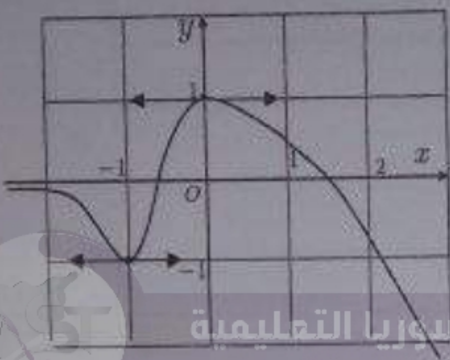
امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة /الفرع العلمي/ عام ٢٠٢٢م

سلّم درجات مادة: الرياضيات — (الدورة الثانية) — الدرجة: ستمئة

السؤال الأول:



نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$.

المطلوب:

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f.

3- اكتب مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

4- عيّن القيم الحديّة للتابع f مبيّناً نوع كلّ منها.

	الإجابة	الدرجة	الملاحظات
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	5+5	
2	معادلة المقارب $y=0$	5	
3	$]-1,0[$	5	يخسر درجة واحدة إذا كتب المجال مغلق
4	$f(0)=1$ قيمة كبرى محلياً $f(-1)=-1$ قيمة صغرى محلياً	5+5 5+5	
	المجموع	40	

السؤال الثاني: في معلّم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$. **المطلوب:**

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S.

	الإجابة	الدرجة	الملاحظات
1	قانون + تعويض	5+10	تحديد نقطة المنتصف للقطعة $[AB]$ 5 حساب مركبات ناظم على المستوي 10 قانون المستوي+تعويض+نتيجة 5+5+5 المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ 10
2	نشر الطرفين +اختزال	5+5+5	
3	المستوي المحوري للقطعة $[AB]$	10	
	المجموع	40	

السؤال السادس: لتكن C دائرة مركزها O ، رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة، لتكن $S=\{A_1,A_2,\dots,A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار. **والمطلوب:**

1- ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟

2- ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S ؟

3- كم مستطيل رؤوسه من عناصر S ؟

رقم الخطوة	الإجابة	الدرجة	الملاحظات
1	التوافيق التعويض + الناتج	10 2+2	
2	التوافيق التعويض + الناتج	10 1+2	
3	التوافيق تعويض + الناتج	10 1+2	
	المجموع	**40**	

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

السؤال السابع: التمرين الأول : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$:

$$v_n=u_n+\frac{1}{2^n} \quad \text{و} \quad u_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}$$

والمطلوب:

1- أثبت أنّ $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية متناقصة .

2- استنتج أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متجاورتان.

3- أثبت أنّ $u_n=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5^n})$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

رقم الخطوة	الإجابة	الدرجة	الملاحظات
1	$u_{n+1}-u_n$ + الناتج	5 + 3	
	استنتاج إشارة $u_{n+1}-u_n$	5	
	استنتاج أن المتتالية متزايدة	2	
	$v_{n+1}-v_n$ التعويض	5 5	
	استنتاج إشارة $v_{n+1}-v_n$	5	
	استنتاج أن المتتالية متناقصة	2	
	حساب الفرق + النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$	3+5	
2	استنتاج أن المتتاليتين متجاورتين	2	
3	u_n مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية + قانون المجموع الوصول إلى $u_n=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5^n})$	5+5 5	
	حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$	8 5	

– الطلب الثاني a):

طريقة ثانية

$\omega=\frac{i\left(\sqrt{3}-\beta i\right)}{\sqrt{3}-\beta i}=i$	10+5	
$\lvert\omega\rvert=\lvert i\rvert=1$	5	

طريقة ثالثة

$\overline{\omega}=\frac{\beta-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i\beta}$	5	
$\frac{1}{\omega}=\frac{\sqrt{3}-i\beta}{\beta+i\sqrt{3}}$	5	
$\frac{\sqrt{3}-i\beta}{\beta+i\sqrt{3}}=\frac{\beta-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i\beta}$ $\beta^2+3=3+\beta^2$	5	
$\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$	3	
$\lvert\omega\rvert=1$	2	

طريقة رابعة

$\omega\cdot\overline{\omega}=\frac{\left(\beta+i\sqrt{3}\right)\left(\beta-i\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}-i\beta\right)\left(\sqrt{3}+i\beta\right)}$ $=\frac{\beta^2+3}{3+\beta^2}=1$ $\lvert\omega\rvert=1$	5+5 5 5	

السؤال التاسع: التمرين الثالث:

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة، واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين (0) و (1) ، نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة ، ونعرّف المتحولين العشوائيين X و Y كالآتي:

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة.

Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين. **والمطلوب:**

1- اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي.

2- اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي.

3- اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X , Y)، أيكون المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً؟ لماذا؟

<table>
<tr><th>رقم الخطوة</th><th>الإجابة</th><th>الدرجة</th><th>الملاحظات</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>$X = \{1,2\}$</td><td>2+2</td><td rowspan="3">إذا كتب قيم X و Y في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X , Y) ينال درجة X و Y</td></tr>
<tr><td>$p(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 2$
$= \frac{2}{3}$</td><td>(تباديل3)+3
2</td></tr>
<tr><td>$p(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{3}$</td><td>3+3
2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>$Y = \{1,2,3\}$</td><td>2+2+2</td><td rowspan="4">إذا استعمل الطالب التوافيق بشكل صحيح ينال الدرجة كاملة

إذا استعمل الطالب السحب مع الإعادة يخسر 20 درجة</td></tr>
<tr><td>$p(Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2$
$= \frac{1}{3}$</td><td>(تباديل3)+3
2</td></tr>
<tr><td>$p(Y=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2$
$= \frac{1}{3}$</td><td>(تباديل3)+3
2</td></tr>
<tr><td>$p(Y=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2$
$= \frac{1}{3}$</td><td>(تباديل3)+3
2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>
<table>
<tr><th>Y \ X</th><th>1</th><th>2</th><th>قانون Y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>قانون X</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>6X1</td><td></td></tr>
<tr><td>غير مستقلين احتمالياً
$p((X=1) \cap (Y=1)) = 0$
$p(X=1) \cdot p(Y=1) = \frac{1}{9} \neq 0$</td><td>2
2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>المجموع</td><td>60</td><td></td></tr>
</table>

السؤال الثالث: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = \ln(2+\sin x)$. **المطلوب:**

1- احسب $g'(x)$ و $g'(0)$.

2- استنتج $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2+\sin x) - \ln(2)}{x}$.

رقم الخطوة	الإجابة	الدرجة	الملاحظات
1	إيجاد $g'(x)$ حساب $g'(0)$ حساب $g(0)$	10+5 5+5	
2	كتابة النهاية المطلوبة بالشكل $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$ معرفة النهاية	5+5 5	
	المجموع	40	

السؤال الرابع: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln(6) \\ \ln(x+y) = \ln(5) \end{cases}$$

الإجابة	الدرجة	الملاحظات
شرطي الحل $x > 0$, $y > 0$	3+3	
قانون $\ln(x \times y) = \ln(6)$ $x \times y = 6$	5 5	
$x + y = 5$	10	
معرفة الحلين: $x = 2$, $y = 3$ $x = 3$, $y = 2$	5+5 2+2	عدم كتابة الحل الثاني يخسر 4 درجات
المجموع	40	عند كتابة شرط الحل مع الحلين مباشرة ينال الدرجة كاملة

السؤال الخامس: ليكن $I = \int_0^1 \dfrac{x^3}{1+x^4}\,dx$ و $J = \int_0^1 \dfrac{x^7}{1+x^4}\,dx$ والمطلوب:

احسب I ثم $I + J$ واستنتج J .

الإجابة	الدرجة	الملاحظات
اصلاح + التابع الأصلي + التعويض + الناتج	5x4	
حساب واختزال $(I + J)$ + التابع الأصلي+الناتج	5x3	
استنتاج التكامل J	5	
المجموع	40	

السؤال الحادي عشر: المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,1[$ وفق: $f(x)=e^{x}+\ln(1-x)$ وليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=(1-x)e^{x}-1$. **والمطلوب:**

1- ادرس اطراد التابع g واستنتج أنّ $g(x)\leq 0$ مهما تكن $x\in\mathbb{R}$.

2- تحقق أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty,1[$ ، ثمّ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

4- في معلم متجانس ارسم المستقيم T ، ثمّ ارسم C الخط البياني للتابع f.

رقم الخطوة	الإجابة	الدرجة	الملاحظات
1	حساب $g'(x)$ إيجاد حل المعادلة $g'(x)=0$	5+5 5	
	إيجاد $g(0)$ جدول الاطراد (إشارات + أسهم) $g(x)\leq 0$	5 2+2+3+3 5	
2	إثبات $f'(x)=\dfrac{g(x)}{1-x}$ أيجاد النهايات	5×3 5+5	
	جدول التغيرات	5+5	
3	معادلة المماس + حساب الميل $f(0)=1$ + كتابة معادلة المماس	5+5 5+5	
	رسم المماس + رسم الخط البياني	5+5	
	المجموع	100	

- انتهى السُلّم -