بكالوجيا
Bacalogia

النسخة الأصلية
2023-2024

الفيزياء

لطلاب الثالث الثانوي العلمي

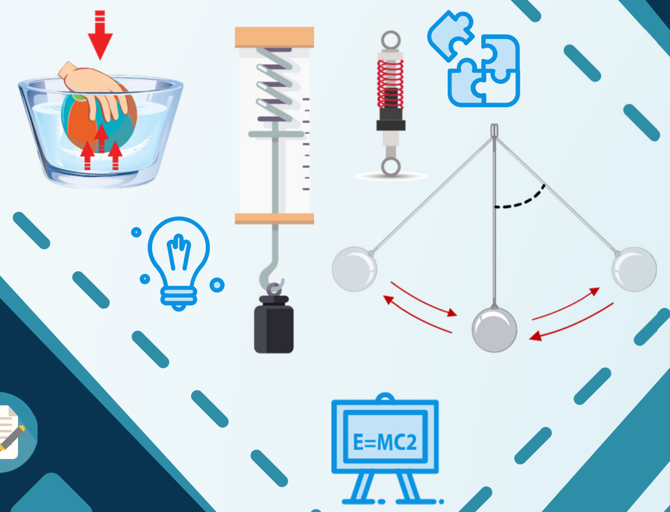
الوحدة الأولى الحركة والتحريك

تتضمن النوطة :

- شاملة لكافة معلومات الوحدة.
- جميع القوانين اللازمة لحل المسائل.
- حل مسائل القسم كافة الإضافة إلى مسائل خارجية.
- أسئلة اختر الإجابة الصحيحة شاملة عن كل درس.
- الإشارة لأسئلة السنوات السابقة حسب ورودها ضمن فقرات ومسائل الكتاب.

2023
2024

Bacalogia



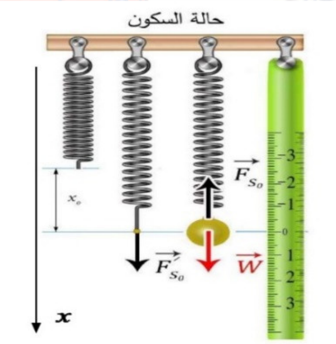
الدرس الأول: الحركة التوافقية البسيطة

النواس المرن

مم يتألّف النواس المرن؟

يتألّف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلّق في نهايته السفليّة كتلة m، تهتز على طرفي مركز الاهتزاز بسعة اهتزازيّة ثابتة X_{max}.

الشرح: سُميّ نواس أي هزازة، إنّ أي جسم يهتز يمكننا أن نطلق عليه اسم نواس، وسمّي مرن نظراً لنوع النابض المسبب للاهتزاز.



الاستطالة السكونيّة x_0: وهي المسافة التي يستطيلها النابض ثمّ يصبح متوازناً.

سؤال: عند تعليق كتلة m في الطرف السفلي للنابض فإنّه يستطيل مسافة x_0.

استنتج قانون الاستطالة السكونية.

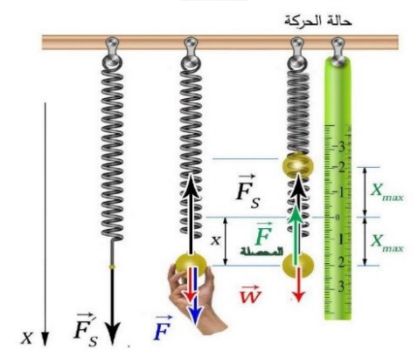
- القوى الخارجيّة المؤثّرة: $\vec{w}$ ثقل الكتلة المعلّقة $\vec{F}_{s_0}$ توتر النابض.
- من شرط التوازن الانسحابي: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$
- بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحو الأسفل:

$$w - F_{s_0} = 0 \Rightarrow w = F_{s_0}$$

- يؤثّر في نهاية النابض قوّة شد تسبب استطالة سكونيّة تعطى بالعلاقة:

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0 \Rightarrow w = kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{w}{k} \Rightarrow x_0 = \frac{m}{k}g$$

الشرح: لأي استنتاج في الكتاب يلزمنا: (قوى خارجية مؤثّرة، شرط يدل على الحركة، إسقاط عند وجود أشعّة).



قوّة الإرجاع: و هي القوّة التي يعمل بها النابض لكي يعود إلى شكله السابق قبل الاستطالة، (أي إلى مركز التوازن)

سؤال: أثبت أنّ محصلّة القوى الخارجيّة المؤثّرة في النابض المرن تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالاتجاه. أو (أثبت أنّ قوّة الإرجاع للنواس المرن تعطى بالعلاقة $\vec{F} = -k\bar{x}$).

- القوى الخارجيّة المؤثّرة: $\vec{w}$ ثقل الكتلة المعلّقة $\vec{F}_{s_0}$ توتر النابض. (دورة 16 الثانية)
- من شرط التوازن الانسحابي: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$
- بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحو الأسفل: $w - F_{s_0} = 0 \Rightarrow w = F_{s_0}$

- يؤثّر في نهاية النابض قوّة شد تسبب استطالة سكونيّة تعطي بالعلاقة:

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0 \Rightarrow w = kx_0$$

- القوى الخارجيّة المؤثّرة: $\vec{w}$ ثقل الكتلة المعلّقة $\vec{F'_s}$ قوّة توتر النابض.
- من شرط التحريك الانسحابي: $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F'_s} = m.\vec{a}$
- بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحو الأسفل: $w - \bar{F'_s} = m.\bar{a}$
- يؤثّر في نهاية النابض قوّة شد تسبب استطالة $(\bar{x} + x_0)$ تعطي بالعلاقة:

$$F'_s = F_s = k(x_0 + \bar{x}) \Rightarrow kx_0 - k(x_0 + \bar{x}) = m.\bar{a} \Rightarrow m.\bar{a} = -k\bar{x}$$
$$\bar{F} = m.\bar{a} \Rightarrow \bar{F} = -k\bar{x}$$

سؤال: انطلاقاً من المعادلة التفاضلية $(\ddot{\bar{x}})_t = \frac{-k}{m}\bar{x}$ للنواس المرن غير المتخامد: استنتج أنّ حركة النواس المرن جيبيّة انسحابيّة واستنتج دوره الخاص موضّحاً دلالات الرموز. (دورة 13 أولى، 15 ثانية، 19 أولى، 22 أولى)

$$\bar{F} = m.\bar{a} \Rightarrow \bar{F} = -k\bar{x} \Rightarrow m.\bar{a} = -k\bar{x}$$
$$(\ddot{\bar{x}})_t = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

- وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad (m)$$

- نشتق مرتين بالنسبة للزمن للتأكد من صحة الحل الجيبي:

$$(\dot{\bar{x}})_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad (m.s^{-1})$$
$$(\ddot{\bar{x}})_t = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad (m.s^{-2})$$
$$(\ddot{\bar{x}})_t = -\omega_0^2\bar{x}$$
$$-\omega_0^2\bar{x} = -\frac{k}{m}\bar{x} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

- وبالتالي فالمعادلة صحيحة لأن k, m مقادير موجبة دوماً وبالتالي فإن حركة النواس المرن جيبيّة انسحابيّة (توافقيّة بسيطة).
- دورها الخاص: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- حيث أن: m: كتلة النواس (kg) k : ثابت صلابة النابض $(N.m^{-1})$.

الشرح: لمعرفة حركة أي جسم يجب معرفة تسارع هذا الجسم ، و بما أنّ في النواس المرن التسارع غير معروف إذا كان سالباً أم موجباً أم ثابتاً أم متغيّر بشكل عشوائي ، استخدمنا الحل التفاضلي .
- إذا كان التسارع أكبر من الصفر فإنّ الحركة متسارعة.
- وإذا كان التسارع أصغر من الصفر فإن الحركة متباطئة.
- إذا كان التسارع يساوي الصفر فإنّ الحركة مستقيمة منتظمة.
- وإذا كان كل ما سبق فالحركة جيبيّة و تحتاج إلى حل و تحقق من الحل.

سؤال: اكتب التابع الزمني للمطال بشكله العام موضّحاً دلالات الرموز والواحدات و استنتج شكله المختزل بفرض أنّ الجسم بدأ حركته من نقطة مطالها X_{max} .

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$\bar{x}$: المطال هي بعد الجسم المتحرّك عن المبدأ (m).
$\omega_0 t + \bar{\varphi}$: طور الحركة في اللحظة t.
X_{max} : سعة الاهتزاز وهي أقصى بعد يصل إليه الجسم المتحرك (m).
$\bar{\varphi}$: طور الحركة في اللحظة $t = 0$ (Rad).
ω_0 : النبض الخاص $(Rad.s^{-1})$.

- الشكل المختزل: $X_{max} = X_{max}\cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1$

$$\Rightarrow \bar{\varphi} = 0Rad$$
$$\bar{x} = X_{max}\cos\omega_0 t \quad (m)$$

سؤال: انطلاقاً من الشكل المختزل لتابع المطال $\bar{x} = X_{max} \cos \omega_0 t \quad (m)$

a) وضّح متى يكون تابع المطال أعظمياً ومتى ينعدم.

b) ارسم تغيرات تابع المطال بالنسبة للزمن خلال دور واحد.

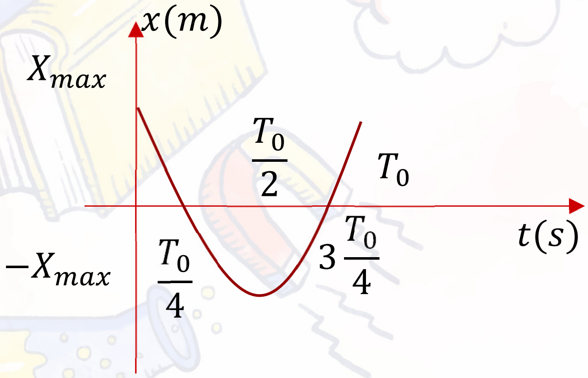
c) ماهي القيمة التي يأخذها المطال في اللحظة $5\frac{T_0}{4}$ ؟

الحل: $\bar{x} = X_{max} \cos \omega_0 t \quad (m)$

a) يكون المطال أعظمياً عندما : $x = \pm X_{max}$ أي في الوضعين الطرفيين.

- حيث $\cos \omega_0 t = \pm 1$
- يكون المطال معدوماً عندما : $x = 0\ m$ أي في مركز الاهتزاز.
- حيث $\cos \omega_0 t = 0$

b) انظر الرسم المجاور



c) إن قيمة التي يأخذها تابع المطال في اللحظة $\frac{5T_0}{4}$ هي $x = 0$.

سؤال: انطلاقاً من الشكل المختزل لتابع المطال $\bar{x} = X_{max} \cos \omega_0 t \quad (m)$ (دورة 14 ثانية، 17 ثانية)

a) وضّح متى يكون تابع السرعة أعظمياً ومتى ينعدم.

b) ارسم تغيرات تابع السرعة بالنسبة للزمن خلال دور واحد.

c) ماهي القيمة التي تأخذها السرعة في اللحظة $\frac{T_0}{4}$ ؟

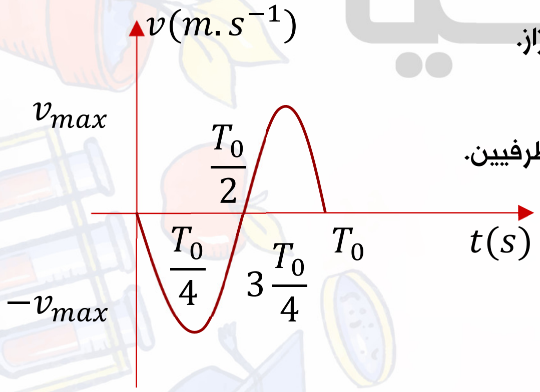
الحل

a) $(\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t) \quad (m.s^{-1})$

- تكون السرعة أعظمية عندما : $v = \pm v_{max}$ أي $x = 0$ في مركز الاهتزاز.
- حيث $\cos \omega_0 t = 0$
- تكون السرعة معدومة عندما : $v = 0$ أي $x = \pm X_{max}$ في الوضعين الطرفيين.
- حيث $\cos \omega_0 t = \pm 1$

$v_{max} = \omega_0 X_{max}$

b) انظر الرسم المجاور



c) إن قيمة التي يأخذها تابع السرعة في اللحظة $\frac{T_0}{4}$ هي $v = -v_{max}$.

سؤال: انطلاقاً من الشكل المختزل لتابع المطال $\bar{x} = X_{max} \cos \omega_0 t \quad (m)$ (دورة 15 أولى، 18 ثانية)

a) وضّح متى يكون تابع التسارع أعظمياً و متى ينعدم.

b) ارسم تغيرات تابع التسارع بالنسبة للزمن خلال دور واحد.

c) ماهي القيمة التي يأخذها التسارع في اللحظة $\frac{T_0}{2}$ ؟

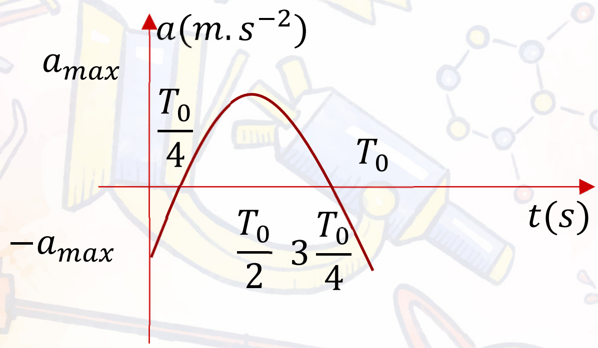
الحل $(\ddot{x})_t = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t) \quad (m.s^{-2})$

a) يكون التسارع أعظمياً عندما: $x = \pm X_{max}$ أي في الوضعين الطرفيين.

يكون التسارع معدوماً عندما: $x = 0\ m$ أي في مركز الاهتزاز.

$a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$

b) انظر الرسم المجاور



c) إنّ القيمة التي يأخذها تابع التسارع في اللحظة $\frac{T_0}{2}$ هي $a = a_{max}$.

سؤال: نثبّت إلى بداية ساق أفقيّة ملساء طرف نابض مرن مهمل الكتلة ونثبّت إلى نهايته الثانيّة جسماً صلباً كتلته m لنشكّل نواس مرن حركته جيبيّة انسحابيّة، التابع الزمني لمطاله $\bar{x} = X_{max} \cos \omega_0 t \quad (m)$ و المطلوب: (دورة 16 أولى، 20 أولى، 21 ثانية)

a) استنتج عبارة الطاقة الميكانيكيّة للنواس المرن.

b) حدد شكل الطاقة لحظة المرور في وضع التوازن.

c) حدد شكل الطاقة لحظة المرور في الوضعين الطرفيّين.

d) حدد المطال الذي تكون عنده الطاقة الكامنة والطاقة الحركية متساويتين.

e) ارسم تغيرات كل من الطاقة الكامنة والطاقة الحركيّة بالنسبة لتابع المطال.

الحل

a)

$$E = E_P + E_k$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_{max}{}^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}{}^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}kX_{max}{}^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$: k = m\omega_0^2$$

$$E = \frac{1}{2}kX_{max}{}^2(\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2}kX_{max}{}^2 = const$$

b) إنّ الطاقة لحظة المرور بالشاقول تساوي الطاقة الحركيّة في الحالة العظمى: $E = E_k = \frac{1}{2}mv_{max}{}^2$.

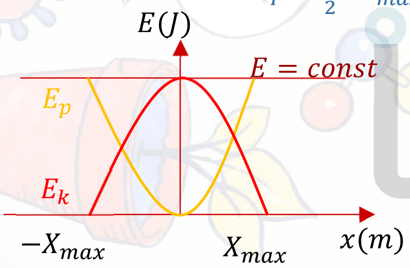
c) إنّ الطاقة لحظة المرور في الوضعين الطرفيّين تساوي الطاقة الكامنة في الحالة العظمى: $E = E_P = \frac{1}{2}kX_{max}{}^2$.

d)

$$E_P = E_k$$

$$E = 2E_P \Rightarrow \frac{1}{2}kX_{max}{}^2 = 2\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

e) انظر الرسم المجاور



صيغة أخرى للسؤال السابق:

انطلاقاً من مصونيّة الطاقة الميكانيكيّة للنواس المرن استنتج أنّ الطاقة الكليّة في النواس المرن هي مقدار ثابت.

سؤال: أثبت صحّة العلاقة $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$.

$$x^2 = X_{max}{}^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\cos^2 \omega_0 t = \frac{x^2}{X_{max}{}^2} \quad (1)$$

$$v^2 = \omega_0{}^2 X_{max}{}^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$\sin^2 \omega_0 t = \frac{v^2}{\omega_0{}^2 X_{max}{}^2} \quad (2)$$

- بجمع (2) , (1) :

$$1 = \frac{v^2}{\omega_0{}^2 X_{max}{}^2} + \frac{x^2}{X_{max}{}^2}$$

- نوحدّ المقامات:

$$1 = \frac{v^2 + \omega_0{}^2 x^2}{\omega_0{}^2 X_{max}{}^2} \Rightarrow v^2 = \omega_0{}^2 X_{max}{}^2 - \omega_0{}^2 x^2$$

$$v^2 = \omega_0{}^2(X_{max}{}^2 - x^2)$$

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}{}^2 - x^2}$$

كيفية حل مسألة نواس مرن بشكل عام في كل الطلبات:

1) كيفية استنتاج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام:

- أولاً نكتب التابع الزمني للمطال في شكله العام: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})\ \ (m)$
- ثانياً نحسب النبض الخاص ω_0 بإحدى الطريقتين: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}\ \ (Rad.s^{-1})$
- ثالثاً نحسب سعة الاهتزاز X_{max} بإحدى الطرق التالية:
  - ✓ أن تعطى صراحة في نص المسألة.
  - ✓ أن يترك الجسم بدون سرعة ابتدائية فإنّ $\bar{x} = X_{max}$.
  - ✓ نصف طول القطعة المستقيمة التي يرسمها الجسم أثناء حركته $X_{max} = \frac{d}{2}$.
  - ✓ أن يبدأ الجسم حركته من مركز التوازن فتكون $X_{max} = \left|\frac{v}{w_0}\right|$.
- رابعاً نحسب $\bar{\varphi}$ الطور الابتدائي وذلك بتعويض شروط البدء بالتابع:

يمكن الحصول على شروط البدء من نص المسألة بإحدى الجمل التالية:

- لحظة بدء الجسم حركته.
- مبدأ الزمن.
- لحظة بدء الزمن.
- في اللحظة $t = 0$.

وفي جميع الحالات تمتاز شروط البدء بوجود قيمة للمطال والسرعة ويستفاد من وجود السرعة بتحديد قيمة الطور الابتدائي إذا كانت موجبة أم سالبة وذلك بتعويض كلتا القيمتين في التابع:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نحصل على قيمتين إحداهما تحقق شروط البدء والأخرى تكون مرفوضة أما إذا كانت تساوي الصفر فلا نحتاج التعويض في تابع السرعة.

- خامساً بعد الحصول على قيم الثوابت نعوّض تلك القيم بتابع المطال.

2) احسب الدور الخاص للنواس المرن:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} = \frac{t}{n}\quad (s)$$

3) حساب لحظة المرور في وضع التوازن :

- إنّ لحظة المرور في وضع التوازن يكون فيها $x = 0$ و بالتالي فإن الحل هو:

$$x = 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 0 \Rightarrow \omega_0 t + \bar{\varphi} = (2k+1)\frac{\pi}{2} : k = 0,1,2,3,\dots$$

- نعزل t ونعوّض قيمة k وذلك حسب لحظة المرور ويكون المرور الأول $k = 0$ وهكذا ....

4) احسب السرعة لحظة المرور في وضع التوازن:

- نحسب لحظة المرور في وضع التوازن المطلوبة و من ثمّ نعوّض في تابع السرعة بدلاً من قيمة t :

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})\ (m.s^{-1})$$

5) احسب ثابت صلابة النابض أو احسب الكتلة المعلّقة:

$$k = m\,\omega_0^2\ \ (N.m^{-1}) \qquad m = \frac{k}{\omega_0^2}\ \ (kg)$$

6) احسب الاستطالة السكونيّة :

$$x_0 = \frac{mg}{k}\ (m)$$

- ولكن إذا طلب منك الاستطالة السكونية و معك مجهول (الكتلة أو ثابت صلابة النابض فإننا نعوّض بالقانون المفقود لنحصل على العلاقة :

$$x_0 = \frac{mg}{k} = x_0 = \frac{\frac{k}{\omega_0^2}g}{k} = \frac{mg}{m\,\omega_0^2} = \frac{g}{\omega_0^2}$$

7) احسب السرعة العظمى طويلةً:

$$v_{max} = |-\omega_0 X_{max}|$$

8) احسب السرعة عند نقطة مطالها x :

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

9) احسب التسارع عند نقطة مطالها x :

$$\bar{a} = -\omega_0^2\,\bar{x}\ (\mathrm{m.}s^{-2})$$

10) احسب الطاقة الكامنة المرونية و الطاقة الحركية عند نقطة مطالها x :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_k = E - E_p \qquad E = \frac{1}{2}kX_{max}{}^2 \quad (J)$$

11) احسب قوة الإرجاع عند نقطة مطالها x :

$$F = -kx = ma$$

- إذا طلب شدّة قوة الإرجاع نضع القانون بالقيمة المطلقة.

12) احسب الكتلة الواجب تعليقها ليصبح الدور الخاص الجديد $\acute{T}_0$ أو نستبدل النابض بآخر ليصبح الدور الجديد $\acute{T}_0$:

- إذا كان المتغير الكتلة فإننا نضع بدلاً من m نضع $\acute{m}$
- إذا كان المتغير ثابت صلابة النابض نضع بدلاً من k نضع $\acute{k}$

$$\frac{\acute{T}_0}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{\acute{m}}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{\acute{k}}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

$$\frac{\acute{T}_0}{T_0} = \sqrt{\frac{\acute{m}}{m}} = \sqrt{\frac{k}{\acute{k}}}$$

- و ذلك حسب المتغيّر بين الكتلة و ثابت صلابة النابض.

13) احسب مطال وجهة الحركة بعد مرور زمن:

- نعوّض قيمة الزمن في تابعي السرعة و تابع المطال.

بنك الأسئلة

بنك اختر الإجابة الصحيحة:

1) تعطى قوّة الإرجاع في النواس المرن بالعلاقة:

(a	$\bar{F} = -k\bar{\theta}$	(b	$\bar{F} = k\bar{\theta}$	(c	$\bar{F} = -I_{\Delta}\bar{\alpha}$	(d	$\bar{F} = -k\bar{x}$

2) تعطى الاستطالة السكونيّة للنواس المرن بالعلاقة :

(a	$\frac{m}{k}g$	(b	$\frac{k}{w}$	(c	$\frac{k}{mg}$	(d	$\frac{k}{\omega_0^2}$

3) إن حركة النواس المرن عند الإقتراب من وضع التوازن :

(a	متباطئة	(b	متسارعة	(c	مستقيمة منتظمة	(d	جيبية دورانيّة

4) إنّ حركة النواس المرن عند الإبتعاد عن وضع التوازن :

(a	متباطئة	(b	متسارعة	(c	مستقيمة منتظمة	(d	جيبية دورانيّة

5) يعطى الدور الخاص للنواس المرن بالعلاقة :

(a	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	(b	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}}$	(c	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$	(d	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

6) يتعلّق الدور الخاص للنواس المرن بـ :

(a	الكتلة المعلّقة	(b	ثابت صلابة النابض	(c	تسارع الجاذبيّة الأرضيّة	(d	كل ما سبق صحيح

7) إنّ قيمة الطاقة الكليّة للنواس المرن عند وضع التوازن هي :

(a	$E = E_k$	(b	$E = E_p$	(c	$E = 2E_p$	(d	$E = 0$

8) إنّ قيمة الطاقة الكليّة للنواس المرن عند الوضعين الطرفيّين هي :

(a	$E = E_k$	(b	$E = E_p$	(c	$E = 2E_p$	(d	$E = 0$

9) يكون تابع المطال أعظمياً عند ـــــــ و معدوماً عند ـــــــ :

(a	الوضعين الطرفيين ، مركز الاهتزاز	(b	مركز الاهتزاز ، وضعين طرفيين	(c	مركز الاهتزاز ، وضع التوازن	(d	الوضعين الطرفيين ، و عند اعظم قيمة

10) يكون تابع السرعة أعظمياً عند ـــــــ و معدوماً عند ـــــــ :

(a	الوضعين الطرفيين ، مركز الاهتزاز	(b	مركز الاهتزاز ، وضعين طرفيين	(c	مركز الاهتزاز ، وضع التوازن	(d	الوضعين الطرفيين ، و عند اعظم قيمة

الحل

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	a	b	a	a	d	a	b	a	b

11) يكون تابع التسارع أعظمياً عند ـــــــ و معدوماً عند ـــــــ :

a)	الوضعين الطرفيين ، مركز الاهتزاز	b)	مركز الاهتزاز ، وضع طرفيين	c)	مركز الاهتزاز ، وضع التوازن	d)	الوضعين الطرفيين ، و عند اعظم قيمة

12) نواس مرن يتألف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلّق في نهايته السفليّة كتلة m ، يهتز بدور خاص $T_0 = 2\ sec$ ، نجعل الكتلة المعلّقة ربع ما كانت عليه ليصبح الدور الجديد :

a)	$1\ s$	b)	$2\ s$	c)	$0.25\ s$	d)	$\sqrt{2}\ s$

13) نواس مرن يتألف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلّق في نهايته السفليّة كتلة m ، يهتز بدور خاص $T_0 = 1\ sec$ ، نجعل ثابت صلابة النابض ربع ما كانت عليه ليصبح الدور الجديد :

a)	$1\ s$	b)	$2\ s$	c)	$0.25\ s$	d)	$\sqrt{2}\ s$

14) نواس مرن يتألف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلّق في نهايته السفليّة كتلة m ، يهتز بدور خاص $T_0 = 2\ sec$، و بسعة اهتزاز X_{max} نجعل سعة الاهتزاز ربع ما كانت عليه ليصبح الدور الجديد :

a)	$1\ s$	b)	$2\ s$	c)	$0.25\ s$	d)	$\sqrt{2}\ s$

15) نواس مرن يتألف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $k = 4\ N.m^{-1}$ معلّق في نهايته السفليّة كتلة $m = 1kg$ ، يهتز بدور خاص T_0 ، قيمته :

a)	$1\ s$	b)	$2\ s$	c)	$0.25\ s$	d)	$\pi\ s$

16) نواس مرن يتألّف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $k = 40\ N.m^{-1}$ و دورها الخاص $T_0 = 2\ sec$ فإنّ الكتلة المعلّقة مقاسة بال kg هي :

a)	1	b)	2	c)	3	d)	4

17) نواس مرن يتألف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k ،نعلّق في نهايته السفليّة كتلة ، يهتز بدور خاص $T_0 = 2\ sec$ فإن الاستطالة السكونيّة :

a)	$1\ m$	b)	$2\ m$	c)	$0.5\ m$	d)	$0.1\ m$

18) إنّ طاقة النواس المرن تعطى بالعلاقة :

a)	$\frac{1}{2}kX_{max}^2$	b)	$\frac{1}{2}kx^2$	c)	$\frac{1}{2}mv^2$	d)	$\frac{1}{2}k\theta_{max}^2$

19) إنّ الاستطالة السكونيّة لنواس مرن ثابت صلابته $k = 20\ N.m^{-1}$ و الكتلة المعلّقة $m = 2kg$ هي :

a)	$1\ m$	b)	$2\ m$	c)	$0.5\ m$	d)	$0.1\ m$

20) إنّ الموضع الذي تكون فيه الطاقة الحركيّة تساوي الطاقة الكامنة للنواس المرن هو :

a)	$\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$	b)	$\frac{X_{max}}{2}$	c)	$\frac{X_{max}}{3}$	d)	$\frac{X_{max}}{4}$

الحل

(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
a	a	b	b	d	d	a	a	a	a

بنك المسائل:

المسألة الأولى:

تتألف هزازة توافقية بسيطة غير متخامدة من جسم صلب كتلته $m = 4\ kg$، معلّق إلى طرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، يهتز بدور خاص $T_0 = 0.8\ s$، ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $d = 16\ cm$.

المطلوب:

1) استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام باعتبار أنّ مبدأ الزمن عندما كان في مطاله الأعظمي الموجب.
2) احسب ثابت صلابة النابض.
3) احسب قيمة الاستطالة الاستطالة السكونية.
4) عيّن لحظة المرور الأول للجسم في مركز الاهتزاز.
5) احسب الطاقة الكامنة المرونية للنابض والطاقة الحركية عند نقطة مطالها $x = -4cm$.

الحل

$$m = 4kg \quad ,T_0 = 8s \quad ,d = 16cm$$
$$(t = 0, x = X_{max})$$

-1 $\bar{x} = X_{max}\, cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{5\pi}{2} rad.s^{-1}$$
$$X_{max} = \frac{d}{2} = \frac{16\times10^{-2}}{2} = 8\times10^{-2}m$$
$$X_{max} = X_{max}\cos(\varphi) \to \cos(\varphi) = 1$$
$$\varphi = 0\ rad$$
$$\bar{x} = 8\times10^{-2} cos\frac{5\pi}{2}t$$

-2 $k = N.m^{-1}$

$$k = m\omega_0^2 = 4(\frac{5\pi}{2})^2 = 4\left(\frac{250}{4}\right) = 250N.m^{-1}$$

-3 $x_0 = ?$

$$x_0 = \frac{m}{k}g = \frac{4}{250}\times10 = \frac{4}{25}$$
$$\to x_0 = 0.16m$$

-4 $t_1 = ?$

$$x = 0 \to \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 0$$
$$\omega_0 t + \bar{\varphi} = (2k+1)\frac{\pi}{2} : k = 0,1, \dots$$
$$\frac{5\pi}{2}t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \to t = (2k+1)\frac{1}{5}$$

$k = 0$ المرور الأول

$$\to t = \frac{1}{5}s$$

-5 $E_p = ?J\ , E_k = ?J$

$$x = -4cm$$
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times250\times(-4\times10^{-2})^2$$
$$= \frac{1}{2}\times250\times16\times10^{-4}$$
$$E_p = 2000\times10^{-4} \to E_p = 20\times10^{-2}J$$
$$E_k = E - E_p \to E = \frac{1}{2}kX_{max}^2$$
$$E = \frac{1}{2}250(8\times10^{-2})^2 = 80\times10^{-2}J$$
$$E_k = 80\times10^{-2} - 20\times10^{-2}$$
$$E_k = 60\times10^{-2}\ J$$

المسألة الثانية:

تهتز كرة معدنيّة كتلتها m بمرونة نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $k = 10\ N.m^{-1}$ بحركة توافقيّة بسيطة دورها الخاص $2s$ وبسعة اهتزاز $12\ cm$ وباعتبار أنّ مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ وهو يتحرّك بالاتجاه السالب

والمطلوب:

1) استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام.
2) عيّن لحظة المرور الأول في وضع التوازن واحسب السرعة عندئذ.
3) احسب كتلة الكرة.
4) احسب شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $1\ cm$.
5) احسب الاستطالة السكونيّة للنابض.
6) احسب الطاقة الميكانيكيّة للنواس علماً أنّ ($\pi^2 = 10\ , g = 10$)

الحل

$$k = 10N.m^{-1}, T_0 = 2s, X_{max} = 12cm$$
$$(t = 0, x = \frac{X_{max}}{2}, v < 0)$$

-1 $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\, rad.s^{-1}$$
$$X_{max} = 12 \times 10^{-2} m$$
$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$$
$$\varphi = \pm\frac{\pi}{3} rad$$
$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$v = -\omega_0 X_{max} \sin -\frac{\pi}{3} > 0$$
$$v = -\omega_0 X_{max} \sin \frac{\pi}{3} < 0$$
$$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} rad$$
$$x = 12 \times 10^{-2} \cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$$

-2 $t_1 = ?$

$$x = 0 \rightarrow \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 0$$
$$\omega_0 t + \bar{\varphi} = (2k+1)\frac{\pi}{2} : k = 0,1,2, \dots$$
$$\pi t + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow t = (2k+1)\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

المرور الأول $k = 0$

$$\rightarrow t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} s$$
$$v = ?\, m.s^{-1}$$
$$v = -\pi \times 12 \times 10^{-2} \sin(\pi \frac{1}{6} + \frac{\pi}{3})$$
$$v = -12\pi \times 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$v = -12\pi \times 10^{-2} m.s^{-1}$$

-3 $m = ?\, kg$

$$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = 1kg$$

-4 $F = ?\, N, x = 1cm$

$$F = |-kx| = |-10 \times 10^{-2}| = 10^{-1} N$$

-5 $x_0 = ?\, m$

$$x_0 = \frac{m}{k} g = \frac{1}{10} \times 10 = 1m$$

-6 $E = ?\, J$

$$E = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}10 \times (12 \times 10^{-2})^2$$
$$E = 72 \times 10^{-3} J$$

مسائل الكتاب النواس المرن

المسألة الأولى:

تتألف هزازة جيبية انسحابية من نابض مرن شاقولي الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10N.m^{-1}$، مثبت من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الآخر جسماً كتلته m، ويعطى التابع الزمني لمطال حركتها بالعلاقة: $\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

المطلوب:

1- أوجد قيم ثوابت الحركة ودورها الخاص.

2- احسب كتلة الجسم m.

3- احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6cm$، والجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.

4- حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن.

(في جميع المسائل $4\pi = 12.5, \pi^2 = 10, g = 10m.s^{-2}$)

الحل

-1 $\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

بالمطابقة مع الشكل العام $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نجد أن: $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} rad, \omega_0 = \pi\, rad.s^{-1}, X_{max} = 0.1m$

الدور الخاص للحركة: $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\, sec$$

-2 $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \to m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10} \to m = 1kg$

-3 طريقة أولى لحساب السرعة في موضع مطاله $x = 6cm$، ويتحرك بالاتجاه الموجب:

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

$$v = \pi\sqrt{(0.1)^2 - (0.06)^2} = \pi\sqrt{10^{-2} - 36 \times 10^{-4}}$$
$$= \pi\sqrt{100 \times 10^{-4} - 36 \times 10^{-4}}$$
$$= \pi\sqrt{64 \times 10^{-4}}\ (4\pi = 12.5 \to 8\pi = 25)$$
$$\to v = 8\pi \times 10^{-2} = 0.25\, m.s^{-1}$$

طريقة ثانية لحساب السرعة:

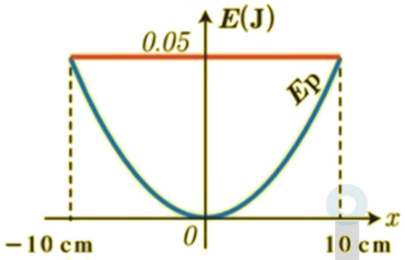
$$\frac{x^2}{X_{max}^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = 1 \to \frac{(0.06)^2}{(0.1)^2} + \frac{v^2}{(\pi)^2(0.1)^2} = 1$$
$$v = 8\pi \times 10^{-2} = 0.25\, m.s^{-1}$$

-4 وهو يتحرك بالاتجاه السالب $x = 0.1\, \text{Cos}\frac{\pi}{2} = 0$

وفي مركز الاهتزاز $v = -\omega_0 X_{max} \sin\frac{\pi}{2} < 0$

المسألة الثانية:

يوضح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيط مؤلفة من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته $0.4kg$.



المطلوب:

1- استنتج قيمة ثابت صلابة النابض k.

2- احسب الدور الخاص للحركة.

3- احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

الحل

-1 $E_J = \frac{1}{2}kX_{max}^2$

$$5 \times 10^{-2} = \frac{1}{2}k(10^{-1})^2$$
$$k = 10\, N.m^{-1}$$

-2 طريقة (1):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}} = \frac{4\pi}{10} = \frac{12.5}{10} = 1.25s$$

طريقة (2):

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{10}{0.4} = \frac{100}{4} = 25$$
$$\to \omega_0 = 5\, rad.s^{-1}$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{10} = \frac{12.5}{10} = 1.25s$$

-3 عند المرور في مركز الاهتزاز تنعدم الطاقة الكامنة المرونية وتكون الطاقة الحركية مساوية للطاقة الميكانيكية:

طريقة (1):

$$E_{tot} = E_p + E_k$$
$$x = 0 \to E_p = 0$$
$$E_{tot} = E_k$$
$$\frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{\frac{kX_{max}^2}{m}} = \sqrt{\frac{10 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-1}}} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$v = 0.5\, m.s^{-1}$$

طريقة (2):

$$E_{tot} = E_p + E_k$$
$$x = 0 \to E_p = 0$$
$$E_{tot} = E_k$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.05}{0.4}} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$v = 0.5\, m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة:

نشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلته $m = 1kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزات في $8s$، ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $24cm$.

المطلوب:

1) استنتج علاقة الاستطالة السكونية لهذا النابض، ثم احسب قيمتها.

2) احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).

3) احسب قيمة التسارع في مطال $x = 10cm$.

4) احسب الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $x = -4cm$، واحسب الطاقة الحركية عندئذ.

الحل

1- القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

قوة توتر النابض $\overrightarrow{F_{s_0}}$، قوة الثقل: $\vec{w}$

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجه نحو الأسفل كما في الشكل:

$$W - F_{s_0} = 0$$

$$\boldsymbol{W = F_{s_0}} \ (1)$$

تؤثر على النابض القوة $\overline{F_{1_0}}$ التي تسبب له الاستطالة x_0 حيث:

$$\overline{F_{s_0}} = \overline{F_{s_0}} = kx_0$$

بالتعويض في (1) نجد: $mg = kx_0$

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

لنحسب T_0 ثم k:

حساب الدور الخاص: $10T_0 = 8 \rightarrow T_0 = 0.8s$

حساب ثابت صلابة النابض: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{(T_0)^2}$

$$k = 62.5 \ N.m^{-1}$$

$$x_0 = \frac{1 \times 10}{62.5} = \frac{100}{625} = \frac{4}{25} = 0.04m$$

2- حساب قيمة السرعة العظمى (طويلة): $V_{max} = |X_{max}\omega_0|$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{5\pi}{2} rad.s^{-1}$$

$$2X_{max} = 0.24 \rightarrow X_{max} = 0.12m$$

$$V_{max} = 0.12 \times \frac{5\pi}{2} = 0.3\pi \ m.s^{-1}$$

3- قيمة التسارع في مطال $\bar{x} = +10cm = +10^{-1}m$

$$\bar{a} = -\omega_0^2\bar{x} = -\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 \times 10^{-1} = -6.25 \ m.s^{-2}$$

4- الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $\bar{x} = -4cm$:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 62.5 \times (-0.04)^2 = 0.05 \ J$$

لحساب الطاقة الحركية علينا أولاً حساب الطاقة الميكانيكية (الكلية):

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}62.5(0.12)^2 = 0.45 \ J$$

الطاقة الحركية في موضع مطاله $\bar{x} = -4cm$:

$$E_k = E_{tot} - E_p = 0.45 - 0.05 = 0.4 \ J$$

المسألة الرابعة:

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 16N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $1s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1m$، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب.

المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.

2- عيّن لحظتي المرور الأول والثالث للكرة في موضع التوازن.

3- احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1m$.

4- احسب كتلة الكرة.

الحل

1- ثوابت الحركة $(X_{max}, \omega_0, \bar{\varphi})$، التابع الزمني لمطال الحركة:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\, rad.s^{-1}, X_{max} = 0.1m$$

نعوض شروط البدء $(x = \frac{X_{max}}{2} m, t = 0)$ في التابع الزمني:

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(0 + \bar{\varphi}) \rightarrow \cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (\bar{\varphi} = -\frac{\pi}{3} rad \text{ أو } \bar{\varphi} = \frac{\pi}{3} rad)$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

في اللحظة $t = 0$ السرعة: $\overline{v_0} = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi})$

الحل $\bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3} rad$ مقبول

لأنه يوافق شروط البدء يحقق سرعة سالبة:

$$\overline{v_0} = -\omega_0 X_{max}\sin(\frac{\pi}{3}) < 0$$

الحل $\bar{\varphi} = +\frac{5\pi}{3} rad$ مرفوض

لأنه يخالف شروط البدء يحقق سرعة موجبة:

$$\overline{v_0} = -\omega_0 X_{max}\sin(-\frac{\pi}{3}) > 0$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني: $\bar{x} = 0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

2- لحظتي المرور الأول والثالث للكرة في موضع التوازن:

$$0 = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = (\frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$t = \frac{1}{12} + \frac{k}{2}$$

المرور الأول $k = 0$ $t = \frac{1}{12}s$

المرور الثالث $k = 2$ $t = \frac{13}{12}s$

3- شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $\bar{x} = +0.1m$:

$$F = |-k\bar{x}| = |-16 \times 0.1| = 1.6nn$$

4- كتلة الكرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow m = \frac{k(T_0)^2}{4\pi^2} = \frac{16\times1}{40} = 0.4kg$$

المسألة العامة [1]:

نشكل هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10N.m^{-1}$ مثبت من إحدى نهايتيه إلى نقطة ثابتة، ويحمل في نهايته الثانية جسماً كتلته $m = 0.1kg$ فإذا علمت أن مبدا الزمن لحظة مرور الجسم في مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب بسرعة $v = -3m.s^{-1}$.

المطلوب:

1- احسب نبض الحركة.

2- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة.

3- احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $3cm$.

الحل

1- حساب نبض الحركة: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10\, rad.s^{-1}$

2- التابع الزمني من الشكل: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نعوض شروط البدء $(t = 0, x = 0)$

$$0 = 0.1\cos(0 + \bar{\varphi})$$

$$\cos\varphi = 0$$

$$\varphi = \left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi = \left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

لكن تابع السرعة $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ نعوض

شروط البدء: $-3 = -10X_{max}\sin(0 + \bar{\varphi})$

نلاحظ أن القيمة $\varphi = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ تحقق شروط البدء أي:

$$X_{max} = 0.3m$$

فيكون التابع الزمني هو: $\bar{x} = 0.3\cos(10t + \frac{\pi}{2})$

3- شدة قوة الإرجاع:

$$F = -k\bar{x}$$

$$F = -10(-0.03)$$
$$F = 0.3\ N$$

المسألة العامة (2):

تهتز نقطة مادية كتلتها $0.5kg$ بحركة توافقية بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، شاقولي وبدور خاص $4s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8cm$ فإذا علمت ان النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحركة بالاتجاه السالب.

المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.

2- عيّن لحظتي المرور الأول والثالث في وضع التوازن.

3- عيّن المواضع التي تكون فيها شدّة محصلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، وحدّد موضعاً تنعد فيه شدة هذه المحصلة.

4- احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغير هذا القيمة باستبدال الكتلة المعلقة؟

5- احسب الكتلة التي تجعل الدور الخاص $1s$.

الحل

1- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = \frac{X_{max}}{2} \end{array}\right\} \frac{X_{max}}{2} = X_{max}cos\varphi$$

$$cos\varphi = \frac{1}{2} \rightarrow (\varphi = \frac{\pi}{3}rad \text{ أو } \varphi\ \frac{5\pi}{3}rad)$$

نختار قيمة φ التي تجعل $v < 0$.

التابع الزمني للسرعة لحظة بدء الزمن:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi})$$

$\varphi = \frac{\pi}{3}rad \rightarrow v < 0$ مقبول يوافق شروط البدء

$\varphi = \frac{5\pi}{3}rad \rightarrow v > 0$ مرفوض يخالف شروط البدء

نعوض الثوابت $X_{max}, \omega_0, \varphi$ في الشكل العام للتابع:

$$\bar{x} = 8\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

2- عند المرور في مركز الاهتزاز $\bar{x} = 0$

$$0 = 8\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi k)$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{\pi}{2}t = \frac{3\pi + 6\pi k - 2\pi}{6}$$

$$t = \frac{1 + 6k}{3}$$

المرور الأول $k = 0 \rightarrow t_1 = \frac{1}{3}s$

المرور الثاني $k = 1 \rightarrow t_1 = \frac{7}{3}s$

المرور الثالث $k = 2 \rightarrow t_1 = \frac{13}{3}s$

3- $F = ma$

عندما $F = F_{max}$ $a = a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$

$$F_{max} = m\omega_0^2 X_{max} = 0.5\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(8\times10^{-2})$$

$$F_{max} = 0.1\ N$$

$F = 0$ معدومة عند المرور بمركز الاهتزاز حيث $x = 0$

4- لا تتغير قيمة ثابت صلابة النابض باستبدال الكتلة المعلقة.

$$k = m\omega_0^2 = 0.5\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{10}{8} = 1.25$$
$$= 4\pi\times10^{-1}\ N.m^{-1}$$

5- $\acute{T}_0 = 2\sqrt{\frac{\acute{m}}{k}}$

بالتربيع $\acute{m} = \frac{(\acute{T}_0)^2 k}{4\pi^2} = \frac{1\times4\pi\times10^{-1}}{4\times10}$

$$\acute{m} = \pi\times10^{-2}kg$$

نهاية الدرس الأول