠ &= ١س١ + ٤س٢ + ٢س٣ + ٣غ١ \end{aligned}$$

▪ بفرض أن جميع المتغيرات الأصلية = صفر، والتعويض في معادلات القيود

$$\therefore ١غ١ = ٦.٠٠٠، \quad ٢غ١ = ٧.٠٠٠، \quad ٣غ١ = ١٢.٠٠٠$$

ثانياً: استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل:

R و		٤	٥	٣	صفر	صفر	صفر
متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	١س١	٢س٢	٣س٣	١غ١	٢غ٢	٣غ٣
صفر	٣.٠٠٠	صفر	صفر	٧	٢	٣-	١
٤	٥.٠٠٠	١	صفر	٧	٢	١-	صفر
٥	١.٠٠٠	صفر	١	٣-	١	١	صفر
اختبار المثالية ص و		٤	٥	١٣	٣	١	صفر
R و - ص و		صفر	صفر	١٠-	٣-	١-	صفر

■ تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً:

أ- تحديد كمية الإنتاج من كل منتج، وأقصى ربح ممكن:

● لاحظ أن: كمية الإنتاج تعبر عنها المتغيرات الأصلية س: فإذا ظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أنه يجب إنتاج كمية من هذا المنتج تساوي الرقم الموجود في عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير الأصلي.

● أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الأصلية في عمود متغيرات الحل فإن هذا يعني أن هذا المنتج لن يتم إنتاج أية وحدات منه "أي أن كمية الإنتاج من هذا المنتج = صفر.

وبالتطبيق على التمرين من جدول الحل الأمثل، نتبين أن:

الكمية المنتجة من المنتج الأول (س₁) = ٥.٠٠٠ وحدة.

الكمية المنتجة من المنتج الثاني (س₂) = ١.٠٠٠ وحدة.

الكمية المنتجة من المنتج الثالث (س₃) = صفر

■ لاحظ أن: أقصى ربح ممكن هو الرقم الموجود في صف ص أسفل عمود قيم متغيرات الحل.

وبالتطبيق على التمرين من جدول الحل الأمثل، نجد أن:

أقصى ربح ممكن = ٢٥.٠٠٠ جنيهاً.

■ درجة استغلال الموارد المتاحة

(تحديد الطاقات المستغلة والعاطلة):

■ المتغيرات الراكدة غ: هي التي تعبر عن الطاقات ومدى استغلالها. فإذا

ظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد (القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد، توجد به طاقة عاطلة.

■ كمية الطاقة العاطلة = الرقم الموجود في عمود قيم متغيرات الحل أمام

المتغير الراكد.

- أما إذا لم يظهر أحد المتغيرات الراكدة في عمود متغيرات الحل، فإن هذا يعني أن المورد (القيد) الذي يعبر عنه هذا المتغير الراكد مُستغل بالكامل؛ أي أنه لا توجد به طاقة عاطلة (طاقته العاطلة = صفر).
وبالتطبيق علي التمرين (من جدول الحل الأمثل)، نجد أن:
غ_١ = صفر ← المورد الأول مستغل بالكامل.
غ_٢ = صفر ← المورد الثاني مستغل بالكامل.
غ_٣ = ٣.٠٠٠ ← المورد الثالث به طاقة عاطلة قدرها ٣.٠٠٠ ساعة.
- تحديد أسعار ظل الموارد:

(أثر إضافة وحدة واحدة من كل مورد على أرباح المنشأة:)

يلاحظ أن: أسعار الظل هي: الأرقام الموجودة في صف التقييم النهائي (ر-ص) أسفل أعمدة المتغيرات الراكدة بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).

ويقصد بأسعار الظل: مقدار التغير في قيمة الأرباح الإجمالية (دالة الهدف) نتيجة التغير في كمية المورد بوحدة واحدة.
وبالتطبيق علي التمرين من جدول الحل المثل:

المورد الأول: المادة الخام م:

سعر ظل المورد الأول المادة م أسفل الراكد غ_١ = ٣ جنيهات
وهذا يعني أن عائد المساهمة الإجمالي يزيد بمقدار ٣ جنيهات؛ إذا زادت الكمية المتاحة من المادة م بمقدار ١ كيلو، كما أن ذلك يؤدي إلى: (انظر عمود غ_١):

زيادة الكمية المنتجة من س_١ بمقدار ٢ وحدة

زيادة كمية غ_٣ ← بمقدار ٢، ونقص س_٢ بمقدار ١ وحدة

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة، على النحو الآتي:

زيادة كمية س_١ بمقدار ٢ وحدة × ٤ جنيهات = ٨ جنيهات

نقص كمية س_٢ بمقدار ١ وحدة × ٥ جنيهات = - ٥ جنيهات

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة + ٣ جنيهات

المورد الثاني: المادة الخام ن:

سعر ظل المورد الثاني (المادة الخام ن) أسفل الراكد غ_٢ = ١ جنيهاً وهذا يعني: أن عائد المساهمة الإجمالي يزيد بمقدار ١ جنيهاً؛ إذا زادت الكمية المتاحة من المادة م بمقدار ١ كيلو، كما أن ذلك يؤدي إلى: (انظر عمود غ_٢):
نقص كمية غ_٢ بمقدار ← ٣ ساعات.

نقص الكمية المنتجة من س_١ بمقدار ← ١ وحدة.

زيادة الكمية المنتجة من س_٢ بمقدار ← ١ وحدة.

ويمكن حساب أثر هذا الإحلال علي عائد المساهمة:

نقص كمية س_١ بمقدار ١ وحدة × ٤ جنيهاً = (-) ٤ جنيهاً

زيادة كمية س_٢ بمقدار ١ وحدة × ٥ جنيهاً = + ٥ جنيهاً

∴ النتيجة النهائية زيادة في عائد المساهمة + ١ جنيهاً

المورد الثالث: ساعات الآلات:

سعر ظل المورد الثالث: ساعات الآلات: أسفل الراكد غ_٣ = صفر

* وهذا يعني: أن عائد المساهمة الإجمالي لن يتأثر، إذا زادت الكمية المتاحة من ساعات تشغيل الآلات بمقدار ١ ساعة؛ وذلك بسبب أنه يوجد بها كمية فائضة غير مستخدمة (تمثل طاقة عاطلة) (أنظر عمود المتغير غ_٣).

■ المنتجات التي لا يتضمنها الحل الأمثل- والسبب في ذلك:

يمكن حساب أو تحديد خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل الأمثل؛ وكذلك عائد المساهمة الذي يجب أن يحققه كل منتج ليس ضمن الحل الأمثل حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً، وذلك على النحو الآتي:

يلاحظ هنا أن:

المنتجات التي لا يتضمنها الحل ← هو المنتج س_٣

وسبب ذلك أنه: لا يتم إنتاج أية وحدات من المنتج س_٣، وذلك لأن كل وحدة يتم إنتاجها من هذا المنتج يترتب عليها تحمل المنشأة لخسارة فرصة بديلة قدرها ١٠ جنيهاً.

- يلاحظ أن: خسارة الفرصة البديلة تتمثل في: الأرقام الموجودة في صف التقييم النهائي (ر - ص و) أسفل أعمدة المتغيرات الأصلية بجدول الحل الأمثل للنموذج (مع إهمال الإشارة).
- ويقصد بخسارة الفرصة البديلة: مقدار الخسارة التي تتحملها المنشأة نتيجة إنتاج وحدة واحدة من المنتج.
- حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل الحل:
 يتم حساب خسارة الفرصة البديلة للمنتجات التي لم تدخل في الحل الأمثل كما يلي:

عائد مساهمة الوحدة من المنتج س_٣ ← ٣ جنيهات
يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من س_٣
مقومة بأسعار الظل (الاحتياج من الموارد × سعر ظل الموارد)

$$\begin{aligned} \text{من المادة الخام م: } ٤ \text{ كيلو} \times ٣ &= ١٢ \\ \text{من المادة الخام ن: } ١ \text{ كيلو} \times ١ &= ١ \\ \text{من ساعات الآلات: } ٢ \text{ ساعة} \times \text{صفر} &= \text{صفر} \quad (\text{. : الإجمالي} = ١٣ \text{ جنيهاً}) \\ \text{. : خسارة الفرصة البديلة للمنتج س} &= (- ١٠) \end{aligned}$$

عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج غير الداخل في الحل؛ حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً =

$$\begin{aligned} &= [\text{قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل}] \\ \text{أو} &= [\text{هامش مساهمته الحالي} + \text{خسارة فرصته البديلة}] \end{aligned}$$

.: عائد المساهمة الذي يجب أن تحققه الوحدة من المنتج س_٣ حتى يكون إدخاله في الحل مربحاً =

$$\begin{aligned} &= \text{قيمة الموارد المستخدمة في إنتاجه مقومة بأسعار الظل} = ١٣ \text{ ج} \\ \text{أو هامش مساهمته الحالي } ٣ &+ \text{خسارة فرصته البديلة } ١٠ = ١٣ \text{ ج} \end{aligned}$$

- إنتاج منتج جديد:
- إذا رغبت المنشأة في إضافة منتج جديد، تحقق الوحدة منه عائد مساهمة قدره ١٠ جنيهاً، ويتطلب إنتاج الوحدة منه: ٣ كيلو من المادة الخام م؛ و ٣ كيلو من المادة الخام ن؛ و ٤ ساعات من ساعات تشغيل الآلات؛ هل تنصح بإدخال هذا المنتج؟ ولماذا؟
- من أجل تحديد هل من الأفضل قبول أو رفض إضافة منتج جديد، يجب القيام بتحديد صافي ربح أو خسارة هذا المنتج...

ويتم تحديد صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد كما يلي:

صافي ربح أو خسارة المنتج الجديد =

هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد	(-)	قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة من هذا المنتج مقومة بأسعار الظل
--	-----	---

: هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد: ١٠ جنيهاً

يطرح منه: قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج

مقومة بأسعار الظل:

الاحتياج من الموارد x سعر ظل المورد

من المادة م: ٣ x ٣ = ٩ جنيهاً

من المادة ن: ٣ x ١ = ٣ جنيهاً

من ساعات الآلات: ٤ x صفر = صفر

الإجمالي ١٢ جنيهاً

: خسارة فرصته البديلة = (- ٢ جنيهاً) .

: لا ننصح بإضافة هذا المنتج؛ حيث أن إضافة هذا المنتج يترتب عليه تحمل

المنشأة خسارة فرصة بديلة قدرها ٢ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

• بفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ١٢.٥ جنيهاً؛ فهل

تنصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟

هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ١٢.٥ جنيهاً

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج مقومة بأسعار

الظل (كما سبق حسابها) ١٢ جنيهاً

١٢.٥ جنيهاً

١٢ جنيهاً

ربح ٠.٥ جنيهاً

∴ ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؛ طالما أن إضافته يترتب عليها

تحقيق ربح قدره ٠.٥ جنيهاً عن كل وحدة يتم إنتاجها.

• بفرض أن هامش مساهمة الوحدة من المنتج الجديد ١٢ جنيهاً فهل

ننصح في هذه الحالة بإضافة المنتج الجديد؟

∴ هامش مساهمة الوحدة من المنتج ← ١٢ جنيهاً

(-)

يطرح منه:

قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من

المنتج مقومة بأسعار الظل كما سبق حسابها).

$$\frac{12}{\text{صفر}} =$$

∴ ننصح بإضافة المنتج الجديد طالما أن قيمة الموارد المستخدمة في

إنتاج وحدة واحدة منه = هامش مساهمة الوحدة منه.

تمرين رقم (٢):

تقوم إحدى المنشآت الصناعية، بإنتاج منتجين أ، ب؛ وتستلزم العملية

الإنتاجية ضرورة استخدام ثلاثة موارد إنتاجية؛ ويبين الجدول الآتي

الاحتياجات اللازمة لإنتاج كل منتج والطاقة المتاحة من كل مورد:

المرحلة الإنتاجية	الساعات اللازمة		الطاقة المتاحة
	المنتج أ	المنتج ب	
مورد الآلات	٤	٦	٣٠٠٠ ساعة
ساعات العمل المباشر	٦	٤	٣٠٠٠ ساعة
الخامات	٢	٢	٦٠٠٠ كيلو جرام

كما يبين الجدول الآتي، بيانات أسعار بيع، وتكاليف إنتاج كل منتج:

المنتج ب	المنتج أ	بيان
٣٢٠	٢٧٠	سعر بيع الوحدة
١٨٠	١٣٠	التكلفة المتغيرة الصناعية للوحدة
١٣٠	١٠٠	التكلفة المتغيرة التسويقية للوحدة
٤٧	٣٥	التكلفة الثابتة الصناعية للوحدة
٢٧	٤٣	التكلفة الثابتة التسويقية للوحدة
١٧	٢١	التكلفة الإدارية والعمومية الثابتة للوحدة

والمطلوب: استخدام طريقة السمبلكس في تحديد كل من:

- ١- كمية الإنتاج المثلى من كل منتج، وأقصى ربح ممكن.
- ٢- الوقت العاطل أو الطاقة غير المستغلة من كل مورد.
- ٣- تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج.

تمرين رقم (٣):

تنتج إحدى المنشآت ثلاثة منتجات: أ؛ ب؛ ج؛ يحقق كل منها عائد مساهمة للوحدة قدره: ٢، ٤، ٥.٥ جنيهاً على الترتيب، والآتي بياناً يوضح احتياجات الوحدة من كل منتج من كل من: المواد الخام؛ وساعات الطاقة؛ والكميات المتاحة من هذه الموارد:

المتاح من الموارد	احتياج وحدة المنتج من الموارد			الموارد
	ج	ب	أ	
١٠٠	—	٢	٤	مادة خام م
١٠٠	١	١	٢	مادة خام ن
١٠٠	١	٣	١	ساعات الآلات

وقد استخدمت المشاة المذكورة نموذج البرمجة الخطية، لتحديد خليط الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن؛ وفيما يلي جدول السمبلكس الأمثل:

ر و	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	٢	٤	٠.٥	صفر	صفر	صفر
٢	١٠	١س	١	صفر	$\frac{1}{5} -$	صفر	صفر	$\frac{3}{10}$
صفر	٥٠	٢غ	صفر	صفر	١	١	١	$\frac{1}{2} -$
٤	٣٠	٢س	صفر	١	$\frac{2}{5}$	صفر	صفر	$\frac{1}{10} -$
اختبار المثالية ص و								
ر و - ص و								

حيث تمثل س_١، س_٢، س_٣ الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج، كما تمثل غ_١، غ_٢، غ_٣ المتغيرات الراكدة المرتبطة بقيود المادة الخام وساعات تشغيل الآلات.

والمطلوب:

١. صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة في صورته الأساسية.
٢. استكمال بيانات جدول السمبلكس الأمثل.
٣. تفسير المعلومات الموضحة في جدول السمبلكس الأمثل تفسيراً اقتصادياً ومحاسبياً.
٤. تحديد درجة استغلال الموارد المتاحة.
٥. تحديد أسعار ظل الموارد.
٦. المنتجات التي لا يتضمنها الحل الأمثل- والسبب في ذلك.

تمرين رقم (٤):

الآتي جدول السمبلكس الأول والمبدئي، لإحدى مشاكل البرمجة الخطية، لتحديد المزيج الإنتاجي الأمثل، بهدف تعظيم ربحية المنشأة؛ والمطلوب:
اختبار مثالية الجدول الأول، ومحاولة التوصل إلى جدول الحل الأمثل (إن أمكن):

رو	٢ صفر $\frac{3}{2}$ صفر							
	٢ غ	٢ غ	١ غ	٣ س	٢ س	١ س		
صفر	صفر	صفر	١	صفر	١ -	١	٢	قيم متغيرات الحل
صفر	صفر	١	صفر	١	صفر	٢	٤	متغيرات الحل
صفر	١	صفر	صفر	١	١	١	٣	٢ غ
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣ غ
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	اختبار المثالية ص
رو - ص	صفر	صفر	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	٢		

تمرين رقم (٥):

المطلوب تعظيم الدالة الآتية:

$$r = 10s_1 + 8s_2$$

وذلك، في ظل القيود الآتية:

$$74 = 5s_1 + 3s_2$$

$$60 \geq 2s_1 + 2s_2$$

$$10 \leq s_1$$

$$\leq \text{صفر} \quad s_1, s_2$$

الفصل الثالث

الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية حالة تدنية (تخفيض) التكاليف

تمرين رقم (١):

تقوم منشأة التوفيق لصناعة الأثاثات المكتبية، بإنتاج نوعين من المنتجات س، ص، وذلك باستخدام ثلاث أنواع من المواد الخام: أ، ب، ج؛ ويظهر الجدول الآتي احتياجات كل منتج من كل نوع من أنواع الخامات، والحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة من كل نوع من المواد الخام، وذلك كالآتي:

أدنى حد من الاحتياجات	المنتجات		الخامات
	ص	س	
٢٠	٥	٤	أ
٣٠	٣	١٢	ب
١٢	٢	٣	ج

وتبلغ تكلفة الوحدة من المنتج س: ٣ جنيهات، ومن المنتج ص: ٢ جنيهات. والمطلوب: التوصل إلى الحل الأمثل الذي يعمل على تدنية أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، وذلك مستخدماً طريقة السمبلكس.

الإجابة

• صياغة نموذج البرمجة الخطية لتدنية التكاليف:

▪ دالة الهدف:

$$\text{المطلوب تخفيض (تدنية) الدالة } T = 3س١ + 2س٢$$

▪ وذلك طبقاً للقيود الآتية:

$$20 \leq 5س١ + 4س٢$$

$$30 \leq 3س١ + 12س٢$$

$$12 \leq 2س١ + 3س٢$$

▪ وذلك طبقاً لشرط عدم السالبة:

$$س١، س٢ \geq \text{صفر}$$

تحويل المتباينات إلى معادلات:

يتم تحويل المتباينات التي من النوع "أكبر من أو يساوي" \leq إلى معادلات؛ عن طريق اضافة متغيرات راسمة بإشارة سالبة، ولها معامل تكلفة = صفر؛ ثم اضافة متغيرات اصطناعية بإشارة موجبة، ولها معامل تكلفة متناهي في الكبر (م)؛ وعادة ما تأخذ الرموز r_1, r_2, \dots, r_n لتميزها عن كل من: المتغيرات الأصلية، والمتغيرات الراكدة، حيث يظهر ذلك على النحو الآتي:

$$20 = r_1 + 1G - 2S_5 + 1S_4$$

$$30 = r_2 + 2G - 2S_3 + 1S_2$$

$$12 = r_3 + 2G - 2S_2 + 1S_3$$

جدول الحل المبدئي:

يظهر جدول السمبلكس الأول كالآتي:

ت _و	قيم متغيرات الحل		٢	٣	٢س	١س	م
	متغيرات الحل	١					
م	١	٢٠	٥	٤	١ -	صفر	صفر
م	٢	٣٠	٣	١٢	١ -	صفر	صفر
م	٣	١٢	٢	٣	صفر	١ -	صفر
اختبار المثالية ص _و		٦٢ م	١٠ م	١٩ م	م -	م -	م -
ت _و - ص _و			١٠ - ٢ م	١٩ - ٣ م	م	م	م

قواعد إعداد جداول السمبلكس:

يوضح الجدول المبين أعلاه (الحل المبدئي): أنه يحقق تكلفة مغالى فيها تبلغ (٦٢م)، كما يتبين من قيم معاملات المتغيرات في صف التقييم النهائي (ر_و - ص_و)، أنها معاملات سالبة، وهذا يعني أن الحل السابق لا يمثل الحل الامثل، ومن ثم فلا بد من تحسين الحل، بالانتقال إلى حل آخر أفضل منه على النحو الآتي:

١- يظهر تحت عمود المتغير س_١ أكبر قيمة سالبة في صف (ر و - ص و)؛
وعلى ذلك فإن عمود س_١ يعتبر هو عمود المفتاح.

٢- يتم اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل س_١ محله وذلك على النحو الآتي:

$$\text{صف } ١ = ٢٠ \div ٤ = ٥$$

$$\text{صف } ٢ = ٣٠ \div ١٢ = ٥ (وهي هنا تمثل أصغر قيمة موجبة)$$

$$\text{صف } ٣ = ١٢ \div ٣ = ٤$$

وعلى ذلك فإن صف ٢ يعتبر هو صف المفتاح، لأنه يمثل أصغر قيمة موجبة.

٣- رقم المفتاح هو (١٢)

٤- تعديل الصفوف:

أولاً: تعديل صف المفتاح وذلك عن طريق: قسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ رقم المفتاح ١٢، حيث يظهر ذلك على النحو الآتي:

$$\left[\begin{array}{ccc} ١ & \frac{5}{2} & \text{صفر} \\ \frac{1}{4} & \text{صفر} & \frac{1}{12} \end{array} \right]$$

ثانياً: تعديل صف ١ وفقاً للقاعدة السابق توضيحها (في نموذج

$$\text{البرمجة حالة تعظيم الربحية) مع ملاحظة أن المعدل الثابت} = \frac{1}{3}$$

القاعدة التي تتبع في تعديل الصفوف الأخرى، تقوم على الأساس الآتي:

الرقم الجديد = الرقم في الصف القديم - [(الرقم المناظر في صف

المفتاح) × المعدل ثابت]

$$\text{حيث أن: المعدل الثابت} = \frac{\text{الرقم القديم في عمود المفتاح}}{\text{رقم المفتاح}}$$

$$٢٠ - ٣٠ \times \frac{1}{3} = ١٠$$

$$٤ - ١٢ \times \frac{1}{3} = \text{صفر}$$

$$٥ - ٣ \times \frac{3}{1} = ٤$$

$$١ - \text{صفر} \times \frac{1}{3} = ١$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times (1-) - \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{3} \times \text{صفر} - \text{صفر}$$

ثالثاً: تعديل صف ر₃ مع ملاحظة أن المعدل الثابت = $\frac{1}{4}$

$$\frac{18}{4} = \frac{1}{4} \times 30 - 12$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{4} \times 12 - 3$$

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{4} \times 3 - 2$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{4} \times \text{صفر} - \text{صفر}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times (1-) - \text{صفر}$$

$$1- = \frac{1}{4} \times \text{صفر} - 1-$$

ومن ثم فإن جدول السمبلكس الثاني سيظهر على النحو الآتي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س _١	٢ س _٢	صفر غ _١	صفر غ _٢	صفر غ _٣
م	ر	١٠	صفر	٤	١-	$\frac{1}{3}$	صفر
٣	س _١	$\frac{5}{2}$	١	$\frac{1}{4}$	صفر	$\frac{1}{12}$ -	صفر
م	ر	$\frac{18}{4}$	صفر	$\frac{5}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$	١-
اختبار المثالية ص و							
م	$\frac{29}{2} + \frac{15}{2}$		٣	$\frac{21}{4} + \frac{3}{4}$	م	$\frac{7}{12} + \frac{1}{4}$	م
ت و - ص و			صفر	$\frac{21}{4} - \frac{5}{4}$	م	$\frac{7}{12} - \frac{1}{4}$	م

هذا وقد تم حساب أدنى تكلفة [صف ص و] كالآتي:

$$١- \text{ أدنى تكلفة} = ١٠م + \frac{15}{2} + \frac{18}{4}م = \frac{29}{2} + \frac{15}{2}$$

هذا وقد تم حساب الأرقام الظاهرة في صف (ت - ص) كالآتي:

$$1- \text{عمود س}_1 = 3 - (م \times \text{صفر} + 1 \times 3 + م \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$2- \text{عمود س}_2 = 2 - (م \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + م \frac{4}{4}) = \frac{21}{4} - \frac{5}{4} = م \frac{16}{4}$$

$$3- \text{عمود غ}_1 = \text{صفر} - (م - م + \text{صفر} + \text{صفر}) = م$$

$$4- \text{عمود غ}_2 = \text{صفر} - (م \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - م \frac{1}{3}) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = م \frac{1}{6}$$

$$5- \text{عمود غ}_3 = \text{صفر} - (\text{صفر} + \text{صفر} - م) = م$$

• تحسين الحل:

1- يلاحظ أن عمود س₂ يمثل عمود المفتاح، وذلك نظراً لأن له أكبر

قيمة سالبة تساهم في تخفيض التكاليف.

2- يتم اختبار الصفوف بهدف تحديد المتغير الخارج، والذي يحل س₂

محله كالآتي:

$$\text{صف ر}_1 = 10 \div 4 = \frac{5}{2} \text{ (وهي تمثل هنا أصغر قيمة موجبة)}$$

$$\text{صف س}_1 = \frac{1}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{2}{10}$$

$$\text{صف ر}_2 = \frac{18}{5} \div \frac{18}{4} = \frac{4}{5}$$

ومن ثم فإن صف ر₁ يمثل صف المفتاح، لأن له أصغر قيمة موجبة.

3- رقم المفتاح هو (4)

4- تعديل الصفوف:

أ. تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيه ÷ 4، حيث يظهر

على النحو الآتي:

$$\frac{5}{2} \quad \text{صفر} \quad 1 \quad - \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \text{صفر}$$

ب. تعديل الصفوف:

$\frac{1}{16}$ تعديل صف س₁ مع ملاحظة أن المعدل الثابت

$$\frac{30}{16} = \frac{1}{16} \times 10 - \frac{5}{2}$$

$$1 - \text{صفر} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{4} - \text{صفر} = \frac{1}{16} \times 4$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{16} \times (-1) - \text{صفر}$$

$$\frac{5}{48} - \text{صفر} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} = \frac{1}{16} \times \text{صفر}$$

$\frac{5}{16}$ تعديل صف ر₃ مع ملاحظة أن المعدل الثابت =

$$\frac{22}{16} = \frac{5}{16} \times 10 - \frac{18}{4}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} = \frac{5}{16} \times \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = \frac{5}{16} \times 4 - \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{16} = \frac{5}{16} \times (-1) - \text{صفر}$$

$$\frac{7}{48} = \frac{5}{16} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \text{صفر} = \frac{5}{16} \times \text{صفر}$$

ويظهر جدول السمبلكس الثالث كالآتي:

ت و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	٣ س _١	٢ س _٢	صفر غ _١	صفر غ _٢	صفر غ _٣
٢	س _٢	$\frac{5}{2}$	صفر	١	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	صفر
٣	س _١	$\frac{30}{16}$	١	صفر	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{48}$	صفر
م	ر	$\frac{22}{16}$	صفر	صفر	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{48}$	١-
اختبار المثالية ص و		$\frac{22}{16} + \frac{170}{16}$	٣	٢	$\frac{5}{16} + \frac{5}{16}$	$\frac{7}{48} + \frac{23}{48}$	م-
ت و - ص و			صفر	صفر	$\frac{5}{16} - \frac{5}{16}$	$\frac{7}{48} - \frac{23}{48}$	م

وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالآتي:

$$\text{أدنى تكلفة} = \left(2 \times \frac{5}{2} + 3 \times \frac{30}{16} + م \times \frac{22}{16} \right) = \frac{22}{16} + \frac{170}{16}$$

وقد تم حساب أرقام صف (ت و - ص و) كالآتي:

$$\begin{aligned} ١- \text{عمود س}_١ &= ٣ - (٢ \times \text{صفر} + ١ \times م + \text{صفر} \times م) \\ ٢- \text{عمود س}_٢ &= ٢ - (١ \times ٢ + ٣ \times \text{صفر} + م \times \text{صفر}) \\ ٣- \text{عمود غ}_١ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{صفر} - &= \left(2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{16} + م \times \frac{5}{16} \right) - \frac{5}{16} \\ ٤- \text{عمود غ}_٢ &= \end{aligned}$$

$$\text{صفر} - = \left(2 \times \frac{1}{12} + 3 \times \left(\frac{5}{48} - \right) + م \times \frac{7}{48} \right) - \frac{23}{48}$$

$$٥- \text{عمود غ}_٣ = \text{صفر} - (٢ \times \text{صفر} + ٣ \times \text{صفر} + م \times ١) = ١ - م$$

• تحسين الحل:

يتبين من معاملات المتغيرات كما تظهر في صف التقييم النهائي: أنه لا يزال هناك معاملات سالبة يمكن أن تساهم في تخفيض التكاليف، ويتحدد اقتراح حل آخر أفضل من السابق كالاتي:

- ١- عمود س_٣ هو عمود المفتاح؛ حيث أن له أكبر قيمة سالبة.
- ٢- اختبار الصفوف لتحديد المتغير الخارج الذي يحل س_٣ محله يتم على النحو الآتي:

$$\text{صف س}_2 = \frac{1}{4} \div \frac{5}{2} = 10-$$

$$\text{صف س}_1 = \frac{1}{16} \div \frac{30}{16} = 30$$

$$\text{صف س}_3 = \frac{22}{5} = \frac{5}{16} \div \frac{22}{16} \text{ (وهي تمثل أصغر قيمة موجبة).}$$

وبذلك يكون صف س_٣ هو صف المفتاح، حيث أنه ذو أصغر قيمة موجبة.

$$\text{٣- رقم المفتاح هو } \frac{5}{16}$$

٤- تعديل الصفوف

أ - تعديل صف المفتاح بقسمة الأرقام الظاهرة فيه على رقم المفتاح:

$$\frac{22}{5} \quad \text{صفر} \quad \text{صفر} \quad 1 \quad \frac{7}{15} \quad - \quad \frac{16}{5}$$

ب- تعديل الصفوف:

$$\text{تعديل صف س}_2 \text{ مع ملاحظة أن المعدل الثابت} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{18}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{22}{16} - \frac{5}{2}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} \times \frac{4}{5} = \text{صفر}$$

$$1 - \text{صفر} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} - \text{صفر} = \frac{4}{5} - \frac{5}{16} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{48} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{4}{5} - \text{صفر} = \frac{4}{5} \times (1 -)$$

تعديل صف س₁ مع ملاحظة أن المعدل الثابت $\frac{1}{5}$

$$\frac{8}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{22}{16} - \frac{30}{16}$$

$$1 - \text{صفر} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{صفر} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{16} - \frac{1}{16}$$

$$\frac{4}{15} - \text{صفر} = \frac{1}{5} \times \frac{7}{48} - \frac{5}{48}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times (1 -)$$

ويظهر جدول السمبلكس الرابع كالاتي:

ت و	متغيرات	قيم متغيرات	٣	٢	صفر	صفر	صفر
	الحل	الحل	س _١	س _٢	غ _١	غ _٢	غ _٣
٢	س _٢	$\frac{8}{15}$	صفر	١	صفر	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
٣	س _١	$\frac{8}{5}$	١	صفر	صفر	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
صفر	س _١	$\frac{22}{5}$	صفر	صفر	١	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{5}$
اختبار المثالية ص و ١٢			٣	٢	صفر	صفر	١ -
(ت و - ص و)			صفر	صفر	صفر	صفر	١

وقد تم حساب أدنى تكلفة (ص و) كالآتي:

$$\text{أدنى تكلفة} = \left(2 \times \frac{18}{5} + 3 \times \frac{8}{5} + \text{صفر} \times \frac{22}{5} \right) = 12$$

وقد تم حساب أرقام صف (ت و - ص و) كالآتي:

$$\begin{aligned} 1- \text{عمود س}_1 &= 3 - (2 \times \text{صفر} + 1 \times 3 + \text{صفر} \times \text{صفر}) = \text{صفر} \\ 2- \text{عمود س}_2 &= 2 - (1 \times 2 + 3 \times \text{صفر} + \text{صفر} \times \text{صفر}) = \text{صفر} \\ 3- \text{عمود غ}_1 &= \text{صفر} - (2 \times \text{صفر} + 3 \times \text{صفر} + 1 \times \text{صفر}) = \text{صفر} \\ 4- \text{عمود غ}_2 &= \text{صفر} - \left(2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \left(\frac{2}{15} \right) + \text{صفر} \times \frac{7}{15} \right) = \text{صفر} \\ 5- \text{عمود غ}_3 &= \text{صفر} - \left(2 \times \left(\frac{4}{5} \right) + 3 \times \frac{1}{5} + \text{صفر} \times \left(\frac{16}{5} \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

• تفسير الحل الأمثل:

يتبين من قيم معاملات المتغيرات والظاهرة في صف التقييم النهائي (ت و - ص و) في جدول السمبلكس الرابع، أنها أصبحت كلها إما قيماً موجبة أو صفرية، ولا توجد أية قيم سالبة، ومن ثم فإنه لا توجد هناك أية إمكانية لتخفيض التكاليف إلى أكثر من ذلك؛ ونلاحظ هنا أن أية محاولة لتعديل الحل بإضافة وحدة من أحد المتغيرات، لن يؤثر علي التكاليف - بالنسبة للمعاملات الصفرية - بل قد يؤدي إلي زيادة التكاليف - بالنسبة للمعاملات الموجبة، وعلى ذلك فإن جدول السمبلكس الرابع يعتبر بمثابة الحل الأمثل للمشكلة؛ والذي يتحدد كالآتي:

$$\text{س}_1 = \frac{8}{5} \text{ وحدة}$$

$$\text{س}_2 = \frac{18}{5} \text{ وحدة}$$

$$\frac{22}{5} = \text{غ} \text{ ١}$$

$$\text{غ} \text{ ٢} = \text{صفر}$$

$$\text{غ} \text{ ٣} = \text{صفر}$$

كما أن أدنى تكلفة للإنتاج هي: ١٢ جنيهاً.

ويكون مقدار الخامات الداخلة في وحدة المنتج كالاتي:

$$\frac{122}{5} = ٥ \times \frac{18}{5} + ٤ \times \frac{8}{5} = \text{المادة الخام أ}$$

والمتغير الراكذ غ ١ يمثل زيادة المادة الخام أ عن الحد الأدنى المقرر

$$\frac{22}{5} = 20 - \frac{122}{5} =$$

$$30 = \frac{150}{5} = \frac{54}{5} + \frac{96}{5} = 3 \times \frac{18}{5} + 12 \times \frac{8}{5} = \text{المادة الخام ب}$$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

$$12 = \frac{60}{5} = \frac{36}{5} + \frac{24}{5} = 2 \times \frac{18}{5} + 3 \times \frac{8}{5} = \text{المادة الخام ج}$$

ونلاحظ هنا أنها تحقق الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة.

تمرين (٢):

تنتج منشأة القدس الشريف الصناعية منتجاً مُكوَّناً من ثلاثة أنواع من المواد الخام هي: (أ)، (ب)، (ج)؛ وتقوم المنشأة حالياً بإنتاج طلبية للتصدير للخارج، وهي عبارة عن ١٠.٠٠٠ وحدة من هذا المنتج؛ إلا أن طلب التصدير هذا يقوم على عدة اشتراطات يجب الوفاء بها، وهي:

- ١- ألا يزيد المستخدم من المادة الخام (أ) عن ٣٠٠٠ كيلوجرام.
 - ٢- وجوب استخدام ١٥٠٠ كيلو جرام على الأقل من المادة الخام (ب).
 - ٣- وجوب استخدام ٢٠٠٠ كيلو جرام على الأقل من المادة الخام (ج).
- هذا، وتبلغ تكلفة الكيلو من المادة الخام أ: ٨ جنيهاً، ومن المادة الخام ب: ١٠ جنيهاً، ومن المادة الخام ج: ١١ جنيهاً.

والمطلوب: استخدام طريقة السمبلكس، في تحديد الكمية المثلى من كل مادة خام، والتي تؤدي إلى تدنية (تخفيض) التكلفة إلى أدنى حد ممكن.

تمرين رقم (٣):

تقوم منشأة طيبة الصناعية، بإنتاج طلبية لأحد عملائها، حيث تتكون هذه الطلبية من ١٠٠٠ كيلو جرام من خليط من ثلاثة أصناف من المواد الخام (أ)، (ب)، (ج)؛ وتبلغ تكلفة الكيلو جرام من هذه الخامات على النحو الآتي: ٥ جنيهات، ٦ جنيهات، ٧ جنيهات، علي الترتيب. هذا وتتطلب مواصفات إنتاج هذه الطلبية: عدم إمكانية استخدام أكثر من ٣٠٠ كيلو جرام من الصنف (أ)؛ مع وجوب استخدام ١٥٠ كيلو جرام علي الأقل من الصنف (ب)؛ وكذلك وجوب استخدام ٢٠٠ كيلو جرام علي الأقل من الصنف (ج).
والمطلوب: تقديم استشارتك المحاسبية اللازمة، لإدارة المنشأة المذكورة، بشأن تحديد الكمية اللازمة من كل صنف من المواد الخام، بحيث تنخفض التكلفة إلى أدنى حد ممكن.

الفصل الرابع المشكلة الثنائية في البرمجة الخطية

تمرين رقم (١):

الآتي نموذج البرمجة الخطية لإحدى مشكلات منشأة التيسير الصناعية:

$$\text{تعظيم أرباح} = ٢٤٠ \text{ س}_١ + ٣٦٠ \text{ س}_٢ + ٤٨٠ \text{ س}_٣$$

طبقاً للقيود الآتية:

$$٦٠٠ \geq ٣ \text{ س}_١ + ٤ \text{ س}_٢ + ٢ \text{ س}_٣$$

$$٩٠٠ \geq ٢ \text{ س}_١ + ٢ \text{ س}_٢ + ٢ \text{ س}_٣$$

$$١٢٠٠ \geq ١ \text{ س}_١ + ٣ \text{ س}_٢ + ٢ \text{ س}_٣$$

وذلك طبقاً لشرط عدم السالبة:

$$\text{س}_١ \geq ٠ ; \text{س}_٢ \geq ٠ ; \text{س}_٣ \geq ٠$$

والمطلوب: اعداد النموذج الثنائي للنموذج الأصلي المبين أعلاه.

الإجابة

$$\text{تدنية تكاليف: } ٦٠٠ \text{ س}_١ + ٩٠٠ \text{ س}_٢ + ١٢٠٠ \text{ س}_٣$$

طبقاً للقيود الآتية:

$$٢٤٠ \leq ٣ \text{ س}_١ + ٢ \text{ س}_٢ + ٢ \text{ س}_٣$$

$$٣٦٠ \leq ٢ \text{ س}_١ + ٢ \text{ س}_٢ + ٣ \text{ س}_٣$$

$$٤٨٠ \leq ٢ \text{ س}_١ + ٢ \text{ س}_٢ + ٢ \text{ س}_٣$$

وذلك طبقاً لشرط عدم السالبة:

$$\text{س}_١ \geq ٠ ; \text{س}_٢ \geq ٠ ; \text{س}_٣ \geq ٠$$

تمرين رقم (٢):

الآتي نموذج البرمجة الخطية لمشكلة تخصيص موارد لمنشأة التوفيق

$$\text{الصناعية: تعظيم أرباح} = ٣٠٠ \text{ س}_١ + ٦٠٠ \text{ س}_٢ + ٩٠٠ \text{ س}_٣$$

طبقاً للقيود الآتية:

$$٦٠ \geq ٣ \text{ س}_١ + ٤ \text{ س}_٢ + ٥ \text{ س}_٣$$

$$2s_1 + s_2 + 2s_3 \geq 40$$

$$6s_1 + 7s_2 + 8s_3 \geq 80$$

وطبقا لشرط عدم السالبة فإن:

$$s_1 + s_2 + s_3 \leq \text{صفر}$$

والمطلوب: استنتاج النموذج الثنائي له.

الإجابة

يمكن استنتاج وإعداد النموذج الثنائي على النحو الآتي:

دالة الهدف: المطلوب تخفيض الدالة الآتية:

$$z = 60s_1 + 40s_2 + 80s_3$$

طبقا للقيود الآتية:

$$3s_1 + 2s_2 + 6s_3 \leq 300$$

$$4s_1 + s_2 + 7s_3 \leq 600$$

$$5s_1 + 2s_2 + 8s_3 \leq 900$$

وطبقا لشرط عدم السالبة فإن:

$$s_1 \geq 0 ; s_2 \geq 0 ; s_3 \geq 0$$

تمرين رقم (٣):

تنتج منشأة البشائر الصناعية منتجين: س ، ص ، وذلك من خلال ٣ مراحل إنتاجية؛ وقد تم صياغة نموذج البرمجة الخطية الأصلي للمشكلة على النحو الآتي:

$$\text{المطلوب تعظيم الدالة } z = 6s_1 + 10s_2$$

وذلك في ظل القيود:

$$6s_1 + 4s_2 \geq 36$$

$$2s_1 \geq 8$$

$$2s_2 \geq 12$$

وذلك بشرط أن: $s_1 \geq 0 ; s_2 \geq 0$

والمطلوب:

١. حل المشكلة الأصلية.
٢. حل المشكلة الثنائية.
٣. مطابقة الحلول، والنتائج.

الإجابة

أولاً: حل المشكلة الأصلية:

من خلال اتباع قواعد نموذج البرمجة الخطية تعظيم ربحية، فإنه يمكن إعداد جدول السمبلكس الأول على النحو الآتي:

٦ ١٠						صفر صفر صفر		رو
١س	٢س	١غ	٢غ	٣غ	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل		
٦	٤	١	صفر	صفر	٣٦	١غ	صفر	
٢	صفر	صفر	١	صفر	٨	٢غ	صفر	
صفر	٢	صفر	صفر	١	١٢	٣غ	صفر	
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	اختبار المثالية ص و		
٦	١٠	صفر	صفر	صفر		رو - ص و		

وباتباع خطوات حل نموذج البرمجة الخطية، بتطبيق القواعد التي سبق بيانها في قواعد تطبيق طريقة السمبلكس لتعظيم الربحية: فإننا يمكننا الوصول إلى جدول السمبلكس الأمثل الآتي:

٦ ١٠						صفر صفر صفر		رو
١س	٢س	١غ	٢غ	٣غ	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل		
١	صفر	$\frac{1}{6}$	صفر	$\frac{1-}{3}$	٢	١س	٦	
صفر	صفر	$\frac{1-}{3}$	١	$\frac{2}{3}$	٤	٢غ	صفر	
صفر	١	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	٦	٢س	١٠	
٦	١٠	١	صفر	٣	٧٢	اختبار المثالية ص و		
صفر	صفر	١-	صفر	٣-		رو - ص و		

ويلاحظ على جدول السمبلكس الأمثل السابق الآتي:

- ١- الحل يعتبر حلاً أمثلاً؛ وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي (ر - ص و): صفرية أو سالبة.
- ٢- يتحدد مزيج الإنتاج الأمثل كالآتي:
 س_١ = ٢ وحدة، س_٢ = ٦ وحدات، كما أن أقصى ربح = ٧٢ جنيهاً.
- ٣- هناك طاقة عاطلة فائضة في المورد الثاني يمثلها المتغير الراكذ غ_٢ وقدرها ٤ ساعات.
- ٤- أسعار ظل الموارد تتحدد على النحو الآتي:
 أ- المورد الأول له سعر ظل = ١ جنيهاً واحداً، وطاقته مستغلة بالكامل.
 ب- المورد الثالث له سعر ظل = ٣ جنيهاً، وطاقته مستغلة بالكامل.
 ج- المورد الثاني له سعر ظل = صفر، لأن به طاقة عاطلة قدرها ٤ ساعات.

حل المشكلة الثنائية (المقابلة):

يمكن تحويل المشكلة الأصلية، إلى مشكلة مقابلة، على النحو الآتي:
المطلوب تدنية الدالة:

$$ت و = ٣٦ ص١ + ٨ ص٢ + ١٢ ص٣$$

وذلك طبقاً للقيود الآتية:

$$٦ \leq ٢ ص١ + ٢ ص٢$$

$$١٠ \leq ٢ ص٢ + ٣ ص٣$$

وطبقاً لشرط عدم السالبية فإن:

$$ص١ \geq ٠ ; ص٢ \geq ٠ ; ص٣ \geq ٠$$

ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي الذي يهدف إلى تخفيض أو تدنية التكاليف كالآتي:

٣٦ ٨ ١٢ صفر صفر						متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	متغيرات الحل	ت و
٢غ	١غ	٣ص	٢ص	١ص	١				
صفر	$\frac{1-}{6}$	صفر	$\frac{1}{3}$	١	١	١ص	٣٦		
$\frac{1-}{2}$	$\frac{1}{3}$	١	$\frac{2-}{3}$	صفر	٣	٢ص	١٢		
٦-	٢-	١٢	٤	٣٦	٧٢	اختبار المثالية ص و			
٦	٢	صفر	٤	صفر	ت و - ص و				

ويلاحظ علي جدول السمبلكس الأمثل السابق أنه يمثل الحل الأمثل، وذلك لأن معاملات كل المتغيرات في صف التقييم النهائي (ت و - ص و) صفرية أو موجبة.

مطابقة الحلول والتحقق:

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي لتعظيم الأرباح: هي نفسها قيمة دالة الهدف في النموذج الثنائي لتدنية (تخفيض) التكاليف؛ وتحسب كالآتي:

<u>تخفيض تكاليف</u>	<u>تعظيم أرباح</u>
$= ٣٦ص١ + ٨ص٢ + ١٢ص٣$	$٦س١ + ١٠س٢$
$= ٣٦ \times ١ + ٨ \times صفر + ١٢ \times ٣$	$٦ \times ١٠ + ٢ \times ٦ =$
$٧٢ =$	$٧٢ =$

٢- معاملات المتغيرات الراكدة في صف (ر و - ص و) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الثنائية - أسعار ظل الموارد : ص١، ص٢، ص٣ حيث أن:

$$\begin{aligned} ١ &= ١ص١ = ١غ \\ ٢ &= ٢ص٢ = صفرغ \\ ٣ &= ٣ص٣ = ٣غ \end{aligned}$$

٣- معاملات المتغيرات الأصلية س١، س٢، في صف (ر و - ص و) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الثنائي لتخفيض التكاليف حيث أن:

$$س_1 = غ_1 = \text{صفر}$$

$$س_2 = غ_2 = \text{صفر}$$

٤- معاملات المتغيرات الأصلية $س_1$ ، $س_2$ في صف (ر - ص و) في جدول السمبلكس الأصلي لتعظيم الأرباح: تمثل الفرق بين الجانب الأيمن - الذي يمثل التكاليف - والجانب الأيسر الذي يمثل الأرباح - لمعاملات القيود في النموذج الثنائي؛ ويظهر ذلك كما يلي:

$$٦ \leq ٦ص_1 + ٢ص_2$$

$$٦ = ٦ \times ١ + ٢ \times \text{صفر}$$

الفرق بين كلا الجانبين = $٦ - ٦ = \text{صفر}$ وهو معامل $س_1$

$$١٠ \leq ٤ص_1 + ٢ص_2$$

$$١٠ = ٤ \times ١ + ٢ \times ٣$$

الفرق بين كلا الجانبين = $١٠ - ١٠ = \text{صفر}$ وهو معامل $س_2$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة $غ_1$ ، $غ_2$ كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الأساسية $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ كما تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح.

$$٢ = غ_1 = س_1$$

$$٦ = غ_2 = س_2$$

٦- معاملات المتغيرات الأصلية $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الثنائي لتخفيض التكاليف): تمثل قيمة المتغيرات الراكدة $غ_1$ ، $غ_2$ ، $غ_3$ (والتي تظهر في جدول السمبلكس الأمثل الأصلي لتعظيم الأرباح)؛ حيث أن:

$$ص_1 = غ_1 = \text{صفر}$$

$$ص_2 = غ_2 = ٤$$

$$ص_3 = غ_3 = \text{صفر}$$

تمرين رقم (٤):

قدم إليك نموذج البرمجة الخطية الأصلي التالي:

$$\text{المطلوب تدنية التكاليف} = ٦ص_1 + ٣ص_2 + ٤ص_3$$

وذلك طبقا للقيود الآتية:

$$\begin{aligned} 30 & \leq & \text{ص}_1 \\ 50 & \leq & \text{ص}_2 \\ 20 & \leq & \text{ص}_3 \\ 120 & = & \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 \end{aligned}$$

والمطلوب:

١- التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج السابق.

٢- صياغة النموذج الثنائي له.

٣- مطابقة الحلول بين النموذجين الأصلي والثنائي.

١- يظهر جدول السمبلكس الأمثل الأصلي للنموذج السابق لتخفيض التكاليف كالاتي:

ت _و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	ص _١	ص _٢	ص _٣	٤	صفر	صفر	صفر
٦	ص _١	٣٠	١	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر
٣	ص _٢	٧٠	صفر	١	صفر	صفر	١	صفر	١
٤	ص _٣	٢٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
صفر	صفر	٢٠	صفر	صفر	صفر	صفر	١	١	١
	اختبار المثالية ص و	٤٧٠	٦	٣	٤	٣	صفر	صفر	١
ت _و - ص و			صفر	صفر	صفر	٣	صفر	صفر	١

٢- صياغة النموذج الثنائي:

تعظيم أرباح = ٣٠ ص_١ + ٥٠ ص_٢ + ٢٠ ص_٣ + ١٢٠ ص_٤؛
طبقا للقيود الآتية:

$$\begin{aligned} \text{ص}_1 & + \text{ص}_2 & \leq & 6 \\ \text{ص}_2 & + \text{ص}_3 & \leq & 3 \\ \text{ص}_3 & + \text{ص}_4 & \leq & 4 \end{aligned}$$

وطبقا لشرط عدم السالبة:

$$\text{ص}_1؛ \text{ص}_2؛ \text{ص}_3؛ \text{ص}_4 \leq \text{صفر}$$

ويظهر الحل الأمثل للنموذج الثنائي لتعظيم الأرباح كالآتي:

ر _و	متغيرات الحل	قيم متغيرات الحل	س _١	س _٢	س _٣	س _٤	ص _١	ص _٢	ص _٣
٣٠	س _١	٣	١	١-	صفر	صفر	١	١-	صفر
١٢٠	س _٤	٣	صفر	١	صفر	١	صفر	١	صفر
٢٠	س _٢	١	صفر	١-	١	صفر	١-	١	١
اختبار المثالية ص _و		٤٧٠	٣٠	٧٠	٢٠	١٢٠	٣٠	٧٠	٢٠
ر _و - ص _و			صفر	٢٠-	صفر	صفر	٣٠-	٧٠-	٢٠-

وهنا يجب ملاحظة أن المطابقة وتحقيق النتائج تتم من نموذج تعظيم

الأرباح سواءً أكان أصلياً أو ثنائياً إلى نموذج تخفيض التكاليف؛ كما يلاحظ

أيضاً أن المطابقة رقم [٦] (صفحة ١٠٧) لن تتحقق هنا بسبب أن متباينات

النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف ليست كلها من النوع أكبر من أو يساوي،

بل يتضمن النموذج متباينة في شكل متساوية، وبالتالي يمكن إجراء خمس

مطابقات فقط وذلك كما يتبين مما يلي:

١- قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي هي نفسها قيمة دالة الهدف في

النموذج الثنائي وتحسب كالآتي:

تعظيم أرباح

$$٣٠ س١ + ٥٠ س٢ + ٢٠ س٣ + ١٢٠ س٤$$

$$٣٠ (٣) + صفر + ٢٠ (١) + ١٢٠ (٣) = ٤٧٠ جنيهاً$$

تخفيض تكاليف

$$٦ ص١ + ٣ ص٢ + ٤ ص٣$$

$$= ٦ (٣٠) + ٣ (٧٠) + ٤ (٢٠) = ٤٧٠ جنيهاً$$

٢- معاملات المتغيرات الراكدة غ_١، غ_٢، غ_٣، في النموذج الثنائي لتعظيم

الأرباح: تمثل القيم للمتغيرات الأصلية - أسعار الظل - في النموذج الأصلي

لتخفيض التكاليف.

$$٣٠ = ١ ص = ١ غ$$

$$٧٠ = ٢ ص = ٢ غ$$

$$٢٠ = ٣ ص = ٣ غ$$

٣- معاملات المتغيرات الأصلية س_١، س_٢، س_٣، كما تظهر في صف التقييم النهائي في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح: تمثل قيم المتغيرات الراكدة في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف:

$$س_١ = غ_١ = صفر$$

$$س_٢ = غ_٢ = ٢٠$$

$$س_٣ = غ_٣ = صفر$$

٤- معاملات المتغيرات الأصلية س_١، س_٢، س_٣، كما تظهر في صف (رو - ص و) في جدول السمبلكس الثنائي لتعظيم الأرباح هي الفرق بين الجانب الأيمن - التكاليف - والجانب الأيسر - الأرباح - لمعاملات القيود في النموذج الأصلي لتخفيض التكاليف.

حيث يظهر كالاتي:

$$ص_١ \leq ٣٠$$

$$٣٠ - ٣٠ = صفر معامل س_١$$

$$ص_٢ \leq ٥٠$$

$$٥٠ - ٧٠ = ٢٠ معامل س_٢$$

$$ص_٣ \leq ٢٠$$

$$٢٠ - ٢٠ = صفر معامل س_٣$$

$$ص_١ + ص_٢ + ص_٣ = ١٢٠$$

$$١٢٠ = (٣٠)١ + (٧٠)١ + (١٠٢٠)$$

$$١٢٠ - ١٢٠ = صفر معامل س_٣$$

٥- معاملات المتغيرات الراكدة غ_١، غ_٢، غ_٣ كما تظهر في صف (رو - ص و) في جدول السمبلكس الأمثل لتخفيض التكاليف: تمثل القيم المثلى للمتغيرات الأساسية س_١، س_٢، س_٣ كما تظهر في صف (رو - ص و) في جدول السمبلكس الأمثل لتعظيم الأرباح حيث أن:

$$ص_١ = س_١ = ٣$$

$$ص_٢ = س_٢ = صفر$$

$$ص_٣ = س_٣ = ١$$

الفصل الثامن

طرق النقل والتعيين

أولاً: أسئلة نظرية:

١/١ - لكل سؤال من الأسئلة التالية عدة إجابات والمطلوب تحديد الإجابة الصحيحة منها:

١ - إذا كان عدد المصادر أربعة والمنافذ ثلاثة، فإنه لإعداد الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي يلزم:

أ - إضافة مصدر وهمي. ب - إضافة منفذ وهمي.

ج - كل ما سبق. د - لا شيء مما سبق.

٢ - إذا كان عدد المصادر ٤ والمنافذ ٣ فإن عدد الخلايا المشغولة في أي جدول لحل هذه المشكلة يلزم أن يكون:

أ - ٤ خلايا. ب - ٧ خلايا.

ج - ٣ خلايا. د - لا شيء مما سبق.

٣ - بفرض أنه تم إضافة كمية صفرية لإحدى الخلايا الفارغة حتى يكون الحل ممكن، فإنه بعد تحسين الحل والانتقال إلى حل آخر خلاف الحل الحالي، فإن الخلية الصفرية السابق إضافتها يمكن أن:

أ - تظل مكانها. ب - تتحول من مكانها.

ج - تصبح مشغولة بكمية فعالية. د - كل ما سبق.

٤ - حيث أن مشاكل النقل ومشاكل التعيين تعتبر نوع من مشاكل البرمجة الخطية فإن:

أ - مشاكل النقل والتعيين يمكن حلها بطريقة السمبلكس.

ب - كل مشاكل البرمجة الخطية تحل بطريقة النقل والتعيين.

ج - مشاكل التعيين تحل بطريقة النقل.

د - مشاكل النقل تحل بطريقة التعيين.

٥ - حتى يمكن حل مشكلة النقل بطريقة النقل فإنه يلزم توافر حالة التوازن، ولتوفير حالة التوازن يلزم أن يكون:

- أ - عدد المصادر يساوي عدد المنافذ.
 ب- تساوي طاقات جميع المصادر.
 ج - تساوي احتياجات جميع المنافذ. د - لا شئ مما سبق.
- ٦ - عند حل مشاكل التعيين إذا كان عدد الصفوف (الموارد أو الإمكانيات مثلاً) ثلاثة وعدد الأعمدة (الاستخدامات) خمسة فإنه يلزم:
 أ - إضافة صف. ب- إضافة صفين.
 ج - حذف عمودين. د - لا شئ مما سبق.
- ٧ - بفرض أن عدد الصفوف في إحدى مشاكل التعيين كان ٤ صفوف، فإن الحل يكون أمثل إذا كانت هناك على الأقل:
 أ - ٣ خلايا صفرية مستقلة. ب- ٥ خلايا صفرية مستقلة.
 ج - ٤ خلايا صفرية مستقلة. د- لا شئ مما سبق.
- ٨ - الكمية الممكن نقلها إلى الخلية المراد شغلها عند تحسين الحل في مشاكل النقل تتمثل في:
 أ - أقل كمية في جميع خلايا المسار المغلق لهذه الخلية.
 ب- أكبر كمية في جميع خلايا المسار المغلق لهذه الخلية.
 ج - أكبر كمية في جميع الخلايا التي اشارتها سالبة في المسار المغلق.
 د - أقل كمية في جميع الخلايا التي اشارتها موجبة في المسار المغلق.
 هـ- لا شئ مما سبق.
- ٩ - يكون الحل أمثل في حالة تخفيض تكاليف النقل إذا كانت تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة:
 أ - موجبة. ب- سالبة.
 ج- سالبة وصفر. د - موجبة وصفر.
 هـ- لا شئ مما سبق.
- ١٠ - يكون الحل الأمثل حل وحيد في مشاكل النقل تعظيم أرباح إذا كانت تكلفة الفرصة لجميع الخلايا الفارغة:
 أ - موجبة. ب- سالبة وصفر. ج - سالبة.
 د - موجبة وصفر. هـ- لا شئ مما سبق.

- ١١ - طبقاً لخاصية التتابعية في البرامج الخطية فإن كل حل في مشاكل النقل يعطي تكلفة:
- أ - تساوي تكلفة الحل السابق له. ب- تقل عن تكلفة الحل السابق له.
ج - تزيد عن تكلفة الحل السابق له. د- لا شيء مما سبق.
- ٢/٢ - حدد صحة أو خطأ العبارات التالية (مع التعليل باختصار):
- ١ - تعطي طريقة الركن الشمالي الشرقي أقل تكلفة نقل للحل المبدئي.
٢ - تصلح طريقة حجر الوطاء لاختبار الحل المبدئي المعد وفقاً لطريقة فوجل التقريبية فقط.
- ٣ - يلزم في جميع مشاكل النقل تساوي عدد المصادر مع عدد المنافذ حتى يتوافر شرط التوازن.
- ٤ - تختلف تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة باختلاف قيم الصفوف والأعمدة والتي تختلف بدورها باختلاف الصف أو العمود الذي يفترض أن قيمته صفر عند اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل.
- ٥ - إذا اكتمل صف وعمود في وقت واحد عند تطبيق طريقة فوجل التقريبية لإعداد الحل المبدئي، يتم حذفهما معاً للتوصل إلى الحل المبدئي بصورة أسرع.
- ٦ - الخلايا الفارغة في الصف أو في العمود الصوري تؤخذ في الاعتبار عند اختبار مثالية الحل.
- ٧ - لا يتأثر جدول الحل سواء كان عدد خلايا المسار المغلق للخلية المراد شغلها زوجي أو فردي.
- ٨ - حيث أن مشاكل النقل تعتبر نوعاً خاصاً من مشاكل البرمجة الخطية، فإنه وفقاً لخاصية التتابعية فإن كل جدول حل في مشاكل تعظيم الأرباح يعطي أرباحاً تساوي أرباح الجدول السابق له أو تزيد عنها.
- ٩ - في مشاكل التعيين يمكن أن تكون القيمة التي تعين لأي خلية أكبر من واحد صحيح ولكن لا يصح أن تكون أقل من واحد صحيح.
- ١٠ - كل مشكلة تعيين يكون لها حل بطريقة السمبلكس.

ثانياً: حالات عملية

الحالة الأولى:

تمتلك إحدى الشركات الصناعية ثلاثة مصانع أ، ب، ج، أ، ب، ج، تبلغ الطاقة الإنتاجية السنوية لها ٤٠٠، ٥٠٠، ٨٠٠ وحدة على الترتيب، كما تمتلك ثلاثة مراكز للتوزيع ب١، ب٢، ب٣ تبلغ الطاقة التسويقية السنوية لها ٦٠٠، ٧٥٠، ٣٥٠ وحدة على الترتيب، هذا وتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل مركز كانت كما يلي: (بالجنيه):

	ب١	ب٢	ب٣
أ١	٢٥	٣٠	٣٠
أ٢	٤٥	٤٠	٦٠
أ٣	١٠	٧٠	٩٠

والمطلوب: إعداد برنامج النقل الأمثل الذي يحمل الشركة أقل تكلفة نقل ممكنة. (يتم إعداد الحل المبدئي بطريقة أقل تكلفة واختبار المثالية بطريقة حجر الوطء.)

الحل المقترح

أولاً: إعداد جدول الحل المبدئي:

الطاقات	ب١	ب٢	ب٣	مراكز البيع المصانع
٤٠٠	٢٥	٣٠	٣٠	أ١
٥٠٠	٤٥	٤٠	٥٠	أ٢
٨٠٠	١٠	٧٠	٩٠	أ٣
١٧٠٠	٦٠٠	٧٥٠	٣٥٠	الاحتياجات

ملاحظات على جدول الحل السابق:

- عدد الخلايا المشغولة خمس خلايا أي يساوي (عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١)، أي أن هذا حل ممكن مسموح به ويمكن اختبار مثاليته.
 - تم البدء بملء الخلية أ_٢ ب_١ لأن لها أقل تكلفة نقل ثم الخلية أ_١ ب_٢ ، ثم أ_٢ ب_٢ ، ثم أ_٢ ب_٣ ، ثم أ_١ ب_٣.
 - تكلفة النقل طبقاً لهذا الجدول:
- $$\times 200 + 10 \times 600 + 60 \times 150 + 40 \times 350 + 30 \times 400 = 90 = 59000 \text{ جنيه.}$$

ثانياً: اختبار مثالية الجدول الأول:

يتم تقويم الخلايا الفارغة بتحديد المسار المغلق لكل خلية فارغة وتكلفة الفرصة المضاعة لكل خلية كما يتضح من الجدول التالي:

الخلية الفارغة	المسار المغلق	التغير في التكلفة	التكلفة الفرصة
أ _١ ب _١	+ أ _١ ب _١ - أ _١ ب _٢ + أ _٢ ب _٢ - أ _٢ ب _٣ + أ _٣ ب _٣ - أ _٣ ب _١	٤٠ + ٣٠ - ٢٥	٥٥ - ٥٥ = ١٠ - ٩٠٠ + ٦٠ -
أ _١ ب _٣	+ أ _١ ب _٣ - أ _١ ب _٢ + أ _٢ ب _٢ - أ _٢ ب _٣	٤٠ + ٣٠ - ٣٠	٢٠ - ٦٠ = ٢٠ -
أ _٢ ب _١	+ أ _٢ ب _١ - أ _٢ ب _٢ + أ _١ ب _٢ - أ _١ ب _٣ + أ _٣ ب _٣ - أ _٣ ب _١	٩٠ + ١٠ - ٤٥	٦٥ - ٦٥ = ٦٠ -
أ _٢ ب _٣	+ أ _٢ ب _٣ - أ _٢ ب _٢ + أ _١ ب _٢ - أ _١ ب _٣ + أ _٣ ب _٣ - أ _٣ ب _١	٦٠ + ٤٠ - ٧٠	٩٠ - ٩٠ = صفر

يتضح من تقويم الخلايا الفارغة أن هناك تكلفة فرصة مضاعة للخلية أ_١ ب_٣ موجبة، إذن ليس هذا حل أمثل وهناك فرصة لتخفيض التكاليف وذلك بملء الخلية أ_١ ب_٣ حيث أن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية تخفض التكاليف الكلية للنقل بمبلغ ٢٠ جنيهه ولتحسين الحل يتم إدخال الخلية أ_١ ب_٣ في الحل الجديد.

وتكون تكلفة النقل طبقاً للحل الثاني:

$$90 \times 200 + 10 \times 600 + 40 \times 500 + 30 \times 150 + 30 \times 250 = 56000 \text{ جنيه.}$$

∴ مقدار التخفيض في تكاليف النقل = 3000 جنيه (59000 - 56000) تكلفة الحل الأول - 56000 (تكلفة الحل الثاني).

ثالثاً: تحسين الحل:

١ - تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية أ١ ب٣

بفحص خلايا المسار المغلق لهذه الخلية يتضح أن الخلايا التي اشارتها سالبة في هذا المسار (يعني يتم النقل منها) هي أ١ ب٣ ، أ٢ ب٣ وأقل كمية في هاتين الخليتين هي 150 وحدة في الخلية أ٢ ب٣ إذن يتم نقل 150 وحدة فقط إلى الخلية أ١ ب٣.

٢ - أثر ملء الخلية أ١ ب٣ على خلايا المسار المغلق لها:

$$\text{الخلية أ١ ب٣} = \text{صفر} + 150 = 150 \text{ وحدة}$$

$$\text{الخلية أ١ ب٣} = 150 - 400 = -250 \text{ وحدة}$$

$$\text{الخلية أ٢ ب٣} = 150 + 350 = 500 \text{ وحدة}$$

$$\text{الخلية أ٢ ب٣} = 150 - 150 = \text{صفر وحدة}$$

وباقى خلال الجدول تظل كما هي دون تغير.

٣ - إعداد جدول النقل الثاني:

الطاقات	ب٣	ب٢	ب١	مراكز التوزيع المصانع
٤٠٠	150	250	25	أ١
٥٠٠	60	500	45	أ٢
٨٠٠	200	70	10	أ٣
1700	350	750	600	الاحتياجات

رابعاً: اختبار مثالية الجدول التالي:

يوضح الجدول التالي نتيجة تفويم الخلايا الفارغة لجدول الحل الثاني.

التكلفة الفرصة	التغير في التكلفة	المسار المغلق	الخلية الفارغة
٧٥ -	٩٠ + ٣٠ - ٢٥ ٧٥ = ١٠ -	+ أ _١ ب _١ - أ _١ ب _٢ + أ _٢ ب _٢ - أ _٢ ب _١	أ _١ ب _١
٨٥ -	٩٠ + ١٠ - ٤٥ - ٣٠ + ٣٠ - ٨٥ = ٤٠	+ أ _١ ب _٢ - أ _١ ب _١ + أ _٢ ب _١ - أ _٢ ب _٢ أ _١ ب _٢ - أ _٢ ب _١	أ _١ ب _٢
٢٠ -	٣٠ + ٤٠ - ٦٠ ٢٠ = ٣٠ -	+ أ _٢ ب _٢ - أ _٢ ب _١ + أ _١ ب _١ - أ _١ ب _٢	أ _٢ ب _٢
٢٠ +	٣٠ + ٣٠ - ٧٠ ٢٠ - = ٩٠ -	+ أ _٢ ب _١ - أ _٢ ب _٢ + أ _١ ب _٢ - أ _١ ب _١	أ _٢ ب _١

يتضح من الجدول السابق أن تكلفة الفرصة المضاعة للخلية أ_٢ ب_٢ موجبة، معنى ذلك أن جدول الحل الثاني ليس حل أمثل، وللتحسين يلزم إدخال الخلية أ_٢ ب_٢ في الحل الجديد.

خامساً: تحسين الحل الثاني وإعداد جدول الحل الثالث:

١ - تحديد الكمية الممكن نقلها إلى الخلية أ_٢ ب_٢:

يتم نقل ٢٠٠ وحدة إلى الخلية أ_٢ ب_٢ لأنها أقل كمية في الخلايا التي اشارتها سالبة في المسار المغلق لهذه الخلية.

٢ - إعداد جدول الحل الثالث:

مراكز البيع المصانع	ب _١	ب _٢	ب _٣	الطاقات
أ _١	٢٥	٣٠	٣٠	٤٠٠
أ _٢	٤٥	٤٠	٦٠	٥٠٠
أ _٣	١٠	٧٠	٩٠	٨٠٠
الاحتياجات	٦٠٠	٧٥٠	٣٥٠	١٧٠٠

وتكون تكلفة النقل طبقاً لجدول الحل الثالث =

$$= 70 \times 200 + 10 \times 600 + 40 \times 500 + 30 \times 350 + 30 \times 50 = 52000 \text{ جنيته.}$$

∴ مقدار التخفيض في تكاليف النقل ٤٠٠٠ جنيته (٥٦٠٠٠ تكاليف البرنامج الثاني - ٥٢٠٠٠ تكاليف البرنامج الثالث).

سادساً: اختبار مثالية الحل الثالث:

يوضح الجدول التالي نتيجة تقويم الخلايا الفارغة في جدول الحل الثالث.

التكلفة الفرصة	التغير في التكلفة	المسار المغلق	الخلية الفارغة
٥٥ -	٧٠ + ٣٠ - ٢٥ ٥٥ = ١٠ -	+ أ _١ ب _١ - أ _١ ب _٢ + أ _٣ ب _٢ - أ _٣ ب _١	أ _١ ب _١
٦٥ -	٧٠ + ٤٠ - ٤٥ ٦٥ = ١٠ -	+ أ _٢ ب _٢ - أ _١ ب _٢ + أ _٣ ب _٢ - أ _٣ ب _١	أ _١ ب _٢
٢٠ -	٣٠ + ٤٠ - ٦٠ ٢٠ = ٣٠ -	+ أ _٢ ب _٢ - أ _٣ ب _٢ + أ _١ ب _١ - أ _٢ ب _١	أ _٢ ب _٢
٢٠ -	٣٠ + ٣٠ - ٥٠ ٢٠ - = ٧٠ -	+ أ _٣ ب _١ - أ _٣ ب _٢ + أ _١ ب _١ - أ _٢ ب _١	أ _٣ ب _١

يتضح من الجدول السابق أن تكلفة الفرصة المضاعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة (أي لا توجد تكلفة فرصة موجبة) وبذلك يكون جدول الحل الثالث السابق هو جدول الحل الأمثل.

سابعاً: برنامج النقل الأمثل: (الحل الأمثل):

بفحص جدول الحل الثالث (الحل الأمثل) يكون برنامج الحل الأمثل كما

يلي:

- طاقة المصنع أ_١ يخصص منها ٥٠ وحدة لمركز البيع ب_٢، ٣٥٠ وحدة لمركز البيع ب_٣.
 - طاقة المصنع أ_٢ تخصص بالكامل لمركز البيع ب_٢.
 - طاقة المصنع أ_٣ يخصص منها ٦٠٠ وحدة لمركز البيع ب_١، ٣٠٠ وحدة لمركز البيع ب_٢.
- وأقل تكلفة نقل ممكنة هي ٤٢٠٠٠ جنيته.

الحالة الثانية:

المطلوب: حل الحالة السابقة (الأولى) على فرض أن طاقة المصنع أ، ٦٠٠ وحدة وطاقة المصنع ب، ٦٠٠ وحدة. وذلك باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي في إعداد الحل المبدئي وطريقة حجر الوطاء في اختبار المثالية.

الحالة الثالثة:

الجدول التالي يوضح كيفية توزيع إنتاج إحدى الشركات الصناعية من مصانعها أ، ب، ج، على مراكز التوزيع ١، ٢، ٣.

مراكز التوزيع المصانع	ب	ب	ب	الطاقات
أ	٢	٥	٦	٨٠٠
ب	١	٤	٨	٧٠٠
ج	٥	٣	٤	٥٠٠
الاحتياجات	٦٠٠	١٠٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

المطلوب:

١ - هل جدول الحل السابق هو جدول الحل الأمثل؟ استخدم طريقة التوزيع المعدل لاختبار المثالية.

٢ - إذا لم يكن الحل السابق هو الحل الأمثل. فالمطلوب إعداد جدول الحل الأمثل وتحديد ما إذا كان الحل الأمثل الذي تتوصل إليه حل أمثل وحيد أم لا؟

الحل المقترح:

أولاً: تكلفة النقل طبقاً للجدول السابق =

$$= ٥ \times ٥٠٠ + ١ \times ١٠٠٠ + ٤ \times ٦٠٠ + ٥ \times ٤٠٠ + ٦ \times ٤٠٠$$

٩٤٠٠ جنيه.

ثانياً: اختبار مثالية الحل السابق بطريقة التوزيع المعدل:
 يتم إضافة عمود (لتسجل به قيم الصفوف) وصف لتسجيل به قيم
 الأعمدة) وتحسب قيم الصفوف والأعمدة ويكون الجدول على النحو التالي:

	قيم الأعمدة	١ع = ٦	٢ع = ٥	٣ع = ٢	
قيم الصفوف	مراكز البيع المصانع	١ب	٢ب	٣ب	الطاقات
ف _١ = صفر	أ _١	٤٠٠	٤٠٠	٨٠٠	
ف _٢ = ١-	أ _٢	٨	٤	١٠٠	٧٠٠
ف _٣ = ٣	أ _٣	٤	٣	٥٠٠	٥٠٠
	الاحتياجات	٤٠٠	١٠٠٠	٦٠٠	٢٠٠٠

تم حساب قيم الصفوف والأعمدة كما يلي:

تكلفة الخلية المشغولة = صفها + عمودها

$$ت = ف + ع$$

بفرض أن قيمة الصف الأول صفر (ف_١ = صفر)

$$ت_{١١} = ف_{١} + ع_{١}$$

$$٦ = ع_{١} \therefore ت_{١١} = صفر + ع_{١}$$

$$ت_{٢١} = ف_{١} + ع_{٢}$$

$$٥ = ع_{٢} \therefore ت_{٢١} = صفر + ع_{٢}$$

$$ت_{٣١} = ف_{١} + ع_{٣}$$

$$٨ = ع_{٣} \therefore ت_{٣١} = ف_{١} + ع_{٣}$$

$$ت_{٢٢} = ف_{٢} + ع_{٢}$$

$$١ = ع_{٢} + ف_{٢} \therefore ت_{٢٢} = ع_{٢} + ف_{٢}$$

$$ت_{٣٢} = ف_{٢} + ع_{٣}$$

$$٢ = ع_{٣} + ف_{٢} \therefore ت_{٣٢} = ع_{٣} + ف_{٢}$$

تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

$$\text{تكلفة الفرصة (ص)} = \text{قيمة الصف (ف)} + \text{قيمة العمود (ع)} - \text{تكلفة الخلية (ت)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ص}_1 &= \text{ف}_1 + \text{ع}_1 - \text{ت}_1 \\ \text{صفر} &= \text{صفر} + 2 - 2 \\ \text{ص}_2 &= \text{ف}_2 + \text{ع}_2 - \text{ت}_2 \\ 3- &= 1- + 8 - 6 \\ \text{ص}_3 &= \text{ف}_3 + \text{ع}_3 - \text{ت}_3 \\ 5 &= 3 + 4 - 2 \\ \text{ص}_4 &= \text{ف}_4 + \text{ع}_4 - \text{ت}_4 \\ 5 &= 3 + 2 - 0 \end{aligned}$$

يتضح من نتائج تقويم الخلايا الفارغة أن هناك أكثر من خلية فارغة لها تكلفة فرصة موجبة، إذن ليس الحل السابق حل أمثل، ولتحسينه يتم ملء الخلية الفارغة التي لها أكبر تكلفة فرصة موجبة، وحيث أن الخليتين أ₁ ب₁، أ₂ ب₂ لهما نفس تكلفة الفرصة المضاعة الموجبة (هي ٥) إذن يتم اختيار إحداهما عشوائياً، ولكن يمكن أن يتم البدء بالخلية التي يمكن أن ينقل إليها أكبر عدد من الوحدات حيث ذلك يوصل إلى الحل الأمثل بصورة أسرع.

هذا وبفحص الجدول السابق وعلى ضوء المسار المغلق لكل خلية منهما يتضح أن أقصى كمية يمكن نقلها للخلية أ₁ ب₁ هي ٤٠٠ وحدة. وللخلية أ₂ ب₂ هي ٥٠٠ وحدة، لذلك يفضل ملء الخلية أ₂ ب₂. ويتطلب ذلك تحديد مسارها المغلقة وهو على النحو التالي + أ₂ ب₂ - أ₁ ب₁ + أ₁ ب₂ - أ₂ ب₁ ويكون جدول النقل الجديد كما يلي:

الطاقات	٣ع = ٢ع	٦ع = صفر	١ع = ١ع	قيم الأعمدة	قيم الصفوف
	ب٢	ب٢	ب١	مراكز البيع المصانع	
٨٠٠	٢	٥	٦	أ١	ف١ = ٥
٧٠٠	١	٤	٨	أ٢	ف٢ = ٤
٥٠٠	٥	٣	٤	أ٣	ف٣ = ٣
٢٠٠٠	٦٠٠	١٠٠٠	٤٠٠	الاحتياجات	

تكلفة النقل طبقاً للجدول السابق =

$$= ٣ \times ٥٠٠ + ١ \times ٦٠٠ + ٤ \times ١٠٠ + ٥ \times ٤٠٠ + ٦ \times ٤٠٠$$

٦٩٠٠ جنيه

∴ مقدار التخفيض في تكلفة النقل = ٩٤٠٠ - ٦٩٠٠ = ٢٥٠٠ جنيه وهي تعادل حاصل ضرب ٥٠٠ وحدة ثم نقلها إلى أ٢ ب٢ × ٥ ج تكلفة الفرصة لهذه الخلية.

اختبار مثالية الجدول السابق:

تم حساب قيم الصفوف وقيم الأعمدة كما يلي:

بفرض أن قيمة العمود الثاني صفر أي أن ٢ع = صفر

$$٢١ ت = ١ ف + ٢ع$$

$$٥ = ١ ف + صفر ∴ ١ ف = ٥$$

$$٢٢ ت = ٢ ف + ٢ع$$

$$٤ = ٢ ف + صفر ∴ ٢ ف = ٤$$

$$٢٣ ت = ٣ ف + ٢ع$$

$$٣ = ٣ ف + صفر ∴ ٣ ف = ٣$$

$$١١ ت = ١ ف + ١ع$$

$$٦ = ١ ف + ٥ ∴ ١ ف = ١$$

$$٢٢ ت = ٢ ف + ٢ع$$

$$١ = ٢ ف + ٤ ∴ ٢ ف = ٣$$

تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة:

$$\begin{aligned} \text{ص}_1 &= \text{ف}_1 + \text{ع}_2 - 2 \\ \text{صفر} &= 2 - (3-) + 5 = \\ \text{ص}_2 &= \text{ف}_2 + \text{ع}_1 - 8 \\ 3- &= 8 - 1 + 4 = \\ \text{ص}_3 &= \text{ف}_3 + \text{ع}_1 - 4 \\ \text{صفر} &= 4 - 1 + 3 = \\ \text{ص}_4 &= \text{ف}_2 + \text{ع}_2 - 5 \\ 5- &= 5 - (3-) + 3 = \end{aligned}$$

يتضح مما سبق أنه لا توجد تكلفة فرصة موجبة، إذن الحل السابق هو

الحل الأمثل.

ثالثاً: إعداد جدول الحل الأمثل:

الطاقات	ب ₃	ب ₂	ب ₁	مراكز البيع المصانع
٨٠٠	2	5	6	أ ₁
٧٠٠	1	4	8	أ ₂
٥٠٠	5	3	4	أ ₃
٢٠٠٠	6٠٠	١٠٠٠	٤٠٠	الاحتياجات

رابعاً: هل الحل السابق حل أمثل وحيد:

بفحص تكلفة الفرصة المضاعة للخلايا الفارغة يتضح أن الخليتين أ₁ ب₃

، أ₂ ب₁ لهما تكلفة فرصة صفر، معنى ذلك أن إدخال أي خلية منهما في الحل لن يغير تكاليف الحل الأمثل، ولكن يعطي برنامج آخر أمثل. أي أن الحل السابق ليس حلاً وحيداً، بل هناك حلين آخرين يعطيان نفس النتيجة يتمثل الحل الأول منهما في ملء الخلية أ₁ ب₃ ويتمثل الحل الثاني في ملء الخلية أ₂ ب₁.

الحالة الرابعة:

بفرض في الحالة السابقة (الثالثة) كانت طاقة المصنع ٦٠٠ وحدة (بدلاً من ٥٠٠ وحدة) هل سيتغير برنامج الحل الأمثل السابق التوصل إليه في الحالة السابقة بفرض استخدام طريقة أدنى تكلفة في إعداد الحل المبدئي واختيار المثالية بطريقة التوزيع المعدل.

الحالة الخامسة:

يوجد في أحد مراكز الإنتاج ٣ آلات يمكن لأي آلة من هذه الآلات تنفيذ أي أمر من أوامر التشغيل الموكل تنفيذها لإدارة هذا المركز ولكن بتكاليف مختلفة، وفيما يلي بيان بتكاليف إتمام كل أمر إنتاجي من كل آلة من الآلات (بالجنيه)

الأوامر الإنتاجية

الآلات	س	ص	ع
أ	١٠٠	٧٠	٩٠
ب	٥٠	٤٠	٨٠
ج	٧٠	٩٠	٦٠

المطلوب: إعداد برنامج التعيين الأمثل الذي يحمل مركز الإنتاج أقل تكاليف ممكنة لإتمام أوامر التشغيل الثلاثة.

الحل المقترح

أولاً: إعداد مصفوفة الفرصة المضاعفة:

١ – بطرح أصغر مفردة في كل صف من عناصر هذا الصف تكون المصفوفة كما يلي:

	س	ص	ع
أ	٣٠	صفر	٢٠
ب	١٠	صفر	٤٠
ج	١٠	٣٠	صفر

٢ – بطرح أصغر مفردة في كل عمود من عناصر هذا العمود تكون المصفوفة السابقة كما يلي:

ع	ص	س	
٢٠	صفر	٢٠	أ
٤٠	صفر	صفر	ب
صفر	٣٠	صفر	ج

ثانياً: اختبار مثالية الحل:

يتم رسم خطوط تغطي الخلايا الصفرية كما يلي:

ع	ص	س	
٢٠	صفر	٢٠	أ
٤٠	صفر	صفر	ب
صفر	٣٠	صفر	ج

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط هو ثلاثة خطوط، أي أن عدد الخطوط يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، معنى ذلك أن الحل السابق هو الحل الأمثل.

ثالثاً: إعداد برنامج الحل الأمثل وحساب التكاليف:

تعيين الآلة أ للأمر الإنتاجي ص بتكلفة قدرها ٧٠ جنية.

تعيين الآلة ب للأمر الإنتاجي س بتكلفة قدرها ٥٠ جنية.

تعيين الآلة ج للأمر الإنتاجي ع بتكلفة قدرها ٦٠ جنية

التكلفة الإجمالية لبرنامج التعيين الأمثل = ١٨٠ جنية

الحالة السادسة:

بفرض في الحالة السابقة كان عدد الأوامر الإنتاجية ٤ أوامر (س ، ص ، ع ، ل) وكانت تكلفة إتمام الأمر الرابع (ل) في كل آلة من الآلات الثلاثة ٦٠ ، ٩٠ ، ١٠٠ على الترتيب، فهل سيتغير برنامج التعيين السابق التوصل إليه في الحالة السابقة (الخامسة) وضح ذلك؟

الحالة السابعة:

يواجه مدير إدارة المبيعات بمشكلة تعيين رجال البيع على مناطق البيع المختلفة نظراً لاختلاف أرقام الأرباح التي يحققها كل رجل بيع في كل منطقة بيع، ويرغب مدير إدارة المبيعات في وضع برنامج تعيين يحقق للشركة أقصى أرباح ممكنة، وعلى ضوء الخبرات السابقة أمكن توفير البيانات التالية عن أرباح رجال البيع في منافذ التوزيع. (بالألف جنيه).

رجال البيع	س	ص	ع
أ	١٠٠	٦٠	٤٠
ب	٧٠	٨٠	٥٠
ج	٤٠	٥٠	٣٠
د	٩٠	١٠٠	٦٠

والمطلوب: إعداد برنامج التعيين الأمثل وحساب أقصى أرباح ممكنة وفقاً للبرنامج المقترح:

الحل

تمهيد: حيث أن عدد رجال البيع أربعة وعدد مناطق البيع ثلاثة، لذلك يتم إضافة عمود رابع يمثل منطقة بيع وهمية (ل) وتكون أرباح منطقة البيع الوهمية صفر لجميع رجال البيع، وبذلك تكون المصفوفة كما يلي:

	س	ص	ع	ل
أ	١٠٠	٦٠	٤٠	صفر
ب	٧٠	٨٠	٥٠	صفر
ج	٤٠	٥٠	٣٠	صفر
د	٩٠	١٠٠	٦٠	صفر

أولاً: إعداد مصفوفة الأرباح المضاعفة:

١ - بطرح عناصر كل صف من أكبر مفردة في هذا الصف تكون المصفوفة كما يلي:

	س	ص	ع	ل
أ	صفر	٤٠	٦٠	١٠٠
ب	١٠	صفر	٣٠	٨٠
ج	١٠	صفر	٢٠	٥٠
د	١٠	صفر	٤٠	١٠٠

٢ - بطرح أصغر مفردة في كل عمود من عناصر هذا العمود تكون المصفوفة السابقة كما يلي:

ل	ع	ص	س	
٥٠	٤٠	٤٠	صفر	أ
٣٠	١٠	صفر	١٠	ب
صفر	صفر	صفر	١٠	ج
٥٠	٢٠	صفر	١٠	د

ثانياً: اختبار مثالية الحل السابق:

برسم خطوط تغطي الخلايا الصفيرية في المصفوفة السابقة تكون المصفوفة بعد رسم الخطوط كما يلي:

ل	ع	ص	س	
٥٠	٤٠	٤٠	صفر	أ
٣٠	١٠	صفر	١٠	ب
صفر	صفر	صفر	١٠	ج
٥٠	٢٠	صفر	١٠	د

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط ثلاثة أي أقل من عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، إذن الحل السابق ليس هو الحل الأمثل ويلزم تحسينه.

ثالثاً: تحسين الحل واختبار مثاليته:

بطرح أصغر مفردة لم يمر عليها خط من جميع المفردات التي ليس عليها خط وجمع نفس هذه المفردة على المفردات التي عند تقاطع الخطوط ونقل المفردات التي مر عليها خط واحد كما هي تكون المصفوفة السابقة كما يلي:

ل	ع	ص	س	
٥٠	٤٠	٥٠	صفر	أ
٢٠	صفر	صفر	صفر	ب
صفر	صفر	١٠	١٠	ج
٤٠	١٠	صفر	صفر	د

حيث أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي تغطي الخلايا الصفيرية هو ٤ خطوط أي تساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، إذن يكون الحل السابق هو الحل الأمثل.

رابعاً: برنامج التعيين وحساب الأرباح:

يعين رجل البيع أ في المنطقة س بأرباح قدرها ١٠٠ ألف جنيه

يعين رجل البيع د في المنطقة ص بأرباح قدرها ١٠٠ ألف جنيه

يعين رجل البيع ب في المنطقة ع بأرباح قدرها ٥٠ ألف جنيه

يعين رجل البيع ج في المنطقة ل بأرباح قدرها صفر

الأرباح الإجمالية لبرنامج التعيين الأمثل = ٢٥٠ ألف جنيه

يتضح من برنامج التعيين السابق ان رجل البيع ج سيطل بدون عمل في

هذه المناطق لأن (ل) منطقة بيع صورية وعلى الإدارة أن تبحث له عن منطقة

عمل أخرى تناسبه.

الحالة الثامنة:

بفرض في الحالة السابقة (السابعة) كان عدد رجال البيع خمسة (أ ، ب

، ج - د - هـ) وكانت الأرباح المتوقعة لرجل البيع (هـ) في المناطق

الثلاثة (س ، ص ، ع) ٧٠ ، ٦٠ ، ٩٠ على الترتيب، كيف يكون الحل

الأمثل؟ وهل يكون حل أمثل وحيد أم لا؟

الحالة التاسعة:

يوضح الجدول التالي الوقت اللازم لإتمام كل أمر من كل آلة في أحد

مراكز الإنتاج (الوقت بالساعة):

اوامر التشغيل			الآلات
ع	ص	س	
٧	٨	١٠	ا
٣	٢	٥	ب
٩	٤	٦	ج
١٥	١٢	١٠	د

فإذا علمت أن تكلفة تشغيل الآلة في الساعة ١٠٠ ، ١٥٠ ، ١٣٠ ، ٩٠

جنيه على الترتيب للآلات الأربعة.

فالمطلوب:

إعداد برنامج التعيين الذي يحمل الشركة أقل تكلفة تشغيل ممكنة.

نماذج أسئلة ذات اختيارات متعددة:

النموذج الأول

تمتلك شركة الامل ثلاثة مصانع (١أ ، ٢أ ، ٣أ) وثلاثة مخازن (ب ١ ، ب ٢ ، ب ٣) وتبلغ الطاقة الانتاجية للمصانع ٨٠٠ ، ٢٠٠٠ ، ١٢٠٠ وحدة على الترتيب فى حين تقدر الطاقة التخزينية للمخازن ١٦٠٠ ، ١٤٠٠ ، ١٠٠٠ وحدة على الترتيب ، وكانت تكلفة نقل للوحدة بالجنيه من كل مصنع الى كل مخزن كما يلى :

من ----الى	ب ١	ب ٢	ب ٣
١أ	١٠	١٢	٨
٢أ	٩	٨	٦
٣أ	٤	٢	٩

فاذا علمت ان الشركة تتبع طريقة الركن الشمالى الشرقى فى اعداد جدول الحل المبدئى ، واختبار المثالية بطريق التوزيع المعدل فأن : (اجب على الاسئلة من ١ الى ١٢)

١- خلايا الصف الثانى فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

د	ج	ب	ا
لا شىء مما سبق	١٢٠٠ ١ب ٢أ	٨٠٠ ١ب ٢أ	٢٠٠ ١ب ٢أ
	صفر ٢ب ٢أ	١٢٠٠ ٢ب ٢أ	١٢٠٠ ٢ب ٢أ
	٨٠٠ ٣ب ٢أ	صفر ٣ب ٢أ	٨٠٠ ٣ب ٢أ

٢- خلايا العمود الثانى فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

د	ج	ب	ا
لا شىء مما سبق	١٢٠٠ ٢ب ٢أ	صفر ٢ب ٢أ	٢٠٠ ٢ب ٢أ
	صفر ٢ب ٢أ	١٢٠٠ ٢ب ٢أ	١٢٠٠ ٢ب ٢أ
	٢٠٠ ٢ب ٢أ	٢٠٠ ٢ب ٢أ	صفر ٢ب ٢أ

٣- خلايا العمود الاول فى الحل المبدئى تكون على النحو التالى :

د	ج	ب	ا
لا شىء مما سبق	٨٠٠ ١ب ٢أ	٨٠٠ ١ب ٢أ	٨٠٠ ١ب ٢أ
	صفر ١ب ٢أ	٨٠٠ ١ب ٢أ	صفر ١ب ٢أ
	صفر ١ب ٢أ	صفر ١ب ٢أ	٨٠٠ ١ب ٢أ

٤- تكلفة النقل وفقا لجدول الحل المبدئى تكون :

١- ٣٤٢٠٠ ج ب- ٣٦٠٠٠ ج ج- ٤٠٢٠٠ ج د- ٣٠٢٠٠ ج

- ٥- يترتب على ادخال الخلية أ١ب٢ في الحل المبدئي لتحسينه :
- أ- زيادة التكلفة ٣ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٢ ج للوحدة
 ج- نقص التكلفة ٣ ج للوحدة د- زيادة التكلفة ٤ ج للوحدة
- ٦- يترتب على ادخال الخلية أ١ب٣ في الحل المبدئي لتحسينه :
- أ- نقص التكلفة ٨ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٢ ج للوحدة
 ج- نقص التكلفة ١٠ ج للوحدة د- زيادة التكلفة ٨ ج للوحدة
- ٧- يترتب على ادخال الخلية أ٢ب٣ في الحل المبدئي لتحسينه :
- أ- نقص التكلفة ٩ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٣ ج للوحدة
 ج- نقص التكلفة ٥ ج للوحدة د- زيادة التكلفة ٩ ج للوحدة
- ٨- الحل المبدئي لمشكلة النقل السابق عرضها يعتبر حل :
- أ- امثل وحيد ب- حل امثل غير وحيد
 ج- غير امثل يجب تحسينه د- لا يمكن تحسينه
- ٩- لتحسين الحل المبدئي لمشكلة النقل السابق عرضها يتم ملء الخلية :
- أ- ١١ ب ٣ ب ٨٠٠ وحدة ب- ١١ ب ٣ ب ١٠٠٠ وحدة
 ج- ٢٠ ب ٣ ب ٢٠٠ وحدة د- ٢٠ ب ٣ ب ١٠٠٠ وحدة
- ١٠- في حالة ملء الخلية أ٢ب٣ فان جملة تكلفة النقل سوف :
- أ- تقل بمبلغ ٩٠٠٠ ج ب- تزيد بمبلغ ٩٠٠٠ ج
 ج- تقل بمبلغ ٤٠٠ ج د- تقل بمبلغ ٧٢٠٠ ج
- ١١- في حالة ملء الخلية أ١ب٣ فان جملة تكلفة النقل سوف :
- أ- تزيد بمبلغ ٦٤٠٠ ج ب- تقل بمبلغ ٦٤٠٠ ج
 ج- تقل بمبلغ ٨٠٠٠ ج د- تزيد بمبلغ ٨٠٠٠ ج
- ١٢- في حالة ملء الخلية أ٢ب٣ فان اجمالى تكلفة النقل تكون :
- أ- ٢٥٢٠٠ ج ب- ٤٣٢٠٠ ج ج- ٣٣٨٠٠ ج د- ٢٧٠٠٠ ج

النموذج الثاني

تمتلك شركة الامل ثلاثة مخازن (أ١ ، أ٢ ، أ٣) وتوزع منتجاتها في ثلاث مناطق (ب١ ، ب٢ ، ب٣) وتبلغ الطاقة الانتاجية للمخازن ٢٩٠٠ ، ٢٠٠٠ ، ١١٠٠ وحدة على الترتيب في حين تقدر الطاقة التسويقية لمناطق التوزيع ٢٥٠٠ ، ٣٠٠٠ ، ٥٠٠ وحدة على الترتيب ، وكانت تكلفة نقل للوحدة بالجنيه من كل مخزن الى كل منطقة توزيع كما يلي:

من ----الى	ب ١	ب ٢	ب ٣
أ ١	٣	٧	٢
أ ٢	٢	٥	٥
أ ٣	٧	٢	٤

فاذا علمت أن الشركة تتبع طريقة الركن الشمالي الشرقي في اعداد جدول الحل المبدئي، واختبار

المثالية بطريق حجر الوطاء فإن : (أجب على الأسئلة من ١ الى ١٠)

١- خلايا الصف الاول في الحل المبدئي تكون على النحو التالي :

د	ج	ب	أ
أ ١ ب ١ ٢٥٠٠	أ ١ ب ١ ٢٩٠٠	أ ١ ب ١ صفر	أ ١ ب ١ ٢٥٠٠
أ ١ ب ٢ صفر	أ ١ ب ٢ صفر	أ ١ ب ٢ ٤٠٠	أ ١ ب ٢ ٤٠٠
أ ١ ب ٣ ٤٠٠	أ ١ ب ٣ صفر	أ ١ ب ٣ ٢٥٠٠	أ ١ ب ٣ صفر

٢ - خلايا العمود الثالث في الحل المبدئي تكون على النحو التالي :

د	ج	ب	أ
أ ١ ب ٣ صفر	أ ١ ب ٣ ٤٠٠	أ ١ ب ٣ صفر	أ ١ ب ٣ ٥٠٠
أ ٢ ب ٣ ٢٠٠	أ ٢ ب ٣ ١٠٠	أ ٢ ب ٣ صفر	أ ٢ ب ٣ صفر
أ ٣ ب ٣ ٣٠٠	أ ٣ ب ٣ صفر	أ ٣ ب ٣ ٥٠٠	أ ٣ ب ٣ صفر

٣- خلايا العمود الثاني في الحل المبدئي تكون على النحو التالي :

د	ج	ب	أ
أ ١ ب ٢ ٢٩٠٠	أ ١ ب ٢ ٢٠٠٠	أ ١ ب ٢ ٢٥٠٠	أ ١ ب ٢ ٤٠٠
أ ٢ ب ٢ ١٠٠	أ ٢ ب ٢ ٢٠٠	أ ٢ ب ٢ ٣٠٠	أ ٢ ب ٢ ٢٠٠٠
أ ٣ ب ٢ صفر	أ ٣ ب ٢ ٨٠٠	أ ٣ ب ٢ ٢٠٠	أ ٣ ب ٢ ٦٠٠

٤ - تكلفة النقل طبقا لجدول الحل المبدئي تكون :

أ- ٣٢٢٠٠ ج ب- ٣٦٠٠٠ ج ج- ٢٣٥٠٠ ج د- ٢١٩٠٠ ج

٥- يترتب على ادخال الخلية أ١ب٣ في الحل المبدئي لتحسينه :

أ- زيادة التكلفة ٨ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٩ ج للوحدة

ج- نقص التكلفة ٨ ج للوحدة د- زيادة التكلفة ٧ ج للوحدة

٦- يترتب على ادخال الخلية أ١ب٣ في الحل المبدئي لتحسينه:

أ- زيادة التكلفة ٥ ج للوحدة ب- نقص التكلفة ٧ ج للوحدة

ج- نقص التكلفة ٥ ج للوحدة د-زيادة التكلفة ٧ ج للوحدة

٧-- في حالة ملء الخلية أ٣ب٣ ينقل إليها :

١- ١٠٠٠ وحدة ب- ٥٠٠ وحدة ج- ٦٠٠ وحدة د- ٢٠٠٠ وحدة

٨- لتحسين الحل المبدئي للمشكلة السابق ذكرها يتم ملء الخلية :

أ- ٢ب١ ب- ٣أ١ ج- ٣ب٢ د- ١أ٣

٩ - في حالة ملء الخلية أ٣ب١ فان جملة تكلفة النقل تصحح :

أ- ٢٠٧٠٠ ج ب- ٢٦٣٠٠ ج ج- ٢٠٠٠٠ ج د- ٢٧٠٠٠ ج

١٠- إذا كان عدد الصفوف في احدى مشكلات التعيين ٤ صفوف فان الحل يكون أمثل إذا كانت هناك

خلايا صفرية مستقلة عددها :

أ- ٣ خلايا ب- ٨ خلايا ج- ٤ خلايا فاكثر د- خليتان

الفصل التاسع

أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت)

أولاً: أسئلة نظرية:

أ - لكل سؤال من الأسئلة التالية عدة إجابات، والمطلوب تحديد الإجابة الصحيحة منها:

١ - من بين جميع المسارات على شبكة بيرت فإن المسار الحرج:

أ - له أكبر وقت متوقع.

ب- له أقل وقت متوقع.

ج- له أكبر وقت عادي.

د - له أقل وقت عادي.

٢ - أنشطة المسار الحرج يكون لها:

أ - أقل وقت راكد كلي.

ب- أقل وقت راكد حر.

ج- أكبر وقت راكد حر.

د - لا شيء مما سبق.

٣ - وقت البداية المبكر لنشاط يبدأ عند الحدث (٥) يكون:

أ- أكبر وقت نهاية مبكر لجميع الأنشطة التي تنتهي عند الحدث رقم (٥).

ب- يساوي وقت النهاية المبكر لنفس النشاط مطروحاً منه الوقت المتوقع للنشاط.

ج- يعتمد على جميع المسارات التي تبدأ من البداية وتنتهي عند الحدث (٥).

د- كل ما سبق.

٤ - الوقت الراكد الكلي للنشاط (س):

أ- يساوي وقت النهاية المبكر - وقت البداية المبكر للنشاط (س).

ب- يساوي وقت النهاية المتأخر - وقت البداية المبكر للنشاط (س)

ج- يساوي وقت البداية المتأخر - وقت البداية المبكر للنشاط (س)

د- لا شيء مما سبق.

- ٥ - وقت النهاية المتأخر لأي نشاط ينتهي عند الحدث (٣):
- أ- يساوي أكبر أوقات البداية المتأخرة لجميع الأنشطة التي تخرج من هذا الحدث.
- ب- يعتمد على وقت النهاية المتأخرة للمشروع.
- ج- يساوي وقت البداية المتأخر - وقت النشاط.
- د- لا شيء مما سبق.
- ٦ - تقدير الوقت المتوقع للنشاط في شبكة بيرت:
- أ- يقوم على أساس ثلاثة تقديرات للوقت.
- ب- يضع أكبر وزن للتقدير الأكثر احتمالاً للوقت.
- ج- يحسب بالاستعانة بتوزيع بيتا.
- د - كل ما سبق.
- ٧ - تقدير احتمال إتمام المشروع خلال ٢٠ اسبوع:
- أ- يفترض أن أوقات الأنشطة مستقلة إحصائياً.
- ب- يفترض أن الوقت الكلي للمسار الحرج يعتمد على تقريب توزيع بيتا.
- ج- يتطلب معلومات عن الانحراف المعياري لجميع الأنشطة على شبكة بيرت.
- د- كل ما سبق.
- ٨ - التكلفة الحدية للإسراع في التنفيذ يمكن أن تتغير عندما:
- أ- ينتهي الوقت المسموح به لتخفيض وقت النشاط المراد تخفيض وقته.
- ب- عندما يظهر مسار حرج جديد.
- ج- (أ ، ب).
- د - لا شيء مما سبق.
- ٩ - أسلوب بيرت / تكلفة يفترض أن:
- أ- كل نشاط يتحقق في وقته المتفائل.
- ب- التكاليف توزع بشكل متساوي وطبيعي على وقت إتمام النشاط.
- ج- أوقات الأنشطة مستقلة إحصائية.
- د - لا شيء مما سبق.
- ١٠ - الرائد الحر لوقت النشاط يساوي:
- أ- بداية مبكرة - نهاية مبكرة + طول النشاط.

- ب- نهاية مبكرة - بداية مبكرة - طول النشاط.
ج- بداية متأخرة - بداية مبكرة - طول النشاط.
د- لا شئ مما سبق.

ب- حدد صحة أو خطأ العبارات التالية:

- ١ - تعطي طريقة الركن الشمالي الشرقي أقل تكلفة نقل للحل المبدئي
- ٢ - تصلح طريقة حجر الوطاء لاختبار الحل المبدئي المعد وفقاً لطريقة فوجل التقريبية فقط
- ٣ - يلزم في جميع مشاكل النقل تساوي عدد المصادر مع عدد المنافذ حتى يتوافر شرط التوازن
- ٤ - تختلف تكلفة الفرصة للخلايا الفارغة باختلاف قيم الصفوف والأعمدة والتي تختلف بدورها باختلاف الصف أو العمود الذي يفترض أن قيمته صفر عند اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل.
- ٥ - إذا اكتمل صف وعمود في وقت واحد عند تطبيق طريقة فوجل التقريبية لإعداد الحل المبدئي يتم حذفهما معاً للتوصل إلى الحل المبدئي بصورة أسرع
- ٦ - الخلايا الفارغة في الصف أو في العمود الصوري تؤخذ في الاعتبار عند اختبار مثالية الحل.
- ٧ - لا يتأثر جدول الحل سواء كان عدد خلايا المسار المغلق للخلية المراد شغلها زوجي أو فردي.
- ٨ - حيث أن مشاكل النقل تعتبر نوعاً خاصاً من مشاكل البرمجة الخطية، فإنه وفقاً لخاصية التتابعية فإن كل جدول حل في مشاكل تعظيم الأرباح يعطي أرباحاً تساوي أرباح الجدول السابق له أو تزيد عنها.
- ٩ - في مشاكل التعيين يمكن أن تكون القيمة التي تعين لأي خلية أكبر من واحد صحيح ولكن لا يصح أن تكون أقل من واحد صحيح.
- ١٠ - كل مشكلة تعيين لها حل بطريقة التعيين يكون لها حل بطريقة السمبلكس.

ثانياً: حالات عملية:

الحالة الأولى:

تخطط شركة العز للمقاولات لأحد مشروعاتها العقارية، وأسفرت دراسة

تقدير الوقت والتكلفة لهذا المشروع عن الآتى: (الأوقات بالأسبوع):

النشاط	ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ى
مسار النشاط	٢-١	٣-١	٣-٢	٤-٢	٤-٣	٥-٣	٥-٤	٦-٤	٦-٥	٧-٦
الوقت المتفانل	٢	٧	٥	٨	٤	٧	٥	١٠	٤	٢
الوقت المتشائم	١٢	٢١	١٩	٤٤	٦	٧٥	٧	٦٠	١٨	٢٦
الوقت الأكثر احتمالاً	٤	٨	٦	١٧	٥	٢٠	٦	٢٠	٨	٨

المطلوب:

- ١- تحديد الوقت المتوقع لكل نشاط.
- ٢- رسم شبكة الأعمال بيرت، موضحا عليها الوقت المتوقع لكل نشاط والوقت المبكر والمتأخر لكل حدث والمسار الحرج.
- ٣- حساب الوقت الراكد الكلى لكل الأنشطة.
- ٤- حساب الإنحراف المعيارى لوقت المشروع.
- ٥- حساب احتمال إتمام المشروع بموازنة إجمالية قدرها ٧٠٠٠٠ ج، علما بأن متوسط تكلفة تنفيذ المشروع فى الأسبوع الواحد يبلغ ١٠٠٠ ج.

للإسترشاد:

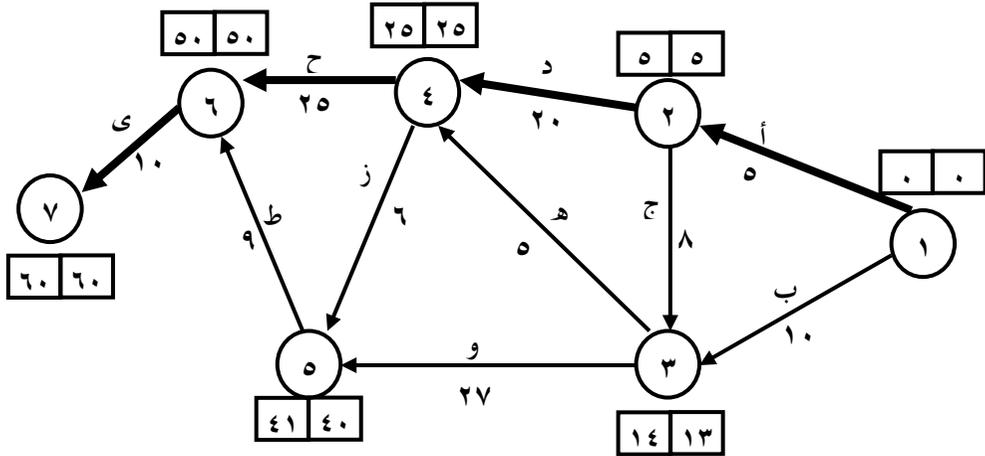
الدرجة المعيارية ق	٠,٣٤	٠,٥٩	٠,٨٩	٠,٩٩	١,٢٩
القيمة المقابلة	٠,١٣٣١	٠,٢٢٢٤	٠,٣١٣٣	٠,٣٣٨٩	٠,٤٠١٥

الحل

١ - تحديد الوقت المتوقع لكل نشاط:

النشاط	الوقت المتوقع = $\frac{\text{ف} + ٤ \text{ح} + \text{ش}}{٦}$
أ	٥
ب	١٠
ج	٨
د	٢٠
هـ	٥
و	٢٧
ز	٦
ط	٩
ي	١٠

٢ - رسم الشبكة:



المسارات:

- أ د ح ي : ٦٠
- أ د ز ط ي : ٥٠
- أ ج هـ ح ي : ٥٣
- أ ج و ط ي : ٥٩
- أ ج هـ ز ط ي : ٤٣
- ب هـ ج ي ز : ٥٠

ب ه ز ط ي : ٤٠

ب و ط ي : ٥٦

٣ - حساب الوقت الراكد الكلي:

النشاط (١)	الوقت المتوقع (٢)	وقت مبكر لحدث البداية (٣)	وقت مبكر لحدث النهاية (٣+٢) (٤)	وقت متأخر لحدث البداية (٢-٦) (٥)	وقت متأخر لحدث النهاية (٦) (٦)	الوقت الراكد الكلي ٤-٦ أو ٣-٥ (٧)
أ	٥	٠	٥	٠	٥	٠
ب	١٠	٠	١٠	٤	١٤	٤
ج	٨	٥	١٣	٦	١٤	١
د	٢٠	٥	٢٥	٥	٢٥	٠
هـ	٥	١٣	١٨	٢٠	٢٥	٧
و	٢٧	١٣	٤٠	١٤	٤١	١
ز	٦	٢٥	٣١	٣٥	٤١	١٠
ح	٢٥	٢٥	٥٠	٢٥	٥٠	٠
ط	٩	٤٠	٤٩	٤١	٥٠	١
ي	١٠	٥٠	٦٠	٥٠	٦٠	٠

٤ - الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج:

$$أ - ٣ \div ٥$$

$$د - ٦ \div ٣٦$$

$$ح - ٣ \div ٢٥$$

$$ي - ٤$$

$$\sqrt{١٦ + ٢\left(\frac{٢٥}{٣}\right) + ٣٦ + ٢\left(\frac{٥}{٣}\right)} = \text{الانحراف المعياري لوقت المشروع}$$

$$= \sqrt{٢\left(\frac{٢٥}{٣}\right) + ٥٢ + ٢\left(\frac{٥}{٣}\right)}$$

$$= \sqrt{٦٩,٤٤ + ٥٢ + ٢,٧٨}$$

$$= \sqrt{١٢٤,٢٢} = ١١,١٤٥٤$$

$$٦٠ - ٧٠$$

$$\text{قيمة } Z = \frac{٠,٨٩٧٢٣}{١١,١٤٥٤} = ٠,٨٩٧٢٣ \text{ وبالبحث في الجداول الرقم المقابل } ٠,٨١٣٣$$

الوقت المطلوب = ٧٠.٠٠٠ ÷ ١٠٠٠ = ٧٠ أسبوعاً

∴ احتمال تنفيذ المشروع في الوقت المستهدف ٨١% تقريباً.

الحالة الثانية:

فيما يلي تقديرات الوقت (بالأسبوع) الخاصة بأنشطة أحد المشروعات التي عهد لشركة الحسن الصناعية بتنفيذها:

النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز
مسار النشاط	٢-١	٣-١	٤-٢	٤-٣	٥-٣	٦-٤	٦-٥
الوقت المتفائل	٩	٧	٨	١٤	٨	٧	١٢
الوقت الأكثر احتمالاً	١٥	١٣	١٢	١٦	١٢	١١	٢٠
الوقت المتشائم	٢١	١٩	١٦	٢٠	٣٤	١٥	٥٨

المطلوب:

- ١- حساب الوقت المتوقع لكل نشاط.
- ٢- رسم شبكة بيرت مبينا" عليها الوقت المبكر والمتأخر والمسار الحرج.
- ٣- تحديد الانحراف المعياري لوقت المشروع.

الفصل العاشر

إستخدام نموذج بيرت فى تخفيض التكاليف

بيرت / تكلفة

الحالة الأولى:

قدمت إليك البيانات التالية الخاصة بأنشطة تنفيذ أحد المشروعات:

(الأوقات بالأسبوع ، التكلفة بالجنيه):

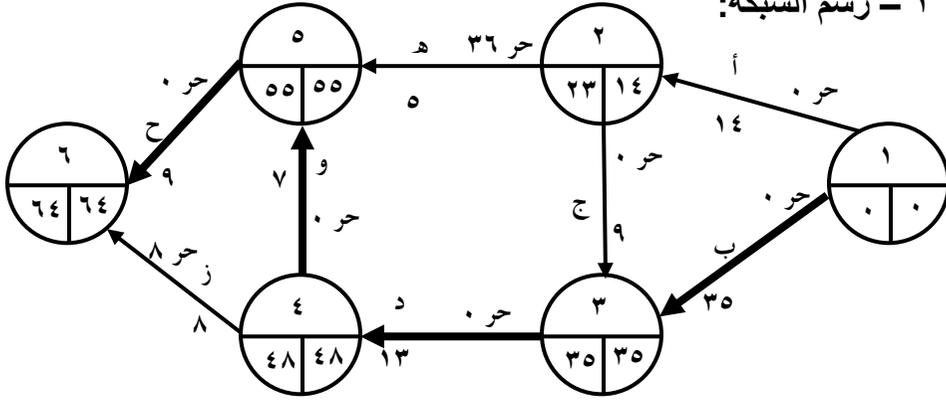
متسرع		عادى		المسار	النشاط
تكلفة	وقت	تكلفة	وقت		
٤٠٠٠	١٠	٣٠٠٠	١٤	٢ - ١	أ
٩٤٠٠	٣٠	٧٠٠٠	٣٥	٣ - ١	ب
٦٠٠٠	١٠	٤٠٠٠	١٢	٣ - ٢	ج
٨٨٠٠	٩	٨٠٠٠	١٣	٤ - ٣	د
٣٦٠٠	٣	٢٠٠٠	٥	٥ - ٢	هـ
١٠٦٠٠	٥	٩٠٠٠	٧	٥ - ٤	و
٣٧٠٠	٥	٢٥٠٠	٨	٦ - ٤	ز
٤١٠٠	٣	٣٥٠٠	٩	٦ - ٥	ح

المطلوب:

- ١- رسم شبكة الأعمال "بيرت" طبقا للوقت العادى مع بيان الوقت المبكر والمتاخر والمسار الحرج والراكد الحر عليها.
- ٢- تحديد الوقت الراكد الكلى والراكد الحر لجميع الأنشطة.
- ٣- حساب تكلفة إتمام المشروع في وقته العادى.
- ٤- حساب تكلفة تنفيذ المشروع فى ٥٠ أسبوعا" فقط .
- ٥- حساب تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٦ أسبوع.
- ٦- حساب تكلفة إتمام المشروع بموازنة إجمالية ٤٠٣٠ ج.

الحل

١ - رسم الشبكة:



المسارات:

- أ هـ ح : ٢٨
 أ ج د ز : ٤٧
 ب د ز : ٥٦
 أ ج د ز : ٥٥
 ب د و ح : ٦٤ ←

٢ - الوقت الراكد الكلي والراكد الحر:

الراكد الحر	الوقت الراكد الكلي	وقت متأخر لحدث النهاية	وقت متأخر لحدث البداية	وقت مبكر لحدث النهاية	وقت مبكر لحدث البداية	الوقت المتوقع	المسار	النشاط
٠	٩	٢٣	٩	١٤	٠	١٤	٢-١	أ
٠	٠	٣٥	٠	٣٥	٠	٣٥	٣-١	ب
٩	٩	٣٥	٢٣	٢٦	١٤	١٢	٣-٣	ج
٠	٠	٤٨	٣٥	٤٨	٣٥	١٣	٤-٣	د
٣٦	٣٦	٥٥	٥٠	١٩	١٤	٥	٥-٢	هـ
٠	٠	٥٥	٤٨	٥٥	٤٨	٧	٥-٤	و
٨	٨	٦٤	٥٦	٥٦	٤٨	٨	٦-٤	ز
٠	٠	٦٤	٥٥	٦٤	٥٥	٩	٦-٥	ح

٣ - تكلفة إتمام المشروع في وقته العادي =

مجموع التكلفة العادية لجميع الأنشطة أي ٣٩٠٠٠ ج

٤ - حساب تكلفة تنفيذ المشروع في ٥٠ أسبوع:

أ - جدول ميل التكلفة

النشاط	ميل التكلفة (تكلفة متسرة - تكلفة عادية) ÷ (وقت عادي - وقت متسرع)	حدود التخفيض (وقت عادي - وقت متسرع)
أ	٢٥٠	٤
ب	٤٨٠	٥
ج	١٠٠٠	٢
د	٢٠٠	٤
هـ	٨٠٠	٢
و	٨٠٠	٢
ز	٤٠٠	٣
ح	١٠٠	٦

ب - جدول يوضح مراحل وتكاليف التخفيض:

مراحل التخصيص				المسارات
٤	٣	٢	١	
ب	د	ح	لا تعجيل	أ هـ ح
٢٢	٢٢	٢٢	٢٨	أ ج د ح
٣٧	٣٧	٤١	٤٧	أ ج د و ح
٤٥	٤٥	٤٩	٥٥	ب د ز
٤٨	٥٢	٥٦	٥٦	ب د و ح
٥٠	٥٤	٥٨	٦٤	ت. إضافية
١٩٢٠	٨٠٠	٦٠٠	صفر	تكلفة إضافية متجمعة
٣٣٢٠	١٤٠٠	٦٠٠	صفر	

- التكلفة الإضافية لإتمام المشروع في ٥٠ أسبوع =

مجموع التكلفة الإضافية لمراحل التخفيض حتى ٥٠ اسبوع

أي ٣٣٢٠ ج

- تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٠ أسبوع =

التكلفة العادية لإتمام المشروع في وقته العادي + التكلفة الإضافية

المتجمعة عند ٥٠ أسبوع

= ٣٩٠٠٠ + ٣٣٢٠ = ٤٢٣٢٠ ج

٥ - تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٦ أسبوع:
 عند الخطة (٣) تم تخفيض النشاط (د) ٤ أسابيع فيكتفي بتخفيض
 النشاط (د) بأسبوعين فقط بتكلفة إضافية ٤٠٠ ج وبذلك تكون التكلفة
 المتجمعة $١٠٠٠ = ٤٠٠ + ٦٠٠$ ج
 ∴ تكلفة إتمام المشروع خلال ٥٦ أسبوع تكون:

$$٣٩٠٠٠ ج + ١٠٠٠ = ٤٠٠٠٠ ج$$

٦ - ما هو وقت إتمام المشروع بموازنة إجمالي ٤٠٠٣٠ ج
 التكلفة الإضافية المتاحة = $٤٠٠٣٠ - ٣٩٠٠٠ = ١٠٣٠$ ج
 أي عند ٥٦ أسبوع ويتبقى من الموازنة ٣٠ ج.

الحالة الثانية:

يوضح الجدول التالي أوقات وتكاليف الأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد
 المشروعات: (الأوقات بالأسبوع والتكاليف بالجنيه) :

النشاط	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
المسار	٢-١	٣-٢	٤-٢	٥-٣	٥-٤	٦-٤	٦-٥	٧-٦
الوقت العادي	١٠	٩	٦	٧	٩	٥	٤	٧
التكلفة العادية	٧٠٠٠	١٨٠٠٠	١٨٠٠٠	٣٥٠٠	٥٤٠٠	٥٠٠٠	٨٠٠٠	٨٠٠٠
الوقت المتسرع	٩	٦	٣	٤	٧	٥	٤	٥
التكلفة المتسرفة	٧٤٠٠	٢٠٤٠٠	٢٤٠٠٠	٦٥٠٠	٧٠٠٠	٥٠٠٠	٨٠٠٠	١٢٠٠٠

المطلوب:

- أ- رسم شبكة الأعمال "بيرت" وفقا للوقت العادي موضحا عليها الوقت المبكر والمتأخر لكل حدث.
 ب- حساب تكلفة تنفيذ المشروع في ٣١ أسبوعا".

نماذج أسئلة ذات اختيارات متعددة:

النموذج الأول

فيما يلي بيان بتقديرات الوقت (بالاسبوع) والتكلفة (بالجنيه) لانشطة مشروع صيانة احد مدرجات

كلية التجارة

النشاط	الاحداث	الوقت العادى	الوقت المتسرع	التكلفة العادية	التكلفة المتسrece
أ	١-٢	١٢	٨	٣٦٠٠	٤٦٠٠
ب	٢-٣	٢٠	٨	١٦٠٠٠	١٩٠٠٠
ج	٢-٤	١٦	٨	٤٨٠٠	٦٤٠٠
د	٣-٤	٤	٤	٤٠٠٠	٤٠٠٠
هـ	٣-٥	٨	٤	٣٠٠٠	٣٦٠٠
و	٤-٥	١٦	٨	٤٤٠٠	٧٠٠٠
اجمالى				٣٥٨٠٠	٤٤٦٠٠

على ضوء هذه البيانات اجب عن الاسئلة (من ١ الى ٩)

١ - المسار الحرج طبقا للوقت العادى هو:

١-١، ب، هـ ب-أ، ب، د، هـ ج-أ، ب، د، و د-أ، ج، و،
٢- الوقت المبكر للحدث (٤) يكون:

١-٢٨ ب-٣٦ ج-٣٢ د- صفر
٣- الوقت المتأخر للحدث (٣) يكون:

١-٤٤ ب-٣٦ ج-٣٢ د- لاشيء مما سبق
٤ - الوقت الراكد الحر للنشاط (هـ) يكون:

أ- ٢٠ اسبوع ب- ١٢ اسبوع ج- ٨ أسابيع د- صفر اسبوع
٥ - ميل التكلفة للنشاط (هـ):

١- ١٥٠ ج ب- ١٦٥٠ ج ج- ٩٠٠ ج د- ٧٥٠ ج
٦ - تكلفة اتمام المشروع فى وقته العادى تكون:

١- ٤٤٦٠٠ ج ب- ٣٥٨٠٠ ج ج- ٢٨٠٠٠ ج د- ١٢٨٠٠ ج
٧ - التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع بمقدار ١٢ اسبوع تكون:

١- ١٠٠٠ ج ب- ٣٠٠٠ ج ج- ٣٨٨٠٠ ج د- ١٦٠٠ ج
٨ - التكلفة الاجمالية لاتمام المشروع خلال ٤٠ اسبوع تكون:

١- ٣٨٨٠٠ ج ب- ٢٧٠٠٠ ج ج- ٤٧٦٠٠ ج د- ٤٤٤٠٠ ج

٩ - التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع الى ٤٦ اسبوع تكون :

١- ١٦٠٠٠ ج -ب- ١٥٠٠ ج -ج- ٣٠٠٠ ج -د- ٤٠٣٠٠ ج
١٠- اذا كان الوقت المتفائل للنشاط (س) ٧ اسابيع والوقت المتشائم ١٥ اسبوع والوقت الاكثر

احتمالا ٨ اسابيع فان الوقت المتوقع يكون :

١- ٣٠ اسبوع -ب- ٩ اسابيع -ج- ١٢.٥ اسبوع -د- ١٠ اسابيع

١١- اذا كان الانحراف المعياري لوقت مشروع صيانة احد مدرجات كلية التجارة السابق الاشارة اليه ٣ والمعامل الثابت المقابل لدرجة ثقة ٩٠% كان ١.٢٨ انحراف معياري فان الوقت المتوقع لاتمام هذا المشروع يكون :

١- ٥٥.٨٤ اسبوع -ب- ٧٠.٤ اسبوع -ج- ٤٨.١٦ اسبوع -د- ١٥٩.٨٤ اسبوع

النموذج الثاني

فيما يلي بيان بتقديرات الوقت (بالاسبوع) والتكلفة (بالجنيه) لانشطة مشروع صيانة احد مدرجات

كلية التجارة

النشاط	الاحداث	الوقت العادى	الوقت المتسرع	التكلفة العادية	التكلفة المتسrece
أ	١-٢	٦	٤	٧٠٠٠	٨٢٠٠
ب	١-٣	٩	٥	١٠٠٠٠	١٠٨٠٠
ج	٢-٣	٨	٤	٥٠٠٠	٦٦٠٠
د	٢-٤	٦	٢	٦٠٠٠	٨٠٠٠
هـ	٣-٤	٢	٢	٢٠٠٠	٢٠٠٠
و	٤-٥	٨	٤	٦٠٠٠	٦٦٠٠
ز	٣-٥	٤	٣	٨٠٠٠	٨١٠٠
		الاجمالي		٤٤٠٠٠	٥٠٣٠٠

على ضوء هذه البيانات اجب عن الاسئلة (من ١ الى ٩)

١- المسار الحرج طبقا للوقت العادى هو:

أ- ١، د، و -ب- أ، ج، هـ، و -ج- ب، د، و -د- أ، ج، ز

٢- الوقت المبكر للحدث (٤) يكون :

١- ١٢ -ب- ١٦ -ج- ١١ -د- ٢

٣- الوقت المتأخر للحدث (٣) يكون :

١- ١٠ -ب- ١٤ -ج- ١٦ -د- ٢٠

٤- الوقت الراكد الحر للنشاط (ب) يكون :

أ- ١٤ اسبوع -ب- ٥ اسبوع -ج- ٩ اسابيع -د- صفر اسبوع

٥ - ميل التكلفة للنشاط (ز) :

١- ١٠٠ ج -ب- صفر ج -ج- ١٥٠ ج -د- ٢٠٠ ج

٦ - تكلفة اتمام المشروع في وقته العادى تكون :

١- ٥٠٣٠٠ ج -ب- ٤٤٠٠٠ ج -ج- ٢٣٤٠٠ ج -د- ٢٠٠٠٠ ج

٧ - التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع بمقدار ٤ اسابيع تكون :

١- ٢٤٠٠ ج -ب- ٦٠٠ ج -ج- ٤٠٠ ج -د- ١٦٠٠ ج

٨ - التكلفة الاجمالية لاتمام المشروع خلال ١٨ اسبوع تكون :

١- ٤٤٠٠٠ ج -ب- ٥١٦٠٠ ج -ج- ٤٥٤٠٠ ج -د- ٤١٨٠٠ ج

٩ - التكلفة الاضافية لتخفيض وقت المشروع الى ١٦ اسبوع تكون :

١- ٤١٨٠٠ ج -ب- ١٦٠٠ ج -ج- ٣٠٠٠ ج -د- ٢٢٠٠ ج

١٠- انشطة المسار الحرج لها :

١- اقل راكد حر -ب- اكبر راكد حر -ج- اقل راكد كلي -د- لا شىء مما سبق

١١- اذا كان الانحراف المعيارى لوقت مشروع صيانة احد مدرجات كلية التجارة السابق الاشارة اليه

اعلاه ٣ والمعامل الثابت المقابل لدرجة ثقة ٩٠% كان ١.٢٨ انحراف معيارى ، فان الوقت

المتوقع لاتمام هذا المشروع يكون :

١- ٧٥.٨٤ اسبوع -ب- ٢٨.٢٨ اسبوع -ج- ٢٧.٨٤ اسبوع -د- ١٩.١٦ اسبوع

١٢- اذا كان الوقت المتفائل لاحد الانشطة ٦ اسابيع والاكثر احتمالا ١٠ اسابيع والمتشائم ٣٠ اسبوع

فان الانحراف المعيارى لوقت هذا النشاط يكون :

١- ٤ -ب- ٣.٣٣ -ج- ١٠.٦٧ -د- ١٢.٧

الفصل الحادي عشر

نظرية المباراة

حالات تطبيقية:

الحالة الأولى: عرضت عليك مصفوفة عوائد المباراة التالية بين المتنافسين س، و ص والتي تظهر علي النحو التالي:

$$\begin{matrix} & \text{ص} \\ \begin{pmatrix} ١٦ & ١٨ \\ ٥ & -١٢ \end{pmatrix} & \text{س} \end{matrix}$$

والمطلوب الإجابة علي الأسئلة التالية:

س١: هل مصفوفة عوائد المباراة تمثل مصفوفة عوائد مباراة ذات إستراتيجية مطلقة أم مختلطة؟

س٢: هل مصفوفة عوائد المباراة تمثل مصفوفة عوائد مباراة ثنائية صفرية أم تمثل مصفوفة عوائد مباراة متعددة الأطراف؟

س٣: هل نتيجة المباراة تساوي (١٨ أو ١٦ أو ١٢ أو -٥ أو لا شيء مما سبق؟

س٤: فسر عناصر مصفوفة عوائد المباراة .

س٥: ما هي القواعد الواجب إتباعها لتحديد أفضل إستراتيجية بالنسبة لمنافسي المباراة الثنائية الصفرية .

أ- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف

ب- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة؟

ج: القواعد الواجب إتباعها لتحديد أفضل إستراتيجية بالنسبة لمنافسي المباراة الثنائية الصفرية هي:

أ - بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف: يختار أسوأ نتاجه والتي تتمثل في أكبر قيمة سالبة في كل صف أو صفر أو أصغر قيمة موجبة في الصف في حالة عدم وجود أي قيمة سالبة بالصف حيث تمثل القيم السالبة مكسب

للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة ، وكلما عظمت وكبرت القيمة السالبة لأن هذا يعنى زيادة مكسب المنافس الذي يلعب في الأعمدة، وبالتالي زيادة خسائر المنافس الذي يلعب في الصفوف ، وفي حالة عدم وجود قيم سالبة بالصف . وكانت كل قيم عناصره موجبة فإن أسوأ نتيجة بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف تكون أقل قيمة موجبة في هذه الحالة.

ب- بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة: يختار أسوأ نتائجه، والتي تتمثل في أكبر قيمة موجبة في كل عمود أو أصغر قيمة سالبة في العمود إذا كان العمود لا يحتوى علي أرقام سالبة فقط، ويفسر ذلك بأن القيمة في العمود تمثل مكسباً (ربحاً) بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف، وفي نفس الوقت خسارة للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة. أما إذا كان كل قيم عناصر العمود سالبة فقط فإن أقل رقم سالب يمثل أدنى ربح يمكن أن يحققه المنافس الذي يلعب في الأعمدة.

ج- أن القيمة الأكبر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) تمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الصفوف.

د - أن القيمة الأصغر في القيم التي تمثل أسوأ النتائج التي حصلت عليها في البند (ب) تمثل أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة.

هـ - تمثل قيمة المباراة الرقم الذي يلتقي عنده صف أفضل إستراتيجية بالنسبة للمتنافس الذي يلعب في الصفوف مع عمود أفضل إستراتيجية للمتنافس الذي يلعب في الأعمدة .

الحالة الثانية: يوضح الجدول التالي مصفوفة نتائج المباراة الخاصة باللاعبين س ، و، جدول رقم (١) بيانات مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

ص	ص ^٢	ص ^١	ص ^٣	إستراتيجيات اللاعب س
٦١	١٥	٢	٣٣	س ^١
٩١	٢١-	٥٧-	٢٤ -	س ^٢
٦٥	٣٠	٧٨-	٢١	س ^٣

والمطلوب: إيجاد نقطة التلاقي أي قيمة المباراة .

الحل:

مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) للاعب س

$$\begin{pmatrix} \text{ص} & \text{ص} & \text{ص} & \text{ص} \\ ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣٣ & ٢ & ١٥ & ٦١ \\ ٢٤ & ٥٧ & ٢١ & ٩١ \\ ٢١ & ٧٨ & ٣٠ & ٦٥ \end{pmatrix}$$

- أصغر مفردة في الصف الأول ٢ أكبر مفردة في العمود الأول ٤٥
 أصغر مفردة في الصف الثاني - ٥٧ أكبر مفردة في العمود الثاني ٢
 أصغر مفردة في الصف الثالث - ٧٨ أكبر مفردة في العمود الثالث ٣٠
 أكبر مفردة في العمود الرابع ٩١

وعلي ذلك يتمثل حل المباراة في اختيار الصف الأول للاعب س والعمود الثاني للاعب ص ، وتكون قيمة المباراة أو نقطة التلاقي تساوي ٢ .
 س٨: يوضح الجدول التالي بيانات مصفوفة عوائد المباراة من وجهة نظر الشركة س.

جدول بيانات مصفوفة المكاسب (نتائج أو عوائد) للاعب س

٣ص	٢ص	١ص	إستراتيجيات اللاعب ص
			إستراتيجيات اللاعب س
١٠	٨	٤-	١س
١٢٠	٦-	٠	٢س
١٢-	٢	١٠-	٣س

والمطلوب: إيجاد قيمة المباراة .

مصفوفة المكاسب (نتائج أو عوائد) للاعب س

ص

$$\begin{pmatrix} \text{ص} & \text{ص} & \text{ص} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & ١٠ \\ ١٠ & ٨ & ٤ \end{pmatrix} \begin{matrix} ١س \\ ٢س \\ ٣س \end{matrix} \quad \text{س}$$

- بمقارنة عناصر الصف الثالث س_٣ (الإستراتيجية الثالثة س_٣) بعناصر الصف الأول س_١ (الإستراتيجية الأولى س_١) يتضح أن الإستراتيجية الأولى س_١ مسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة باعتبارها إستراتيجية رديئة غير جيدة وغير مربحة ومخسرة لتظهر المصفوفة المصغرة بعد استبعاد الصف الأول علي النحو التالي:

$$\begin{array}{c}
 \text{ص} \\
 \begin{array}{ccc}
 \text{ص} & \text{ص} & \text{ص} \\
 \text{س} & \text{س} & \text{س} \\
 \left(\begin{array}{ccc}
 ١٢٠ & ٦- & ٠ \\
 ١٠ & ٨ & ٤-
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة المصغرة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص ، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثالث ص_٣ (الإستراتيجية الثالثة ص_٣ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الثاني ص_٢ (الإستراتيجية الثانية ص_٢ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة ص_٣ للشركة ص رديئة و مخسرة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة ، أما الإستراتيجية الثانية ص_٢ للشركة ص فتعد إستراتيجية مسيطرة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

$$\begin{array}{c}
 \text{ص} \\
 \begin{array}{cc}
 \text{ص} & \text{ص} \\
 \text{س} & \text{س} \\
 \left(\begin{array}{cc}
 ٦- & ٠ \\
 ٨ & ٤-
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

- ولإيجاد نقطة التلاقي يتم اختيار الآتي :

• أصغر مفردة في الصف الأول ٦- أكبر مفردة في العمود الأول ٠

• أصغر مفردة في الصف الثاني ٤- أكبر مفردة في العمود الثاني ٨

ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي = ٠ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، وأيضاً ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الثاني تساوي = ٨ لا تمثل أصغر مفردة في صفها، فلا توجد نقطة تلاقي للمباراة ، نظر لأننا أمام

مصفوفة عوائد مباراة ليست ذات استراتيجيات مطلقة وإنما نحن أمام مصفوفة عوائد مباراة ذات استراتيجيات مختلطة . ويمكن حلها بتطبيق خطوات حل الطريقة الحسابية السابق عرضها نصل إلي احتمالي اختيار كل إستراتيجية من الإستراتيجيتين بكل شركة وأيضاً القيمة المتوقعة لعوائد المباراة من وجهة نظر كل شركة من الشركتين س ، وص والتي تظهر بالجدول التالي:

الشركة س	القيمة	الشركة ص	القيمة
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى س _٢	٠,٦٦٧	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى ص _١	٠,٢٢٢
احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى س _٣	٠,٣٣٣	احتمال اختيار الإستراتيجية الأولى ص _٢	٠,٧٧٨
قيمة المباراة	٠,٦٦٧	قيمة المباراة	٠,٦٦٧

الحالة الثالثة: يوضح الجدول التالي بيانات مصفوفة النتائج الخاصة من وجهة نظر الشركة س

جدول بيانات مصفوفة المكاسب (نتائج وعوائد) اللاعب س

١ص	٢ص	٣ص	٣ص	٣ص	إستراتيجيات اللاعب ص إستراتيجيات اللاعب س
٥	١٠٠	٢٥٠	٢٠٠	٤٠٠	س _١
٠	٤٥٠	٦٠٠	٤٥	٥٠	س _٢

والمطلوب:

إيجاد قيمة المباراة باستخدام قواعد السيطرة وأسلوب المباريات الفرعية.

لتحديد قيمة المباراة باستخدام قواعد السيطرة وأسلوب المباريات الفرعية نتبع الآتي:

١- إعداد مصفوفة عوائد المباراة :

		ص					
		ص٥	ص٤	ص٣	ص٢	ص١	
س	س١	٥	١٠٠	٢٥٠	٢٠	٤٠	
	س٢	٠	٤٥	٦٠٠	٤٥	٥٠	

أ - بتطبيق قواعد السيطرة:

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثاني ص٢ (الإستراتيجية الثالثة ص٢ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الأول ص١ (الإستراتيجية الأولى ص١ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثانية ص٢ للشركة ص مخرسة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة، أما الإستراتيجية الأولى ص١ للشركة ص فتعد إستراتيجية مهيمنة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي:

		ص					
		ص٥	ص٤	ص٣	ص٢	ص١	
س	س١	٥	١٠٠	٢٥٠	٢٠	٤٠	
	س٢	٠	٤٥	٦٠٠	٤٥	٥٠	

- وباستخدام بيانات مصفوفة عوائد المباراة أعلاه وتطبيق قواعد السيطرة علي إستراتيجيات الشركة ص، يتضح من مقارنة عناصر قيم العمود الثاني ص٢ (الإستراتيجية الثالثة ص٣ للشركة ص) بعناصر قيم العمود الأول ص١ (الإستراتيجية الأولى ص١ للشركة ص) نجد أن الإستراتيجية الثالثة ص٣ للشركة ص مخرسة وغير مربحة ومسيطر عليها ويجب استبعادها من مصفوفة عوائد المباراة، أما الإستراتيجية الأولى ص١ للشركة ص فتعد إستراتيجية مهيمنة ومفضلة لتظهر مصفوفة نتائج أو عوائد المباراة بعد تطبيق خطوة السيطرة هذه علي النحو التالي: ص

ص

$$\begin{array}{r} 25 \\ 45 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص:} \\ \left(\begin{array}{c} 20 \\ 45 \\ 65 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{ص} \\ \text{ص} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{r} 45 \\ 25 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص:} \\ \left(\begin{array}{c} 20 \\ 45 \\ 65 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{ص} \\ \text{ص} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 70 \\ 25 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص:} \\ \left(\begin{array}{c} 20 \\ 45 \\ 65 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{ص} \\ \text{ص} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 14 \\ 5 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص:} \\ \left(\begin{array}{c} 20 \\ 45 \\ 65 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{ص} \\ \text{ص} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

$$3,214 = 3 \frac{3}{14} = \frac{45}{14} = \frac{1}{14} \times 20 + \frac{13}{14} \times 5 = \text{ق} = \text{قيمة المباراة}$$

٢- حل المباراة الفرعية الثانية بالطريقة العادية نظراً لأنها مباراة ذات إستراتيجية مطلقة:

ص

$$\begin{array}{cc} \text{ص} & \text{ص} \\ \left(\begin{array}{cc} ٤٠- & ٢٠- \\ ٥٠ & ٤٥ \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{س} ١ \\ \text{س} ٢ \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

أصغر مفردة في الصف الأول ٤٠- أكبر مفردة في العمود الأول ٤٥
 أصغر مفردة في الصف الثاني ٤٥ أكبر مفردة في العمود الثاني ٥٠
 ونظراً لأن أكبر مفردة في العمود الأول تساوي = ٤٥ تمثل أصغر مفردة في صفها، فإن نقطة تلاقي المباراة (نتيجة المباراة) = ٤٥
 ١- حل المباراة الفرعية الثالثة بالطريقة الحسابية:

ص

$$\begin{array}{cc} \text{ص} & \text{ص} \\ \left(\begin{array}{cc} ٤٠- & ٥ \\ ٥٠ & ٠ \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{س} ١ \\ \text{س} ٢ \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{cc} \text{ص} & \text{ص} \\ \left(\begin{array}{cc} ٤٠- & ٥ \\ ٥٠ & ٠ \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{س} ١ \\ \text{س} ٢ \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{cc} \text{ص} & \text{ص} \\ \left(\begin{array}{cc} ٤٠- & ٥ \\ ٥٠ & ٠ \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{س} ١ \\ \text{س} ٢ \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{r} 50 \\ \hline 95 \\ 45 \\ \hline 95 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص؛} \\ \left(\begin{array}{cc} 40 & 5 \\ 50 & 0 \end{array} \right) \\ 5 \quad 90 \\ \hline 95 \quad 95 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

ص

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 19 \\ 9 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ص؛} \\ \left(\begin{array}{cc} 40 & 5 \\ 50 & 0 \end{array} \right) \\ 1 \quad 18 \\ \hline 19 \quad 19 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \\ \text{س} \end{array}$$

$$\text{قيمة المباراة} = \text{ق} = 5 \times \frac{18}{19} + 40 \times \frac{1}{19} = \frac{45}{19} = \frac{12}{19} = 2,362$$

نتيجة المباراة الفرعية الثالثة	نتيجة المباراة الفرعية الثانية	نتيجة المباراة الفرعية الأولى
2,362	45	3,214

قيمة المباراة = ق = 2,362 = أصغر نتيجة مباراة فرعية وهي
المباراة الفرعية الثالثة.

نماذج أسئلة ذات اختيارات متعددة

النموذج الأول

فيما يلي مصفوفة نتائج المباراة بين المتنافسين (س) و(ص) ، وعلى ضوء هذه المصفوفة فان :

	ص	س
ص	٦	١١
س	٧	١٠٨
٤		٩٥

١- قيمة المباراة تكون :

٧-١ ب- ١٠ ج- ٥ د- (١٠-)

٢- افضل استراتيجية لكل من س ، ص على الترتيب :

١- الاولى ، الاولى ب- الثانية ، الثانية ج- الثانية ، الثالثة د- الثالثة ، الثانية

٣- المباراة التي تمثل المصفوفة السابقة نتائجها تعتبر مباراة ذات استراتيجية :

١- مختلطة ب- مطلقة ج- فرعية د- لا شيء مما سبق .

٤- تعرف نقطة التلاقي بأنها :

١- أكبر قيمة في صفها وفي عمودها ب- اصغر قيمة في عمودها و أكبر قيمة في صفها

ج- أصغر قيمة في صفها و أكبر قيمة في عمودها د- أصغر قيمة في صفها وفي عمودها

النموذج الثاني

فيما يلي مصفوفة نتائج المباراة بين المتنافسين (س) متنافس الصف و(ص) متنافس العمود ،

وعلى ضوء هذه المصفوفة فان :

	ص	س
ص	٢٤	٢٦
س	٣٢	٢٨
٤٠	٩	١٠

١- قيمة المباراة تكون :

١- (١٠-) ب- ١٠ ج- ٢٠ د- ٢٨

٢- افضل استراتيجية لكل من س ، ص على الترتيب :

١- الاولى ، الاولى ب- الثانية ، الثالثة ج- الثانية ، الاولى د- الثانية ، الثانية

٣ - في حالة تصغير مصفوفة نتائج المباراة السابقة باستخدام قوانين السيطرة فإنها تصبح :

د		ج		ب		أ	
٢٤	٢٦	٢٨	٣٠	٢٤	١٠-	٣٢	٢٨
٣٢	٢٨	١٠	٤٠	٩	٤٠	٩	١٠

٤ - تعرف نقطة التلاقي بأنها :

- ١- أصغر قيمة في صفها و في عمودها
- ب- أكبر قيمة في صفها و أكبر قيمة في عمودها
- ج- اصغر قيمة في عمودها و أكبر قيمة في صفها
- د- أصغر قيمة في صفها و أكبر قيمة في عمودها

مراجع مختارة

- د. أحمد فؤاد عبد الخالق، *بحوث العمليات في المحاسبة*، دار الثقافة العربية، القاهرة، ١٩٨٩م.
- د. أحمد نور، *المحاسبة الإدارية وبحوث العمليات*، مركز الكتاب الجامعي، كلية التجارة، جامعة الإسكندرية، الإسكندرية، ٢٠٠٧م.
- د. حسين حسين شحاتة، *مقومات ومشاكل تطبيق منهج وأساليب بحوث العمليات في مجال المحاسبة: دراسة تحليلية ميدانية*، المجلة العلمية للاقتصاد والتجارة، كلية التجارة، جامعة عين شمس، ١٩٨٨م.
- د. حنفي زكي عيد، *المدخل الحديث في بحوث العمليات واستخداماتها في منظمات الأعمال: الكتاب الأول*، دار الثقافة العربية، القاهرة، ١٩٩٥م.
- د. دلال صادق بطرس، *بحوث العمليات في المحاسبة*، جهاز الكتب بكلية التجارة جامعة القاهرة، القاهرة، ٢٠٠٩م.
- د. سعيد محمود عرفه، *محاضرات في أساليب بحوث العمليات واستخداماتها في المحاسبة*، دار الإنسان، القاهرة، ١٩٧٥م.
- د. عبد المنعم فليح عبد الله، *بحوث العمليات في المحاسبة*، جهاز الكتب بكلية التجارة جامعة القاهرة، القاهرة، ٢٠٠٩م.
- د. محمد عبد العزيز أبو رمان، *البرمجة الخطية: النظرية والتطبيق*، كلية التجارة، جامعة طنطا، ١٩٨٩م.
- د. هالة عبد الله الخولي، *بحوث العمليات في المحاسبة*، جهاز الكتب بكلية التجارة جامعة القاهرة، القاهرة، ٢٠٠٤م.
- Ackoff, R.L. & M.W. Sasieni, (2009), *Fundamentals of Operations Research*, N.Y., John Wiley & Sons. Inc.
- Ackoff, R. L., Gupta S. K., and J. S. Minas, (2008), *Scientific Method: Optimizing Applied Research Decisions*, N.Y., John Wiley & Sons. Inc.
- Gillett, B. E.,(2003), *Introduction to Operations Research: A Computer Oriented Algorithmic Approach*, N.Y., John Wiley & Sons. Inc.
- Moghaddam, A. T. & Christian M., (2009), A Contribution to the Linear Programming Approach to Joint Cost Allocation: Methodology and Application, *European Journal of Operational Research*, (Sep.), Vol. 197, Iss. 3.

-Riggs, J. L. & M. S. Inoue, (2006), *Introduction to Operations Research and Management Science*, N.Y., McGraw – Hill Book Co.

-Shamblin, J. E. & G. T. Stevens, (2001), *Operational Research: A Fundamental Approach*, N.Y., McGraw – Hill Book Co.

-Wagner, H. M., (2006), *Principles of Operations Research: With Applications to Managerial Decisions*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., N.J.

-Yang, W.,(2008), *Advanced Linear Programming Methods for Spatial Forest Management*, M.A. Sc., Dalhousie University (Canada).

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
ج	المقدمة
١	الفصل الأول: الإطار العام لبحوث العمليات: المفاهيم والمبادئ
٢٩	الفصل الثاني: الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية
٥١	الفصل الثالث: الطريقة البيانية لحل نموذج البرمجة الخطية
٦١	الفصل الرابع: الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية: طريقة السمبلكس حالة تعظيم الربحية
١٠٥	الفصل الخامس: الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية: حالة تخفيض (تدنية) التكاليف
١٢٥	الفصل السادس: المشكلة الثنائية (المشكلة المقابلة) في البرمجة الخطية
١٣٩	الفصل السابع: تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية
١٧٣	الفصل الثامن: طرق النقل والتعيين
٢٣١	الفصل التاسع: أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت)
٢٥٥	الفصل العاشر: تخطيط ورقابة التكاليف باستخدام أسلوب بيرت
٢٧٩	الفصل الحادي عشر: نظرية المباريات
٣١٣	تطبيقات وحالات عملية
٤٠١	مراجع مختارة
٤٠٣	قائمة المحتويات