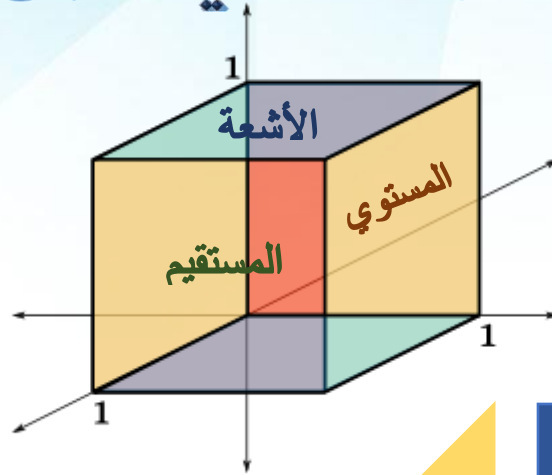


الأسس

رياضيات بكالوريا

منهاج حديث

الهندسة في الفراغ



50 سؤال

جميع طرق الحل

مثال لكل طريقة

الاستاذ مأمون قواف


0944588021



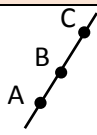
Mamon kawaf

رقم	السؤال	رقم	السؤال
1	كيف نجد مركبات شعاع	26	كيف نثبت توازي مستقيمين
2	كيف نجد طويلة شعاع	27	كيف نثبت توازي مستويين
3	كيف يتم إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة	28	كيف نثبت تعامد مستويين
4	كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة	29	كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي
5	كيف نثبت أن ثلاث نقاط تعين مستوي	30	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين
6	كيف نجد الجداء السلمي لشعاعين	31	كيف ندرس الوضع النسبي لمستويين
7	كيف يتم حساب الجداء السلمي بالمسقط العمودي	32	كيف ندرس وضع مستقيم مع مستوي
8	كيف نثبت تعامد شعاعين	33	كيف ندرس الوضعيات النسبية لثلاث مستويات
9	كيف نجد إحداثيات نقط بمعلم	34	كيف نجد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة
10	كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاث أشعة	35	كيف نجد معادلة الكرة
11	كيف نجد معادلة مستوي	36	كيف نجد مركز و نصف قطر كرة
12	كيف نجد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط	37	كيف نثبت أن مستوي يمس كرة
13	كيف نجد معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة و علم شعاع توجيه له	38	كيف يتم حساب حجم رباعي الوجوه
14	كيف نجد معادلة مستوي يحوي مستقيمين متقاطعين	39	قواعد إيجاد طبيعة مجموعة نقاط
15	كيف نثبت أن أربع نقاط تقع على استقامة واحدة	40	كيف نجد طبيعة مجموعة نقاط
16	كيف نجد تمثيل وسيطي المستقيم	41	كيف نجد إحداثيات مركز ثقل المثلث
17	كيف نجد تمثيل وسيطين لمستقيم مار من نقطتين	42	كيف نجد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة
18	كيف نجد شعاع توجيه مستقيم ناتج من تقاطع مستويين	43	كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة لمعلومية مركز الأبعاد
19	معادلة مستويات خاصة	44	كيف نحدد نقطة M أين تقع
20	كيف نجد إحداثيات نقطة في مستوي	45	كيف نجد أمثال α, β لتكون M مركز الأبعاد
21	كيف نجد إحداثيات نقطة من مستقيم	46	كيف نكتب علاقة شعاعية لارتباط ثلاث أشعة
22	كيف نعین المسقط العمودي لنقطة على مستقيم	47	كيف نثبت أن النقطة K مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط
23	كيف نعین المسقط العمودي لنقطة على مستوي	48	كيف نجد معادلة مستوي Q عمودي على مستوي P ومار من نقطتين
24	كيف نجد بعد نقطة عن مستوي	49	كيف نثبت أن ثلاث نقاط تعين مستوي علم معادلته
25	كيف نجد بعد نقطة عن مستقيم	50	كيف نثبت أن مستقيم يقطع كرة في نقطتين

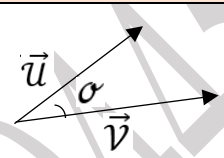
كيف نجد مركبات شعاع \overrightarrow{AB}		1
$\overrightarrow{AB} = (X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A)$		الطريقة
B (0, 3, -1) , A (1, 2, 3)		مثال
$\overrightarrow{AB} (0 - 1, 3 - 2, -1 - 3)$		
$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -4)$		

كيف نجد طول شعاع		2
 $\ \overrightarrow{AB}\ = AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$	و اذا كان	الطريقة
	فان $\vec{u} (X, Y, Z)$	
	$\ \vec{u}\ = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$	
$\vec{u} = (3, 0, 2)$ $\ \vec{u}\ = \sqrt{3^2 + 0^2 + 2^2}$ $= 5$	A (1, +1, 0) B (1, -3, 2) $\ \overrightarrow{AB}\ = AB = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-3 - 1)^2 + (2 - 0)^2}$ $= \sqrt{0^2 + 16 + 4}$ $= \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$	مثال

كيف يتم اثبات توازي شعاعين لأي مرتبطين خطياً		3
$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$ شرط التوازي	ليكن $\vec{u} (X_1, Y_1, Z_1)$ $\vec{v} (X_2, Y_2, Z_2)$	الطريقة
$\frac{1}{2} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$ - محقق إذا $\vec{v} // \vec{u}$	الشرط $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ $\vec{v} (2, -6, -4)$	مثال
أي الشعاعين مرتبطين خطياً		

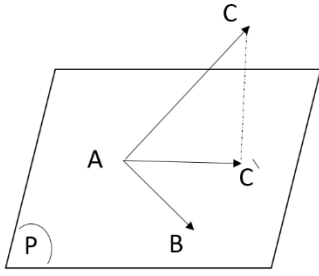
4	كيف نثبت ثلاث نقاط A , B , C على استقامة واحدة
الطريقة	 <p>نثبت أن أي شعاعين متشكلين من النقاط الثلاث مرتبطين خطياً</p>
مثال	<p>فالشعاعين مرتبطين خطياً و النقاط A , B , C على استقامة واحدة</p> $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} (-1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} (2, 2, -2) \end{array} \right.$ <p>نلاحظ أن مركباتهما متناسبة</p> $\frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$

5	كيف نثبت ثلاث نقاط تعين مستوي
الطريقة	<p>نثبت أنها لا تقع على استقامة واحدة كالسؤال الرابع (4)</p> <p>أثبت أن النقاط A (1,2,3) و B (0,1,4) و C (-1,-3,2) تعين مستوي</p>
مثال	<p>الحل : نجد</p> $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} (-1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} (-2, -5, -1) \end{array} \right.$ <p>نلاحظ أن $\frac{-1}{-2} = \frac{-1}{-5}$</p> <p>فالشعاعين غير مرتبطين خطياً فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة و النقاط تعين مستوي</p>

6	كيف نجد الجداء السلمي لشعاعين
الطريقة	 $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ $= \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ \cdot \cos \sigma$
مثال	$\sigma = \frac{\pi}{4} \quad \ \vec{v}\ = 2 \quad \ \vec{u}\ = 3$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{4}$ $= 6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2}$
مثال	<p>إذا كان $\vec{u}(2,3,1)$ $\vec{v}(-1,0,5)$ فإن</p> $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 + 0 \times 3 + 5 \times 1 = 3$

كيف يتم حساب الجداء السلمي بالمسقط العمودي للشعاع

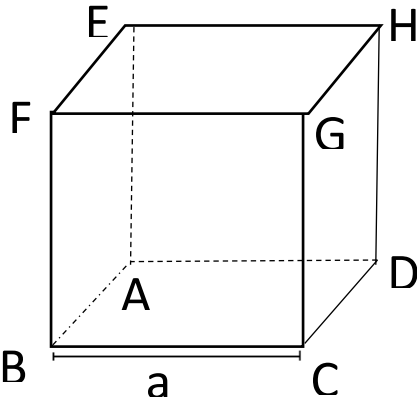
7



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$$

حيث C' المسقط العمودي لـ C على
المستوي (P)

الطريقة



مكعب طول حرفه a

(1) احسب الجداء السلمي لـ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GE}$

(2) احسب الجداء السلمي لـ $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GC}$

الحل :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GE} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

$$= -a \cdot a = -a^2$$

حيث : \overrightarrow{CA} مسقط GE على المستوي .

\overrightarrow{BA} مسقط CA على AB .

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{GC} = 0 \quad (2)$$

لأن الشعاعين \overrightarrow{GC} و \overrightarrow{DC} متعامدان .

مثال

كيف نثبت تعامد شعاعين

8

نثبت أن الجداء السلمي لهما صفراً

الطريقة

أثبت أن الشعاعين $\vec{u} \cdot \vec{v}$ متعامدين

$$\text{حيث } \vec{u} (1, 2, -5) \quad \vec{v} (1, 2, 1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times -5$$

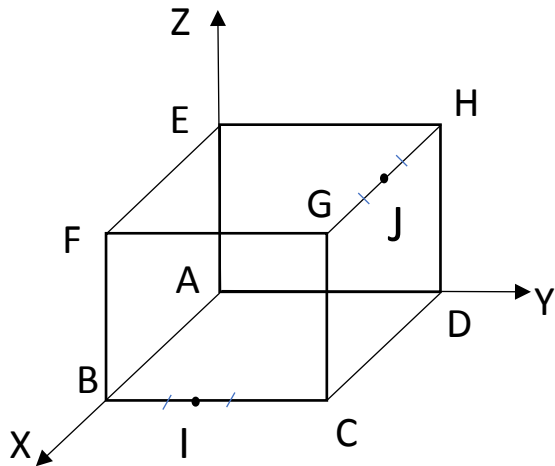
$$= 1 + 4 - 5 = 0$$

إذا \vec{u} و \vec{v} متعامدين

مثال

إيجاد إحداثيات النقاط

9



في معلم $(\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

- $A(0, 0, 0)$
- $B(a, 0, 0)$
- $D(0, a, 0)$
- $C(a, a, 0)$
- $F(a, 0, a)$
- $H(0, a, a)$
- $G(a, a, a)$

الطريقة

إذا كان المكعب طول حرفه 1 .

$$A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), E(0,0,1), E(0,0,1), C(1,1,0)$$

$$I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), J\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

مثال

إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

10

(1) نثبت أن \vec{u} و \vec{v} (مثلاً) غير مرتبطين .

(2) نثبت أنه يوجد عددين حقيقيين a, b يحققان :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

الطريقة

لتكن الأشعة $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right), \vec{v}\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right), \vec{w}\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$ أثبت أنها مرتبطة خطياً .

الحل : نلاحظ أن $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \neq \frac{1}{+1}$ فالشعاعين \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطياً .

الآن لنثبت وجود عددين حقيقيين a, b يحققان $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$$\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) = a\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) + b\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)$$

مثال

وفيه

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{الأشعة} \\ \text{مرتبطة} \\ \text{خطياً} \end{array} \right\} \text{ وبالتالي } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 0 = a + b \\ -1 = a - b \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

11	كيف نجد معادلة المستوي
الطريقة	<p>اذا كان</p> <ul style="list-style-type: none"> - معلوم شعاع الناظم للمستوي P $\vec{n}(a, b, c)$ - نقطة يمر منها المستوي (x_0, y_0, z_0) - تكون معادلة المستوي $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
مثال	<p>اكتب معادلة المستوي P المار من النقطة $A(1, 3, -3)$ و شعاع الناظم له $\vec{n}(2, 3, 5)$</p> <p>الحل: المعادلة هي $2(x - 1) + 3(y - 3) + 5(z + 2) = 0$</p> $2x + 3y + 5z - 1 = 0$

12	إيجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط A, B, C معلومة
الطريقة الأولى	<p>1- نثبت أن \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطياً في تعيين مستوي .</p> <p>2- حسب تعريف المستوي هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق</p> $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$
مثال	<p>أوجد معادلة المستوي P المار من النقاط $C(4, 3, 5)$, $B(10, 4, 3)$, $A(1, 5, 4)$</p> <p>الحل نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AB}(9, -1, -1)$, $\vec{AC}(3, -2, 1)$ غير مرتبطين خطياً</p> <p>نضع $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$</p>
	<p>نعوض في (1)</p> $\begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 5 \\ z - 4 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9a + 3b \\ -a - 2b \\ -a + b \end{bmatrix}$ <p>1- $x - 1 = 9a + 3b \dots \dots$</p> <p>2- $y - 5 = -a - 2b \dots \dots$</p> <p>3- $z - 4 = -a + b \dots \dots$</p> <p>نطرح 3 من 2 نجد : $y - z - 1 = -3b$</p> $b = \frac{y+z+1}{3} \quad a = \frac{-y-2z+13}{3}$ <p>ومنه معادلة المستوي</p> $x + 4y + 5z - 41 = 0$

لايجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط A, B, C

1- نثبت أن \vec{AB} , \vec{AC} غير مرتبطين خطياً .

2- نكتب معادلة المستوي :

$$\vec{n}(a, b, c) \text{ ناظمة } ax + by + cz + d = 0$$

و الناظم عمودي على شعاعي توجيه \vec{AB}, \vec{AC}

$$3- \text{ نضع } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

4- نحل معادلتين بثلاث مجاهيل و نجد a, b, c

5- ثم نحسب d باعتبار المستوي مار من A مثلاً .

الطريقة

$$A(1,5,4) \quad B(10,4,3) \quad C(4,3,5)$$

الحل :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{AB} (9, -1, -1) \\ \vec{BC} (3, -2, 1) \end{array} \right. \text{ غير مرتبطين خطياً}$$

بفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم المستوي (ABC)

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow 9a - b - c = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$\text{نفرض } C=1 \text{ ومنه } \begin{cases} 9a - b = +1 \\ 3a - 2b = 1 \end{cases} \text{ بحل المعادلتين نجد } a = \frac{1}{5}, b = \frac{4}{5}$$

مثال

ومنه الناظم $\vec{n}(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1)$ و بالتالي :

$$\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y + z + d = 0$$

وبما أن المستوي (ABC) مار من النقطة A(1,5,4) نعوض :

$$d = \frac{41}{5} \text{ ومنه } \frac{1}{5}(1) + \frac{4}{5}(5) + 1(4) + d = 0$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y + z - \frac{41}{5} = 0 \text{ وبالتالي :}$$

$$\text{إذاً معادلة المستوي : } X + 4y + 5z - 41 = 0$$

لايجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط .

1- نكتب معادلة المستوي $ax + by + cz + d = 0$

2- نعوض إحداثيات النقاط A, B, C في المعادلة.

3- نحصل على ثلاث معادلات بأربع مجاهيل .

4- نضع $d=1$ مثلاً و نحل ثلاث معادلات و نجد a, b, c .

الطريقة

أوجد معادلة المستوي (ABC)

$A(-1, 0, 1), B(1, 2, -1), C(0, 3, 1)$

الحل :

المعادلة $ax + by + cz + d = 0$

$A(-1, 0, 1) : -ax + c + d = 0$

$B(1, 2, -1) : a + 2b - c + d = 0$

$C(0, 3, 1) : 3b + c + d = 0$

نضع $d=1$:

1) $-a + c + 1 = 0$

2) $a + 2b - c + 1 = 0$

3) $3b + c + 1 = 0$

بجمع 1 و 2 :

$2b + 2 = 0 \quad b = -1$

نعوض في 3 فنجد : $C = 2$

نعوض في 1 فنجد : $a = 3$

تتكون معادلة المستوي :

$3x - y + 2z + 1 = 0$

مثال

1- بفرض شعاع الناظم للمستوي $\vec{n}(a, b, c)$

2- نضع : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

و نحسب a, b, c

الطريقة

3- نكتب معادلة المستوي المار من A و ناظمه $\vec{n}(a, b, c)$ كما في السؤال 11

أوجد معادلة المستوي P المار من النقطة $A(1,0,1)$

والشعاعين $\vec{u}(2,1,1)$ و $\vec{v}(1,-1,-2)$ شعاعي توجيه له .

الحل : بفرض الناظم $\vec{n}(a, b, c)$

نضع $c = 1$ نجد :
$$\begin{cases} n \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow 2a + b + c = 0 \\ n \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow a - b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$2a + b + 1 = 0$$

$$a - b + 2 = 0$$

$$3a + 3 = 0 \text{ ومنه } a = -1 \quad \text{ومنه } b = 3$$

فيكون الناظم $\vec{n}(1,3,1)$ و بالتالي معادلة المستوي المار من النقطة A

و ناظمه \vec{n} هي :

$$1(x - 1) + 3(y - 0) + (z + 1) = 0$$

$$P : x + 3y + z - 2 = 0$$

مثال

1- تعيين نقطة التقاطع A .

2- نجد \vec{u}, \vec{v} شعاعين توجيه هذين المستقيمين .

3- تعيين الناظم $\vec{n}(a, b, c)$ للمستوي الذي يحققه :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

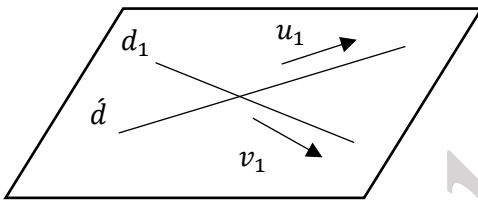
4- نكتب معادلة المستوي المار من A و \vec{n} ناظمه .

الطريقة

ليكن المستقيمين

$$d \begin{cases} x = t - 4 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases}$$

$$t \in R \hat{d} \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

المتقاطعة في $A(0,1,2)$

الحل :

نجد $\vec{u}(1, -1, 1)$ شعاع توجيه d $\vec{v}(3, 2, -1)$ شعاع توجيه \hat{d} وليكن الناظم $\vec{n}(a, b, c)$ للمستوي P الذي يحوي d, \hat{d} فهو يحقق :

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

ونكمل كما في السؤال 13

مثال

كيف نثبت أن أربع نقاط تقع في مستوي واحد A,B,C,D

الطريقة

- طريقة 1- نثبت أن ثلاث منها تعيين مستوي كما سبق بالسؤال 5 .
ثم نثبت أن النقطة الرابعة تنتمي لهذا المستوي .
طريقة 2- نثبت أن إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة الباقية .
طريقة 3- نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$, مرتبطة خطياً كما في السؤال 10

لتكن النقاط $A(1,5,4)$ $B(10,4,3)$ $C(4,3,2)$ $D(0,4,5)$ أثبت أنها تقع في مستو واحد .

الحل :

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
غير مرتبطين خطياً
لأن مركباتهما غير متناسبة
إذاً النقاط A, B, C مستو تعيين

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} (9, -1, -1) \\ \overrightarrow{AC} (3, -2, 1) \\ \overrightarrow{AD} (-1, -1, 1) \end{array} \right. \quad \text{نجد :}$$

تكون النقطة D من المستوي (ABC) اذا وفقط اذا وجد عدنان حقيقيان a,b يحققان

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} (-1, -1, 1) &= a(9, -1, -1) + b(3, -2, 1) \\ &= 9a + 3b, -a - 2b, -a + b \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9a + 3b = -1 \quad (1) \\ -a - 2b = -1 \quad (2) \\ -a + b = 1 \quad (3) \end{array} \right. \quad \text{ومنه :}$$

من المعادلتين 2 و 3 نجد أن :

$$a = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$$

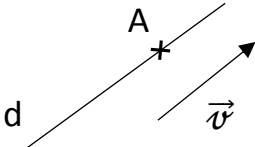
نعوضها في المعادلة 1 فنجد : $9(-\frac{1}{3}) + 3(\frac{2}{3}) = -1$ أنها محققة .

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

فالأشعة : $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً .

فالنقاط A,B,C,D تقع في مستو واحد .

مثال

إيجاد تمثيل وسيطي لمستقيم مار من نقطة و معلوم شعاع توجيه له .	16
<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$</p> <p>شعاع التوجيه $\vec{v}(a, b, c)$ يوازي المستقيم d</p> <p>معادلة المستقيم d:</p> $\begin{cases} X = at + x_0 \\ Y = bt + y_0 \\ Z = ct + z_0 \end{cases}$ <p>$t \in R$</p> </div> </div> <p style="text-align: right;">الطريقة</p>	
<p>اكتب تمثيل وسيطي لمستقيم d مار من النقطة $A(1,2,3)$ و الشعاع $u(5,3,-2)$ توجيه له .</p> <p>الحل : نعوض مباشر بالمعادلات :</p> $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$ <p>$R \in t$</p> <p style="text-align: right;">مثال</p>	

إيجاد تمثيل وسيطي لمستقيم (AB)	17
<ul style="list-style-type: none"> • نختار نقطة من أحد النقطتين A أو B . • نجد شعاع التوجيه $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ • نعوض بالمعادلات الوسيطة . 	الطريقة
<p>اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) حيث $A(1,2,3)$ و $B(0,1,4)$</p> <p>نختار النقطة $A(1,2,3)$</p> <p>نجد شعاع التوجيه $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 2, 4 - 3) = (-1, -1, 1)$</p> <p>ونكتب المعادلات $t \in R$</p> $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">مثال</p>	

كيف نجد شعاع توجيه المستقيم d الناتج من تقاطع مستويين p و Q

1- نجد \vec{n}_1 , \vec{n}_2 شعاعين ناظمي P و Q على الترتيب :

2- بفرض $\vec{U}(a, b, c)$ شعاع توجيه المستقيم

$$\vec{U} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\vec{U} \cdot \vec{n}_2 = 0$$

ونعين a , b , c كما سبق بالسؤال (12)

الطريقة

ليكن المستويين :

$$P: x + 2y - 3z + 1 = 0$$

$$Q: x + y + z + 1 = 0$$

يتقاطع المستويين وفق مستقيم Δ أوجد شعاع توجيه له .

الحل :

$$\text{أن نلاحظ } \begin{cases} \vec{n}_1(1, 2, -3) \text{ ناظم } P \\ \vec{n}_2(1, 1, 1) \text{ ناظم } Q \end{cases}$$

n_1, n_2 غير متوازيين

وليكن $\vec{U}(a, b, c)$ شعاع توجيه Δ

$$\vec{U} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\vec{U} \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$a + 2b - 3c = 0$$

ومنه :

$$a + b + c = 0$$

$$\text{نضع } c=1 \leftarrow a + 2b = 3$$

$$a + b = -1$$

لحل هاتين المعادلتين نجد أن :

$$a = 5, b = 4$$

وبالتالي :

$$\vec{U}(4, -5, 1) \text{ شعاع توجيه } \Delta$$

مثال

19	مستويات خاصة $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
الطريقة	<ul style="list-style-type: none"> • معادلة المستوي (o, \vec{i}, \vec{j}) هي $Z = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> • معادلة المستوي (o, \vec{i}, \vec{k}) هي $y = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> • معادلة المستوي (o, \vec{j}, \vec{k}) هي $x = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> • معادلة مستوي يوازي (o, \vec{i}, \vec{j}) هي $Z = a$ • معادلة مستوي يوازي (o, \vec{i}, \vec{k}) هي $y = a$ • معادلة مستوي يوازي (o, \vec{j}, \vec{k}) هي $x = a$ <p>a ثابت</p>
	<ul style="list-style-type: none"> • معادلة مستوي يوازي ox : $by + cz + d = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> • معادلة مستوي يوازي oy : $ax + cz + d = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> • معادلة مستوي يوازي oz : $ax + by + d = 0$

20	كيف نجد احداثيات نقطة من مستوي معلومة معادلته .
الطريقة	<ul style="list-style-type: none"> • نعطي قيمتين لمتغيرين ونجد قيمة المتغير الثالث . • و اذا كانت المعادلة فيها فقط تنغير نجد قيمة هذا المتغير و يكون قيمة المتغير الثاني و الثالث كفيي . • اذا كانت المعادلة فيها متغيرين نعطي لإحدهما قيمة و نجد الآخر و يكون قيمة الثالث كفيي .
مثال	<p>أوجد إحداثيات نقطة من المستوي P بالحالات التالية :</p> <p>1- معادلة P : $3x + y + z + 2 = 0$ نعطي $x = 0, y = 2$ فنجد $z = -4$ فتكون النقطة $(0, 2, -4)$.</p> <p>2- معادلة P : $x + y - 2 = 0$ نعطي $x = 3$ فنجد $y = -1$ و نختار $z = 1$ فتكون النقطة $(3, -1, 1)$</p> <p>3- معادلة P : $3y - 4 = 0$ نجد $y = 2$ ونختار $x = 1$ و $z = 3$ فتكون النقطة $(1, 2, 3)$.</p>

21	كيف نجد إحداثيات نقطة من مستقيم علم تمثيل وسيطي له .
الطريقة	<p>• نعطي للوسيط t أي قيمة من R . ونجد x, y, z وإذا كان أحدهم ثابت نأخذه كما هو</p>
مثال	<p>أوجد إحداثيات نقطة من المستقيم d .</p> $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 4 \\ z = 3 \end{cases}$ <p>نعطي لـ t قيمة $t=1$ فنجد أن : $x = 1$ $y = 3$ $z = 3$</p> <p>فتكون النقطة (1 ، 3 ، 3)</p>

22	كيف نعين المسقط العمودي لنقطة A على مستقيم .
الطريقة	<p>(1) نكتب معادلة المستوي P الذي يمر من A وعمودي على d أي شعاع توجيه d = ناظم لـ Δ . (2) نعين نقطة تقاطع المستوي P و المستقيم d ولتكن H . إن H هي المسقط العمودي لـ A على d .</p>
مثال	<p>ليكن المستقيم d : $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ أوجد المسقط القائم لـ $A(2,0,1)$ على d . الحل : $\vec{u}(1,2,-1)$ شعاع توجيه لـ d . • نكتب معادلة المستوي المار من $A(2,0,1)$ وناظمه $\vec{u}(1,2,-1)$ $1(x - 2) + 2(y - 0) - 1(z - 1) = 0$ $x + 2y - z - 1 = 0$ • بالحل المشترك لمعادلتني d و P نجد أن : $t + 2(2t + 1) + t - 1 = 0$</p> $t + 4t + 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow 5t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{5}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases}$ <p>ومنه تكون H المسقط القائم لـ Δ على d $H(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$</p>

كيف نعين المسقط العمودي لنقطة A على مستوي P .

الطريقة

- 1- نكتب معادلة المستقيم d و الذي يمر من A .
- 2- شعاع توجيهه هو ناظم P .
- 3- نعين نقطة تقاطع P و d و لتكن H إن H هي المسقط العمودي لـ A على d

أوجد إحداثيات المسقط العمودي للنقطة $A(2, -1, 1)$ على المستوي $P: x + y + z = 0$

الحل :

نجد $\vec{n}(1,1,1)$ ناظم P وهو شعاع توجيه لـ d

إذا معادلة d :

$$x = t + 2$$

$$y = t - 1 \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = t + 1$$

نعوض تمثيل d بمعادلة P : فنجد

$$t + 2 + t - 1 + t + 1 = 0$$

$$3t = -2 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

ومنه نعوض في معادلة d فنجد :

$$x = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$$

$$z = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

إذاً إحداثيات المسقط

$$H\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

مثال

طريقة 1: تعين المسقط العمودي H للنقطة Δ على المستوي P ثم نجد المسافة ΔH فتكون هي البعد عن المستوي P .

طريقة 2: حسب قانون بعد نقطة Δ عن المستوي P :

$$d(\Delta, p) = \frac{|a + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

الطريقة

احسب بعد النقطة $A(2,1,1)$ عن المستوي :

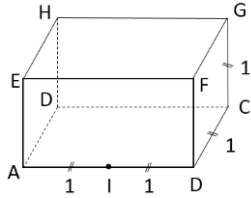
$$P: 2x - 2y - z - 2 = 0$$

الحل :

$$d(A, p) = \frac{|4-1-4-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}$$

مثال

0944588021



مستطيلات متوازي مستطيلات
 فيه $BC = GC = 1$ و $AB = 2$
 ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$
 احسب بعد G عن المستقيم (IH) .

25

طريقة أولى :

بفرض M المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (IH) وبالتالي $\vec{GM} \cdot \vec{IH} = 0$ (*)

وبما أن M تقع على (IH) فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتفلتين :

$M(1-t, 1-t)$ و (H, t) حيث t عدد حقيقي و بالتالي :

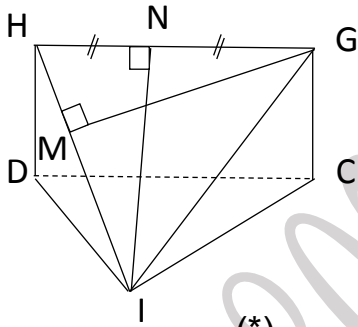
أصبح لدينا $I(-1, 1, 1)$ و $H(-1-t, t-1, t-1)$ ومنه $\vec{GM}(-1-t, t-1, t-1)$
 وحسب (*) : $1+t+t-1+t-1=0$ ومنه $t = \frac{1}{3}$

إذن $M(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ و بالتالي $\vec{GM}(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

أخيراً : $dist(G, (IH)) = \|\vec{GM}\| = \frac{1}{3} \sqrt{16+4+4} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

الطريقة

طريقة ثانية :



بفرض M المسقط القائم للنقطة G على (IH)

و بفرض N منتصف $[GH]$ وبالتالي $N(1, 1, 1)$

لدينا $\vec{GH}(-2, 0, 0)$ و $\vec{IN}(0, 1, 1)$

و بالتالي : $\vec{IN} \cdot \vec{GH} = 0$ و منه $\vec{IN} \perp \vec{GH}$

إذا مساحة المثلث GIH : $S = \frac{1}{2} IH \cdot GM = \frac{1}{2} GM \cdot IN$ (*)

لدينا $\vec{IH}(-1, 1, 1)$ و بالتالي $\|\vec{IH}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

و لدينا $\|\vec{IN}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

نعوض في * فنجد $GM \sqrt{3} = 2 \sqrt{2}$

ومنه البعد المطلوب $GM = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

كيف نثبت توازي مستقيمين	26
<p>الطريقة</p> <p>نثبت أن شعاعي توجيههما متوازيين أي مرتبطين خطياً .</p>	
<p>مثال</p> <p>أثبت أن المستقيمين d و d_1 المعرفين كما يلي :</p> $d \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 6t - 1 \\ z = -4t + 1 \end{cases} \quad d_1 \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$ <p>الحل : لدينا شعاع توجيه d_1 : $\vec{u} (1,3, -2)$ و شعاع توجيه d : $\vec{v} (2,6, -4)$ نلاحظ أن مركباتها متناسبة أي الشعاعين مرتبطين خطياً فالمستقيمان متوازيان .</p>	

كيف نثبت توازي مستويين	27
<p>الطريقة</p> <p>نثبت أن شعاعي ناظميها متوازيان</p>	
<p>مثال</p> <p>بين أن المستويين P و Q متوازيين</p> $P: -x - 2y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$ $Q: 2x + 4y - z = 0$ <p>الحل : لدينا $\vec{n} (2,4, -1)$ ناظم Q $\vec{n} (-1, -2, \frac{1}{2})$ ناظم P</p> <p>نلاحظ مركباتها متناسبة $\frac{2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$ فالمستويان متوازيان .</p>	

كيف نثبت تعامد مستويين	28
الطريقة	نثبت ناظميها متعامدين
<p>أثبت أن المستويين :</p> $P: x + 2y + 3z + 1 = 0$ $Q: x + y + z + 1 = 0$ <p>متعامدين .</p> <p>الحل : لدينا $\vec{n}_1(1,2,-3)$ ناظم P $\vec{n}_2(1,1,1)$ ناظم Q و نلاحظ أن جداءهما السلمي يساوي الصفر</p> $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 1 + 2 \times 1 - 3 \times 1 = 0$ <p>ومنه P و Q متعامدان .</p>	<p>مثال</p>

كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي .	29
الطريقة	نثبت أن شعاع توجيه المستقيم يعامد شعاع ناظم المستوي .
<p>ليكن المستقيم $d: \begin{cases} x = -4t + t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$ و ليكن المستوي P معادلته</p> $p: x + 2y - 3z + 1 = 0$	<p>مثال</p>
<p>أثبت أن d و P متوازيان</p> <p>الحل : لدينا $\vec{n}(1,2,-3)$ شعاع ناظم P $\vec{v}(1,1,1)$ شعاع توجيه d نلاحظ أن جداءهما السلمي يساوي صفرأ .</p> <p>أي $\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 2 \times 1 - 3 \times 1 = 0$ إذاً $\vec{n} \perp \vec{v}$ ومنه P و d متوازيان .</p>	<p>مثال</p>

- 1- نجد شعاعي توجيه المستقيمين
- 2- أ) إذا كان متوازيان كان المستقيمان متوازيان .
ب) إذا لم يكونا متوازيان فهما : إما متقاطعين
أو ليسا في مستوي واحد
ج) لمعرفة الوضع : نساوي المركبات لهذين المستقيمين مع بعضهما نحصل على ثلاث معادلات بمجهولين s و t :
- نختار معادلتين ونحلها و نعين المجهولين ثم نعوض بالثالثة فإذا تحققت فهما متقاطعين و إذا لم تتحقق فهما ليسا في مستوي واحد .

الطريقة

ليكن المستقيمين :

$$d \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad d \begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases}$$

ادرس الوضع النسبي لهما .

الحل : لدينا شعاع توجيه d : $\vec{u}(2, -1, 1)$

مركباتهما غير متناسبة

 $\vec{v}(3, 2, -1) : d$

إذاً المستقيمان غير متوازيان

لذا نضع : 1) $3s = 2t - 4$ 2) $2s + 1 = -t + 3$ 3) $-s + 2 = t$ نحل 2 و 3 نجد أن بالجمع : $s = 0$ و منه نعوض في 3 فنجد $t = 2$ نعوض بـ 1 $0 = 2(2) - 4$ $0 = 0$ محققة إذاً للمعادلات حل فالمستقيمان متقاطعان و نقطةتقاطعهما : $(0, 1, 2)$

مثال

31	كيف ندرس الوضع النسبي لمستويين .
الطريقة	(1) نعين شعاعي ناظمي المستويين \vec{n}_1, \vec{n}_2 (2) إذا كان \vec{n}_1, \vec{n}_2 مرتبطين خطياً كانا المستويين متوازيين . (3) إذا كان \vec{n}_1, \vec{n}_2 غير مرتبطين خطياً كانا المستويين متقاطعين .
مثال	السؤال 26

32	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم مع مستوي .
الطريقة	(1) نعوض معادلة المستقيم d بمعادلة المستوي P ينتج معادلة بمجهول واحد t . (2) نحل هذه المعادلة ونميز الحالات : (أ) إذا كان لها حل وحيد ($\alpha t = \beta$) كان المستقيم قاطع للمستوي . و نجد إحداثيات نقطة التقاطع بتعويض قيمة t بمعادلة المستقيم . (ب) إذا كان للمعادلة عدد غير منته من الحلول ($0t = 0$) كان المستقيم محتوي بالمستوي . (ج) إذا كان ليس للمعادلة حل ($0t = b$) كان المستقيم يوازي المستوي .
مثال	ادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع المستوي P : $P : x - y + z = 1 \quad d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -3t + 1 \end{cases}$ الحل نعوض معادلة d بمعادلة P فنجد : $2t - 1 - t - 3t + 1 = 1$ و منه نجد $t = -\frac{1}{2}$ (حل وحيد) إذاً المستقيم d قاطع للمستوي P .

- (1) نحل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل .
 (2) إذا كان لها حل وحيد كانت المستقيمات تشترك بنقطة واحدة .
 (3) إذا كان لها عدد غير منته من الحلول كانت المستويات تشترك بمستقيم .
 (4) إذا لم تكن لها أي حل فإنها لا تشترك معاً بأي نقطة .
 ملاحظة : يتم حل جملة ثلاث معادلات بطريقة غاوس أو أي طريقة أخرى .

الطريقة

ادرس الوضع النسبي للمستويات الثلاث :

$$x - y + z = 1 \quad \dots L_1$$

$$2x + 13y - 7z = -1 \quad \dots L_2$$

$$5x + y + z = -5 \quad \dots L_3$$

الحل :

نقوم بالاجرائين :

$$x - y + z = 1$$

$$L_2 - 5L_1 \rightarrow \hat{L}_2$$

$$3y - 2z = -5$$

$$L_3 - 2L_1 \rightarrow \hat{L}_3$$

$$15y - 9z = -3$$

نقوم بالإجراء :

$$x - y + z = 1$$

$$\hat{L}_3 - 5\hat{L}_2 \rightarrow \hat{\hat{L}}_3$$

$$3y - 2z = -5$$

$$z = 22$$

ومنه نحسب $y = 13$:نعوض بالأولى فتكون $x = -8$ و بالتالي المستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة هي $(-8, 13, 22)$

مثال

34	كيف نجد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$
الطريقة	<p>(1) نجد إحداثيات I منتصف $[AB]$</p> <p>(2) نجد $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ ناظم المستوي .</p> <p>(3) نكتب معادلة المستوي كما بالسؤال (11) .</p>
مثال	<p>أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(1,2,3)$ و $B(3,-2,1)$</p> <p>الحل :</p> <ul style="list-style-type: none"> • نجد إحداثيات I منتصف $[AB]$ $I(2, 0, 2)$ <ul style="list-style-type: none"> • نجد مركبات شعاع الناظم $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (3 - 1, -2 - 2, 1 - 3)$ <ul style="list-style-type: none"> • نكتب المعادلة : $2(x - 2) - 4(y - 0) - 2(z - 2) = 0$ $2x - 4y - 2z = 0$

35	كيف نجد معادلة كرة عُلِمَ مركزها و نصف قطرها .
الطريقة	<p>إذا كان مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ و نصف قطرها r</p> <p>نبدل بالمعادلة $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$</p>
مثال	<p>اكتب معادلة كرة مركزها $(2, 1, -2)$ و نصف قطرها .</p> <p>الحل :</p> <p>المعادلة : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 25$</p>

36	كيف نجد مركز ونصف قطر كرة عُلمت معادلتها .
الطريقة	<p>- نتمم إلى مربع كامل .</p> <p>- حتى تكتب المعادلة بالشكل :</p> $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ <p>- ثم نستنتج المركز (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها r .</p>
مثال	<p>أوجد مركز نصف قطر الكرة التي معادلتها :</p> $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$ <p>الحل : نتمم إلى مربع كامل :</p> $x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 4z + 4 - 4 - 3 = 0$ $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ <p>ومنه المركز $(1, -1, 2)$ ونصف القطر $r=3$</p>

37	كيف نثبت أن مستوي يمس كرة .
الطريقة	<p>- نجد بعد مركز الدائرة عن المستوي .</p> <p>- فإذا كان البعد = نصف قطر الكرة فكان المستوي يمس الكرة .</p>
مثال	<p>أثبت أن المستوي P معادلته :</p> $x - 2y + 3z = 5$ <p>مماس للكرة التي معادلتها :</p> $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = \frac{4}{14}$ <p>الحل : نجد أن مركز الكرة $A(2, -2, 3)$ $r = \frac{2}{\sqrt{14}}$</p> <p>نجد بعد المركز عن المستوي :</p> $d(\Delta, P) = \frac{ 2 - 4 + 9 - 5 }{1 + 4 + 9} = \frac{2}{\sqrt{14}} = r$ <p>← المستوي يمس الكرة</p>

- القانون : حجم رباعي الوجوه = $\frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة \times الارتفاع

$$v = \frac{1}{3} s . h$$

القاعدة قد تكون مثلث أو مربع أو

الارتفاع هو غالباً بعد رأس الرباعي عن مستوي القاعدة .

الطريقة

لتكن النقاط $A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$ $C(3,1,-2)$ $D(-4,2,1)$

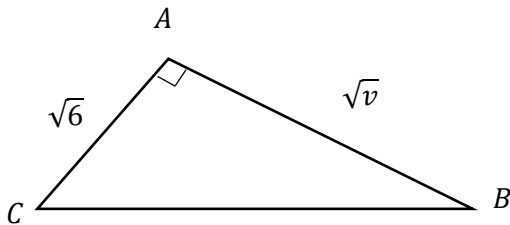
(1) أثبت أن المثلث ABC قائم و احسب مساحته .

(2) برض معادلة المستوي (ABC) : $2x - 3y + z - 1 = 0$

احسب بعد النقطة D عن (ABC) .

(3) احسب حجم رباعي الوجوه DABC

الحل :



(2) بعد D عن المستوي (ABC)

$$d = \frac{|-8 - 6 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \sqrt{14}$$

(3) حساب الحجم :

$$v = \frac{1}{3} s . h = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{14} . \sqrt{14} = 7$$

(1) نجد

$$\vec{AB}(1,2,4)$$

$$\vec{AC}(2,1,-1)$$

نلاحظ أن جدائهما السلمي :

$$\vec{AB} . \vec{AC} = 2 + 2 - 4 = 0$$

فهما متعامدين فالمثلث ABC قائم في A

لحساب مساحته :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$S = \frac{\sqrt{21} \times \sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{14}$$

مثال

العلاقة	طبيعة مجموعة النقاط M
$MA = r = \text{ثابت}$	هي كرة مركزها A ونصف قطرها r
$MA=MB$	هي المستوي المحوري للقطعة [AB]
$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$	هي كرة قطرها [AB]
$\vec{MA} \cdot \vec{BC} = 0$	هي مستوي شعاع ناظمه \vec{BC} و يمر من النقطة A .

ملاحظات :

(1) مهما تكن النقطة M من الفراغ فإن :

$$(**) \quad \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \delta \vec{MC} = (\alpha + \beta + \delta) \vec{MG}$$

حيث G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المنقلة

$$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \delta)$$

وحيث $\alpha + \beta + \delta \neq 0$ (2) إذا كان $\alpha + \beta + \delta = 0$ فإن الشعاع :

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \delta \vec{MC}$$

شعاع ثابت مستقل عن M .

$$(*) \quad \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \delta \vec{MC} = 3 \vec{MG} \quad (3)$$

حيث G مركز ثقل المثلث ABC .

لتكن $G(2,1,0)$ مركز ثقل المثلث ABC و $G\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ مركز الأبعاد
المتناسبة للجملة : $\{(A, 3), (B, -1), (C, 1)\}$

مثال :

عين مجموعة النقاط M التي تحقق :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6$$

الحل : بما أن G مركز ثقل المثلث ABC و حسب العلاقة (***) بالسؤال 39 فإن :
 $\|\vec{MG}\| = 6$ إذن $3MG = 6$ ومنه $MG = 2$
إن مجموعة النقاط M هي كرة مركزها G و نصف قطرها 2 .

حالة 1

الحل بما أن G هي مركز ثقل المثلث ABC و G هي مركز الأبعاد المتناسبة حسب
(*) فإن $\|\vec{3MG}\| = \|\vec{3MG}\|$
 $MG = \hat{MG}$
إذن مجموعة النقاط M التي هي المستوي المحوري للقطعة $[GG]$

حالة 2

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{2MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$$

الحل :

بما أن G مركز ثقل المثلث ABC فإن :

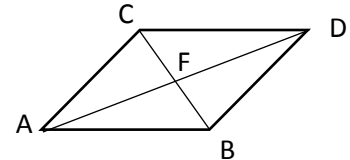
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (1 + 1 + 1)\vec{MG} = 3\vec{MG}$$

وبما أن مجموعة الأمثال في الطرف الأيمن :
 $2-1-1=0$

حالة 3

فإن الشعاع $\vec{2MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ مستقل عن M
أي ثابت لنرى ما هو :

$$\begin{aligned} \vec{2MA} - \vec{MB} - \vec{MC} &= +\vec{MA} + \vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \\ &= -\vec{AM} - \vec{AM} - \vec{MB} - \vec{MC} \\ &= -(\vec{AM} + \vec{MB}) - (\vec{AM} + \vec{MC}) \\ &= -\vec{AB} - \vec{AC} \\ &= -(\vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= -2\vec{AF} \end{aligned}$$



حيث F منتصف BC ومنه : $\|\vec{3MG}\| = \|\vec{-2AF}\|$

$$3MG = 2AF$$

$$MG = \frac{2}{3}AF$$

$$MA = \frac{2}{3}AF = \text{ثابت} = K$$

إذن مجموعة النقاط كرة مركزها G و نصف قطرها $\frac{2}{3}AF$.

$$(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot (3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) = 0$$

الحل :

بما أن G مركز ثقل المثلث ABC

و G مركز الأبعاد المتناسبة لـ A,B,C

حالة 4

$$3\vec{MG} \cdot 3\vec{MG} = 0 \text{ حسب } (*)$$

فإن

$$9\vec{MG} \cdot \vec{MG} = 0$$

إن مجموعة النقاط كرة قطرها GG

0944588021

41	كيف نجد إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC .
الطريقة	<p>حسب القانون :</p> $G \left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}, \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} \right)$
مثال	<p>احسب إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC A(1,-1,1) B(2,0,1) C(3,-2,1) الحل :</p> $G \left(\frac{1 + 2 + 3}{3}, \frac{-1 + 0 - 2}{3}, \frac{1 + 1 + 1}{3} \right)$ <p style="text-align: right;">G(2,-1,1)</p>

42	كيف نجد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط .
الطريقة	<p>- إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : (A, α), (B, β), (C, δ) وكان معلوم إحداثيات A,B,C فإن :</p> $X_G = \frac{\alpha \times X_A + \beta \times X_B + \delta \times X_C}{\alpha + \beta + \delta}$ $Y_G = \frac{\alpha \times Y_A + \beta \times Y_B + \delta \times Y_C}{\alpha + \beta + \delta}$ $Z_G = \frac{\alpha \times Z_A + \beta \times Z_B + \delta \times Z_C}{\alpha + \beta + \delta}$
مثال	<p>احسب إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : (A,1) , (B,-2) , (C, 3) وحيث A(1,1,-1) B(0,2,1) C(-1,0,0) الحل :</p> $X_G = \frac{1 \times 1 - 2 \times 0 + 3 \times -1}{1 - 2 + 3} = \frac{-2}{2} = -1$ $Y_G = \frac{1 \times 1 - 2 \times 2 + 3 \times 0}{2} = \frac{3}{2}$ $Z_G = \frac{1 \times -1 - 2 \times 1 + 3 \times 0}{2} = \frac{-3}{2}$ $\Rightarrow G \left(-1, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{2} \right)$

الطريقة

نثبت أن إحدى هذه النقاط هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين .

مثال

لتكن ABCD رباعي وجوه القطعة K من [AB] تحقق $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ و L نقطة

من [CD] تحقق $\vec{CL} = \frac{2}{3}\vec{CD}$ وأخيراً I منتصف [AD] و J منتصف [BC]

ونعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A, 2) (B, 1)(C, 1)(D, 2)$$

1- أثبت أن النقاط G و I و J على استقامة واحدة .

2- أثبت L, K, G على استقامة واحدة .

الحل : لدينا فرضاً J منتصف BC

فيكون (J,2) مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (C,1), (B,2)

ولدينا فرضاً I منتصف AD فيكون (I,4) مركز أبعاد (A,2), (D,2)

ولدينا فرضاً G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربع

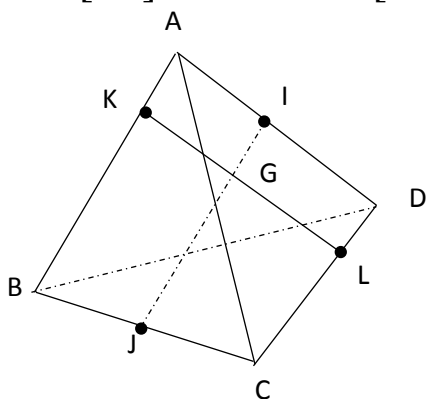
$$(A,2) (D,2) (C,1) (B,1)$$

وحسب الخاصة التجميعية :

فإن (G,6) مركز أبعاد المتناسبة للنقطتين (I,4), (J,2)

ومنه I و J و G تقع على استقامة واحدة .

2- بالمثل يحل .



44	كيف نحدد نقطة M أين تقع وتحقق علاقة شعاعية
الطريقة	باستخدام علاقة شال .
مثال	<p>DEF GH مكعب J منتصف FG</p> <p>حدد موقع النقطة M التي تحقق :</p> $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FJ}$ <p>الحل $\begin{cases} \vec{AM} = \vec{AF} + \vec{FJ} \\ \vec{AM} = \vec{AJ} \end{cases}$ حسب شال</p> <p>إذاً M تقع عند J .</p>

45	كيف نجد α β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين A,B.
الطريقة	<p>نكتب العلاقة بالشكل $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \vec{0}$ ونستنتج α, β .</p>
مثال	<p>أعط α β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, \alpha), (B, \beta)$</p> <p>إذا كان $2\vec{AM} + \vec{AB} = \vec{0}$</p> <p>الحل :</p> $2\vec{AM} + \vec{AM} + \vec{MB} = 0$ $3\vec{AM} + \vec{MB} = 0$ $-3\vec{MA} + \vec{MB} = 0$ <p>إذاً M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, -3), (B, 1)$</p>

إذا كان M مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط $(C, \delta), (B, \beta), (A, \alpha)$

$$\vec{0} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \delta \overrightarrow{MC} \quad (1)$$

(2) حسب الخاصة التجميعية نضع $A=M$

فنكتب العلاقة بالشكل :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

الطريقة

إذا كانت M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(C, 1), (B, 1), (A, -1)$$

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad \text{احسب } x, y \text{ بحيث}$$

الحل :

بما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط فإن $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

و حسب الخاصة التجميعية نختار $M=A$

$$-\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-1 + 1 + 1)\overrightarrow{AM}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}$$

مثال

كيف نثبت أن نقطة K هي مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط .

المعطيات علاقة شعاعية تحققها النقطة K .

طريقة 1 : باستخدام علاقة شال نثبت أن العلاقة تكتب بالشكل

$$\alpha \overrightarrow{KA} + \beta \overrightarrow{KB} + \delta \overrightarrow{KC} = 0$$

نستنتج أن K مركز الأبعاد المتناسبة و نستنتج الأثقال .

طريقة 2 : نثبت أن $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC}$

نستنتج أن K, C, B, A تقع في مستو واحد وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A, 1-a-b), (B, a), (C, b)$$

الطريقة

ليكن ABCDEFGH مكعب

أثبت أن النقطة K المعرفة بالعلاقة

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

α, β, δ يطلب إيجاد $(C, \delta), (B, \beta), (G, \alpha)$

الحل :

لدينا

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

$$= \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KG}$$

$$= 2\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KG}$$

$$\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{CK} + 3\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

وبما أن $1 - 2 + 3 \neq 0$ فإن K مركز الأبعاد المتناسبة :

لنقاط :

$$(G, 3) (C, -2) (B, 1)$$

مثال

(1) نجد \overrightarrow{AB} و ناظم المستوي $P: \vec{n}$ و نثبت أنهما غير مرتبطين .

(2) نكتب معادلة Q : $ax + by + cz + d = 0$

ونعوض النقطتين A,B نحصل على معادلتين .

(3) و من تعامد ناظم Q و ناظم P نحصل على المعادلة

(4) بحل المعادلات نجد a, b, c, d

الطريقة

اكتب معادلة المستوي q العمودي على المستوي p و مار من النقطتين B,A

حيث $Q: x + y + z = 0$ و $A(1, 0, 0)$ و $B(0, 1, 1)$

الحل :

نجد أن $\overrightarrow{AB}(-1, 1, 1)$ و $\vec{np}(1, 1, 1)$ غير مرتبطين خطياً

نعوض $A(1, 0, 0)$ فنجد $a + d = 0$

نعوض $B(0, 1, 1)$ فنجد $b + c + d = 0$

ومن تعامد $\vec{np}(1, 1, 1)$ مع $\vec{nq}(a, b, c)$ نجد $a + b + c = 0$

بحل المعادلات الثلاث نجد أن :

$A = d = 0$ و $b = -c$ نعطي $c = -1$ فيكون $b = 1$

فيكون معادلة Q $y - z = 0$

مثال

49	إثبات أن ثلاث نقاط تعين مستوي عُلْم معادلته .
الطريقة	نتحقق من أن النقاط الثلاث تحقق معادلة المستوي.
مثال	<p>تحقق من أن النقاط $A(+1, 1, 0)$ $B(2, 1, +1)$ $C(-1, 2, -1)$ تعين مستويًا معادلته : $x + y - z - 2 = 0$</p> <p>الحل : نعوض $A(+1, 1, 0)$ بمعادلة P فنجد $+1+1-0-2=0$ محققة</p> <p>نعوض $B(2, 1, +1)$ بمعادلة P فنجد $2+1-1-2=0$ محققة</p> <p>نعوض $C(-1, 2, -1)$ بمعادلة P فنجد $-1+2+1-2=0$ محققة</p> <p>إذن النقاط A, B, C تعين المستوي P .</p>

50	كيف نثبت أن مستقيم يقطع سطح كرة في نقطتين .
الطريقة	<p>نعوض معادلة المستقيم بمعادلة الكرة :</p> <p>ينتج معادلة من الدرجة الثانية المجهول فيها t .</p> <p>نثبت أن لها حلان و نجد الحلين .</p>
مثال	<p>ليكن التمثيل الوسيطى لمستقيم d :</p> $t \in R \text{ حيث } \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ <p>و لتكن الكرة S معادلته : $(X + 1)^2 + Y^2 + (Z + 2)^2 = 6$</p> <p>بين أن المستقيم d يقطع الكرة S في نقطتين .</p> <p>الحل : نبدل معادلات d بمعادلة D فنجد :</p> $1 + t^2 + (t + 3)^2 = 6$ <p>ومنه $t^2 + 3t + 2 = 0$</p> <p>و بما أن $\Delta = 1 > 0$ فإن المستقيم قاطع للكرة في نقطتين لإيجاد إحداثياتها نحسب t و نعوض بمعادلة المستقيم .</p>