الدرس

2

2

2

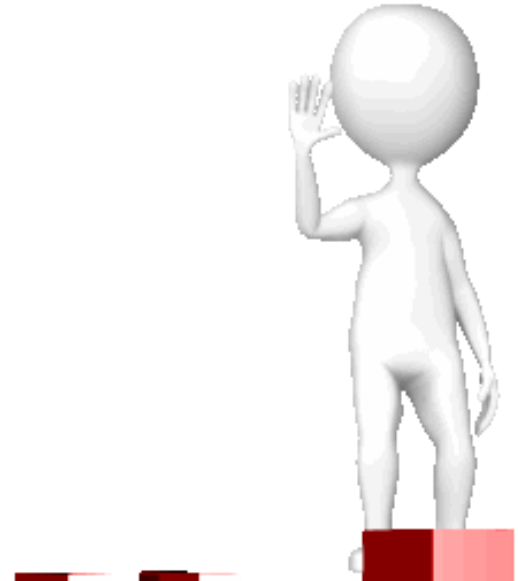
2

2

2

حل المعادلات والمتباينات الأسية

SOLVING EXPONENTIAL EQUATIONS AND INEQUALITIES



Welcome

لماذا ؟

تتزايد اشتراكات مواقع الانترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1425هـ، و y عدد المشتركين بالملايين .

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة،

لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة،

حل المعادلات الأسية :

تظهر المتغيرات في المعادلة الأسية في موقع الأسس.

مفهوم أساسي

خاصية المساواة للدوال الأسية

التعبير اللفظي :

إذا كان $b > 0, b \neq 1$ فإن $b^x = b^y$ إذا فقط إذا كان $x = y$

مثال :

إذا كان $3^x = 3^5$ فإن $x = 5$ و إذا كان $x = 5$ فإن $3^x = 3^5$

يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية .

حل المعادلات الأسية

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي :

(a $2^x = 8^3$

المعادلة الأصلية	$2^x = 8^3$
$8 = 2^3$	$2^x = \left(2^3\right)^3$
خاصية قوة القوة	$2^x = 2^9$
خاصية المساواة للدوال الأسية	$x = 9$

(b $9^{2x-1} = 3^{6x}$

المعادلة الأصلية	$9^{2x-1} = 3^{6x}$
$9 = 3^2$	$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$
خاصية قوة القوة	$3^{4x-2} = 3^{6x}$
خاصية المساواة للدوال الأسية	$4x - 2 = 6x$
بطرح 4X من كلا الطرفين	$-2 = 2x$
بقسمة كلا الطرفين علي 2	$-1 = x$

تحقق من فهمك

(1A $4^{2n-1} = 64$ $x = 2$

(1A $5^{5x} = 125^{x+2}$ $x = 3$

يمكنك استعمال معلومات عن النمو أو الاضمحلال لكتابة دالة أسية.

كتابة دالة أسية

مثال 2 من واقع الحياة

علوم : بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 32000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = abx$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a.

الدالة الأسية $y = ab^x$

بالتعويض عن x بالعدد 0 و عن y بالعدد 7500 $7500 = ab^0$

$7500 = a$ $b^0 = 1$

وعندما x = 4، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$230000 = 7500 \cdot b^4$ بالتعويض عن x بالعدد 4 و عن y بالعدد 23000 ، و عن a بالعدد 7500

$3.067 = b^4$ بقسمة كلا الطرفين علي 7500

$\sqrt[4]{3.067} \approx b$ بإيجاد الجذر الرابع للطرفين

$1.323 \approx b$ باستعمال الحاسبة

المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y \approx 7500(1.323)^x$

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة ؟

$y \approx 7500(1.323)^x$ المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية

$\approx 7500(1.323)^{12}$ بالتعويض عن x بالعدد 12

≈ 215665 باستعمال الحاسبة

سيكون هناك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تحقق من فهمك

2) إعادة تصنيع : أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1426هـ، وفي عام 1430هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1426هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = abx$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

$$y = 3200000(0.60)^x$$

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1471هـ ؟

لاشئ ء

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن الربح المركب؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن الربح المركب؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي

الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

الربح المركب

مثال 3

استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

أفهم : أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة .

خطط : بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب .

$$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$$

صيغة الربح المركب

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

$$= 25000\left(1+\frac{0.042}{12}\right)^{12\cdot 15}$$

باستعمال الحاسبة

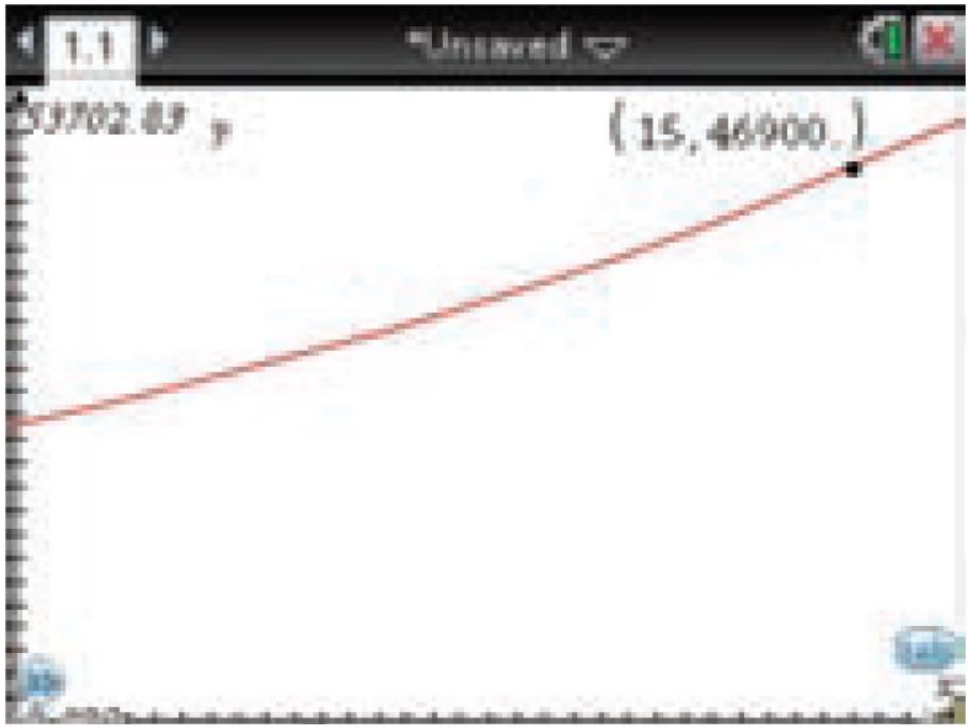
$$\approx 46888.66$$

تحقق : مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا

$y = 25000(1.0035)^{12t}$ استعمل $CALC : value$

لتجد y عندما x=15 .

قيمة y هي 46900 و هي قريبة جداً من القيمة 46888.66 ، إذن ، فالاجابة معقولة .



تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا، ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

$$P = 100000$$

$$r = 0.12$$

$$n = 24$$

$$t = s$$

$$A = 100000\left(1 + \frac{0.12}{24}\right)$$

$$= 181939.67$$

حل المتباينات الأسية : المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي

خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي :

إذا كان $b > 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا فقط إذا كان $x > y$

$b^x < b^y$ إذا فقط إذا كان $x < y$

مثال :

إذا كان $2^x > 2^6$ فإن $x > 6$ و إذا كان $x > 6$ فإن $2^x > 2^6$

خاصية التباين لدالة الاضمحلال

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي : إذا كان $1 > b > 0$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $y<x$

مثال : إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، فإن $x < 5$ ، و إذا كان ؛ $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين ≥

مثال ٤

حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4 \, , \, 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين للدوال الأسية
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

تحقق من فهمك

(4A $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

$x \geq -2$

(4B $5^{x+2} > \frac{1}{32}$

$x > -7$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

(1 $8^{4x+2} = 64$ — 0

(2 $5^{x-6} = 125$ — 9

(3 $3^{5x} = 27^{2x-4}$ — 12

(4 $16^{2y-3} = 4^{y+1}$ — $\frac{7}{3}$

(5 $2^{6x} = 32^{x-2}$ — -10

(6 $49^{x+5} = 7^{8x-6}$ — $\frac{8}{3}$

(7 $81^{a+2} = 3^{3a+1}$ — -7

(8 $256^{b+2} = 4^{2-2b}$ — -1

(9 $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ — $\frac{5}{3}$

(10 $8^{2y+4} = 16^{y+1}$ — -4

11) **علوم:** الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تمامًا للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة. **(مثال 2)**

a) اكتب دالة أسّية على الصورة $c = ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق.

$$c = 2^{\frac{t}{15}}$$

b) إذا بدأت خلية بكتيرية واحدة بالانقسام، فكم خلية ستتكون بعد ساعة؟

16 خليـــــــــة

12) **مال:** ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430 هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمر سيصبح 169588 ريال بحلول عام 1442 هـ. **(مثال 2)**

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430 هـ.

$$y = 100000(1.045)^x$$

b) افرض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 1450 هـ إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

241171.40 ريال

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.3%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين. (مثال 3)

94533.78 ريال تقريباً

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 2.25%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًا. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3)

57223.22 ريال تقريباً

حل كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

15) $4^{2x+6} \le 64^{2x-4}$ $x \ge 4.5$

16) $25^{y-3} \le \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$ $y \ge \frac{-3}{5}$

17) $625 \ge 5^{a+8}$ $a \ge -4$

18) $10^{5b+2} > 1000$ $b \ge \frac{1}{5}$

19) $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$ $c \ge \frac{3}{4}$

20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \ge \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$ $t \ge -40$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21 $(3, 100)$, $(0, 6.4)$ $y = 6.4(2.5)^x$

22 $(4, 81)$, $(0, 256)$ $y = 256(0.75)^x$

23 $(5, 371293)$, $(0, 128)$ $y = 128(4.926)^x$

24 $(4, 21609)$, $(0, 144)$ $y = 144(3.5)^x$

25) **علوم:** وُضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة. **45.02° C تقريبًا**

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة. **28.94° C تقريبًا**

c) إذا كانت درجة الحرارة المناسبة لشرب الشاي هي 60°C ، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟ **أقل منها**

26) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًّا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$ ، إذا بلغ ارتفاع شجرة $6\,\text{m}$ ، وقطر قاعدة جذعها 19.1cm ، فاكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة عندما يكون ارتفاعها h متر .

$$d = 1.30h^{\frac{3}{2}}$$

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي:

(27 $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

إجابة ممكنة:

المعادلة الأصلية $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 2^{-4x-1}$

$8 = 2^3$ $2^{-4x-1} = (2^3)^{2x+1}$

اضرب القوى $2^{-4x-1} = 2^{6x+3}$

خاصية المساواة للدوال الأسية $-4x-1 = 6x+3$

حل المعادلة الخطية $-10x = 4$

$x = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{7}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$ **(28**

-6 $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$ **(29**

$-\frac{4}{13}$ $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$ **(30**

$\frac{11}{8}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$ **(31**

1 $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$ **(32**

33) سكان: بلغ عدد سكان العالم عام 1950م ، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار. اكتب المعادلة بدلالة x ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف)

$y = 2.556(1.0187)^x$

b) افرض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد سكان العالم عام 2000 .

6.455 مليارات تقريباً

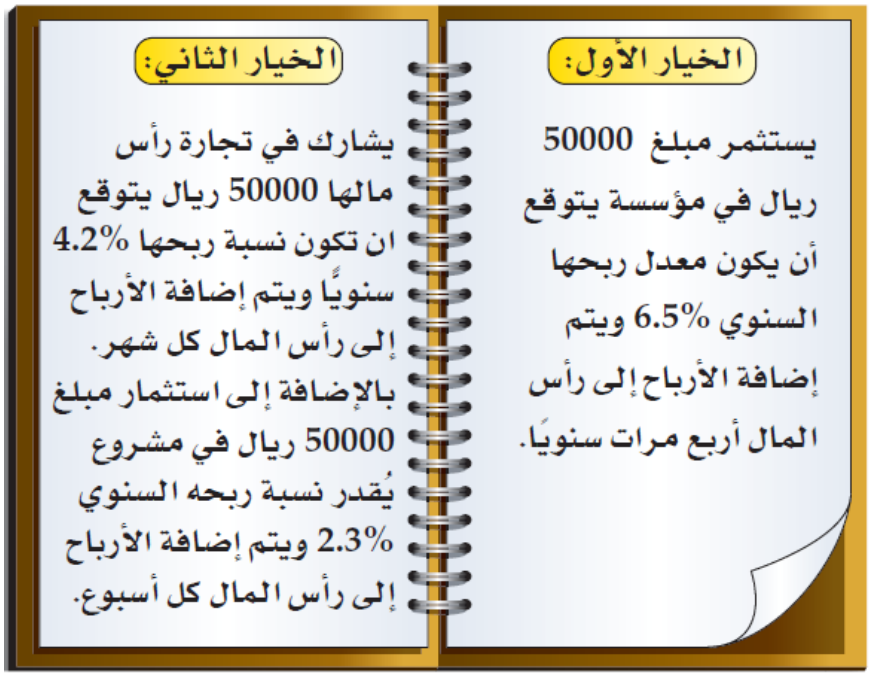
c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان.

التقدير أكبر من العدد الحقيقي للسكان بـ 375 مليون .

d) استعمل المعادلة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضح إجابتك.

9.3498 ملياراً تقريباً ، و بما أن التنبؤ بعدد السكان عام 2000 كان أكبر من العدد الحقيقي ، فقد يكون هذا التنبؤ أكبر مما سيكون عليه في الواقع في ذلك الوقت .

34) ثقافة مالية : يُفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار طويل الأمد، ويريد أن يختار أحدهما.

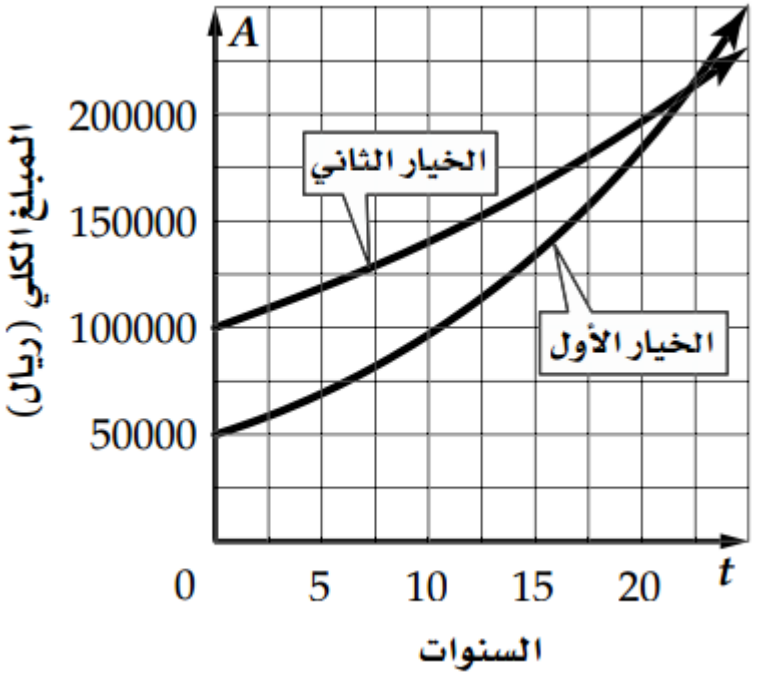


a) اكتب معادلة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

$$A = 50000\left(\frac{4.065}{4}\right)^{4t}$$

$$A = 50000\left[\left(\frac{12.042}{12}\right)^{12t} + \left(\frac{52.023}{52}\right)^{52t}\right]$$

b) مثّل بيانيًّا منحنىً يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.



c) أي الخيارين أفضل في الاستثمار الخيار الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك؟

خلال أول 22 سنة يكون الخيار الثاني أفضل لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخبار الأول .
و بعد 22 سنة يصبح الخيار الأول أفضل لأن المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الثاني .

35) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية . قص ورقة إلى نصفين، وضع بعضهما فوق بعض، ثم قصهما معًا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض، وكرر هذه العملية عدة مرات.

a) **حسيًّا:** عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع. 2.4.8.16

b) **جدوليًّا:** دوِّن نتائجك في جدول.

عدد مرات القص	عدد القطع
1	2
2	4
3	8
4	16

c) **رمزيًا:** استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد القص x مرة.

$$y = 2^x$$

d) **تحليليًا:** يُقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in ، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة.

$$A = 0.003(2)^x$$

e) **تحليليًا:** ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟

3221225.47 in تقريباً