ألف شكر للأساتذة الكرام :

أ. حسان البيطار

أ. خلدون السيروان

أ. ياسر الساسة

أ. طارق بن زياد

أ. وائل زعترية

أ. علاء رحال

وشكر خاص لأستاذي الرائع أمير سكيكر

التوابع الأصلية

تعريف التابع الأصلي :

بفرض f تابع معرف على المجال $I \subseteq R$ نقول إن F تابع اصلي على المجال I للتابع f إذا وفقط إذا تحقق:

- التابع F اشتقاقي على المجال I.
- اياً كان $x \in I$ فإن $\grave{F}(x) = f(x)$.

مثال: ليكن لدينا التابعان المعرفان على R وفق :

$$f(x) = 3x^2 - x + 4 \qquad F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x + 2$$

نلاحظ ان $F(x)$ اشتقاقي على R ويحقق $\grave{F}(x) = 3x^2 - x + 4 = f(x)$ ومنه $F(x)$ تابع اصلي لـ f

قواعد في التوابع الأصلية:

$\boxed{1}$ $f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = c$

$\boxed{2}$ $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{3}$ $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1$

$\boxed{4}$ $f(x) = (ax+b)^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1 \ , a \neq 0$

$\boxed{5}$ $f(x) = \grave{H}(x).H^r(x) \Rightarrow F(x) = \dfrac{H^{r+1}(x)}{r+1} + c \quad : r \neq -1$

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{\grave{g}(x)}{g(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|g(x)| + c \quad : g(x) \neq 0$

$\boxed{7}$ $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$

$\boxed{8}$ $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a}.e^{ax+b} + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{9}$ $f(x) = \grave{g}(x)\, e^{g(x)} \Rightarrow F(x) = e^{g(x)} + c$

$\boxed{10}$ $f(x) = \sin(ax+b) \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{a}.\cos(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{11}$ $f(x) = \cos(ax+b) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a}.\sin(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

تذكرة : ♥ $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ ♥ $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\boxed{12}$ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)} = 1 + \tan^2(ax+b) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a}.\tan(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{13}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)} = 1 + \cot^2(ax+b) \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{a}.\cot(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

ميز بين القاعدتين

$\dfrac{\grave{g}(x)}{g(x)}$	$\grave{H}(x) \, .H^r(x)$
يجب ان يكون اس $g(x)$ يساوي (1).	يجب ان يكون اس $H(x)$ يساوي $r \in R/\{-1\}$

تمرين شامل: أوجد التابع الأصلي لكل تابع مما يلي :

القاعدة : $n \neq -1$: $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

1) $f(x) = 3x^2 - 5x^4 + 1$

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{5x^5}{5} + x + c = x^3 - x^5 + x + c$$

2) $f(x) = \dfrac{x^5 + 3x^3}{x^2}$

$$= \frac{x^5}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} = x^3 + 3x$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + c$$

3) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3}$

$$= \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^{-2} - x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$$

4) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$

$$= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$$

5) $f(x) = x\sqrt{x} - e$

$$= x.x^{\frac{1}{2}} - e = x^{\frac{3}{2}} - e$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - ex + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - ex + c$$

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \ln 2$

$$= \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \ln 2 = x^2.x^{\frac{-1}{3}} - \ln 2 = x^{\frac{5}{3}} - \ln 2$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - (\ln 2)x + c$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - (\ln 2)x + c$$

7) $f(x) = \dfrac{x+1}{x\sqrt{x}}$

$$= \frac{x}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x.x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{-3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

8) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} = 2x^{\frac{-3}{4}}$$

$$F(x) = \frac{2x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 8\sqrt[4]{x} + c$$

9) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4}{x^{\frac{1}{2}}} = (x^2 + 4x + 4).x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= x^2.x^{\frac{-1}{2}} + 4x.x^{\frac{-1}{2}} + 4x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 8\sqrt{x} + c$$

10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + c$$

القاعدة:

$$f(x) = (ax+b)^n \quad \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \qquad : n \neq -1 \qquad : a \neq 0$$

11) $f(x) = (2x-3)^4$

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^5}{5} + c$$
$$= \frac{1}{10}\cdot(2x-3)^5 + c$$

---

12) $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)^3}$

$$= 3(1-x)^{-3}$$
$$F(x) = 3\cdot\frac{1}{-1}\cdot\frac{(1-x)^{-2}}{-2} + c$$
$$= \frac{3}{2(1-x)^2} + c$$

---

13) $f(x) = \sqrt{3x-2}$

$$= (3x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + c$$

14) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$

$$= (2-x)^{\frac{1}{3}}$$
$$F(x) = \frac{1}{-1}\cdot\frac{(2-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$
$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2-x)^4} + c$$

---

15) $f(x) = \sqrt[5]{4x^2-4x+1}$

$$4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$$
$$f(x) = \sqrt[5]{(2x-1)^2} = (2x-1)^{\frac{2}{5}}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c$$
$$= \frac{5}{14}\sqrt[5]{(2x-1)^7} + c$$

ملاحظة: كل تمرين من الشكل: $f(x) = x\sqrt{x \mp a}$

لحله: نضيف لـ x (خارج الجذر) المقدار a ونطرح a، أو نطرح a ونضيف a حسب إشارة a داخل الجذر.

16) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$= [(x+1)-1](x+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}} - 1(x+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{1}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{1}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$$

---

17) $f(x) = x\sqrt{x-2}$

$$= [(x-2)+2](x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-2)(x-2)^{\frac{1}{2}} + 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-2)^{\frac{3}{2}} + 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{1}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-2)^3} + c$$

---

18) $f(x) = (x+4)\sqrt{x-1}$

$$= (x-1+1+4)(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= [(x-1)+5]\,(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}} + 5\,(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-1)^{\frac{3}{2}} + 5(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{1}\cdot\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 5\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{10}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c$$

19) $f(x) = x.(x^2-3)^3$

$= \frac{1}{2}.\underbrace{2x}_{\acute{H}}.\underbrace{(x^2-3)^3}_{H^r}$

$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(x^2-3)^4}{4} + c$

$= \frac{1}{8}.(x^2-3)^4 + c$

---

20) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3+8)^4}$

$= x^2.(x^3+8)^{-4}$

$= \frac{1}{3}.\underbrace{3x^2}_{\acute{H}}.\underbrace{(x^3+8)^{-4}}_{H^r}$

$F(x) = \frac{1}{3}.\frac{(x^3+8)^{-3}}{-3} + c$

$= \frac{-1}{9(x^3+8)^3} + c$

---

21) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$= \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}}$

$= \underbrace{(2x-1)}_{\acute{H}}\underbrace{(x^2-x+1)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$

$F(x) = \frac{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{x^2-x+1} + c$

---

22) $f(x) = \frac{4x+8}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

$= (4x+8)(x^2+4x+5)^{\frac{-1}{2}}$

$= 2\underbrace{(2x+4)}_{\acute{H}}\underbrace{(x^2+4x+5)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$

$F(x) = 2\frac{(x^2+4x+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= 4\sqrt{x^2+4x+5} + c$

---

23) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$= \underbrace{\frac{1}{x}}_{\acute{H}}.\underbrace{\ln x}_{H^r}$

$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

---

24) $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$

$= \underbrace{\frac{1}{x}}_{\acute{H}}.\underbrace{\ln^3 x}_{H^r}$

$F(x) = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$

---

25) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

$= \underbrace{\frac{1}{x}}_{\acute{H}}\underbrace{(1+\ln x)}_{H^r}$

$F(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + c$

---

26) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$

$= \frac{1}{x(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\acute{H}}\underbrace{(1+\ln x)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$

$F(x) = \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1+\ln x} + c$

---

27) $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}}.(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = 2.\underbrace{\frac{1}{2.\sqrt{x}}}_{\acute{H}}.\underbrace{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}_{H^r}$

$F(x) = 2.\frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + c$

28) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + x\sqrt{x}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x\left(1+\sqrt{x}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}.\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}.\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2.\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\dot{H}}.\underbrace{\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x) = 2.\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$$

---

29) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^5}}$

$$= \sqrt{\frac{x-1}{x^4.x}} = \frac{1}{|x^2|}.\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\dot{H}}.\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} + c$$

---

30) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$$= \underbrace{\cos x}_{\dot{H}}.\underbrace{\sin^{-2} x}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{\sin^{-1} x}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c$$

---

31) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$= \sin x.\cos^{-2} x$$

$$= -\underbrace{(-\sin x)}_{\dot{H}}.\underbrace{\cos^{-2} x}_{H^r}$$

$$F(x) = -\frac{\cos^{-1} x}{-1} + c = \frac{1}{\cos x} + c$$

---

32) $f(x) = \underbrace{\sin^4 x}_{H^r}.\underbrace{\cos x}_{\dot{H}}$

$$F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

---

33) $f(x) = \underbrace{\sin 2x}.\sin x$

$$= 2\sin x.\cos x.\sin x$$

$$= 2\underbrace{\cos x}_{\dot{H}}.\underbrace{\sin^2 x}_{H^r}$$

$$F(x) = 2\frac{\sin^3 x}{3} + c$$

---

34) $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$

$$= \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}.\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^3 x.\frac{1}{\cos^2 x}$$

لكن : $\boxed{\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \ , (\tan x)' = 1 + \tan^2 x}$

$$= \underbrace{\tan^3 x}_{H^r}.\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{\dot{H}}$$

$$F(x) = \frac{\tan^4 x}{4} + c$$

---

35) $f(x) = \cos^3 x$

$$= \cos^2 x.\cos x = (1-\sin^2 x).\cos x$$

$$= \left(\cos x - \underbrace{\cos x}_{\dot{H}}\ \underbrace{\sin^2 x}_{H^r}\right) \Longrightarrow F(x)$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

---

36) $f(x) = \sin^3 x$

$$= \sin^2 x.\sin x = (1-\cos^2 x).\sin x$$

$$= \sin x - \sin x.\cos^2 x$$

$$= \sin x + \underbrace{(-\sin x)}_{\dot{H}}.\underbrace{\cos^2 x}_{H^r}$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

لقاعدة:

$$f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)} \Longrightarrow F(x)=ln|g(x)|+c$$

$$ln|g(x)|=\begin{cases} ln(g(x))+c & g(x) \text{ موجب تماماً على } D \\ ln(-g(x))+c & g(x) \text{ سالب تماماً على } D \end{cases}$$

37) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \quad : x\in R$

$$=\frac{1}{2}.\frac{(2x)^{\nearrow g'}}{(x^2+1)_{\searrow g}}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

38) $f(x)=\dfrac{5}{2x-1} \quad : x\in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

$$=\frac{5}{2}.\frac{2^{\nearrow g'}}{(2x-1)_{\searrow g}}$$

$$F(x)=\frac{5}{2}.\ln|2x-1|+c$$

$$=\frac{5}{2}.\ln(-2x+1)+c$$

ملاحظة:

كل تابع كسري حدودي درجة بسطه اكبر او تساوي درجة مقامه لإيجاد تابعه الأصلي اولاً نقسم البسط على المقام ثم نكامل.

39) $f(x)=\frac{2x-3}{x-1} \quad : x\in]1,+\infty[$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x-1 & 2x-3 \\ & \mp 2x \pm 2 \\ \hline & -1 \end{array} \qquad :\frac{2x}{x}=2$$

$$f(x)=2-\frac{1^{\nearrow g'}}{(x-1)_{\searrow g}}$$

$$F(x)=2x-\ln|x-1|+c=2x-\ln(x-1)+c$$

40) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1} \quad : x\in]-\infty,1[$

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x-1 & x^2+2x+1 \\ & \mp x^2 \pm x \\ \hline & 3x+1 \\ & \mp 3x \pm 3 \\ \hline & 4 \end{array} \qquad :\frac{x^2}{x}=x \qquad :\frac{3x}{x}=3$$

$$f(x)=x+3+\frac{4}{x-1}=x+3+4.\frac{1^{\nearrow g'}}{(x-1)_{\searrow g}}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+4\ln|x-1|+c \;=\frac{x^2}{2}+3x+4\ln(-x+1)+c$$

41) $f(x)=\dfrac{e^{x\,\nearrow g'}}{(e^x+1)_{\searrow g}} \quad : x\in R$

$$F(x)=\ln|e^x+1|+c=\ln(e^x+1)+c$$

42) $f(x)=\dfrac{2}{e^x+1} \quad : x\in R$

نضرب البسط والمقام بـ $:e^{-x}$

$$=\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}=-2.\frac{(-e^{-x})^{\nearrow g'}}{(1+e^{-x})_{\searrow g}}$$

$$F(x)=-2\ln|1+e^{-x}|+c$$

$$=-2\ln(1+e^{-x})+c$$

43) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \quad : x\in R$

$$=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$=\frac{(e^x)^{\nearrow g'}}{(e^x+1)_{\searrow g}}+\frac{(-e^{-x})^{\nearrow g'}}{(1+e^{-x})_{\searrow g}}$$

$$F(x)=\ln|e^x+1|+\ln|1+e^{-x}|+c$$

$$=\ln(e^x+1)+\ln(1+e^{-x})+c$$

44) $f(x) = \dfrac{1}{x.\ln x} \quad : x \in]0,1[$

نقسم البسط والمقام على x:

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow g'}}{(\ln x)_{\searrow g}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln|\ln x| + c = \ln(-\ln x) + c$$

---

45) $f(x) = \tan x \quad : x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(-\sin x)^{\nearrow g'}}{(\cos x)_{\searrow g}}$$

$$F(x) = -\ln|\cos x| + c$$

$$= -\ln(-\cos x) + c$$

---

46) $f(x) = \cot x \quad : x \in]0,\pi[$

$$= \frac{(\cos x)^{\nearrow g'}}{(\sin x)_{\searrow g}}$$

$$F(x) = \ln|\sin x| + c = \ln(\sin x) + c$$

---

47) $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x} \quad : x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

نعلم ان:

$\boxed{1 = \sin^2 x + \cos^2 x}$

$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \,.\cos x}$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\ \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(-\sin x)}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(-\ln|\cos x| + \ln|\sin x|) + c$$

$$= \frac{1}{2}(-\ln(\cos x) + \ln(\sin x)) + c$$

---

48) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x \ln x} \quad :]1, +\infty[$

$$= \frac{1}{x\ln x} + \frac{\ln x}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \ln|\ln x| + \ln|x| + c$$

$$= \ln(\ln x) + \ln(x) + c$$

القاعدة :

$f(x) = e^x \quad \Rightarrow F(x) = e^x + c$

$f(x) = e^{ax+b} \quad \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + c \quad : a \neq 0$

$f(x) = g'(x).\, e^{g(x)} \quad \Rightarrow F(x) = e^{g(x)} + c$

49) $f(x) = e^{2x-3} + e^{-x}$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} - e^{-x} + c$$

---

50) $f(x) = e^{1-x} + e$

$$F(x) = -e^{1-x} + ex + c$$

---

51) $f(x) = x.\,e^{x^2+4} + \dfrac{1}{e^{4x}}$

$$= \frac{1}{2}.\,2x.\,e^{x^2+4} + e^{-4x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+4} + \frac{1}{-4}e^{-4x} + c$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2+4} - \frac{1}{4}e^{-4x} + c$$

52) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)_{\searrow g'} .\, e^{(\sqrt{x})^{\nearrow g}} - x^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = 2.\,e^{\sqrt{x}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2.\,e^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + c$$

---

53) $f(x) = e^{x+e^x}$

$$= e^x.\, e^{e^x}$$

$$F(x) = e^{e^x} + c$$

54) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x-1}{x}}-6}{x^2}$

$$=\frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2}-\frac{6}{x^2}=\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{g}\, e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{g}}-6x^{-2}$$

$$F(x)=e^{1-\frac{1}{x}}-\frac{6x^{-1}}{-1}+c=e^{\frac{x-1}{x}}+\frac{6}{x}+c$$

القاعدة:

$f(x)=\sin(ax)$	$\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax)+c$	$: a\neq 0$
$f(x)=\cos(ax)$	$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax)+c$	$: a\neq 0$
$f(x)=\frac{1}{\cos^2(ax)}=1+\tan^2 x$	$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{a}\tan(ax)+c$	$: a\neq 0$
$f(x)=\frac{1}{\sin^2(ax)}=1+\cot^2 x$	$\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{a}\cot(ax)+c$	$: a\neq 0$

55) $f(x)=4\cos 2x-9\sin 3x$

$$F(x)=\frac{4}{2}\sin 2x+\frac{9}{3}\cos 3x+c$$
$$=2\sin 2x+3\cos 3x+c$$

---

56) $f(x)=\sin^2 x$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$
$$F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x+c$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

57) $f(x)=\cos^2 x$

$$=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$
$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x+c$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

ملاحظةفي بعض التمارين احياناً نضطر لاستخدام دساتير التحويل من جداء إلى مجموع إذا كانت الزاويتان مختلفتان.

مثلاً: $f(x)=\sin 3x\,.\cos 4x$

دساتير التحويل من جداء إلى مجموع :

- $\sin x\,.\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$
- $\cos x\,.\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
- $\cos x\,.\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$
- $\sin x\,.\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

---

58) $f(x)=\sin 3x\,.\cos 2x$

لاحظ: احدهما ليس مشتق الآخر والزاويتان مختلفتان إذاً نستطيع تطبيق دساتير التحويل من جداء إلى مجموع.

$$\boxed{\sin 3x\cos 2x=\frac{1}{2}[\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)]=\frac{1}{2}[\sin 5x+\sin x]}$$

بالتعويض :

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)$$
$$F(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right)+c$$

59) $f(x) = \cos 4x . \cos 2x$

$$= \frac{1}{2}[\cos(4x + 2x) + \cos(4x - 2x)] = \frac{1}{2}[\cos 6x + \cos 2x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x\right] + c$$

****

تدرب صفحة 222

1) في كل من الحالات الآتية، تحقق ان F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{1}$ $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = \tan x - x$, $f(x) = \tan^2 x$

Fاشتقاقي على المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\acute{F}(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{2}$ $I = R$, $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$

Fاشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$\acute{F}(x) = \cos x - x\sin x = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{3}$ $I =]0, +\infty[$, $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, $f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$

Fاشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$\acute{F}(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^4 - 1}{x^3}\right) = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{4}$ $I =]0, 1[$, $F(x) = \frac{-1}{x(x - 1)}$, $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2(x - 1)^2}$

Fاشتقاقي على المجال $]0,1[$

$$\acute{F}(x) = \frac{0 - (x - 1 + x)(-1)}{x^2(x - 1)^2} = \frac{2x - 1}{x^2(x - 1)^2} = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{5}$ $I =]0, +\infty[$, $F(x) = x\ln x - x$, $f(x) = \ln x$

Fاشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$\acute{F}(x) = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{6}$ $I =]1, +\infty[$, $F(x) = \ln(\ln x)$, $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

Fاشتقاقي على المجال $]1, +\infty[$

$$\acute{F}(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{7}$ $I = R$, $F(x) = x - \ln(1+e^x)$, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

F اشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$F'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = f(x)$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{8}$ $I = R$, $F(x) = 2\sqrt{e^x}$, $f(x) = \sqrt{e^x}$

F اشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$F'(x) = 2\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \sqrt{e^x} = f(x)$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال $]-\infty, +\infty[$

---

2) في كل من المجالات الآتية تحقق ان G, F تابعان اصليان للتابع f على المجال I

$\boxed{1}$ $I =]1, +\infty[$, $G(x) = \dfrac{x^2+7x-5}{x-1}$, $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$

G, F اشتقاقيان على المجال $]1, +\infty[$

$$F'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (1)(x^2+3x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

$$G'(x) = \frac{(2x+7)(x-1) - (1)(x^2+7x-5)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

$F'(x) = G'(x)$ ومنه G, F تابعان اصليان للتابع $f: x \to \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ على المجال $]1, +\infty[$

$\boxed{2}$ $I = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \tan^2 x$

G, F اشتقاقيان على المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ، نلاحظ ان :

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} :$$

$$F(x) = \tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$F'(x) = \frac{0 - 2\cos x\,(-\sin x)}{\cos^4 x} - 0 = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$G'(x) = \frac{0 - 2\cos x\,(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$F'(x) = G'(x)$ ومنه G, F تابعان اصليان للتابع $f: x \to \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ على المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\boxed{3}$ $I = \left]\dfrac{5}{4}, +\infty\right[$, $G(x) = \dfrac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$, $F(x) = \dfrac{2x^2-3x+7}{4x-5}$

G, F اشتقاقيان على المجال $\left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$

$$F'(x) = \frac{(4x-3)(4x-5) - (4)(2x^2-3x+7)}{(4x-5)^2} = \frac{8x^2-20x-13}{(4x-5)^2}$$

$$G'(x) = \frac{(-8x+2)(10-8x) - (-8)(-4x^2+2x-9)}{(10-8x)^2} = \frac{32x^2-80x-52}{[-2(4x-5)]^2}$$

$$= \frac{4(8x^2-20x-13)}{4(4x-5)^2} = \frac{8x^2-20x-13}{(4x-5)^2}$$

$F'(x) = G'(x)$ ومنه G, F تابعان اصليان للتابع $f: x \to \frac{8x^2-20x-}{(4x-5)^2}$ على المجال $\left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$

$\boxed{4}$ $I = R$, $G(x) = \dfrac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$, $F(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

G, F اشتقاقيان على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$F'(x) = \frac{0-(2x)(1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$G'(x) = \frac{(6x)\big(2(1+x^2)\big)-(4x)(5+3x^2)}{4(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

ومنه $F'(x) = G'(x)$ G, F تابعان اصليان للتابع $f: x \to \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ على المجال I

$\boxed{5}$ $I = R$, $G(x) = 2 - \cos^2 x$, $F(x) = \sin^2 x$

G, F اشتقاقيان على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$F'(x) = 2\sin x \cos x$$

$$G'(x) = -2\cos x\,(-\sin x) = 2\sin x\cos x$$

ومنه $F'(x) = G'(x)$ G, F تابعان اصليان للتابع $f: x \to 2\sin x\cos x$ على المجال I

---

3) ايكون التابعان G, F الآتيان تابعين اصليين للتابع f ذاته على R؟

$G(x) = \sin x - 3\sin^3 x$, $F(x) = \sin(3x) - 2\sin x$

G, F اشتقاقيان على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$G'(x) = \cos x - 9\sin^2 x\cos x = \cos x - 9(1-\cos^2 x)\cos x$$
$$= \cos x - 9\cos x + 9\cos^3 x = 9\cos^3 x - 8\cos x$$

$$F'(x) = 3\cos 3x - 2\cos x = 3(4\cos^3 x - 3\cos x) - 2\cos x$$

(نعلم ان $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$)

$$= 12\cos^3 x - 11\cos x$$

ومنه $F'(x) \neq G'(x)$ G, F ليسا تابعان اصليان لنفس التابع على R

****

تدرب صفحة 227

1) في كل من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً للتابع $f: x \to f(x)$ على المجال I

$\boxed{1}$ $I = R$, $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$

$$F(x) = 8\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x + c$$
$$F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + c$$

$\boxed{2}$ $I =]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

$$f(x) = x^{-4}$$
$$F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$\boxed{3}$ $I =]-\infty, 0[$, $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - 3x^{-2} = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-1}{3}} - 3x^{-2}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 3\frac{x^{-1}}{-1} + c$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x} + c$$

$\boxed{4}$ $I =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-2x+x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$$
$$F(x) = \frac{1}{-1}.\frac{(1-x)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{1-x} + c$$

$\boxed{5}$ $I =]-\infty, -1[$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

$$f(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2}$$
$$F(x) = \frac{(x^2+x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{(x^2+x)} + c$$

6 $I =]1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \dfrac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$

$$f(x) = \frac{4x-2}{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}} = (4x-2)(x^2-x)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= 2\underbrace{(2x-1)}_{H}\underbrace{(x^2-x)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$$
$$F(x) = 2\frac{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{x^2-x} + c$$

---

7 $I = \left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right[\quad , \quad f(x) = \dfrac{5}{4x-3}$

$$f(x) = \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{4x-3}$$
$$F(x) = \frac{5}{4}\ln|4x-3| + c = \frac{5}{4}\ln(-4x+3) + c$$

---

8 $I =]0, +\infty[\quad , \quad f(x) = \dfrac{3x+1}{2x}$

$$f(x) = \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$
$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ln|x| + c$$
$$= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ln x + c = \frac{3}{2}x + \ln\sqrt{x} + c$$

---

9 $I =]-\infty, 2[\quad , \quad f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$$
$$F(x) = x + 3\ln|x-2| + c$$
$$= x + 3\ln(-x+2) + c$$

---

10 $I = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\quad , \quad f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{4}\cdot\frac{2}{2x-1}$$
$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln|2x-1| + c$$
$$= \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln(2x-1) + c$$

---

2) في كل من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً للتابع $f: x \to f(x)$ على المجال I

1 $I = R \quad , \quad f(x) = \cos^2 3x$

نعلم ان: $\left(\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

$$f(x) = \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$$
$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

---

2 $I = R \quad , \quad f(x) = \cos^4 x$

$$f(x) = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$
$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

---

3 $I = R \quad , \quad f(x) = \cos 3x \cos x$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot(\cos 4x + \cos 2x)$$
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$
$$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

---

4 $I =]0, \pi[\quad , \quad f(x) = \cot^2 x$

$$f(x) = \underbrace{1 + \cot^2 x} - 1$$
$$F(x) = -\cot x - x + c$$

$\boxed{5}$ $I = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $f(x) = \tan x$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$F(x) = -\ln|\cos x| + c = -\ln(-\cos x) + c$$

$\boxed{6}$ $I =]0, \pi[$, $f(x) = \cot x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$F(x) = \ln|\sin x| + c = \ln(\sin x) + c$$

$\boxed{7}$ $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5} + c$$

$\boxed{8}$ $I = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

$$f(x) = \frac{1}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}} = (3-2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{-2}\cdot\frac{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{3-2x} + c$$

$\boxed{9}$ $I = R$, $f(x) = x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

$$f(x) = x(x^2+1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2+1)^5} + c$$

$\boxed{10}$ $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$

$$f(x) = \frac{x}{(3-x^2)^{\frac{1}{2}}} = x(3-x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2}(-2x)(3-x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{(3-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{3-x^2} + c$$

****

التكامل المحدد و خواصه

تعريف التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال :

ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I، و ليكن F احد توابعه الأصلية على هذا المجال و ليكن a و b عددين من I . عندئذ لا يتعلق العدد $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ بالتابع الأصلي المختار للتابع f نسمي هذا العدد التكامل المحدد للتابع f من a إلى b، و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\, dx$

إذن $\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ حيث F تابع اصلي ما للتابع f على I

خواص التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال :

ليكن f و g تابعين مستمرين على مجال I ، وليكن a و b عددين من I ، و λ عدد حقيقي.

عندئذ تتحقق الخواص الآتية :

1) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
2) $\int_a^b (\lambda f(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$
3) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

****

تدرب صفحة 235 رقم (1):

احسب التكاملات الآتية:

$$\boxed{1}\ I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2-2\cos 2x}\ dx$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos 2x)}\ dx$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2(2\sin^2 x)}\ dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 x}\ dx$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}2|\sin x|\ dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-2\sin x\ dx$$

$$=2\Big[\cos x\ \Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=2\left(\cos 2\pi-\cos\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=2(1-0)=2$$

$$\boxed{2}\ J=\int_{-1}^{2}x|x-1|\ dx$$

$(x-1)$ سالب تماماً على $]-1,1[$

$(x-1)$ موجب تماماً على $]1,2[$

$$=\int_{-1}^{1}x(-x+1)\ dx+\int_{1}^{2}x(x-1)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+x)\ dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)\ dx$$

$$=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$=\left[\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}$$

$$\boxed{3}\ k=\int_{0}^{1}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)\ dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2}+\frac{1}{2}e^{-2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2}+\frac{1}{2}e^{-2}-1\ =\frac{e^2+e^{-2}-2}{2}$$

$$\boxed{4}\ L=\int_{-2}^{-1}\frac{2x-1}{x-1}\ dx$$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$=\int_{-2}^{-1}\left(2+\frac{1}{x-1}\right)\ dx$$

$$=\Big[2x+\ln|x-1|\ \Big]_{-2}^{-1}$$

$$=\Big[2x+\ln(-x+1)\ \Big]_{-2}^{-1}$$

$$=(-2+\ln 2)-(-4+\ln 3)$$

$$=-2+\ln 2+4-\ln 3\ =2+\ln\frac{2}{3}$$

$$\boxed{5}\ M=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\ dx$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\sin x}{\cos x}\ dx=\Big[-\ln|\cos x|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\Big[-\ln(\cos x)\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(-\ln\frac{1}{2}\right)-\left(-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\ln\sqrt{3}-\ln 2=\ln\sqrt{3}$$

$$\boxed{6}\ N=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\ dx$$

$$=\Big[\ln|\cos x+\sin x|\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\Big[\ln(\cos x+\sin x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ln(0+1)-\ln(1+0)=0$$

طريقة التكامل بالتجزئة

مبرهنة : نتامل تابعين u و v قابلين للاشتقاق على مجال I . نفترض ان المشتقان لـ u و v مستمران على I عندئذ اياً يكن العددان a و b من I كان

$$\int_a^b u(x)\,.\,\grave{v}(x)\;dx = \left[u(x).v(x)\;\right]_a^b - \int_a^b v(x)\,.\,\grave{u}(x)\;dx$$

♥ نستخدم التكامل بالتجزئة للتكاملات من الشكل:

1) $\int_a^b \underbrace{x^m}_{u(x)}.\underbrace{\sin(ax)}_{v'(x)}\;dx$ 2) $\int_a^b x^m.\cos(ax)\;dx$ 3) $\int_a^b x^m.e^{ax}\;dx$ 4) $\int_a^b \underbrace{x^m}_{v'(x)}.\underbrace{\ln x}_{u(x)}\;dx$

ملاحظة : في الحالات 1 و2 و 3 نضع دائماً $u(x)=x^m$ ، في الحالة 4 نضع $u(x)=\ln x$.

تمرين: أوجد باستخدام التكامل بالتجزئة:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\,.\sin x\;\;dx$$

$u(x)=2x \implies \grave{u}(x)=2$ $\qquad\qquad \grave{v}(x)=\sin x \Longrightarrow v(x)=-\cos x$

$$I=\left[-2x\cos x\;\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-2\cos x\;\;dx=\left[-2x\cos x+2\sin x\;\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=(0+2)-(0+0)=2$$

تدرب صفحة 236 رقم (2): احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل التجزئة:

$\boxed{1}\; I=\int_1^e x\ln x\;\;dx$ $u(x)=\ln x\longrightarrow \grave{u}(x)=\frac{1}{x}$ $\grave{v}(x)=x\;\;\longrightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}$ $I=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\;\;dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$ $=\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\;=\frac{e^2+1}{4}$	$\boxed{2}\; J=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\;\;dx$ $u(x)=x-1\longrightarrow \grave{u}(x)=1$ $\grave{v}(x)=\cos x\longrightarrow v(x)\;=\sin x$ $J=\left[(x-1)\sin x\;\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\;\;dx$ $=\left[(x-1)\sin x\;\right]_0^{\pi}+\left[\cos x\;\right]_0^{\pi}$ $=(0-0)+(-1-1)=-2$
$\boxed{3}\; k=\int_0^1(x+2)e^x\;\;dx$ $u(x)=x+2\longrightarrow \grave{u}(x)=1$ $\grave{v}(x)=e^x\;\;\;\longrightarrow v(x)=e^x$ $k=\left[(x+2)e^x\;\right]_0^1-\int_0^1 e^x\;\;dx$ $=\left[(x+2)e^x\;\right]_0^1-\left[e^x\;\right]_0^1$ $=(3e-2)-(e-1)=2e-1$	$\boxed{4}\; L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin 3x\;\;dx$ $u(x)=x\;\;\;\;\longrightarrow \grave{u}(x)=1$ $\grave{v}(x)=\sin 3x\longrightarrow v(x)=\frac{-1}{3}\cos 3x$ $L=\left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{3}\cos 3x\right)\;\;dx$ $=\left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$ $=\left(\frac{\pi}{9}-0\right)+(0-0)=\frac{\pi}{9}$

$\boxed{5}$ $M = \int_0^{\pi} e^x \cos x \; dx$

$u(x) = e^x \longrightarrow \grave{u}(x) = e^x$

$\grave{v}(x) = \cos x \longrightarrow v(x) = \sin x$

$$M = \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x \; dx$$

$T = \int_0^{\pi} e^x \sin x \; dx$ نرمز بـ

$M = [e^x \sin x\ ]_0^{\pi} - T$ $\boxed{*}$

$T = \int_0^{\pi} e^x \sin x \; dx$ نحسب تكامل T بالتجزئة :

$u(x) = e^x \longrightarrow \grave{u}(x) = e^x$

$\grave{v}(x) = \sin x \longrightarrow v(x) = -\cos x$

$$T = \Big[-e^x \cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x \; dx$$

$$= \Big[-e^x \cos x\Big]_0^{\pi} + M$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$M = [e^x \sin x\ ]_0^{\pi} - [-e^x \cos x\ ]_0^{\pi} - M$

$2M = [e^x \sin x\ ]_0^{\pi} + [e^x \cos x\ ]_0^{\pi}$

$2M = (0 - 0) + (-e^{\pi} - 1)$

$2M = -e^{\pi} - 1$

$M = \frac{-1}{2}(e^{\pi} + 1)$

$\boxed{6}$ $N = \int_0^{\pi} e^x \sin x \; dx$

$u(x) = e^x \longrightarrow \grave{u}(x) = e^x$

$\grave{v}(x) = \sin x \longrightarrow v(x) = -\cos x$

$$N = \Big[-e^x \cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x \; dx$$

$T = \int_0^{\pi} e^x \cos x \; dx$ نرمز بـ

$N = \Big[-e^x \cos x\Big]_0^{\pi} + T$ $\boxed{*}$

$T = \int_0^{\pi} e^x \cos x \; dx$ نحسب تكامل T بالتجزئة :

$u(x) = e^x \longrightarrow \grave{u}(x) = e^x$

$\grave{v}(x) = \cos x \longrightarrow v(x) = \sin x$

$$T = \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x \; dx$$

$$= \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\pi} - N$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$N = [-e^x \cos x\ ]_0^{\pi} + [e^x \sin x\ ]_0^{\pi} - N$

$2N = [-e^x \cos x\ ]_0^{\pi} + [e^x \sin x\ ]_0^{\pi}$

$2N = (e^{\pi} + 1) + 0$

$N = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

تدرب صفحة 236 رقم (3): جد تابعاً أصلياً للتابع $f: x \to f(x)$ على المجال I:

$\boxed{1}$ $I = R$, $f(x) = x \cos x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t \cos t$

$u(t) = t \longrightarrow \grave{u}(t) = 1$

$\grave{v}(t) = \cos t \longrightarrow v(t) = \sin t$

$$\int_0^x t \cos t \; dt = [t \, . \sin t\ ]_0^x - \int_0^x \sin t \; dt$$

$$= [t . \sin t + \cos t\ ]_0^x$$

$$= (x \sin x + \cos x) - (0 + 1)$$

$$F(x) = x \sin x + \cos x - 1$$

$\boxed{2}$ $I = R$, $f(x) = x \sin 2x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t \sin 2t$

$u(t) = t \longrightarrow \grave{u}(t) = 1$

$\grave{v}(t) = \sin 2t \longrightarrow v(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t$

$$\int_0^x t \sin 2t \; dt = \Big[-\frac{1}{2} t \cos 2t\Big]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{2} \cos 2t \; dt$$

$$= \Big[\frac{-1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t\Big]_0^x$$

$$= \Big(\frac{-1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x\Big) - (0 + 0)$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

3 $I = R \quad , \quad f(x) = x^2 e^x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2\, e^t$

$u(t) = t^2 \longrightarrow \grave{u}(t) = 2t$

$\grave{v}(t) = e^t \longrightarrow v(t) = e^t$

$$\int_0^x t^2\, e^t\ dt = \left[t^2\, e^t\ \right]_0^x - \int_0^x 2t\, e^t\ dt$$

تكامل بالتجزئة مرة ثانية: $u(t) = 2t \longrightarrow \grave{u}(t) = 2$

$\grave{v}(t) = e^t \longrightarrow v(t) = e^t$

$$\int_0^x t^2\, e^t\ dt = \left[t^2\, e^t\ \right]_0^x - \left[\left[2t\, e^t\ \right]_0^x - \int_0^x 2\, e^t\ dt\right]$$

$$= \left[t^2\, e^t - 2t\, e^t + 2e^t\ \right]_0^x$$

$$= (x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2e^x) - (2)$$

$$F(x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$$

---

4 $I =]0, +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2 \ln x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2\, \ln t$

$u(t) = \ln t \longrightarrow \grave{u}(t) = \dfrac{1}{t}$

$\grave{v}(t) = t^2 \longrightarrow v(t) = \dfrac{t^3}{3}$

$$\int_1^x t^2 \ln t\ \ dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{3}\ \ dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\ln t - \frac{t^3}{9}\right]_1^x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) - \left(\frac{-1}{9}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

---

5 $I = R \quad , \quad f(x) = x^2 \sin 2x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2\ \sin 2t$

$u(t) = t^2 \longrightarrow \grave{u}(t) = 2t$

$\grave{v}(t) = \sin 2t \longrightarrow v(t) = \dfrac{-1}{2}\cos 2t$

$$\int_0^x t^2 \sin 2t\ \ dt = \left[\frac{-1}{2}t^2 \cos 2t\right]_0^x + \int_0^x t\cos 2t\ \ dt$$

تكامل بالتجزئة مرة ثانية :

$u(t) = t \longrightarrow \grave{u}(t) = 1$

$\grave{v}(t) = \cos 2t \longrightarrow v(t) = \dfrac{1}{2}\sin 2t$

$$\int_0^x t^2 \sin 2t\ \ dt$$

$$= \left[\frac{-1}{2}t^2 \cos 2t\right]_0^x + \left[\left[\frac{1}{2}t \sin 2t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\sin 2t\ \ dt\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{2}t^2 \cos 2t + \frac{1}{2}t \sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x$$

$$= \left(\frac{-1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right) - \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}$$

---

6 $I = R \quad , \quad f(x) = x^2 \cos 3x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2\ \cos 3t$

$u(t) = t^2 \longrightarrow \grave{u}(t) = 2t$

$\grave{v}(t) = \cos 3t \longrightarrow v(t) = \dfrac{1}{3}\sin 3t$

$$\int_0^x t^2 \cos 3t\ \ dt = \left[\frac{1}{3}t^2 \sin 3t\right]_0^x - \int_0^x \frac{2}{3}t \sin 3t\ \ dt$$

تكامل بالتجزئة مرة ثانية:

$u(t) = \dfrac{2}{3}t \longrightarrow \grave{u}(t) = \dfrac{2}{3}$

$\grave{v}(t) = \sin 3t \longrightarrow v(t) = \dfrac{-1}{3}\cos 3t$

$$\int_0^x t^2 \cos 3t\ \ dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^2 \sin 3t\right]_0^x - \left[\left[\frac{-2}{9}t \cos 3t\right]_0^x + \int_0^x \frac{2}{9}\cos 3t\ \ dt\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^2 \sin 3t + \frac{2}{9}t \cos 3t - \frac{2}{27}\sin 3t\right]_0^x$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x\right) - (0)$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x$$

حساب تكامل بعض التوابع الكسرية

سنكتفي بدراسة التوابع الكسرية $f: x \to \frac{A(x)}{B(x)}$ حيث $A(x), B(x)$ كثيري حدود من الدرجة الثانية (حده المسيطر x^2)
وله جذران مختلفان r_1 ، r_2 اي يمكن تحليل $B(x)$ إلى جداء عوامل من الشكل $B(x) = (x - r_1)(x - r_2)$
مع ملاحظة ان البسط ليس مشتق المقام.

نهدف إلى حساب $I = \int_a^b f$ حيث a و bعددان من احد مجالات المجموعة $R\backslash\{r_1, r_2\}$
و نميز حالتين :

الحالة الأولى : درجة البسط $A(x)$اصغر او تساوي الواحد

نقوم بتحليل المقام $B(x)$ إلىجداء عوامل من الدرجة الأولى مختلفة: $B(x) = (x - r_1)(x - r_2)$
عندها يمكن تفريق الكسر بالشكل: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2}$
لنعين A و B وذلكبتوحيد المقامات بين الطرفين ثمحذفها كما في المثال الآتي .

$$I =]-\infty, -3[\quad , \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 9}$$

نلاحظ أن درجة البسط اصغر من درجة المقام والبسط ليس مشتق للمقام.

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{x+1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\boxed{x + 1 = A(x+3) + B(x-3)} \quad (*)$$

$$x = 3 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} 4 = 6A \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3}} \quad , \quad x = -3 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} -2 = -6B \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\ln|x-3| + \frac{1}{3}\ln|x+3| + c = \frac{2}{3}\ln(-x+3) + \frac{1}{3}\ln(-x-3) + c$$

الحالة الثانية : درجة البسط $A(x)$اكبر او تساوي 2

نجري القسمة الإقليدية لكثير الحدود A على Bو نعود للحالة الأولى كما في المثال الآتي .

$$I =]-\infty, -2[\quad , \quad f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 - 4}$$

درجة البسط أكبر مندرجة المقام ومنه نقسم البسط على المقام:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} \mp x^4 \pm 4x^2 & x^2 + 4 \\ \hline 4x^2 + 4 & \\ \mp 4x^2 \pm 16 & \\ \hline 20 & \end{array} \Rightarrow f(x) = x^2 + 4 + \underbrace{\frac{20}{x^2 - 4}}_{\text{يلزمها تفريق كسور}}$$

$$\frac{20}{x^2-4}=\frac{20}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{20}{(x-2)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{20=A(x+2)+B(x-2)} \quad (*)$$

$x=2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 20=4A \Rightarrow \boxed{A=5}$, $x=-2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 20=-4B \Rightarrow \boxed{B=-5}$

$$f(x)=x^2+4+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$f(x)=x^2+4+\frac{5}{x-2}-\frac{5}{x+2}$$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+4x+5\ln|x-2|-5\ln|x+2|+c$$

$$=\frac{x^3}{3}+4x+5\ln(-x+2)-5\ln(-x-2)+c$$

****

تدرب صفحة 236 رقم (4):

جد تابعاً اصلياً للتابع $f:x\to f(x)$ على المجال I

$\boxed{1}$ $I=]1,+\infty[$, $f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$

$$f(x)=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{B(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\boxed{x+3=A(x+1)+B(x-1)} \quad (*)$$

$x=1 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 4=2A \Rightarrow \boxed{A=2}$, $x=-1 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 2=-2B \Rightarrow \boxed{B=-1}$

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$f(x)=2\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$=2\ln|x-1|-\ln|x+1|+c$$

$$F(x)=2\ln(x-1)-\ln(x+1)+c=\ln(x-1)^2-\ln(x+1)+c=\ln\frac{(x-1)^2}{(x+1)}+c$$

$\boxed{2}$ $I=]-\infty,-2[$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{x+1 = A(x+2) + B(x-2)} \quad (*)$$

$x=2 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} 3 = 4A \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{4}}$, $x=-2 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} -1 = -4B \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}$

$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2}$

$F(x) = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + c = \frac{3}{4}\ln(-x+2) + \frac{1}{4}\ln(-x-2) + c$

---

3 $I =]2,3[$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 6}$

$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$

$\frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

$$\boxed{x = A(x+2) + B(x-3)} \quad (*)$$

$x=3 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} 3 = 5A \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{5}}$, $x=-2 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} -2 = -5B \Rightarrow \boxed{B = \frac{2}{5}}$

$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$

$f(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x+2}$

$F(x) = \frac{3}{5}\ln|x-3| + \frac{2}{5}\ln|x+2| + c = \frac{3}{5}\ln(-x+3) + \frac{2}{5}\ln(x+2) + c$

---

4 $I =]-1,0[$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 + x}$

$f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$

$\frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{x(x+1)}$

$$\boxed{2x-1 = A(x+1) + Bx} \quad (*)$$

$x=0 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} \boxed{A = -1}$, $x=-1 \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} -3 = -B \Rightarrow \boxed{B = 3}$

$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$

$f(x) = \frac{-1}{x} + 3\frac{1}{x+1}$

$F(x) = -\ln|x| + 3\ln|x+1| + c = -\ln(-x) + 3\ln(x+1) + c$

$\boxed{5}$ $I =]2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$

درجة البسط اكبر من درجة المقام،بإجراء القسمة الإقليدية:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2 - x - 2}$$

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\boxed{3x + 2 = A(x+1) + B(x-2)} \quad (*)$$

$$x = 2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 8 = 3A \Rightarrow \boxed{A = \frac{8}{3}} \quad , \quad x = -1 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} -1 = -3B \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{8}{3}.\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + c = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1) + c$$

$\boxed{6}$ $I =]-\infty, -2[$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$

طريقة اولى :

$$f(x) = \frac{2x - 1 + 4 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2x+4}{x^2+4x+4} - \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{2x+4}{x^2+4x+4} - 5(x+2)^{-2}$$

$$F(x) = \ln|x^2 + 4x + 4| - \frac{5(x+2)^{-1}}{-1} + c = \ln(x^2 + 4x + 4) + \frac{5}{x+2} + c$$

طريقة ثانية :

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\boxed{2x - 1 = A(x+2) + B} \quad (*)$$

$$x = -2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} \boxed{B = -5} \quad , \quad x = 0 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} -1 = 2A + B \Rightarrow -1 = 2A - 5 \Rightarrow \boxed{A = 2}$$

$$f(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$f(x) = 2\frac{1}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} = 2.\frac{1}{x+2} - 5(x+2)^{-2}$$

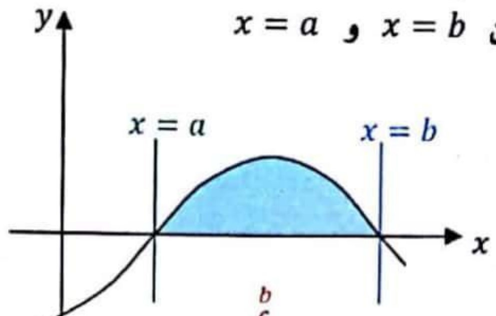
$$F(x) = 2\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + c = 2\ln(-x-2) + \frac{5}{x+2} + c$$

التكامل المحدد وحساب المساحة والحجم

نقبل بصحة القضايا الآتية دون ذكر لبرهان:

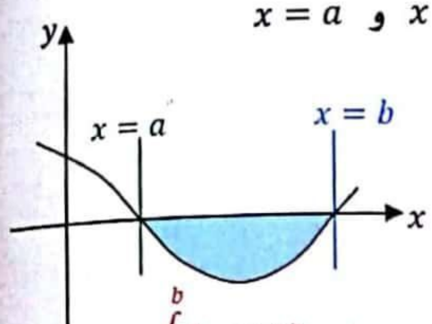
- مساحة اي سطح محدود في المستوي هو عدد حقيقي موجب.
- مساحة اجتماع سطحين منفصلين تساوي مجموع مساحتيهما.
- ولحساب مساحة سطح محدود بطريقة التكامل المحدد نميز الحالات الآتية :

① مساحة سطح محصور فوق المحور $x\acute{x}$ و المستقيمين $x = b$ و $x = a$



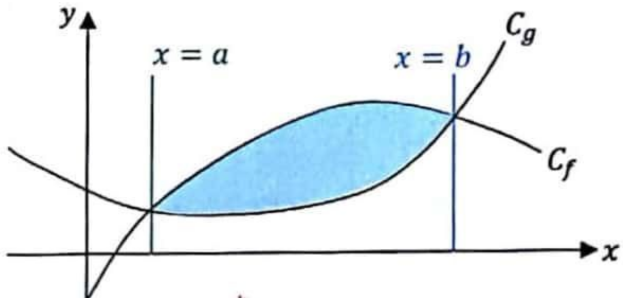
$$S = \int_a^b f(x)\ dx$$

② مساحة سطح محصور تحت المحور $x\acute{x}$ و المستقيمين $x = b$ و $x = a$



$$S = \int_a^b \left(-f(x)\right)\ dx$$

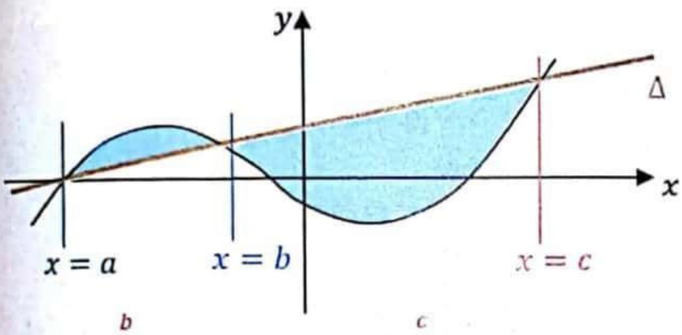
④ مساحة سطح محصوربين خطين بيانيين و المستقيمين $x = b$ و $x = a$



$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\ dx$$

لأن C_f فوق C_g في المجال $[a, b]$

⑤ مساحة سطح محصور بين خط بياني C_f و مستقيم $\Delta: y = ax + b$



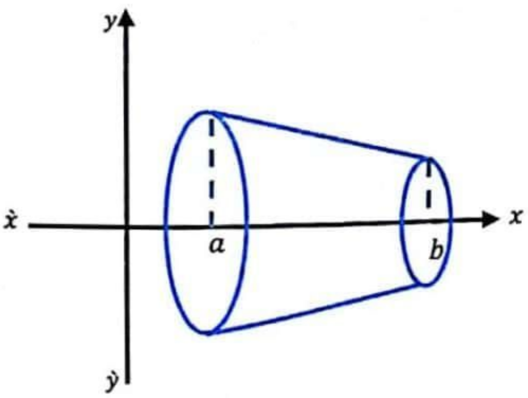
$$S = \int_a^b \left(f(x) - y_\Delta\right)\ dx + \int_b^c \left(y_\Delta - f(x)\right)\ dx$$

****

حساب حجم مجسم دوراني:

حجم مجسم ناتج عن دوران سطح محصور بين المحور $x\acute{x}$ والمستقيمين $x = b$ و $x = a$

دورة كاملة



ملاحظة : يعطى قانون حجم الكرة بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

حيث : r نصف قطر الكرة

تمرينات ومسائل صفحة 244

1) في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

1 $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} \quad : \quad]0,+\infty[$

$$f(x) = 1 - x^{-2} + \frac{3}{x}$$

$$F(x) = x - \frac{x^{-1}}{-1} + 3\ln|x| + c$$

$$= x + \frac{1}{x} + 3\ln x + c$$

2 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}} \quad : \quad \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

$$f(x) = 2(1-2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = 2.\frac{1}{-2}.\frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -2\sqrt{1-2x} + c$$

3 $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \quad : \quad]1,+\infty[$

$$f(x) = \underbrace{2x}_{H}\Big(\underbrace{x^2-1}_{H^r}\Big)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x^2-1} + c$$

4 $f(x) = (2x-1)^3 \quad : \quad I = R$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)^4 + c$$

5 $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2} \quad : \quad \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$

$$f(x) = (1-3x)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{-3}.\frac{(1-3x)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{3(1-3x)} + c$$

6 $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2} \quad : \quad]-1,3[$

$$f(x) = (x-1)(x^2-2x-3)^{-2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{2x-2}_{H}\Big)\Big(\underbrace{x^2-2x-3}_{H^r}\Big)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(x^2-2x-3)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(x^2-2x-3)} + c$$

---

2) في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

1 $f(x) = \cos x\,(\sin^2 x - 3\sin x) \quad : I = R$

$$f(x) = \underbrace{\cos x}_{H}\,\underbrace{\sin^2 x}_{H^r} - 3\,\underbrace{\cos x}_{H}\,\underbrace{\sin x}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{3\sin^2 x}{2} + c$$

2 $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad :]4,+\infty[$

$$F(x) = \ln|x-1| + c$$

$$= \ln(x-1) + c$$

3 $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1 \quad : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1$$

$$F(x) = 2\tan(x) - x + c$$

4 $f(x) = \dfrac{1}{x-4} \quad :]-\infty, 4[$

$$F(x) = \ln|x-4| + c$$

$$F(x) = \ln(-x+4) + c$$

5 $f(x) = 2e^{3x-1} \quad : I = R$

$$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-1} + c$$

6 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} \quad :]-1, +\infty[$

$$f(x) = 2 - 3\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 2x - 3\ln|x+1| + c$$

$$= 2x - 3\ln(x+1) + c$$

3) في كل من الحالات الآتية، هات تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I، يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى.

1 $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x \quad : F(1) = 0$

$$f(x) = 2x^{-2} + x \qquad : I = R^*$$

$$F(x) = \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$$

$* \ F(1) = 0$

$$-2 + \frac{1}{2} + c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

2 $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2} \quad : F(0) = 0$

$$f(x) = (2x+1)^{-2} \qquad : I = R\backslash\left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(2x+1)} + c$$

$* \ F(0) = 0$

$$\frac{-1}{2} + c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}$$

3 $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) : F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$F(x) = \frac{-1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + c \qquad : I = R$$

$$* \ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{-1}{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + c = 0$$

$$\frac{-1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + c = 0$$

$$\frac{-1}{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = \frac{-\sqrt{2}}{4}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4 $f(x) = \sin x \cos^2 x \quad : F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f(x) = -\underbrace{(-\sin x)}_{\acute{H}}\underbrace{\cos^2 x}_{H^r} \qquad : I = R$$

$$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$* \ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$0 + c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = 0}$$

$$F(x) = \frac{-\cos^3 x}{3}$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{-1}{3-x}$: $F(1)=+1$

$F(x)=\ln|3-x|+c$

$F(x)=\ln(3-x)+c$

* $F(1)=1$

$\ln 2+c=1 \Rightarrow \boxed{c=1-\ln 2}$

$F(x)=\ln(3-x)+1-\ln 2$

$\boxed{6}$ $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$: $F(0)=0$

$f(x)=x(x^2-1)^{-2}$: $I=R\backslash\{-1,1\}$

$=\dfrac{1}{2}.\underbrace{2x}_{H'}\left(\underbrace{x^2-1}_{H^r}\right)^{-2}$

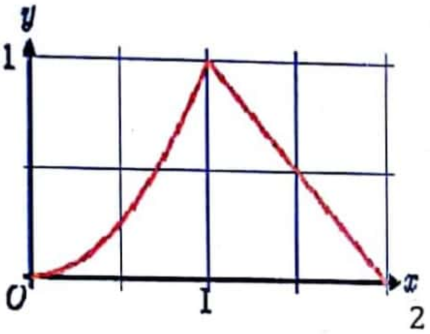
$F(x)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{(x^2-1)^{-1}}{-1}+c$

$=\dfrac{-1}{2(x^2-1)}+c$

* $F(0)=0$

$\dfrac{1}{2}+c=0 \Rightarrow \boxed{c=\dfrac{-1}{2}}$

$F(x)=\dfrac{-1}{2(x^2-1)}-\dfrac{1}{2}$



4) نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى اصغر العددين b,a تحقق ان الخط البياني C_f للتابع f المعرف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x)=\min(x^2,2-x)$ هو الخط المرسوم في الشكل المجاور،

❶ احسب التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ وقل ماذا يمثل هذا العدد.

♦ عندما $x\in[0,1]$ فإن $x^2\le 2-x$ إذاً $f_1(x)=x^2$

♦ عندما $x\in[1,2]$ فإن $x^2\ge 2-x$ إذاً $f_2(x)=2-x$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f_1(x)\,dx+\int_1^2 f_2(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)-(0)+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$$

$\int_0^2 f(x)=\frac{5}{6}$ ويمثل :ا العدد مساحة السطح المحدد بالخط البياني للتابع f ومحور $xx̀$.

❷ احسب بالمثل $\int_0^2 g(x)\,dx$, $\int_0^1 h(x)\,dx$ في حالة:

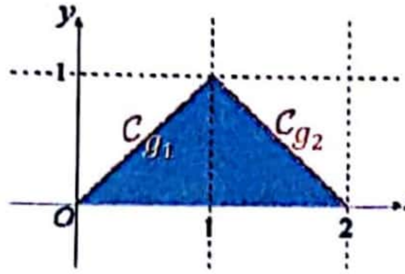
$h(x)=\min(x^2,(x-1)^2)$, $g(x)=1-|1-x|$

$\boxed{1}$ $g(x)=1-|1-x|$

♦ عندما $x\in[0,1]$ فإن: $|1-x|=1-x$ إذاً: $g_1(x)=1-(1-x)=x$

♦ عندما $x \in [1,2]$ فإن: $|1-x| = -1+x$ إذا: $g_2(x) = 1-(-1+x) = 2-x$

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1 g_1(x)\,dx + \int_1^2 g_2(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right) - (0) + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

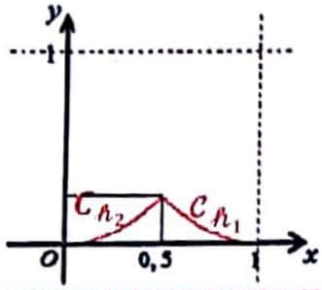


$\boxed{1}$ $h(x) = \min(x^2, (x-1)^2)$

♦ عندما $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ فإن: $x^2 \le (x-1)^2$ إذا $h_1(x) = x^2$

♦ عندما $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ فإن: $x^2 \ge (x-1)^2$ إذا $h_2(x) = (x-1)^2$

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{24}\right) - (0) + (0) - \left(\frac{-1}{24}\right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$



5) احسب التكاملات الآتية:

$\boxed{1}$ $$I = \int_2^{-1} (x^2 - 4x + 3)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_2^{-1} = \left(\frac{-1}{3} - 2 - 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) = -6$$

$\boxed{2}$ $$I = \int_2^{-1} (x-2)(x^2 - 4x + 3)\,dx$$
$$= \int_2^{-1} \frac{1}{2}\left(\underbrace{2x-4}_{H}\right)\left(\underbrace{x^2-4x+3}_{H^r}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-4x+3)^2}{2}\right]_2^{-1} = \frac{1}{4}\left[(x^2-4x+3)^2\right]_2^{-1} = \frac{1}{4}[64-1] = \frac{63}{4}$$

$\boxed{3}$ $$I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right)\,dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \ln|t|\right]_1^2 = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \ln t\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 - \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} - \ln 2 = \frac{23}{6} - \ln 2$$

$\boxed{4}$ $$I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$$
$$= \int_0^3 (1+t)^{\frac{-1}{2}}\,dt = \left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = 2\left[\sqrt{1+t}\right]_0^3 = 2[2-1] = 2$$

$\boxed{5}$ $I = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+2}\, dx$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x^3)^{\nearrow g'}}{(x^4+2)_{\searrow g}}\, dx = \frac{1}{4}\Big[\ln|x^4+2|\Big]_1^2 = \frac{1}{4}\Big[\ln(x^4+2)\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 18 - \ln 3) = \frac{1}{4}\ln\frac{18}{3} = \frac{1}{4}\ln 6$$

$\boxed{6}$ $I = \int_0^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\, dx$

$$= \left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi} = -\cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = +\sqrt{2}$$

$\boxed{7}$ $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\, dx$

$$= \int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x} - \frac{3}{x}\right)\, dx = \int_{-2}^{-1}\left(1 - \frac{3}{x}\right)\, dx = \big[x - 3\ln|x|\ \big]_{-2}^{-1} = \big[x - 3\ln(-x)\ \big]_{-2}^{-1}$$

$$= (-1 - 3\ln 1) - 2 - 3\ln 2 = 1 + 3\ln 2$$

$\boxed{8}$ $I = \int_0^1 t.e^{t^2-1}\, dt$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\underbrace{2t}_{g'} \cdot \underbrace{e^{t^2-1}}_{e^g}\, dt = \frac{1}{2}\Big[e^{t^2-1}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$\boxed{9}$ $I = \int_0^2 \sqrt{2x+1}\, dx$

$$= \int_0^2 (2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}(\sqrt{125} - 1) = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1)$$

$\boxed{10}$ $I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

$$= \big[\ln|e^x + e^{-x}|\ \big]_0^1 = \big[\ln(e^x + e^{-x})\ \big]_0^1 = \ln(e + e^{-1}) - \ln 2 = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right) - \ln 2 = \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

---

6) ليكن f التابع المعرف على $D = R\setminus\{-3\}$ وفق $f(x) = \frac{4x^2-5x+}{x+3}$

.1 جد الأعداد c, b, a التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$ اياً يكن x من D

$$\begin{array}{r|l} & 4x-17 \\ \hline x+3 & 4x^2-5x+1 \\ & \mp 4x^2 \mp 12x \\ \hline & -17x+1 \\ & \pm 17x \pm 51 \\ \hline & 52 \end{array} \qquad \begin{array}{l} :\frac{4x^2}{x} = 4x \\ \\ :\frac{-17x}{x} = -17 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 4x - 17 + \dfrac{52}{x+3} \\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -17 \\ c = 52 \end{array}$$

.2 احسب $J = \int_2^0 f(x)\ dx$

$$J = \int_2^0 \left(4x - 17 + \frac{52}{x+3}\right) dx = \left[2x^2 - 17x + 52\ln|x+3|\ \right]_2^0 = \left[2x^2 - 17x + 52\ln(x+3)\ \right]_2^0$$

$$= (0 - 0 + 52\ln 3) - (8 - 34 + 52\ln 5) = 52\ln 3 - 52\ln 5 + 26 = 52(\ln 3 - \ln 5) + 26 = 52\ln\left(\frac{3}{5}\right) + 26$$

---

7) ليكن f التابع المعرف على $D = R\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

.1 جد الأعداد c, b, a التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ اياً يكن x من D

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-1 & x \\ & \mp x \pm 1 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad :\frac{x}{x} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} \\ f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{array}$$

.2 احسب $J = \int_{-3}^0 f(x)\ dx$

$$J = \int_{-3}^0 \left(1 + \frac{2}{x-1} + (x-1)^{-2}\right) dx = \left[x + 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^0$$

$$= \left[x + 2\ln(-x+1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^0$$

$$= \left[x + 2\ln(-x+1) - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0 = \left(0 + 2\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-3 + 2\ln 4 - \frac{1}{-4}\right)$$

$$= 1 + 3 - 2\ln 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} - 2\ln 4$$

---

8) اثبت ان $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ واستنتج قيمة $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\ dx$

$$L_1 = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = L_2$$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\Big[x-\ln|1+e^x|\Big]_0^1=\Big[x-\ln(1+e^x)\Big]_0^1$$

$$=(1-\ln(1+e))-(0-\ln 2)=1-\ln(1+e)+\ln 2=1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

---

9) باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ ، $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$ او باية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$, $\cos 4x$ ثم احسب $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^4 x\,dx$

- $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$
- $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$
- $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{4}\cos^2 2x$ $\quad : \cos^2 2x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 4x$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$=\left(\frac{3\pi}{64}-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{2}\right)-(0-0+0)=\frac{3\pi}{64}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{32}(1)$$

$$=\frac{3\pi}{64}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{32}=\frac{3\pi-8\sqrt{2}+2}{64}$$

---

10) احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

$\boxed{1}$ $I=\int_1^e (x-1)\ln x\,dx$

$$u(x)=\ln x\ \longrightarrow \grave{u}(x)=\frac{1}{x}$$

$$\grave{v}(x)=x-1\longrightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}-x$$

$$I=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x\right]_1^e=\left[\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\frac{e^2}{4}+e\right]-\left[0-\frac{1}{4}+1\right]$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$

$$\boxed{2}\ I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2 - 1)e^x \, dx$$

$u(x) = x^2 - 1 \longrightarrow \grave{u}(x) = 2x$

$\grave{v}(x) = e^x \qquad \longrightarrow v(x) = e^x$

$$I = \left[(x^2 - 1)\, e^x\right]_{\ln}^{\ln} - \int_{\ln 2}^{\ln} \underbrace{2xe^x}_{\text{يلزمها تجزئة}} \, dx$$

$u(x) = 2x \longrightarrow \grave{u}(x) = 2$

$\grave{v}(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$$I = \left[(x^2 - 1)e^x\right]_{\ln}^{\ln 3} - \left[\left[2xe^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^x \, dx\right]$$

$$= \left[(x^2 - 1)e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_{\ln 2}^{\ln}$$

$$= \left((\ln^2 3 - 1)e^{\ln 3} - 2(\ln 3)e^{\ln} + 2e^{\ln 3}\right) - \left((\ln^2 2 - 1)e^{\ln} - 2(\ln 2)e^{\ln} + 2e^{\ln 2}\right)$$

$$= (\ln^2 3 - 1)(3) - (2\ln 3)(3) + 6 - (\ln^2 2 - 1)(2) + (2\ln 2)(2) - 4$$

$$= 3\ln^2 3 - 3 - 6\ln 3 + 6 - 2\ln^2 2 + 2 + 4\ln 2 - 4$$

$$= 3\ln^2 3 - 6\ln 3 - 2\ln^2 2 + 4\ln 2 + 1$$

$$\boxed{3}\ I = \int_0^1 (2x + 1)e^{-x} \, dx$$

$u(x) = 2x + 1 \longrightarrow \grave{u}(x) = 2$

$\grave{v}(x) = e^{-x} \qquad \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$I = \left[-(2x + 1)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x} \, dx$$

$$= \left[(-2x - 1)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^1$$

$$= (-3e^{-1} - 2e^{-1}) - (-1 - 2) = -5e^{-1} + 3$$

$$= \frac{-5}{e} + 3$$

$$\boxed{4}\ I = \int_1^2 (t - 2)e^{2t} \, dt$$

$u(t) = t - 2 \longrightarrow \grave{u}(t) = 1$

$\grave{v}(t) = e^{2t} \qquad \longrightarrow v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$

$$I = \left[\frac{1}{2}(t - 2)e^{2t}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{2t} \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}(t - 2)e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}\right]_1^2$$

$$= \left(0 - \frac{1}{4}e^4\right) - \left(\frac{-1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^4 + \frac{3}{4}e^2$$

11) **إثبات متراجحة:**

نفترض ان b,a عددان حقيقيان وان $0 \le a < b \le \pi$ اثبت صحة المتراجحة

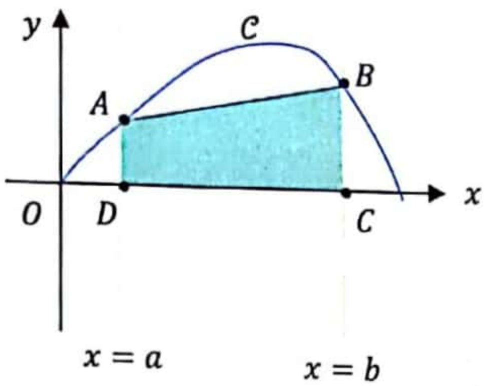
$$\cos \quad - \cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

نلاحظ انه من تطبيقات التكامل (حساب المساحات) يجب علينا الاستفادة من فكرة التكامل لإثبات صحة المتراجحة.

$$\underbrace{S_1}_{\text{المساحة المحصورة لخط بياني } C_1} \ge \underbrace{S_2}_{\text{المساحة المحصورة لخط بياني } C_2}$$

نلاحظ ان التابع الذي يعطينا الطرف الأيسر من المتراجحة هو $\sin x$ ومجال الدراسة من $[0,\pi]$

وخطه البياني الموضح بالشكل:



إذاً:

♦مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x\acute{x}$ والمستقيمين $x=b\,, x=a$ يعطى:

$$S_C = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \sin x\ dx = \Big[-\cos x\Big]_a^b = -\cos b + \cos a$$

وهو الطرف الأول من المتراجحة $\boxed{S_C = \cos a - \cos b}$

♦مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تعطى:

$A(a,\sin a)\ ,B(b,\sin b)\ ,D(a,0)\ ,\ C(b,0)$

$DA = \sqrt{(a-a)^2 + (\sin a - 0)^2} = \sin a$

$CB = \sqrt{(b-b)^2 + (\sin b - 0)^2} = \sin b$

$DC = \sqrt{(b-a)^2 + (0-0)^2} \quad = b-a$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \times DC$

لحسابها $f(x) = \sin x$

$A \in C \Rightarrow x_A = a\ : f(a) = \sin a\ \ : A(a,\sin a)$

$B \in C \Rightarrow x_B = b\ : f(b) = \sin b\ \ : B(b,\sin b)$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b)(b-a)$$
$$= \frac{1}{2}(b-a)\sin a + \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

$$\left.\begin{array}{l} b > a \ \Rightarrow\ b-a > 0 \\ \sin x \ge 0\ ;\ \ x \in [0,\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(b-a)\sin a \ge 0$$

$$\Rightarrow\ S_{ABCD} \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{من الرسم :} & S_C \ \ge\ S_{ABCD} \\ \text{و وجدنا :} & S_{ABCD} \ \ge\ \frac{1}{2}(b-a)\sin b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_C \ \ge\ \frac{1}{2}(b-a)\sin b \\ \cos a - \cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b \end{array}$$

---

12) **البحث عن تابع اصلي:**

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = e^{2x}\sin x$ عين تابعاً اصلياً F للتابع f

بما ان f مستمر على R فله تابع اصلي ومنه:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\ \ dx = \int_0^x e^{2x}\sin x\ dx$$

$u(x) = \sin x \rightarrow \grave{u}(x) = \cos x$
$\grave{v}(x) = e^{2x} \quad \rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right]_0^x - \underbrace{\int_0^x \frac{1}{2}e^{2x}\cos x \; dx}_{\text{يلزمها تجزئة}}$$

$u(x) = \frac{1}{2}\cos x \rightarrow \grave{u}(x) = \frac{-1}{2}\sin x$
$\grave{v}(x) = e^{2x} \quad \rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right]_0^x - \left[\left[\frac{1}{4}e^{2x}\cos x\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{4}e^{2x}\sin x \; dx\right]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^x e^{2x}\sin x \; dx}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\overbrace{F(x)}$$

$$F(x) + \frac{1}{4}F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4}F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4} \qquad \left(\div\frac{5}{4}\right)$$

$$F(x) = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}$$

---

13) البحث عن تابع اصلي:

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$

ايوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F: x \rightarrow P(x)e^{-x}$ تابعاً اصلياً للتابع f على R

بما ان $F(x)$ تابع اصلي للتابع f عندئذ:

$$\grave{F}(x) = f(x)$$

$$\grave{P}(x).e^{-x} - e^{-x}P(x) = (1 + x + x^2 + x^3).e^{-x}$$

$$\left(\grave{P}(x) - P(x)\right).e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3).e^{-x}$$

$\grave{P}(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \quad \boxed{*}$ **نقسم على** $e^{-x} \neq 0$

ومنه نجد ان $P(x)$ كثير حدود من المرتبة الثالثة ولنفرض:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$\grave{P}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

نعوض في $\boxed{*}$:

$$3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$c - d + (2b - c)x + (3a - b)x^2 - ax^3 \underset{\text{بالمطابقة}}{=} 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\begin{cases} -a = 1 \rightarrow \boxed{a = -1} \\ 3a - b = 1 \rightarrow 3(-1) - b = 1 \rightarrow \boxed{b = -4} \\ 2b - c = 1 \rightarrow 2(-4) - c = 1 \rightarrow \boxed{c = -9} \\ c - d = 1 \rightarrow -9 - d = 1 \rightarrow \boxed{d = -10} \end{cases}$$

$P(x) = -x^3 - 4x^2 - 9x - 10$ ومنه نجد :

$F(x) = P(x).e^{-x} = (-x^3 - 4x^2 - 9x - 10).e^{-x}$

ويمكن التحقق بسهولة ان $F(x)$ تابع اصلي للتابع f كما يلي :

$$\acute{F}(x) = (-3x^2 - 8x - 9)e^{-x} - e^{-x}(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)$$
$$= e^{-x}[-3x^2 - 8x - 9 + x^3 + 4x^2 + 9x + 10]$$
$$= e^{-x}(x^3 + x^2 + x + 1) = f(x)$$

---

14) في كل حالة من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً F للتابع f على المجال I

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}$ $\quad I = R$

$$f(x) = (1-2x)(2x^2-2x+1)^{-3}$$
$$= \frac{-1}{2}\Big(\underbrace{4x-2}_{\acute{H}}\Big)\Big(\underbrace{2x^2-2x+1}_{H^r}\Big)^{-3}$$
$$F(x) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{(2x^2-2x+1)^{-2}}{-2} + c$$
$$= \frac{1}{4(2x^2-2x+1)^2} + c$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \cot x$ $\quad I =]-\pi, 0[$

$$f(x) = \frac{(\cos x)^{\nearrow \acute{g}}}{(\sin x)_{\searrow g}}$$
$$F(x) = \ln|\sin x| + c = \ln(-\sin x) + c$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}}$ $\quad I = R$

$$f(x) = (1-x)(x^2-2x-2)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{-1}{2}\Big(\underbrace{2x-2}_{\acute{H}}\Big)\Big(\underbrace{x^2-2x-2}_{H^r}\Big)^{-\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{(x^2-2x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= -\sqrt{x^2-2x-2} + c$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$ $\quad I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

تذكر:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad , \quad 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x} + \frac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$F(x) = \frac{-1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\sin x| + c$$
$$= \frac{-1}{2}\ln(\cos x) + \frac{1}{2}\ln(\sin x) + c$$

$\boxed{5}$ $f(x) = (1-2x)^4$ $\quad I = R$

$$F(x) = \frac{1}{-2}\cdot\frac{(1-2x)^5}{5} + c$$
$$= \frac{-1}{10}(1-2x)^5 + c$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}.e^{\frac{-2}{x}}$ $\quad I = R_+^*$

$f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x^2}.e^{\frac{-2}{x}}$ $\qquad$ لاحظ : $\left(\dfrac{-2}{x}\right)' = \dfrac{2}{x^2}$

$$F(x) = \frac{1}{2}.e^{\frac{-2}{x}} + c$$

$\boxed{7}$ $f(x) = 2e^{2-3x}$ $\quad I = R$

$$F(x) = \frac{2}{-3}.e^{2-3x} + c$$

$\boxed{8}$ $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ $\qquad I = R_+^*$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}\ln x}_{g(x)} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{h(x)}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\ln x$$

$$u(x) = \ln x \quad \longrightarrow \acute{u}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\acute{v}(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \longrightarrow v(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$$

$$G(x) = \left[\frac{-1}{x}\ln x\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$= \left(\frac{-1}{x}\ln x\right) - (0) + \int_1^x x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{x}\ln x + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^x = \frac{-1}{x}\ln x + \left(\frac{-1}{x} + 1\right)$$

$$G(x) = \frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + 1$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$H(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$$

$$F(x) = G(x) - H(x) = \frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1$$

$$F(x) = \frac{-1}{x}\ln x + 1$$

$\boxed{9}$ $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ $\qquad I = R_+^*$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\sin x - \frac{1}{x}\cos x = \underbrace{x^{-2}\sin x}_{g(x)} - \underbrace{\frac{1}{x}\cos x}_{h(x)}$$

$$g(x) = x^{-2}\sin x$$
$$u(x) = \sin x \longrightarrow \acute{u}(x) = \cos x$$
$$\acute{v}(x) = x^{-2} \longrightarrow v(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$$

$$G(x) = \left[\frac{-1}{x}\sin x\right]_0^x + \underbrace{\int_0^x \frac{1}{x}\cos x\,dx}_{H(x)}$$

$$F(x) = G(x) - H(x)$$
$$= \frac{-1}{x}\sin x + \int_0^x \frac{1}{x}\cos x\,dx - \int_0^x \frac{1}{x}\cos x\,dx$$

$$F(x) = \frac{-1}{x}\sin x + c$$

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ $\qquad I =]-1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x+2)(x+1)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}[(3x+3) - 1](x+1)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}[3(x+1) - 1](x+1)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[3(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{-1}{2}}\right]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{3(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + c$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}\right] + c$$
$$= \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1} + c$$

---

15) في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المعطى.

$\boxed{1}$ $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x}{x-1}\,dx$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = \int_{-2}^{0}\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = \Big[x + \ln|x-1|\Big]_{-2}^{0} = \Big[x + \ln(-x+1)\Big]_{-2}^{0}$$

$$= (0 + \ln 1) - (-2 + \ln 3) = 2 - \ln 3$$

$\boxed{2}$ $I = \int_0^2 \frac{4x-5}{2x+1}\,dx$

$$= \int_0^2 \left(2 - \frac{7}{2x+1}\right) dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{7}{2}\ln|2x+1|\right]_0^2 = \left[2x - \frac{7}{2}\ln(2x+1)\right]_0^2$$

$$= \left(4 - \frac{7}{2}\ln 5\right) - \left(0 - \frac{7}{2}\ln 1\right) = 4 - \frac{7}{2}\ln 5$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2x+1 & 4x-5 \\ & \mp 4x \mp 2 \\ \hline & -7 \end{array}$$

$\boxed{3}$ $I = \int_{-1}^2 \frac{2x}{x^2-9}\,dx$

$$= [\ln|x^2-9|\ ]_{-1}^2 = [\ln(-x^2+9)\ ]_{-1}^2 = \ln 5 - \ln 8 = \ln\frac{5}{8}$$

$\boxed{4}$ $I = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$

$$= \int_0^3 (x+2)(x+1)^{-4}\ dx = \int_0^3 [(x+1)+1](x+1)^{-4}\ dx$$

$$= \int_0^3 ((x+1)^{-3} + (x+1)^{-4})\ dx = \left[\frac{(x+1)^{-2}}{-2} + \frac{(x+1)^{-3}}{-3}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{-1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}\right]_0^3 = \left(\frac{-1}{32} - \frac{1}{3(64)}\right) - \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{-7}{3(64)} + \frac{5}{6} = \frac{-7+160}{192} = \frac{153}{192}$$

$\boxed{5}$ $I = \int_0^1 \frac{2x^3-3x-4}{x-2}\,dx$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 + 4x + 5 + 6\frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\ln|x-2|\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\ln(-x+2)\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 2 + 5 + 0\right) - (0 + 0 + 0 + 6\ln 2)$$

$$= \frac{23}{3} - 6\ln 2$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+4x+5 \\ \hline x-2 & 2x^3-3x-4 \\ & \mp 2x^3 \pm 4x^2 \\ \hline & 4x^2-3x-4 \\ & \mp 4x^2 \pm 8x \\ \hline & 5x-4 \\ & \mp 5x \pm 10 \\ \hline & 6 \end{array}$$

$:\frac{2x^3}{x} = 2x^2$

$:\frac{4x^2}{x} = 4x$

$:\frac{5x}{x} = 5$

$$\boxed{6}\ I=\int_1^2 \frac{8x^2-4}{4x^2-1}\,dx$$

$$=\int_1^2 \left(2-\frac{2}{4x^2-1}\right)dx$$

$$=\int_1^2 \Big(2-\underbrace{\frac{2}{(2x-1)(2x+1)}}_{\text{يلزمها تفريق كسور}}\Big)\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 4x^2-1 & 8x^2-4 \\ & \mp 8x^2 \pm 2 \\ \hline & -2 \end{array} \qquad : \frac{8x^2}{4x^2}=2$$

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}$$

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{A(2x+1)+B(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$\boxed{2=A(2x+1)+B(2x-1)}\quad (*)$$

تعيين A نعوض $x=\frac{1}{2}$ في $(*)$:

$$2=A(1+1)+0 \quad\Longrightarrow \boxed{A=1}$$

تعيين B نعوض $x=\frac{-1}{2}$ في $(*)$:

$$2=0+B(-1-1)\Longrightarrow \boxed{B=-1}$$

$$I=\int_1^2\left(2-\frac{A}{2x-1}-\frac{B}{2x+1}\right)dx=\int_1^2\left(2-\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int_1^2\left(2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\right)dx$$

$$=\left[2x-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_1^2=\left[2x-\frac{1}{2}\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_1^2$$

$$=\left(4-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 5\right)-\left(2-0+\frac{1}{2}\ln 3\right)=2-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 5$$

---

16)في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\boxed{1}$ $f(x)=\cos^3 x$

$$f(x)=\cos x\,.\cos^2 x=\cos x\,(1-\sin^2 x)$$

$$=\cos x-\underbrace{\cos x}_{H'}\,.\underbrace{\sin^2 x}_{H^r}$$

$$F(x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sin x+\sin^3 x$

$$f(x)=\sin x(1+\sin^2 x)$$

$$=\sin x\,(1+1-\cos^2 x)$$

$$=\sin x\,(2-\cos^2 x)$$

$$=2\sin x-\sin x\,.\cos^2 x$$

$$=2\sin x+\underbrace{(-\sin x)}_{H'}\,.\underbrace{\cos^2 x}_{H^r}$$

$$F(x)=-2\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\sin^3 x\,.\cos^2 x$

$$f(x)=\sin x\,.\sin^2 x\,.\cos^2 x$$

$$=\sin x\,(1-\cos^2 x)\,.\cos^2 x$$

$$=\sin x\,.\cos^2 x-\sin x\,.\cos^4 x$$

$$=-\underbrace{(-\sin x)}_{H'}\,.\underbrace{\cos^2 x}_{H^r}+\underbrace{(-\sin x)}_{H'}\,.\underbrace{\cos^4 x}_{H^r}$$

$$F(x)=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+c$$

17) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sin^4 x$

1. احسب $\acute{f}(x)$, $\grave{\acute{f}}(x)$ واكتب $f(x)$ بدلالة $\grave{\acute{f}}(x)$, $\cos 4x$

f اشتقاقي على R

$$\acute{f}(x) = 4\sin^3 x \,.\cos x$$

$\acute{f}$ اشتقاقي على R

$$\begin{aligned}\grave{\acute{f}}(x) &= 4[3\sin^2 x\,.\cos x\,.\cos x + (-\sin x)\sin^3 x] \\ &= 4[3\sin^2 x\,.\cos^2 x - \sin^4 x] = 3\times 4\sin^2 x\,.\cos^2 x - 4\sin^4 x \\ &= 3(2\sin x\,.\cos x)^2 - 4\sin^4 x = 3\sin^2 2x - 4\sin^4 x \\ &= 3\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) - 4\sin^4 x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x - 4\sin^4 x\end{aligned}$$

$$\grave{\acute{f}}(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x - 4f(x)$$

$$4f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x - \grave{\acute{f}}(x) \qquad (\div 4)$$

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\grave{\acute{f}}(x)$$

2. استنتج تابعاً اصلياً F للتابع f على R

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\grave{\acute{f}}(x)$$

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\acute{f}(x) + c = \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}(4\sin^3 x\,.\cos x) + c \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \sin^3 x\,.\cos x + c\end{aligned}$$

---

18) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3.e^{2x}$ جد تابعاً اصلياً F للتابع f على R بالصيغة $F(x) = P(x)e^{2x}$ حيث P تابع كثير حدود.

بما ان $F(x)$ تابع أصلي للتابع f عندئذ:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{P}(x).e^{2x} + 2\,e^{2x}P(x) = x^3.e^{2x}$$

$$\left(\acute{P}(x) + 2P(x)\right)e^{2x} = x^3.e^{2x}$$

نقسم على $e^{2x} \neq 0$

$$\acute{P}(x) + 2P(x) = x^3 \qquad \boxed{*}$$

ومنه نجد ان $P(x)$ كثير حدود من المرتبة الثالثة ولنفرض:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\acute{P}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$$3ax^2 + 2bx + c + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3$$

$$3ax^2 + 2bx + c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3$$

$$2ax^3 + (3a+2b)x^2 + (2b+2c)x + (c+2d) \underset{\text{بالمطابقة}}{=} x^3$$

$$2a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} 3a + 2b = 0 \rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2b = 0 \rightarrow \boxed{b = \frac{-3}{4}} \\ 2b + 2c = 0 \rightarrow 2\left(\frac{-3}{4}\right) + 2c = 0 \rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}} \\ c + 2d = 0 \rightarrow \frac{3}{4} + 2d = 0 \rightarrow \boxed{d = \frac{-3}{8}} \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow F(x) = P(x).e^{2x} = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right).e^{2x}$$

---

19) نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ثم $I + J$ واستنتج I

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I + J = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad I + \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$$

---

20) نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$ احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ ثم $I + J$ واستنتج I

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|1+2\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx \qquad : \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x.\cos x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,(2\sin x + 1)}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

$$I + J = 1 \quad \Rightarrow \quad I + \ln\sqrt{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad I = 1 - \ln\sqrt{3}$$

---

21) ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = e^{2x}.\cos x$

1. احسب $\acute{f}(x)$, $\acute{\acute{f}}(x)$

f اشتقاقي على R

$$\acute{f}(x) = 2e^{2x}\cos x - \sin x\, e^{2x}$$

f اشتقاقي على R

$$\acute{\acute{f}}(x) = 4e^{2x}\cos x - \sin x\,.2e^{2x} - (\cos x\, e^{2x} + 2e^{2x}.\sin x)$$
$$= 4e^{2x}\cos x - \sin x\,.2e^{2x} - \cos x\, e^{2x} - 2e^{2x}.\sin x$$
$$\acute{\acute{f}}(x) = 3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x$$

2. عين عددين b, a يحققان المساواة $f(x) = a\acute{f}(x) + b\acute{\acute{f}}(x)$ اياً كان x

$$L_2 = a\acute{f}(x) + b\acute{\acute{f}}(x)$$
$$= a(2e^{2x}.\cos x - \sin x\, e^{2x}) + b(3e^{2x}.\cos x - 4\sin x\, e^{2x})$$
$$= 2ae^{2x}.\cos x - a\sin x\, e^{2x} + 3be^{2x}.\cos x - 4b\sin x\, e^{2x}$$
$$\left.\begin{array}{l} L_2 = (2a+3b)e^{2x}\cos x + (-a-4b)e^{2x}\sin x \\ L_1 = f(x) = e^{2x}.\cos x = 1e^{2x}.\cos x + 0 \end{array}\right\}$$

بالمطابقة $\begin{cases} 2a + 3b = 1 & ① \\ -a - 4b = 0 & ② \end{cases}$

نضرب ② بـ (2) و نجمعها مع ① :

$$\begin{array}{r} 2a + 3b = 1 \\ + \quad -2a - 8b = 0 \\ \hline -5b = 1 \end{array}$$
$$\boxed{b = \frac{-1}{5}}$$

لإيجاد a نعوض قيمة b في ② :

$$-a - 4b = 0$$
$$-a - 4\left(\frac{-1}{5}\right) = 0$$
$$\boxed{a = \frac{4}{5}}$$

إذاً : $f(x) = \frac{4}{5}\acute{f}(x) - \frac{1}{5}\acute{\acute{f}}(x)$

3. استنتج تابعاً اصلياً F للتابع f على R

من الطلب 2 نجد :

$$f(x) = \frac{4}{5}\acute{f}(x) - \frac{1}{5}\acute{\acute{f}}(x)$$
$$F(x) = \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}\acute{f}(x) + C = \frac{4}{5}.e^{2x}\cos x - \frac{1}{5}(2e^{2x}\cos x - \sin x\, e^{2x}) + c$$
$$= \frac{4}{5}.e^{2x}\cos x - \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\, e^{2x} + c$$
$$= \frac{2}{5}.e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}\, e^{2x}\sin x + c$$

---

22) G, F تابعان اصليان للتابعين: $f: x \to \cos(\ln x)$, $g: x \to \sin(\ln x)$ على $]0, +\infty[$ ينعدمان عند $x = 1$
انطلاقاً من الصيغتين:

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln x)\, dx \quad , \quad F(x) = \int_1^x \cos(\ln x)\, dx$$

1. اثبت باستعمال التكامل بالتجزئة ان :

$$G(x) = x\sin(\ln x) - F(x) \quad , \quad F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$$

$$* \; F(x) = \int_1^x \cos(\ln x)\, dx$$

$$u(x) = \cos(\ln x) \longrightarrow \acute{u}(x) = \frac{-1}{x}\sin(\ln x)$$
$$\acute{v}(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x$$

$$F(x)=\Big[x.\cos(\ln x)\Big]_1^x-\int_1^x -\sin(\ln x)\ dx \ =x.\cos(\ln x)-1.\cos(0)+\int_1^x \sin(\ln x)\ dx$$

$$F(x)=x.\cos(\ln x)-1+G(x) \qquad \boxed{1}$$

$$** \ G(x)=\int_1^x \sin(\ln x)\ dx$$

$$u(x)=\sin(\ln x)\longrightarrow \grave{u}(x)=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

$$\grave{v}(x)=1 \qquad \longrightarrow v(x)=x$$

$$G(x)=\Big[x.\sin(\ln x)\Big]_1^x-\int_1^x \cos(\ln x)\ dx \ =x.\sin(\ln x)-1\sin(0)-F(x)$$

$$G(x)=x.\sin(\ln x)-F(x) \qquad \boxed{2}$$

2. استنتج عبارتي $F(x)$, $G(x)$

لدينا من $\boxed{1}$:

$$F(x)=x.\cos(\ln x)-1+\underbrace{G(x)}_{\text{نعوض } 2}$$

$$F(x)=x.\cos(\ln x)-1+x.\sin(\ln x)-F(x)$$

$$2F(x)=x.\cos(\ln x)+x.\sin(\ln x)-1 \qquad (\div 2)$$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)-\frac{1}{2}}$$

لدينا $\boxed{2}$:

$$G(x)=x.\sin(\ln x)-F(x)$$

$$=x.\sin(\ln x)-\left[\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\underline{x.\sin(\ln x)}-\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)\underline{-\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)}+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{G(x)=\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)-\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)+\frac{1}{2}}$$

---

23) إثبات متراجحة:

1. تيقن انه في حالة $0<x<a$ يكون $1\le\frac{1}{1+x}\le\frac{1}{1+a}$

نضيف 1 :

$$0< \quad x \quad < \quad a$$

ناخذ مقلوب المتراجحة :

$$1\le 1+x\le 1+a$$

$$1\ge\frac{1}{1+x}\ge\frac{1}{1+a}$$

2. استنتج ان $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$ في حالة $a > 0$

لدينا من الطلب 1 المتراجحة $1 \ge \frac{1}{1+x} \ge \frac{1}{1+a}$

لناخذ : $f(x) = \frac{1}{1+a}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$

لدينابرهاناً من الطلب الأول:

$$\left(g(x) = \frac{1}{1+x}\right) \ge \left(f(x) = \frac{1}{1+a}\right)$$

ومنه: $g(x) \ge f(x)$

$$\int_0^a g(x)\ dx \ge \int_0^a f(x)\ dx \quad \text{حيث } (a > 0)$$

$$\int_0^a \frac{1}{1+x}\ dx \ge \int_0^a \underbrace{\frac{1}{1+a}}_{\text{ثابت}}\ dx$$

$$\Big[\ln(1+x)\Big]_0^a \ge \left[\frac{1}{1+a}x\right]_0^a$$

$$\boxed{\ln(1+a) \ge \frac{a}{1+a}} \qquad \boxed{2}$$

لناخذ: $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = 1$

لدينا: $(g(x) = 1) \ge \left(f(x) = \frac{1}{1+x}\right)$ ومنه:

$$g(x) \ge f(x)$$

$$\int_0^a g(x)\ dx \ge \int_0^a f(x)\ dx \quad \text{حيث } (a > 0)$$

$$\int_0^a 1\ dx \ge \int_0^a \frac{1}{1+x}\ dx$$

$$\Big[x\Big]_0^a \ge \Big[\ln(1+x)\Big]_0^a$$

$$\boxed{a \ge \ln(1+a)} \qquad \boxed{1}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد ان: $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$

---

24) فيما يلي ارسم الخط البياني C الذي يمثل التابع f ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$, $x = b$

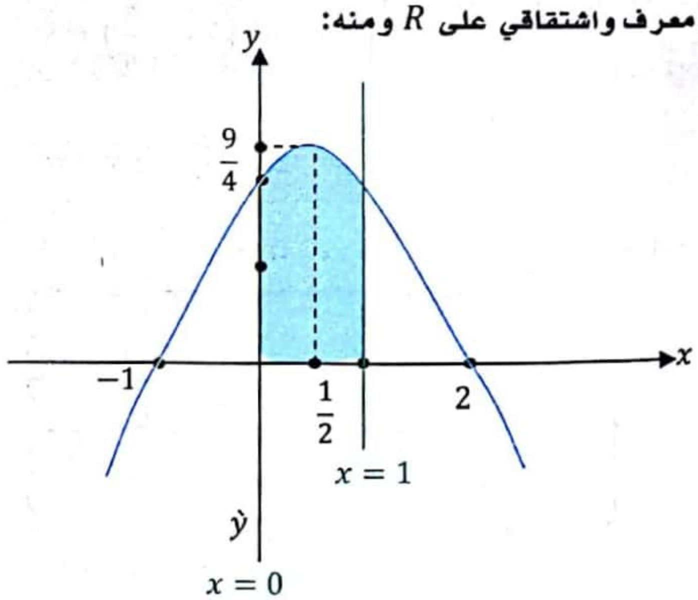
$\boxed{1}$ $f(x) = 2 + x - x^2$ $\quad : a = 0\ ,\quad b = 1$

f معرف واشتقاقي على R ومنه:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 1 - 2x \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \quad : f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$



$$S = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 (2 + x - x^2)\ dx$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{13}{6}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2}$: $a = 1$, $b = 4$

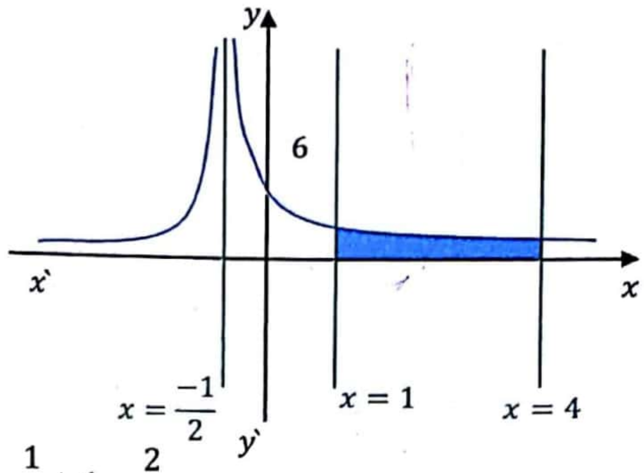
f معرف واشتقاقي على المجال $R\backslash\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ ومنه:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{-(6)(2)(2x+1)(2)}{(2x+1)^4} = \dfrac{-24}{(2x+1)^3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$



$$S = \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \frac{6}{(2x+1)^2}\,dx = \int_1^4 6(2x+1)^{-2}\,dx$$

$$= \left[6.\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[\frac{-3}{2x+1}\right]_1^4 = \left(\frac{-3}{9}\right) - \left(\frac{-3}{3}\right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$: $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{4}$

نلاحظ أن التابع f دوره π فتكفي دراسة تغيرات التابع f على المجال $[0,\pi]$

f معرف واشتقاقي على $[0,\pi]$

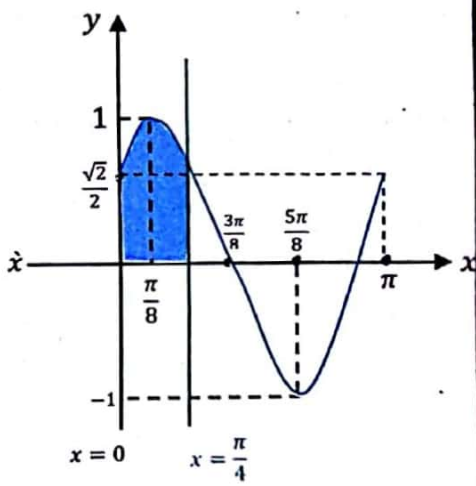
$f(0) = \cos\dfrac{-\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\pi) = \cos\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi k \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}}$$

$k = 0 \to x = \frac{\pi}{8}$: $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos 0 = 1$, $k = 1 \to x = \frac{5\pi}{8}$: $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\pi = -1$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = (x+1).e^{-x}$: $a = -1$, $b = \ln 2$

f معرف واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $+\infty.0$ عدم تعيين , $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

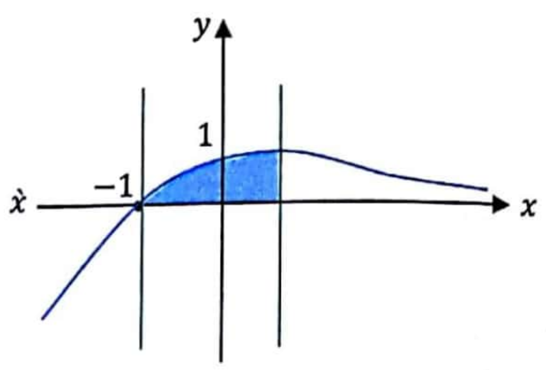
$f(x) = x.e^{-x} + e^{-x} = \frac{x}{e^x} + e^{-x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x}$

$f'(x) = 0 \to \boxed{x=0}$: $f(0) = 1$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1 \searrow 0$



$x = -1$ و $x = \ln 2$

$$S = \int_{-1}^{\ln 2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\ln 2} (x+1)e^{-x}\,dx$$

$u(x) = x+1 \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$S = \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{-1}^{\ln 2} - \int_{-1}^{\ln} -e^{-x}\,dx$$

$$S = \Big[(-x-1)e^{-x}\Big]_{-1}^{\ln 2} - \Big[e^{-x}\Big]_{-1}^{\ln 2}$$

$$= \left((-\ln 2 - 1)e^{-\ln 2} - 0\right) - \left(e^{-\ln 2} - e\right)$$

$$= \frac{-\ln 2 - 1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln}} + e = \frac{-\ln 2 - 1}{2} - \frac{1}{2} + e$$

$$= \frac{-1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + e = -\ln(\sqrt{2}) - 1 + e$$

---

25)ارسم في جملة متجانسة شكلاً بسيطاً يبين الخطين البيانيين للتابعين:

$x \to \sin x$, $x \to x.\sin x$ على المجال $[0,\pi]$ موضحاً وضعهما النسبي

ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على $[0,\pi]$

$g(x) = \sin x$, $f(x) = x\sin x$

لدراسة الوضع النسبي في المجال $[0,\pi]$ ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

$f(x) - g(x) = x\sin x - \sin x = (x-1)\sin x$

نلاحظ ان $\sin x > 0$ في المجال $[0,\pi]$ ولندرس إشارة $x - 1$:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0 1 π
$x-1$	$-$ 0 $+$
لوضع النسبي	C_f تحت C_g C_f فوق C_g

لنوجد النقاط المشتركة:

$$\underbrace{f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow (x-1)\sin x = 0}$$

إما $x - 1 = 0$ $\boxed{x=1}$

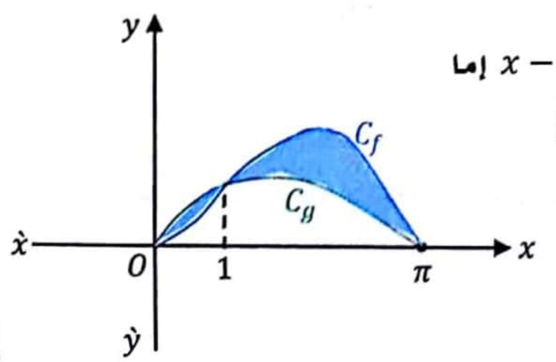
او $\sin x = 0$

$x = \pi k$

عندما $k = 0$ $\boxed{x=0}$

عندما $k = 1$ $\boxed{x=\pi}$

برسم تقريبي نجد:



$$S = \underbrace{\int_0^1 \left(g(x) - f(x)\right) dx}_{S_1} + \underbrace{\int_1^\pi \left(f(x) - g(x)\right) dx}_{S_2}$$

$$S_1 = \int_0^1 (\sin x - x.\sin x)\ dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x)\sin x\ dx$$

$$u(x) = 1 - x \longrightarrow \grave{u}(x) = -1$$

$$\grave{v}(x) = \sin x \longrightarrow v(x) = -\cos x$$

$$S_1 = \Big[-(1-x)\cos x\Big]_0^1 - \int_0^1 \cos x\, dx$$

$$= \left[(-1 + x)\cos x - \sin x\ \right]_0^1$$

$$= (-\sin 1) - (-1 - 0) = 1 - \sin 1$$

$$S_2 = \int_1^\pi (x.\sin x - \sin x)\ dx$$

$$= \int_1^\pi (x - 1)\sin x\ dx$$

$$u(x) = x - 1 \longrightarrow \grave{u}(x) = 1$$

$$\grave{v}(x) = \sin x \longrightarrow v(x) = -\cos x$$

$$S_2 = \Big[-(x-1)\cos x\Big]_1^\pi - \int_1^\pi -\cos x\ dx$$

$$= \left[(-x + 1)\cos x + \sin x\ \right]_1^\pi$$

$$= \left((-\pi + 1)(-1) + 0\right) - (0 + \sin 1)$$

$$= \pi - 1 - \sin 1$$

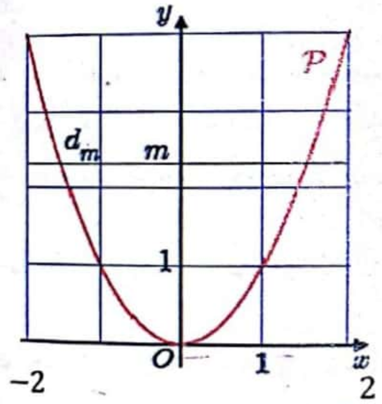
$$S = S_1 + S_2 \ \Rightarrow \ S = 1 - \sin 1 + \pi - 1 - \sin 1$$

$$= \pi - 2\sin 1$$

---

26) ليكن P الخط البياني للتابع $x \mapsto x^2$ مرسوماً على المجال $[-2,2]$. المستقيم d_m الذي معادلته $y = m$ $(0 \le m \le 4)$ يقسم داخل جزء القطع المكافئ P إلى منطقتين.

عند اية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟



- حسب أولاً مساحة السطح المحصور بين القطع المكافئ و المستقيم $y = 4$

$$S = \int_{-2}^{2} \left(y - f(x)\right) dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0 - 0)\right] = \frac{32}{3}$$

- حسب مساحة السطح المحصور بين القطع المكافئ و المستقيم $y = m$

نوجد أولاً نقاط التقاطع: (النقاط المشتركة) $f(x) = y$

$$x^2 = m \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}$$

$$S_1 = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} \left(y - f(x)\right) dx = 2\int_0^{\sqrt{m}} (m - x^2)\, dx = 2\left[mx - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{m}}$$

$$= 2\left[\left(m\sqrt{m} - \frac{m\sqrt{m}}{3}\right) - (0 - 0)\right] = \frac{4}{3}m\sqrt{m}$$

- لكي تتساوى ساحتي المنطقتين المقسومتين بـ d_m يجب ان يكون:

$$S_1 = \frac{1}{2}S$$

$$\frac{4}{3}m\sqrt{m} = \frac{1}{2}.\frac{32}{3} \quad \Rightarrow \quad m\sqrt{m} = 4$$

$$m^3 = 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}}$$

27) ليكن f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = (2-x)e^x$

وليكن C خطه البياني في جملة متجانسة:

1. ادرس تغيرات f وارسم C

f معرف واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$ عدم تعيين $+\infty . 0$

$$f(x) = 2e^x - xe^x$$

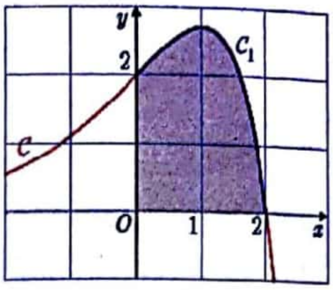
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\acute{f}(x) = -e^x + e^x(2-x) = e^x(-1+2-x) = e^x(1-x)$

$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow \boxed{x=1} : f(1) = e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$



2. ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$, $x = 2$

وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل . احسب مساحة S

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2-x).e^x\,dx$$

$u(x) = 2 - x \longrightarrow \grave{u}(x) = -1$

$\grave{v}(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$$S = \Big[(2-x)e^x\Big]_0^2 - \int_0^2 -e^x\,dx$$

$$= \Big[(2-x)e^x + e^x\Big]_0^2 = (0 + e^2) - (2+1) = e^2 - 3$$

3. عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V

a) عين الأعداد c, b, a حتى يكون التابع $G: x \rightarrow (ax^2 + bx + c).e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x \rightarrow (f(x))^2$

Gتابع أصلي للتابع $(f(x))^2$ عندئذ:

$\grave{G}(x) = (f(x))^2$

$(2ax + b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2 + bx + c) = (2-x)^2.e^{2x}$

$(2ax + b + 2ax^2 + 2bx \quad 2c)e^{2x} = (4 - 4x + x^2).e^{2x}$

$[2ax^2 + (2a+2b)x + (b+2c)]e^{2x} \underset{\text{بالمطابقة}}{=} (x^2 - 4x + 4)e^{2x}$

$$\begin{cases} 2a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \\ 2a + 2b = -4 \rightarrow 1 + 2b = -4 \rightarrow \boxed{b = \frac{-5}{2}} \\ b + 2c = 4 \rightarrow \frac{-5}{2} + 2c = 4 \rightarrow \boxed{c = \frac{13}{4}} \end{cases}$$

$$G(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$$

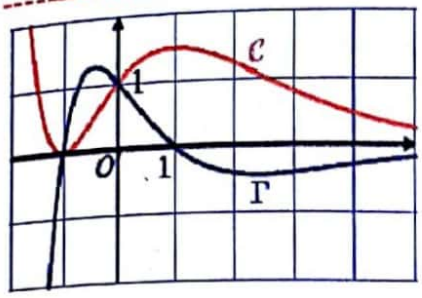
b) استنتج قيمة V

$$V = \pi \int_0^2 \underbrace{\left(f(x)\right)^2}_{\downarrow} \, dx$$

G تابع اصلي لـ $\left(f(x)\right)^2$

$$V = \pi \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(2 - 5 + \frac{13}{4}\right)e^4 - \frac{13}{4}\right] = \frac{\pi}{4}(e^4 - 13)$$



28) مسالة مركبة:

① في معلم متجانس رسمنا الخطين البيانيين Γ, C لتابعين اشتقاقيين على R نعلم ان احدهما مشتق للآخر، لذلك يمكن ان نرمز إليهما g و $\grave{g}$.

1. بين معللاً اي هذين الخطين هو الخط البياني للتابع g وأيهما لمشتقه.

- الخط C متناقص تماماً في المجال $]-\infty, -1[$ فمشتقه سالب.
- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $]-\infty, -1[$ وهو واقع تحت $x\grave{x}$.
- الخط C متزايد تماماً في المجال $[-1,1]$ فمشتقه موجب.
- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $[-1,1]$ وهو فوق $x\grave{x}$.
- الخط C متناقص تماماً في المجال $]1, +\infty[$ فمشتقه سالب.
- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $]1, +\infty[$ وهو واقع تحت $x\grave{x}$.
- إذاً C الخط لبياني للتابع g , Γ هو الخط البياني للتابع $\grave{g}$.

2. ما ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0؟

ميل لمماس في نقطة فاصلتها (0) هو $\grave{g}(0)$ ومن الشكل نجد ان $\grave{g}(0) = 1$

② نتامل المعادلة التفاضلية: $(E): \quad \grave{y} + y = 2(x+1)e^{-x}$

1. اثبت ان $f_0 : x \longmapsto (x^2 + 2x)e^{-x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية (E)

$$f_0 = y = (x^2 + 2x)e^{-x}$$
$$\grave{f_0} = \grave{y} = (2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x)$$
$$= e^{-x}(2x + 2 - x^2 - 2x)$$
$$= (2 - x^2)e^{-x}$$

$$L_1 = \grave{y} + y = (2 - x^2)e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(2 - x^2 + x^2 + 2x)$$
$$= (2x + 2)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x} = L_2$$

إذاً f_0 حل للمعادلة التفاضلية (E).

2. لتكن $(\grave{E})$ المعادلة التفاضلية $\grave{y} + y = 0$

اثبت ان « f حل للمعادلة (E)» يكافئ « $u = f - f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E})$»

ثم حل $(\grave{E})$ واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E).

« f حل للمعادلة $(E): \grave{y} + y = 2(x+1)e^{-x}$» $\Leftrightarrow$ « $u = f - f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E}): \grave{y} + y = 0$»

$$\grave{f} + f = 2(x+1)e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad (f - f_0)' + (f - f_0) = 0$$

◆ بفرض f حل للمعادلة (E) لنثبت ان :

$$(f-f_0)'+(f-f_0)=0$$

$$L_1=(f-f_0)'+(f-f_0)$$

$$=\grave{f}-\grave{f}_0+f-f_0$$

$$=\underbrace{(\grave{f}+f)}_{\text{من الفرض}}-\underbrace{(\grave{f}_0+f_0)}_{\text{من الفرض}}$$

$$=2(x+1)e^{-x}-2(x+1)e^{-x}=0=L_2$$

إذاً $u=f-f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E})$.

◆ بفرض $u=f-f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E})$ ولنثبـت ان:

$$\grave{f}+f=2(x+1)e^{-x}$$

لدينا من الفرض $\grave{y}\ +\ y\ =0$

$$(f-f_0)'+(f-f_0)=0$$

$$\grave{f}-\grave{f}_0\ +f-f_0\ =0$$

$$(\grave{f}+f)-(\grave{f}_0+f_0)=0$$

كون f_0 هو حل للمعادلة (E)

$$\grave{f}+f=\underbrace{\grave{f}_0+f_0}$$

$$\grave{f}+f=2(x+1)e^{-x}$$

إذاً f حل للمعادلة (E).

- حل المعادلة: $(\grave{E}): \grave{y}+y=0$

يكون حلها من الشكل: $u(x)=k.e^{-x}$

- استنتاج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E) يكافئ عندما يكون $(u=f-f_0)$ حل للمعادلة $(\grave{E})$

وبما ان $u(x)=f(x)\ -\ f_0(x)$

$$f(x)=u(x)\ +\ f_0(x)$$

$$f(x)=\ k.e^{-x}\ +\ (x^2+2x)e^{-x}$$

.3 إذا علمت ان التابع g من الجزء ① هو حل للمعادلة (E) فاعطِ صيغة $g(x)$ بدلالة x .

g حل للمعادلة (E) فهو من الشكل:

$$g(x)=k.e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$$

الخط البياني للتابع g يمر بالنقطة $(0,1)$:

$$g(0)=1$$

$$k+0=1\ \Rightarrow \boxed{k=1}$$

$$\Rightarrow g(x)=e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$$

$$=\underbrace{(1+x^2+2x)}e^{-x}$$

$$\boxed{g(x)=\ \ (x+1)^2e^{-x}}$$

.4 عين h حل المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x=0$.

h حل للمعادلة (E) فهو من الشكل:

$$h(x)=k.e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$$

$$h(x)=(k+x^2+2x)e^{-x}$$

المماس افقي عند $x=0$ اي $\grave{h}(x)=0$ ومنه:

$$\grave{h}(x)=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(k+x^2+2x)$$

$$\grave{h}(x)=e^{-x}(2x+2-k-x^2-2x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\grave{h}(x)=e^{-x}(-k-x^2+2)\\ \grave{h}(0)=0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}-k+2=0\ \ \Rightarrow \boxed{k=2}\\ h(x)=(2+x^2+2x)e^{-x}\end{array}$$

③ ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x)=\ (x^2+2x+2)e^{-x}$

.1 ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيناً نهاياته عند $-\infty$ و $+\infty$.

f معرف واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?$ $\qquad$ ($\infty.0$ عدم تعيين)

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{e^x}=\frac{x^2}{e^x}+\frac{2x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0+0+0=0 \Rightarrow +\infty$ مقارب عند $y=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$$\acute{f}(x)=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(x^2+2x+2)$$
$$=e^{-x}(2x+2-x^2-2x-2)=-x^2e^{-x}$$

$\acute{f}(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \ : f(0)=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	2	0

.2 ليكن $\acute{C}$ الخط البياني الذي يمثل f في معلم متجانس، اكتب معادلة للمماس T للخط $\acute{C}$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1 وارسم $\acute{C}$ و T

$x=-1 \ : f(-1)=e \qquad : \Omega\,(-1,e)$

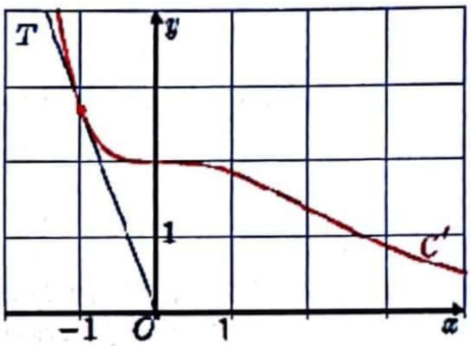
$m=\acute{f}(-1)=-e$

$T:\ y-e=-e(x+1)$

$T:\ \boxed{y=-ex}$

x	0	-1
y	0	e

$(0,0)\quad,\quad(-1,e)$



.3 عين الأعداد c,b,a حتى يكون التابع $F: x \to (ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على R ثم احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و $\acute{C}$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\alpha\,, x=0$

F تابع أصلي للتابع f إذاً:

$$\acute{F}(x)=f(x)$$
$$(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}(ax^2+bx+c)=(x^2+2x+2)e^{-x}$$
$$(2ax+b-ax^2-bx-c)e^{-x}=(x^2+2x+2)e^{-x}$$
$$\left(-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right)e^{-x}\underset{\text{بالمطابقة}}{=}(x^2+2x+2)e^{-x}$$

$$\begin{cases}-a=1 \to \boxed{a=-1}\\ 2a-b=2 \to \boxed{b=-4}\\ b-c=2 \to \boxed{c=-6}\end{cases}$$

إذاً: $F(x)=(-x^2-4x-6)e^{-x}$

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\alpha}=\left[(-x^2-4x-6)e^{-x}\right]_0^{\alpha}$$
$$=(-\alpha^2-4\alpha-6)e^{-\alpha}-(-6)$$
$$\boxed{A(\alpha)=(-\alpha^2-4\alpha-6)e^{-\alpha}+6}$$