المتتاليات:

المتتالية: هي تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية ومستقره مجموعة الأعداد الحقيقية

نرمز للمتتالية:

$U_n , V_n , x_n , y_n , \ldots$

$U_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

تعرف المتتالية بطريقتين:

① التعريف الصريح:

يذكر الحد n صراحة ضمن المتتالية

مثال:

$U_n = 3n + 1$

* من مميزات التعريف الصريح إيجاد أي حد من المتتالية دون معرفة أي حد آخر

مثال: أوجد U_6 ، U_7 في المتتالية السابقة

الحل:

$U_6 = 3(6) + 1 = 19$

$U_7 = 3(7) + 1 = 22$

② التعريف بالتدريج:

يذكر حد من حدود المتتالية في التعريف ولا يذكر الحد n صراحة في المتتالية

مثال:

$U_0 = 1$

$U_{n+1} = U_n + 3$

* لإيجاد أي حد في متتالية معرفة بالتدريج يجب معرفة قيمة الحدود التي تسبقه

مثال: إيجاد U_4 في المثال السابق

لإيجاد U_4 يجب معرفة الحد U_3

" " U_3 " " U_2

$\begin{cases} n=0 \\ U_1 = U_0 + 3 \Rightarrow U_1 = 1+3 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} n=1 \\ U_2 = U_1 + 3 \Rightarrow U_2 = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} n=2 \\ U_3 = U_2 + 3 \Rightarrow U_3 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} n=3 \\ U_4 = U_3 + 3 \Rightarrow \boxed{U_4 = 13} \end{cases}$

دراسة إطراد متتالية:

جهة إطراد متتالية:

وذلك يعني دراسة فيما إذا كانت المتتالية ① متزايدة ، ② متناقصة ، ③ الثبات

يوجد ثلاث طرائق لدراسة إطراد متتالية:

① دراسة إشارة الفرق:

نوجد U_{n+1} ونطرح منه U_n ونقارن بالصفر كما يلي

$U_{n+1} - U_n \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{نقول المتتالية متزايدة إذا كان} \\ < 0 & \text{المتتالية متناقصة إذا كان} \\ = 0 & \text{ثابتة إذا كان} \end{cases}$

② معيار مقارنة النسبة:

نوجد U_{n+1} ونقسم على U_n ونقارن بالـ 1 كما يلي

$\frac{U_{n+1}}{U_n} \Rightarrow \begin{cases} > 1 & \text{متزايدة} \\ < 1 & \text{متناقصة} \\ = 1 & \text{ثابتة} \end{cases}$

ملاحظة: يستخدم معيار المقارنة فقط في حالة:
① جميع حدود المتتالية موجبة
② أو مرفوع للأس n

③ معيار الاشتقاق:

نحول المتتالية إلى $f(x)$ ونشتقه إذا كان المشتق موجب فهي متزايدة
سالب " متناقصة

أمثلة:

① $U_n = \frac{3}{(n+1)^2} \; ; \; n \geq 1$

الحل: حسب دراسة إشارة الفرق:

$U_{n+1} - U_n \Rightarrow$ لنوجد U_{n+1}

$U_{n+1} = \frac{3}{((n+1)+1)^2}$

$\frac{3}{((n+1)+1)^2} - \frac{3}{(n+1)^2} < 0$ متناقصة

مفروض في القانون

ملاحظة هامة: إذا تساوت البسوط فإن كلما كبرت قيمة المقام صغر الكسر

مثال: $u_n = \frac{3}{n^2}$ ، $n \geq 1$

حسب الإشتقاق

$u_n = f(x) = \frac{3}{x^2}$

$f'(x) = \frac{0(x^2) - (2x)3}{x^4}$

$= -\frac{6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3} < 0$

المتتالية متناقصة

مثال: $u_n = \frac{n}{10^n}$; $n \geq 1$

حسب معيار مقارنة النسبة

نوجد u_{n+1}

$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}}$

نفوض $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\Rightarrow \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^{n}}} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n}$

$= \frac{n+1}{10 \cdot n}$

نعوض اي قيمة حسب الشرط المطلوب $n \geq 1$

$\Rightarrow 2 = n \Rightarrow \frac{2+1}{10(2)} = \frac{3}{20} < 1$

وبالتالي المتتالية متناقصة .

تمارين ص 48

① $u_n = \sqrt{3n+1}$

$f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$ متزايدة

② $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$

$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

$f'(x) = \frac{3(x-2) - (3x+1)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \frac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2}$

$= -\frac{7}{(x-2)^2} < 0$

وبالتالي المتتالية متناقصة

③ $u_0 = 2$

$u_{n+1} = u_n - 3$

الحل: نلاحظ حسب معيار دراسة اشارة الفرق

$u_{n+1} = u_n - 3$

$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$

متناقصة

④ $u_0 = 1$

$u_{n+1} = 2u_n$

حسب معيار مقارنة النسبة :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$

وبالتالي المتتالية متزايدة

⑤ $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$; $n \geq 1$

المتتالية يوجد إشارة سالب ومرفوعة للأس n اذا عوضنا قيم n

$\Rightarrow u_1 = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 = -1$

$u_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$u_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

المتتالية ذات حدود سالبة وموجبة وبالتالي هي ليست متزايدة وليست متناقصة ؛

Yousef.H
يوسف الحستاني
0993177182

أنواع المتتاليات:

المتتالية الحسابية:

هي المتتالية التي ينتج حدها الاول من الثاني بإضافة الأساس r

مثال: متتالية الاعداد الزوجية:

$$2n = \overset{+2}{0,\ 2},\overset{+2}{\ 4},\overset{+2}{\ 6}, \dots \quad ; n \geq 0$$

الأساس $r = 2$

نحسب منه قيمة r:
$$\underbrace{u_{n+1}}_{\text{الحد الجديد}} = \underbrace{u_n}_{\text{الحد القديم}} + \underbrace{r}_{\text{الأساس}}$$

★ نتذكر دراسة إشارة الفرق

$$u_{n+1} - u_n = r$$

إذا كان $r > 0 \Leftarrow$ متزايدة

$r < 0 \Leftarrow$ متناقصة

$r = 0 \Leftarrow$ ثابتة

قانون الحد العام:

$$u_n = u_m + (n-m)\, r$$
يمكن حساب r من قانون الحد العام

قانون المجموع:

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

n = عدد حدود المتتالية

a = قيمة أول حد في المتتالية

l = قيمة آخر حد في المتتالية

مثال: لتكن $\{u_n\}_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها، $u_2 = 41,\ u_5 = -13$

أحسب u_{20}

نعوض بقانون الحد العام لحساب $\boxed{r}$

$$u_5 = u_2 + (5-2)\, r$$
$$-13 = 41 + 3r$$
$$\Rightarrow r = \frac{-13 - 41}{3} = -\frac{54}{3} = -18$$
$$u_{20} = u_2 + (20-2)(-18)$$
$$u_{20} = 41 + (18)(-18) = \boxed{-283}$$

مثال: $\{u_n\}_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها الأساس $u_1 = -2,\ r = 3$

1) احسب u_n بدلالة n
2) احسب المجموع $u_{30} + u_{31} + u_{32}$
3) احسب المجموع $u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

الحل:

1)
$$u_n = u_m + (n-m)\, r$$
$$\Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)3$$
$$= -2 + 3n - 3$$
$$\Rightarrow u_n = 3n - 5 \quad ★$$

2) لحساب المجموع يجب معرفة قيمة أول حد وقيمة آخر حد وعدد الحدود
وواضح أن عدد الحدود هو $\boxed{3}$
لنوجد u_{30} ، u_{32} نعوض في ★

$$\Rightarrow u_{30} = 3(30) - 5 = 85$$
$$u_{32} = 3(32) - 5 = 91$$
$$\Rightarrow \text{المجموع } S = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$\text{المجموع } S = \frac{3}{2}(91 + 85) = \boxed{264}$$

3) نعوض في ★ لحساب u_{20}

$$u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$
$$u_1 = -2$$

لحساب عدد حدود المتتالية نأخذ

n = (دليل آخر حد - دليل أول حد + 1)

$$\Rightarrow n = (20 - 1 + 1) = 20$$
$$S = \frac{20}{2}(55 - 2)$$
$$= 10(53) = \boxed{530}$$

المدرس يوسف الحرستاني
0993177182

المتتالية الهندسية:

هي المتتالية التي ينتج حدها الأول عن الثاني بالضرب بالأساس $\boxed{q}$

مثال:

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24, \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{q=2}$$

$$u_n = u_m \cdot q^{(n-m)}$$

← لحساب الحد العام
ولحساب q
لحساب قيمة حد بالمتتالية

$$S = \underbrace{a}_{\text{الحد الأول}} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

← حساب المجموع

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \boxed{q}$$

لإثبات المتتالية أنها هندسية

مثال: لتكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ حيث $n \in \mathbb{N}$

أثبت أن u_n هندسية وأوجد أساسها
واستنتج جهة الاطراد

الحل:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^{n}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

حسب معيار المقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} < 1$

المتتالية متناقصة

18/4

مثال: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية فيها

$u_1 = -2$ ، الأساس $q = 3$

① احسب u_n بدلالة n

② احسب المجموع $u_1 + \cdots + u_7$

③ احسب بدلالة n المجموع

$$S = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$$

الحل:

① $u_n = u_m \cdot q^{(n-m)}$

$$u_n = -2 \cdot q^{(n-1)}$$

$$u_n = -2 \cdot 3^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow u_n = -2 \cdot 3^n \cdot 3^{-1}$$

$$\boxed{u_n = -\frac{2}{3} \cdot 3^n}$$

② $S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$\Rightarrow S = -2 \cdot \frac{1-3^7}{1-3}$$

$$\Rightarrow S = 1 - 2187 = \boxed{-2186}$$

③ الأساس للمتتالية الهندسية هو q^m حيث m هي عدد القفزات بين كل حد وآخر في المتتالية.

شرح الفكرة للتوضيح: لتكن المتتالية الهندسية

$$v_n = 2, 4, 8, 16, 32$$

نلاحظ أن القفزة هي ① نضرب بـ 2 فقط
الأساس هو $q = 2^1$

لتكن المتتالية الهندسية

$$u_n = 2, 8, 32, 128$$

قفزتين

نلاحظ أن الأساس هو 2 وعدد القفزات هو

$$2 \times 2 \Rightarrow 2^2 = 4$$

ولنكمل المثال:

u_3 وهمي

$$u_2, u_4, u_6, \ldots, u_{2n}$$

الأساس هو 3^n وعدد القفزات هي ②
ومنه الأساس الجديد هو $9 = 3^2$
وقيمة أول حد

$$u_2 = u_1 \cdot q^{(2-1)}$$

$$u_2 = -2 \cdot 3 = -6$$

$$S = -6 \frac{1-9^{2n}}{1-9} = \frac{-6}{-8}(1-9^{2n}) = \frac{3}{4}(1-9^{2n})$$

ملاحظة: إذا كانت a ، b ، c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن

$$a.c = b^2 \ , \ b = a.q \ , \ c = a.q^2$$

مثال: a,b,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية احسبها علماً أن
① $a.b.c = 216$ ② $a+b+c = 21$

الحل: بما أن a,b,c ثلاث حدود من متتالية هندسية ⟸ $a.c = b^2$

لدينا $a.b.c = 216$

$\Rightarrow b^2.b = 216 \Rightarrow b^3 = 216$

$\Rightarrow b = 6$ بالجذر التكعيبي

نعوض في ① و ②

$\Rightarrow$

$a.c = 36$ I

$a + c = 15$ II

$\Rightarrow \boxed{a = 15 - c}$

نعوض في I

$\Rightarrow 15c - c^2 = 36$

$\Rightarrow c^2 - 15c + 36 = 0$

$(c-3)(c-12) = 0$

إما $c=3$ ومنه $a=12$

أو $c=12$ ومنه $a=3$

الإثبات بالتدريج

يستخدم الإثبات بالتدريج لإثبات قضية معطاة بدلالة n حسب الخوارزمية التالية:

① نثبت صحتها من أجل القيمة البدائية n_0

② نفرض صحتها من أجل القيمة n

③ نبرهن صحتها من أجل القيمة $n+1$

مثال: لتكن $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

① أثبت بالتدريج أياً كان $n \in \mathbb{N}$ أن $0 \leq u_n \leq 2$

② أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

أكمل

الخطوة ① محققة $0 \leq 1 \leq 2$

② نفرض صحة القضية من أجل n

$E(n): 0 \leq u_n \leq 2$

③ نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

من الفرض ②

$0 \leq u_n \leq 2$

نضيف 2 لجميع أطراف المتراجحة

$2 \leq 2+u_n \leq 4$

نجذر أطراف المتراجحة

$\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{4}$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$

من ①، ②، ③ نجد أن القضية محققة

الحل ②

$E(n): u_{n+1} > u_n$

نثبت صحتها من أجل $1 = n_0$ --- ①

$\Rightarrow E(0): \sqrt{2+1} > 1$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n --- ②

$E(n): u_{n+1} > u_n$ --- ★

ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$ --- ③

$E(n+1): u_{n+2} > u_{n+1}$

نضيف 2 للطرفين للعلاقة ★

$2 + u_{n+1} > u_n + 2$

نجذر الطرفين

$\sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{u_n+2}$

$u_{n+2} > u_{n+1}$

وبالتالي من ①، ②، ③ القضية محققة

المدرس يوسف الرستاني
0993177182

ادرس اطراد المتتالية التالية:

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot u_n + 2 \end{cases}$$

الحل:

$u_1 = \frac{3}{4} \cdot 8 + 2 = 8$

$u_2 = \frac{3}{4} \cdot 8 + 2 = 8$

واضح أن المتتالية ثابتة

ولنبرهن أن $u_n = u_{n+1}$

① لنثبت صحتها من أجل n_0 ---

$E(0): u_0 = 8 = \frac{3}{4} \cdot (8) + 2 = 8$ محققة

② نفرض صحتها من أجل n ---

$E(n): u_n = u_{n+1}$

③ لنبرهن صحتها من أجل $n+1$ ----

$E(n+1): u_{n+1} = u_{n+2}$

من الفرض ②

$u_n = u_{n+1}$

نضرب الطرفين بـ $\frac{3}{4}$ ونضيف 2

$\frac{3}{4} u_n + 2 = \frac{3}{4} u_{n+1} + 2$

$\Rightarrow u_{n+1} = u_{n+2}$

من ①، ②، ③ نجد أن $E(n+1)$ صحيحة والمتتالية ثابتة

مثال: تدرب وحدك

$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ $\quad n \geq 1$

① احسب S_1, S_2, S_3, S_4 ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة n

② أثبت بالتدريج صحة القضية

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل:

$S_1 = 1^2 = 1, \quad S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \quad S_4 =$

$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{||} + (n+1)^2$

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

لنبرهن أن $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

① نثبت صحة القضية من أجل $n_0 = 1$

$S_1 = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ محققة

② نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$

$S_n = E(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ ولنبرهن صحتها من أجل

$S_{n+1} = E(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

من الفرض

$S_n E(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نضيف للطرفين $(n+1)^2$

$\underbrace{S_n + (n+1)^2}_{= S_{n+1}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$S_{n+1} = \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

من ①، ②، ③ نستنتج أن $E(n)$ صحيحة

② ليكن $x > -1$ في حالة عدد طبيعي n نرمز بـ $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+nx$ أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

نثبت صحة القضية من أجل $n_0 = 0$

$E(0) = (1+x)^0 \geq 1 + (0)x$ محققة

$\Rightarrow 1 \geq 1$

نفرض أن $E(n): (1+x)^n \geq 1 + nx$ محققة

ولنبرهن أن $E(n+1): (1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$

من الفرض $E(n): (1+x)^n \geq 1+nx$

نضرب الطرفين بـ $(1+x)$

$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx).(1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+\underbrace{nx^2}_{\text{موجب}}+x$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$

$E(n)$ صحيحة وبالتالي $E(n+1)$ محققة بالاعتماد على 1، 2، 3

مثال: التمرين رقم 9 الطلب 2 صفحة 22

اثبت بالتدريج الخاصة التالية

$n! \geq 2^{n-1} \; ; n \geq 1$

نثبت صحة القضية من أجل $n=1$

$1! \geq 2^{1-1} \Rightarrow 1 \geq 2^0=1$

محققة

لنفرض صحة القضية من اجل $E(n)$

$E(n): n! \geq 2^{n-1}$

نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$E(n+1): (n+1)! \geq 2^{(n+1)-1} = 2^n$

من الفرض

$E(n): n! \geq 2^{n-1}$

نضرب الطرفين بـ $(n+1)$

$n!(n+1) \geq 2^{n-1}.(n+1)$

$(n+1)! \geq 2^n.2^{-1}(n+1)$

$(n+1)! \geq \frac{2^n(n+1)}{2}$

$\frac{n+1}{2} \geq 1 \; ; \forall n \geq 1$

$(n+1)! \geq \frac{2^n(n+1)}{2} \geq 2^n.1$

$(n+1)! \geq 2^n$

ومنه $E(n+1)$ محققة وبالتالي من 1، 2، 3 نجد أن $E(n)$ محققة

$\frac{6}{22}$ $a \neq 0$ ، a ، b ، c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية

c ، $2b$ ، $3a$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية. احسب q

$\begin{cases} c = a.q^2 \\ b = a.q \end{cases}$ ★

c ، $2b$ ، $3a$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية

$2b = \frac{c+3a}{2}$

$\Rightarrow 4b = c+3a$

بالإستفادة من ★

$4(a.q) = a.q^2+3a$

$a.q^2-4aq+3a=0$

$\boxed{\div a}$; $a \neq 0$

$q^2-4q+3=0$

$(q-3)(q-1)=0$

إما $q=1$ أو $q=3$ وهم

مثال: تمرين 4 13 / 25

$n \in \mathbb{N}$

4) $E(n) = 3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

لنثبت صحة القضية من اجل $n=0$

$E(0) = 3^1+2^{0+2} = 3+4=7$

محققة

نفرض صحة القضية من اجل n

$E(n) = 3^{2n+1}+2^{n+2} = 7K \; ; K \in \mathbb{N}$

ولنبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$E(n+1) = 3^{2n+3}+2^{n+3} = 7.K$

$3^{2n+1}+2^{n+2} = 7.K$

نضرب الطرفين بـ $9=3^2$

$3^2(3^{2n+1}+2^{n+2}) = 3^2(7.K)$

$3^{2n+3}+9\,2^{n+2} = 63K$

$3^{2n+3}+(2+7)2^{n+2} = 63.K$

$3^{2n+3}+2^{n+3} = 7(9K-2^{n+2})$

من مضاعفات 7 عندما $(9K-2^{n+2}) \in \mathbb{N}$

اي $(n+1)$ صحيحة من 1، 2، 3 $E(n)$ صحيح

7

① نفرض صحة ...

11/25 ① قراءة تدريجية: اثبت أياً كان العدد الطبيعي n ، $n \geq 2$ فإن $3n^2 \geq (n+1)^2$

الحل:

① نفرض صحة القضية من أجل $n_0 = 2$

$E(2): 3(2)^2 \geq (2+1)^2$

$12 \geq 9$ محققة

② لنفرض صحة القضية من أجل n

$E(n): 3n^2 \geq (n+1)^2$

③ لنبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): 3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

$E(n+1): 3n^2+6n+3 \geq n^2+4n+4$

من الفرض $3n^2 \geq (n+1)^2$

نضيف للطرفين $6n+3$

$\Rightarrow 3n^2+6n+3 \geq n^2+2n+1+6n+3$

$\Rightarrow 3n^2+6n+3 \geq n^2+8n+4$

$\Rightarrow 3(n+1)^2 \geq (n^2+4n+4) + \underbrace{4n}_{\text{موجب}}$

$\boxed{(n^2+4n+4)+4n \geq n^2+4n+4}$

$\Rightarrow 3(n+1)^2 \geq n^2+4n+4$

$\Rightarrow 3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$ وهو المطلوب

$E(n+1)$ صحيحة وبالتالي من 1,2,3 $E(n)$ صحيحة

الطلب الثاني: نرمز $E(n)$ للقضية $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$

① ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عنده

$E(1): 3^1 \geq 2^1 + 5 \times (1)^2$

$3 \geq 2+5$ غير محققة

$E(2): 3^2 \geq 2^2 + 5 \times (2)^2$ غير محققة

$E(3): 3^3 \geq 8 + 5 \times (3)^2$ غير محققة

$E(4): 3^4 \geq 2^4 + 5 \times (4)^2$ غير محققة

$E(5): 243 \geq 157$ محققة

العلاقة محققة عند $n \geq 5$

② أثبت أن $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 5$

① نثبت صحة القضية عند $n=5$ وهي محققة سابقاً

② نفرض صحة القضية من أجل n

$E(n): 3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$

③ لنبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5 \times (n+1)^2$

$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5$

من الفرض $E(n): 3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$

نضرب طرفي المتراجحة بـ 3

$\Rightarrow 3 \cdot 3^n \geq 3(2^n + 5 \times n^2)$

$3^{n+1} \geq 3 \, 2^n + 15n^2$

$3^{n+1} \geq (2+1)2^n + 15n^2$

$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 2^n + 10n^2$

نضيف ونطرح $10n+5$

$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5 + \underbrace{2^n}_{\text{موجب}}\underbrace{(+10n^2 - 10n - 5)}_{n \geq 5 \text{ موجب}}$

$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 \ldots \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5$

$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5$

ومنه $E(n+1)$ محققة وعن ①، ②، ③ نجد أن $E(n)$ محققة وهو المطلوب

16/25 $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$ ، $u_0 = 1$

① إثبات أن التابع $x \rightarrow \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً ثم استنتج أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$

② اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً

الحل: (معيار الاشتقاق)

$f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$

$f'(x) = \dfrac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$

$= \dfrac{14}{(2x+6)^2} > 0$

فالتابع متزايد تماماً

استنتاج أن $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

① نبرهن صحة القضية من أجل $n_0=0$

$$\Rightarrow E(n_0):\ \frac{1}{2} \le u_0 \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le 1 \le 1$$

محققة.

② نفرض ان القضية $E(n)$ محققة

$$E(n):\ \frac{1}{2} \le u_n \le 1$$

③ لنبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$E(n+1):\ \frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

من الفرض لدينا

$$\frac{1}{2} \le u_n \le 1$$

لنطبق الدالة $f(x)$ لجميع أطراف المتراجحة

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(u_n) \le f(1)$$

$$\frac{3(\frac{1}{2})+2}{2(\frac{1}{2})+6} \le \frac{3(u_n)+2}{2(u_n)+6} \le \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le u_{n+1} \le \frac{5}{8} \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

ومنه من ①، ②، ③ نجد ان $E(n+1)$ محققة وبالتالي $E(n)$ محققة

② اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة

$$E(n):\ u_{n+1} < u_n$$

① لنثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$$\Rightarrow E(0):\ u_1 < u_0$$

$: \frac{5}{8} < 1$ محققة

② نفرض صحة القضية من اجل $E(n)$

③ لنثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$$E(n+1):\ u_{n+2} < u_{n+1}$$

من الفرض لدينا $u_{n+1} < u_n$

نأخذ صورة المتراجحة وفق f

نعوض في f

$$\Rightarrow \underbrace{f(u_{n+1}) < f(u_n)}_{\text{ينتج لدينا}}$$

$$\Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

وهو المطلوب من ① ② ③ نستنتج ان $E(n)$ صحيحة

$\boxed{17}$ $\boxed{25}$ ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ وفق: $u_0=2\cos\theta$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ ؛ $n\in\mathbb{N}$

تذكرة لكل قاعدة

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

المطلوب: اثبت بالتدريج أن $u_n=2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

نثبت الصحة من اجل $n=0$

$$\Rightarrow u_0 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) \Rightarrow u_0 = 2\cos(\theta)$$

محققة

نفرض صحة القضية من اجل n

$$\Rightarrow E(n):\ u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

ولنبرهن الصحة من اجل

$$E(n+1):\ u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

من الفرض لدينا

$$u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$$

نضيف 2 للطرفين

$$u_n+2 = 2\cos\frac{\theta}{2^n}+2$$

$$u_n+2 = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)+1\right)$$

بجذر الطرفين ونطبق العلاقة:

$$2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos(\theta)+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n+2} = \sqrt{2}\,\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^n\cdot 2}\right)}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه من ① ② ③ نجد ان $E(n)$ محققة، $E(n+1)$ محققة

18/26

H مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق احداثياتها المعادلة $x^2-5y^2=1$ ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة M من المستوي P النقطة

$M'(9x+20y\ ,\ 4x+9y)$

$f(M)=M'$ ،

لتكن $S_0(1,0)$ و $\{S_n\}_{n\geq 0}$ متتالية نقاط معرفة: $S_{n+1}=f(S_n)$ اثبت ان S_{n+1} نقطة من H وأن احداثياتها اعداد صحيحة .

الحل: لدينا S_0 هي نقطة من H لأن

$S_0(1,0) \Rightarrow (1)^2-5(0)^2=1$

$1=1$ محققة

لنفرض ان S_n نقطة من H ولنبرهن ان S_{n+1} نقطة من H

لدينا صورة النقطة $M(x,y)$ وفق f هي M' وهي نقطة من H لأنه تحقق معادلتها

$x^2-5y^2=1$ نعوض احداثيات M'

$(9x+20y)^2-5(4x+9y)^2=1$

$\Rightarrow 81x^2+360xy+400y^2-80x^2-360xy-405y^2=1$

بالإصلاح $\Rightarrow x^2-5y^2=1$

ومنه حسب التعريف $S_{n+1}=f(S_n)$ ⇐ S_{n+1} هي نقطة من H

وبما ان احداثيات S_n اعداد صحيحة فإن $S_{n+1}(9x+10y\ ,4x+9y)$ هي اعداد صحيحة وضربها

19/26

$n\in N^*, S_n=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos(2n-1)x$

① باستعمال دساتير مثلثية تعرفها أثبت أن:

① $\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a$

② $\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

حول كل مما يلي من جداء إلى مجموع

③ $\sin nx\cdot\cos nx$

④ $\sin x\cdot\cos(2n+1)x$

⑤ أثبت أن $S_n=\cos nx\times\frac{\sin nx}{\sin x}$

الحل: ① لدينا $\sin(a+b)=\sin(a)\cdot\cos(b)+\sin(b)\cdot\cos(a)$

ونضع $a=b$

$\Rightarrow \sin(a+a)=2\sin(a)\cdot\cos(a)$

② لدينا $\sin(a+b)=\sin(a)\cdot\cos(b)+\sin(b)\cdot\cos(a)$

$\sin(a-b)=\sin(a)\cdot\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

وبالجمع نجد ان

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cdot\cos(b)$

$\Rightarrow \boxed{\sin(a)\cdot\cos(b)=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]}$ ✱

حسب الطلب السابق قانون تحويل الجداء إلى مجموع ✱

③ $\Rightarrow \sin(nx)\cdot\cos(nx)=\frac{1}{2}[\sin(2nx)+\sin(0)]$

$\sin(n.x)\cdot\cos(n.x)=\frac{1}{2}\sin(2nx)$

④ $\sin x\cos(2n+1)x=\frac{1}{2}\{\sin(2nx+2x)-\sin(2nx)\}$

⑤ $S_n=\cos(nx)\cdot\frac{\sin(n.x)}{\sin(x)}\ :\ x\neq\pi k$

نثبت صحة العلاقة من اجل $n_0=1$

$\Rightarrow S_1=\cos(x)\cdot\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}=\cos(x)$ محققة

نفرض صحة القضية من اجل n $S_n=\cos(nx)\cdot\frac{\sin(nx)}{\sin x}$

ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

$S_{n+1}=\cos x+\cos 3x+\dots+\cos((2(n+1)-1)x)$

$S_{n+1}=\cos x+\cos 3x+\dots+\cos(2n+1)x$

نضيف إلى الفرض الحد $\cos(2n+1)x$

$\Rightarrow S_{n+1}=\cos(nx)\cdot\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}+\cos(2n+1)x$

بتوحيد المقامات

$S_{n+1}=\frac{1}{\sin x}[\underbrace{\cos(nx)\cdot\sin(nx)}_{=\frac{1}{2}\sin(2nx)}+\sin x\cdot\cos(2n+1)x]$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{\sin x}[\cancel{\frac{1}{2}\sin(2nx)}+\frac{1}{2}[\sin(2nx+2x)-\cancel{\sin(2nx)}]]$

$\Rightarrow S_{n+1}=\frac{1}{\sin x}[\frac{1}{2}\sin(2nx+2x)]$

$S_{n+1}=\frac{1}{2\sin x}[2\sin(nx+x)\cdot\cos(nx+x)]$

$S_{n+1}=\frac{\cancel{2}\cdot\sin(n+1)x\cdot\cos(n+1)x}{\cancel{2}\sin x}$

$S_{n+1}=\frac{\cos(n+1)x\cdot\sin(n+1)x}{\sin x}$

وهو المطلوب

إعداد المدرس يوسف الرستاني
0993177182