بنك أسئلة النهايات والاشتقاق

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة النهايات والاشتقاق

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

م . مروان بجور حمص 0930170828

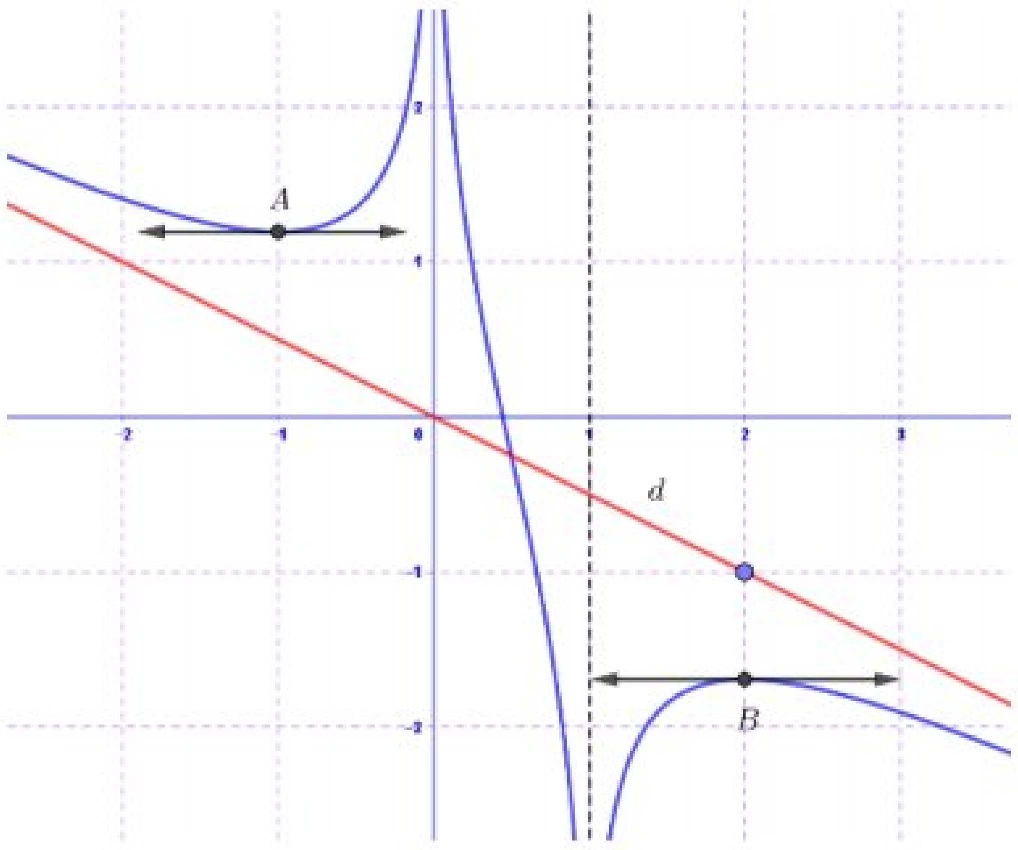
أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

أ زياد داوود سلمية 0936834286

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

وسيم فاطمة زياد داوود أحمد الشيخ عيسى مروان بجور
اللاذقية 0936497038 سلمية 0936834268 الرقة 0988024183 حمص 0930170828

التمرين 1 :



تأمل الشكل المرسوم جانبا ,

الذي يمثل الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}\{0,1\}$ والمطلوب :

❶ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to1^+} f(x)$

❷ جد $f'(2)$ و $f'(-1)$

❸ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

❹ اكتب معادلة المقارب المائل d

الحل :

❶ $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

❷ $f'(2) = 0$ و $f'(-1) = 0$

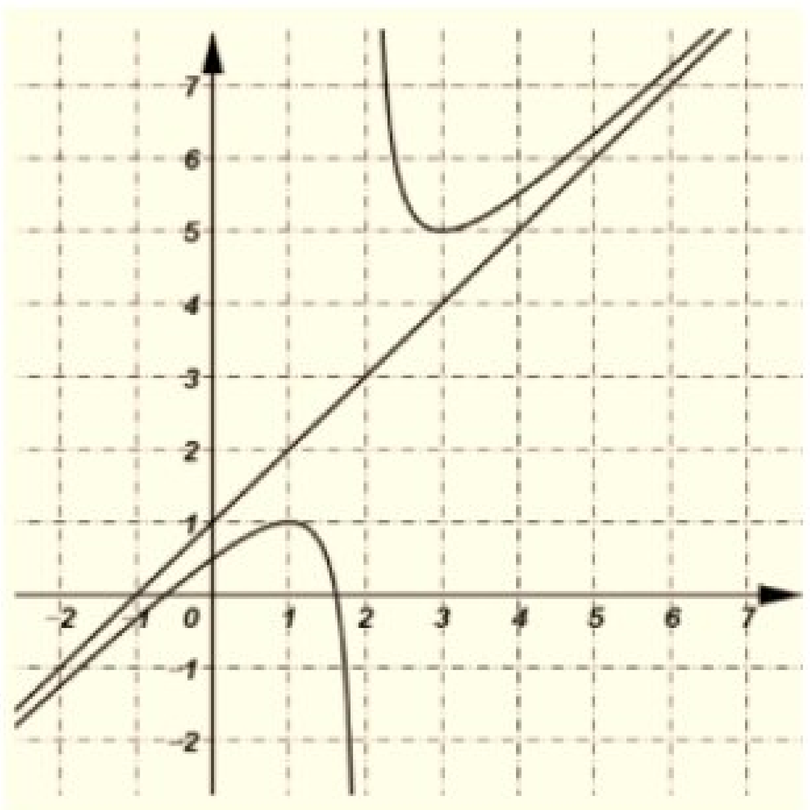
❸ حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ هي $]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]2,+\infty[$

❹ المقارب المائل d مار من المبدأ $(0,0)$ والنقطة $(2,-1)$

وبالتالي ميله $m = \frac{-1-0}{2-0} = \frac{-1}{2}$ وبالتالي معادلته $y = \frac{-1}{2}x$

التمرين 2 : النموذج الوزاري الثالث 2020

في الشكل المرسوم جانباً ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, والمطلوب:



➊ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ دل على القيم الحدية للتابع وبين نوعها.

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

❹ اكتب معادلة المقارب المائل.

❺ اذكر إحداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f.

الحل :

❶ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

❷ $f(3) = 5$ قيمة صغرى محليا و $f(1) = 1$ قيمة كبرى محليا

❸ حلين

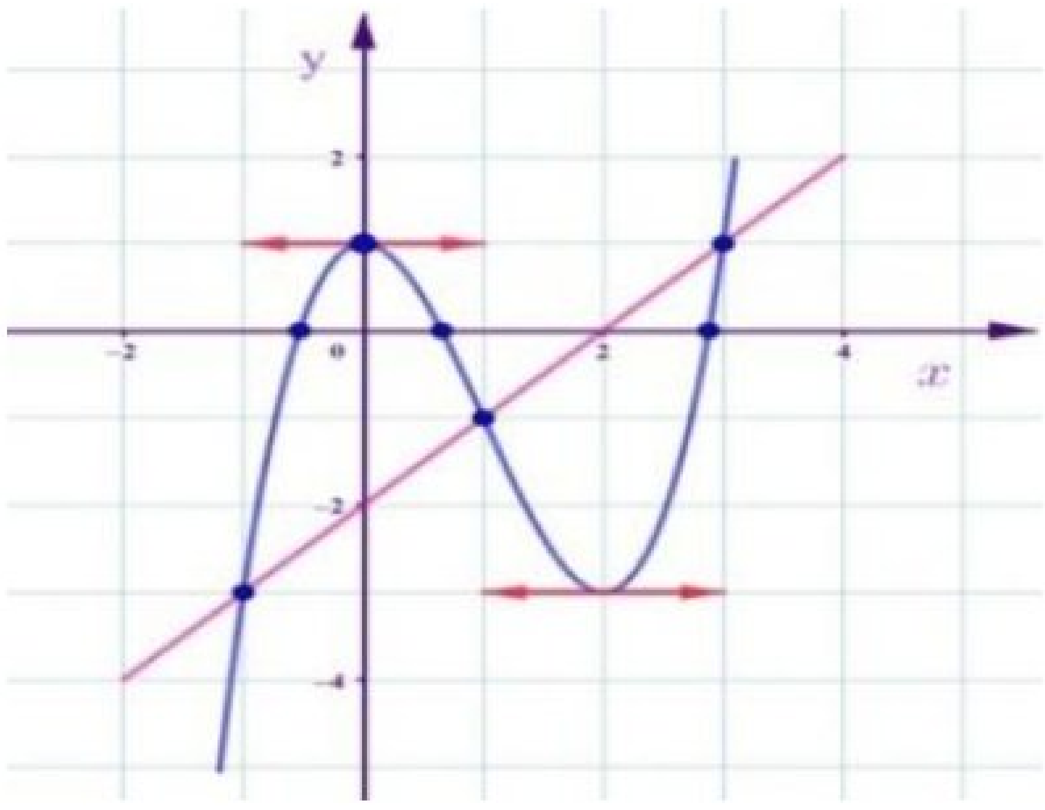
❹ المقارب المائل مار من النقطة $(0,1)$ والنقطة $(-1,0)$

وبالتالي ميله $m = \frac{-1-0}{0-1} = 1$ وبالتالي معادلته $y = x + 1$

❺ $I(2\,,3)$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 3 :



تأمل الشكل المرسوم جانبا ,

الذي يمثل الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب :

❶ **ما هو عدد القيم الحدية للتابع f وبين نوعها**

❷ **جد** $f\ (\,]-1,2[\,)$

❸ **جد حلول المعادلة** $f\ (x\ ) = y_\Delta$

❹ **جد حلول المتراجحة** $f'(x) < 0$

الحل :

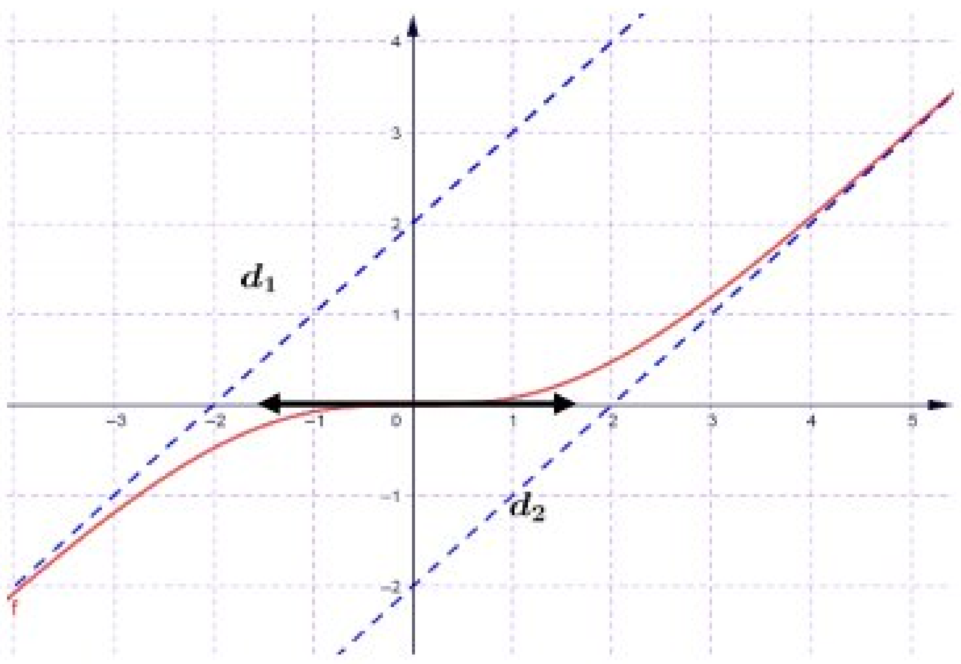
❶ **عدد القيم الحدية (2) ,** $f\ (\ 2\ ) = -3$ **قيمة صغرى محلية ,** $f\ (0\ ) = 1$ **قيمة كبرى محلية**

❷ $f\ (\,]-1,2[\,) =]-3,1[$

❸ $x = -1 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = 3$

❹ **حل المتراجحة** $f'(x) < 0$ **يقابل مجلات تناقص التابع أي المجال :** $]0,2[$

التمرين 4 :



تأمل الشكل المرسوم جانبا ,الذي يمثل الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمطلوب

❶ **احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **واكتب معادلة المقارب في هذه الحالة**

❷ **جد** $f(0)\ ,\ \ f'(0)$

❸ **هل** $f(0) = 0$ **قيمة حدية ؟ علل اجابتك**

❹ **هل التابع فردي أم زوجي ؟ علل اجابتك**

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و المقارب مار من $(2,0)$ **و** $(0,-2)$ **ميله** $m = \frac{-2-0}{0-2} = 1$

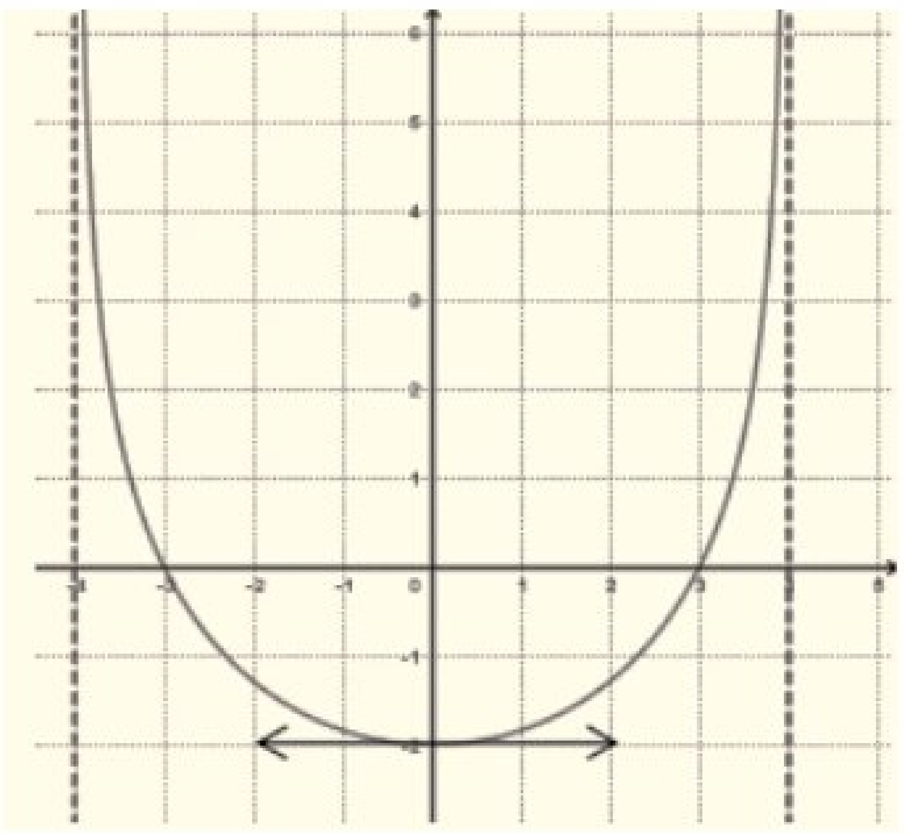
فمعادلته $y - 0 = 1(x-2) \Rightarrow y = x - 2$

❷ $f(0) = 0\ ,\ \ f'(0) = 0$

❸ **لا ليست قيمة حدية لأن مشتق التابع ينعدم عندها دون أن يغير اشارته**

❹ **التابع فردي لأنه متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات**

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828



التمرين 5 : دورة 2017 الأولى

في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f

المعرف على المجال $I =]-4,4[$ والمطلوب :

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -4 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ <}} f(x)$

❷ أحسب $f(0)$ و $\grave{f}(0)$.

❸ جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$

❷ $f(0) = -2$ و $f'(0) = 0$

❸ حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي $x = 3$, $x = -3$

التمرين 6 : دورة 2017 الثانية

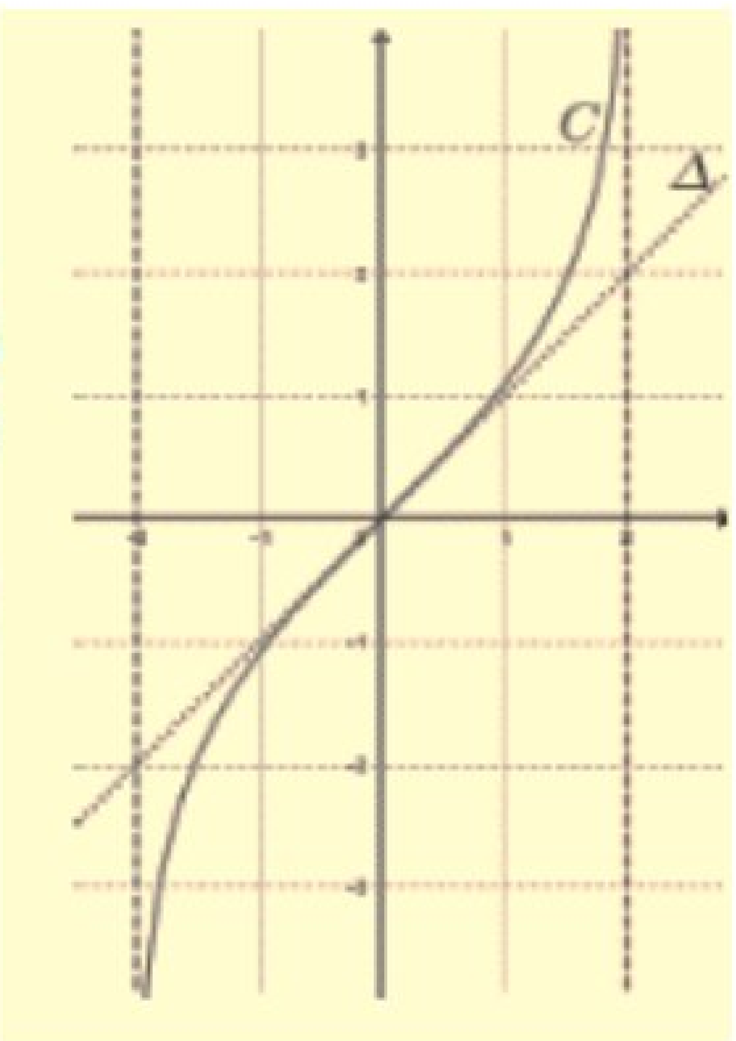
نتأمل الشكل المرسوم جانباً حيث C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-2,2[$ والمطلوب :

❶ احسب $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

❷ أوجد $f(0)$ و $\grave{f}(0)$.

❸ هل التابع فردي أم زوجي.

❹ اكتب معادلة المماس Δ



الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

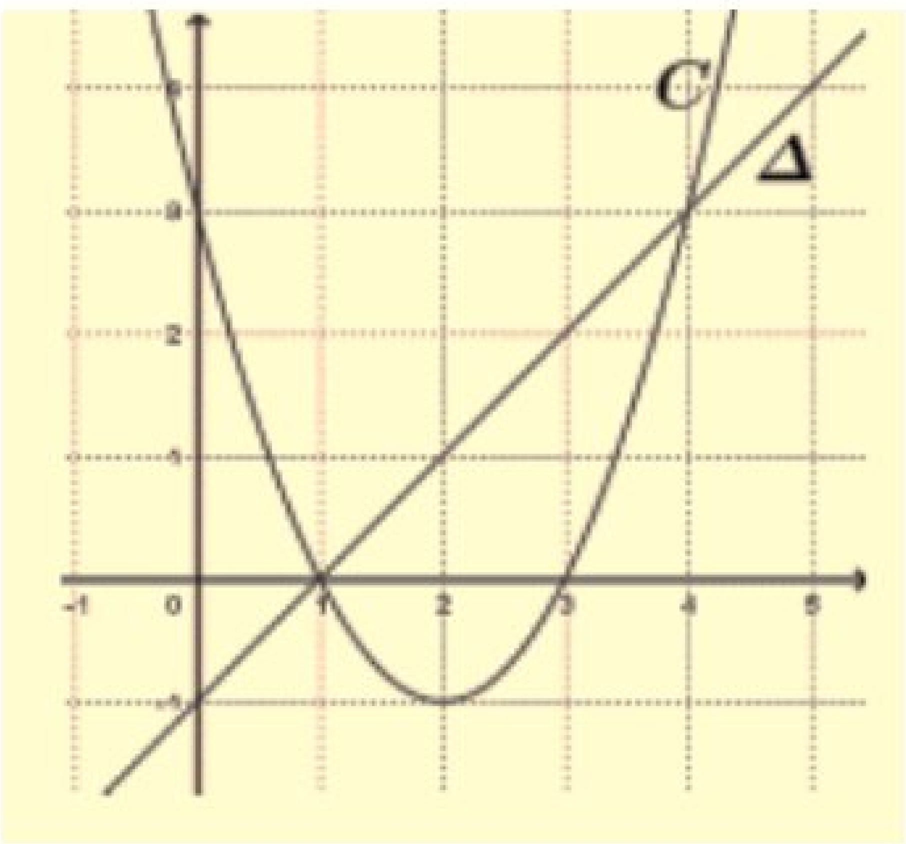
❷ $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$.

❸ التابع فردي

❹ من الرسم نلاحظ أن المماس Δ يمر بالمبدأ والنقطة $(1,1)$ وهو منصف الربع الأول والثالث و معادلته $y = x$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 7 : دورة 2018 الأولى



تأمل الشكل المرسوم جانباً , ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R , والمطلوب

❶ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

❷ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸ ما حلول المعادلة $(x) = y_\Delta$.

❹ اكتب معادلة المستقيم Δ

الحل :

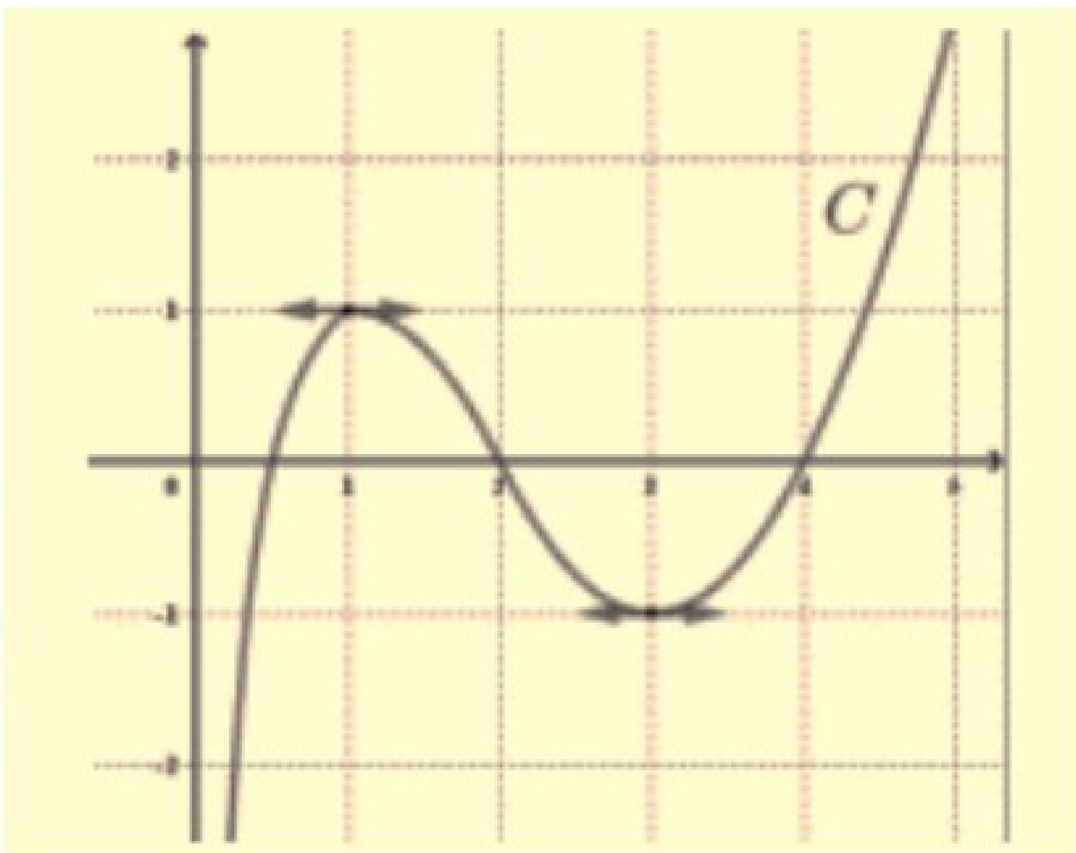
❶ $f(2) = -1$

❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

❸ $x = 1 \ , x = 4$

❹ ***المستقيم*** Δ ***مار من*** $(1,0)$ ***وميله*** 1 ***بالتالي :*** $y = x - 1$

التمرين 8 : دورة 2019 الثانية



في الشكل المرسوم جانباً , ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$, والمطلوب

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

❷ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

❸ جد حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$.

❹ جد $f(]1,3[)$

الحل :

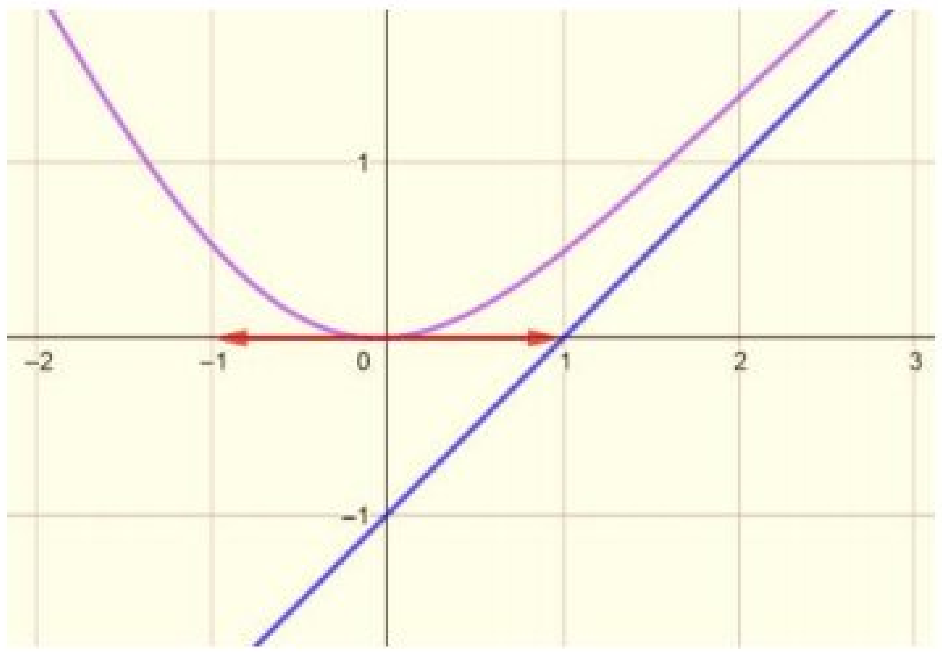
❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

❷ $f\ (\ 3\ ) = -1$ قيمة صغرى محلية و $f\ (\ 1\ ) = 1$ قيمة كبرى محلية

❸ $[1,3]$

❹ $]-1,1[$

التمرين 9 : دورة 2020 الأولى



نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f

المعرف على $\mathbb{R}$ والمستقيم Δ مقارب مائل ل C والمطلوب:

❶ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ اكتب معادلة المستقيم Δ.

❸ جد $f'(0), f(0)$.

❹ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

الحل :

❶ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

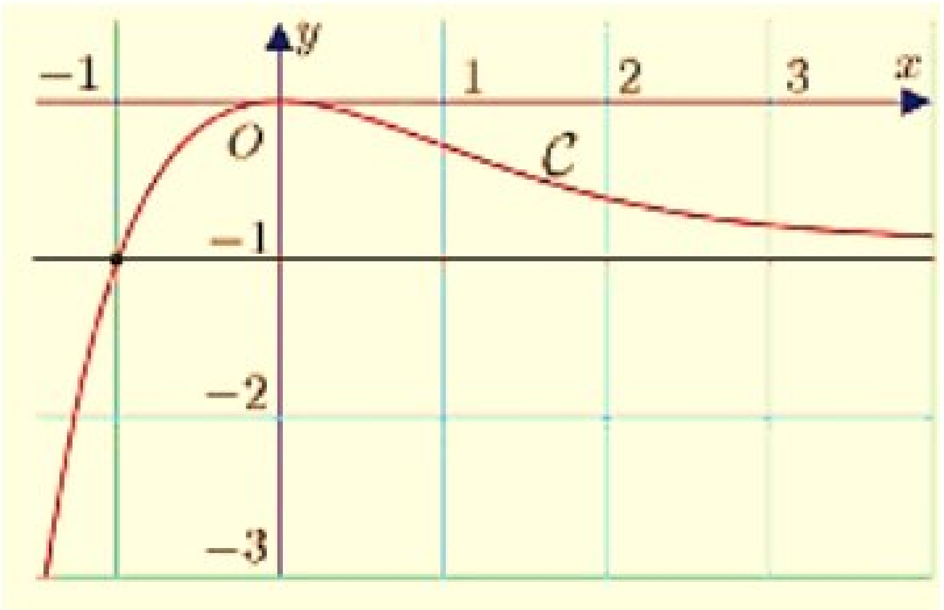
❷ المستقيم Δ مار من $(1,0)$ و $(0,-1)$ وميله 1 بالتالي :

$$y - y_1 = m(x - x_0) \Longrightarrow y - 0 = 1(x+1) \Longrightarrow y = x + 1$$

❸ $f'(0) = 0 \;,\; f(0) = 0$

❹ $]-\infty, 0[$

التمرين 10 : الاختبار 4 (معدل)



في الشكل المجاور خط بياني C لدالّة f،

ومن خلال قراءة بيانيّة للشكل أجب عن الأسئلة التالية:

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *ثم استنتج* $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

❷ ما معادلة المستقيم المقارب للخط C؟

❸ وما الوضع النسبي للخط C مع المقارب؟

❹ يقبل f قيماً حديّة محلّيّاً. عيّنها وعيّن نوعها.

❺ في حالة عدد حقيقي k، عيّن بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$

الحل :

❶ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = f(-1) = -1$

❷ $y = -1$

❸ $x \in]-\infty\,,-1[$ الخط يقع تحت المقارب و $x \in]-1\,,+\infty[$ الخط يقع فوق المقارب

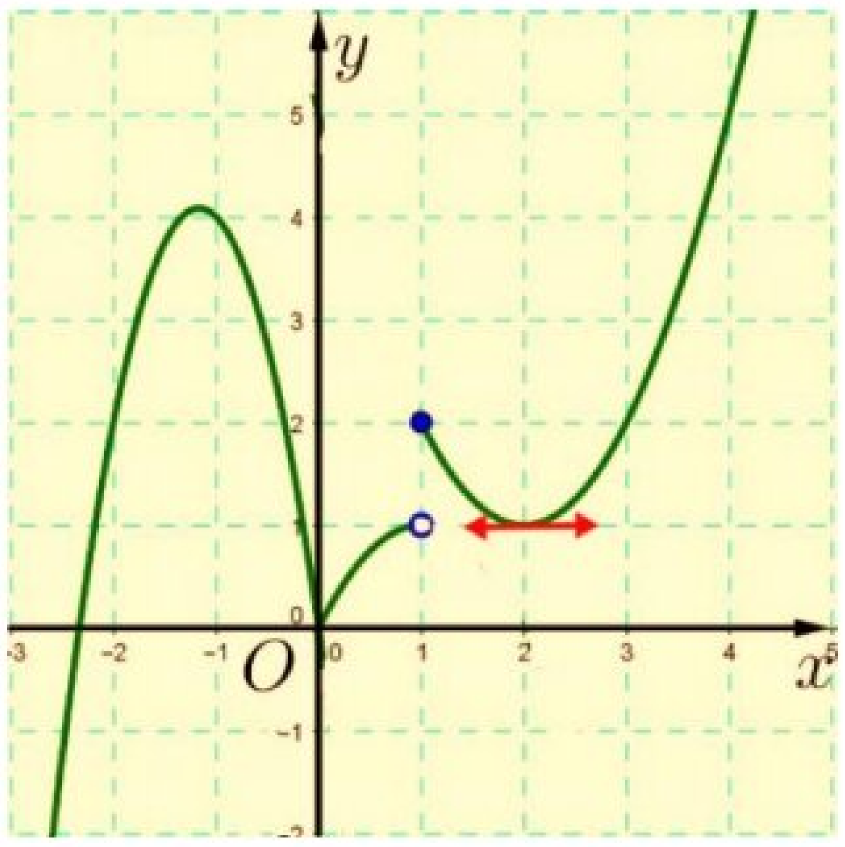
❹ $f(0) = 0$ قيمة كبرى محلية

❺ $k \in]-\infty,-1] \cup \{0\}$ للمعادلة حل وحيد و $k \in]-1,0[$ للمعادلة حلين

و $k \in]0,+\infty[$ ليس للمعادلة حلول

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 11 : النموذج الوزاري الأول



نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$والمطلوب:

❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ ؟

❷ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$ ؟

❸ هل $f(1)$ قيمة محلّيّة كبرى أو صغرى للتابع. علّل ذلك؟

❹ ما عدد القيم الحدّيّة للتابع f ؟

❺ ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$ ؟

❻ أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$ ؟.

الحل :

❶ حل وحيد

❷ $[4\,,+\infty[$

❸ $f(1)$ قيمة محلّيّة كبرى لأنه يوجد جوار I يحقق

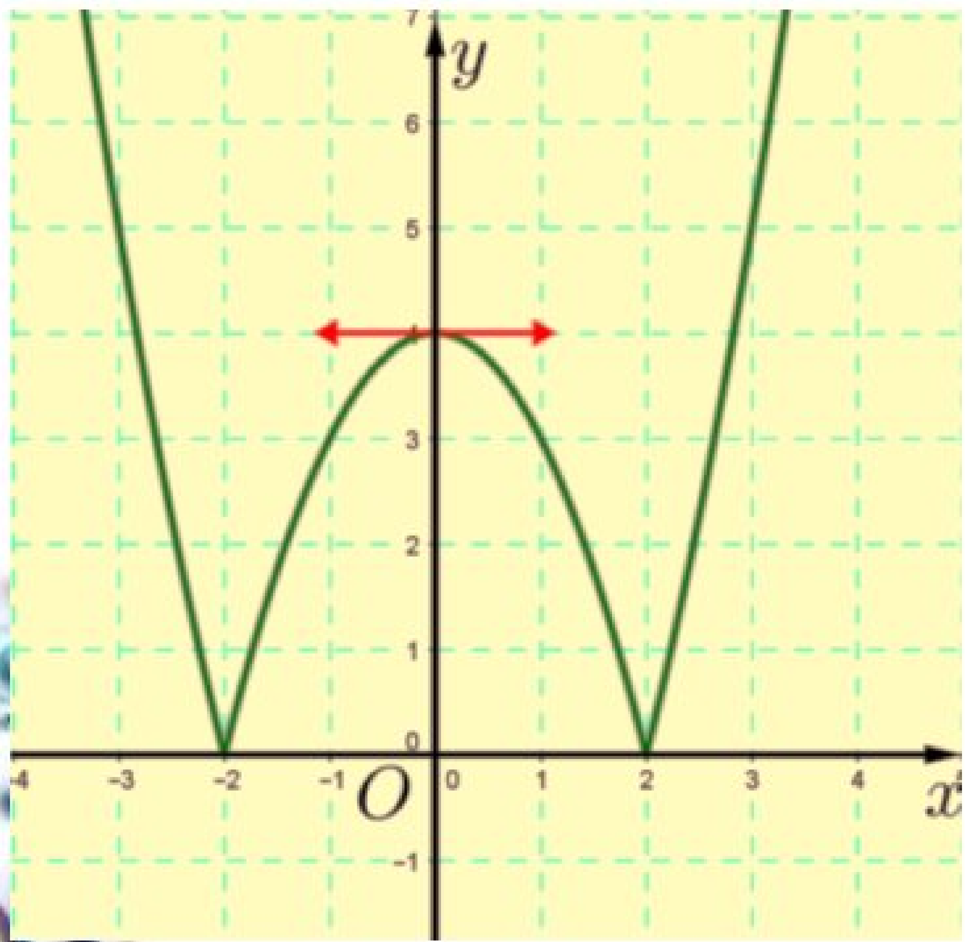
$$\forall x \in I \cap \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) \leq f(1)$$

❹ أربعة

❺ $f'(2) = 0$

❻ التابع f غير مستمر عند $x = 1$ فهو غير اشتقاقي

التمرين 12 : النموذج الوزاري الثالث



تجد جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$والمطلوب:

❶ كم حلا للمعادلة $f(x) = 2$ ؟

❷ احسب قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ؟

❸ عيّن صورة المجال $\mathrm{I} = [-2,2]$ وفق f.

❹ كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f

الحل :

❶ أربعة

❷ $f'(0) = 0$

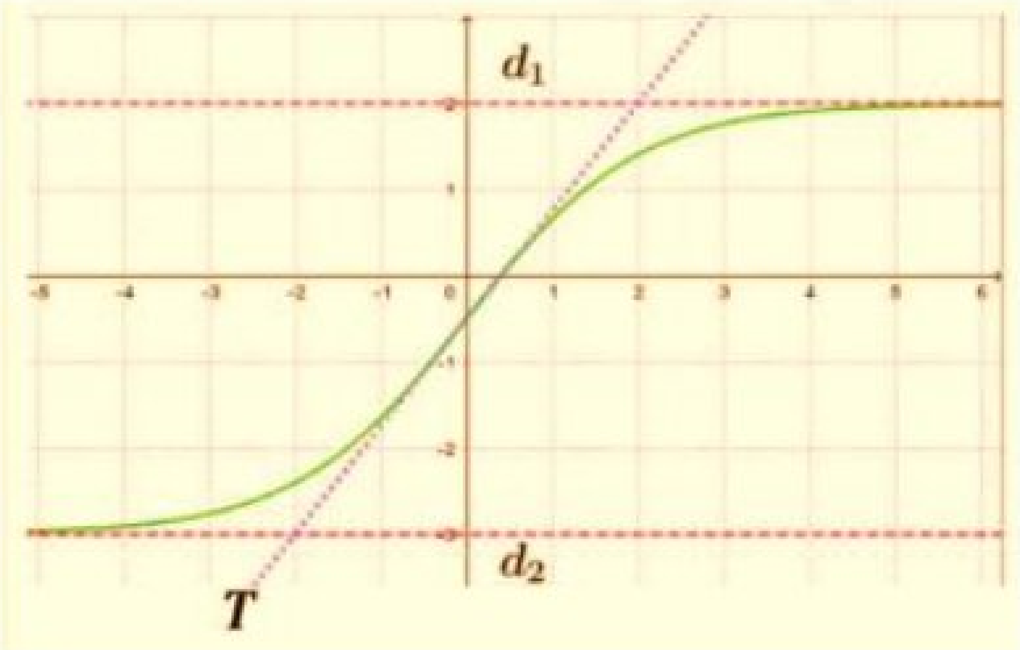
❸ $f([-2,2]) = [0,4]$

❹ صغرى محليا : قيمتان $f(-2) = 0$ و $f(2) = 0$

و كبرى محليا : قيمة واحدة $f(0) = 4$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 13 : النموذج الوزاري 2019



إذا كان C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$
والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T
مماس للخط C
والمطلوب

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1 و d_2 .

إذا علمت ان المستقيم المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ أحسب $f'(0)$ ثم اكتب معادلته

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

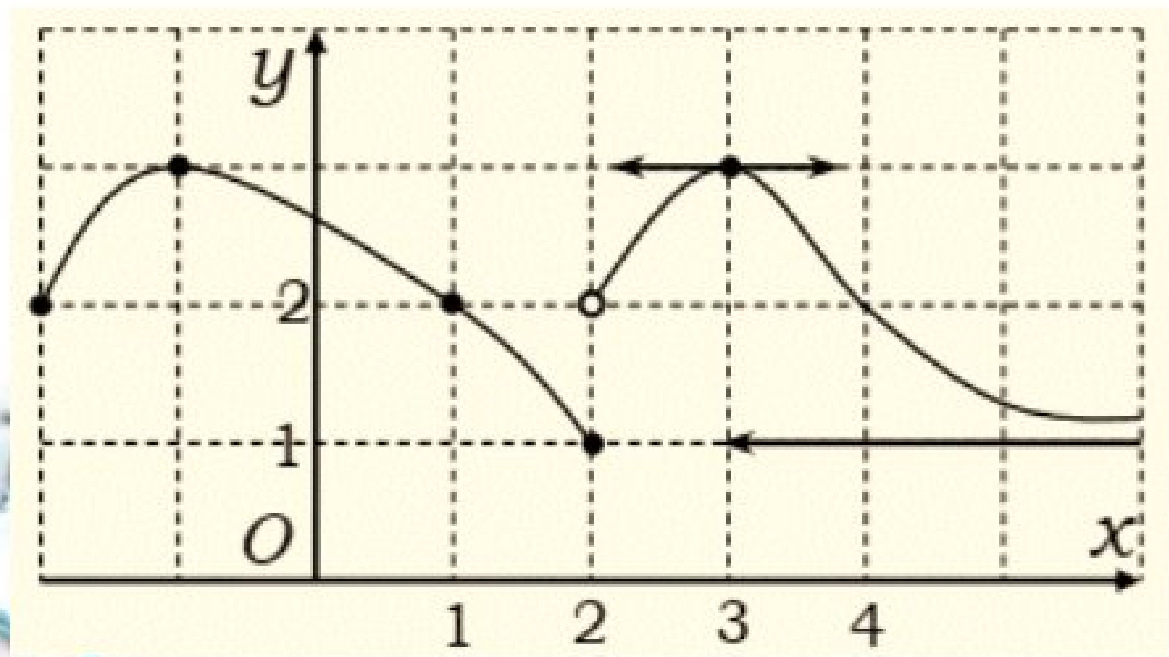
❷ $d_1 : y = 2$ و $d_2 : y = -3$.

المستقيم يمر من النقطتين $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و $(2\,,2)$ بالتالي $f'(0) = \frac{2+\frac{1}{2}}{2-0} = \frac{5}{4}$

معادلته $y - y_1 = m(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x-0) \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

التمرين 14 : النموذج الوزاري الثاني 2020 معدل

ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً والمعرف على المجال $[-2,+\infty[$ والذي يقبل المستقيم $y=1$ مقاربا أفقياً في جوار $+\infty$



❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$.

❷ هل f اشتقاقي عند 2 ؟

❸ جد $f(3), f'(3)$. وجد معادلة للمماس عند 3.

❹ دل على القيم الحدية المحلية للتابع f

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = 2$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$

❷ f غير اشتقاقي عند 2 لأنه غير مستمر عند 2

❸ $f'(3) = 0$, $f(3) = 3$ و معادلة المماس عند 3 هي $y = 3$

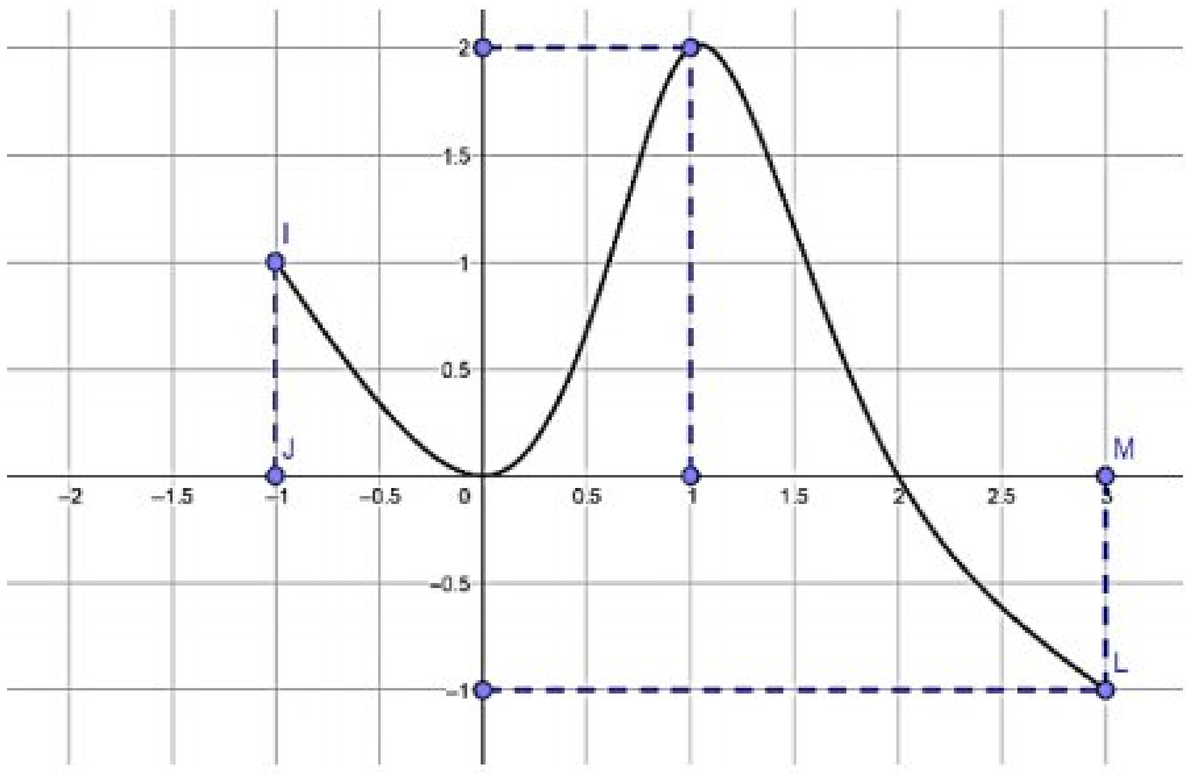
❹ $f(-2) = 2$ قيمة صغرى محلياً

$f(2) = 1$ قيمة صغرى محلياً

$f(-1) = 3$ قيمة كبرى محلياً

$f(3) = 4$ قيمة كبرى محلياً

التمرين 15 :



لدينا التابع f المعرف على المجال $[-1,3]$ واشتقاقي عليه و خطه البياني C

الشكل المرسوم جانباً يمثل الخط البياني للتابع المشتق f' :

❶ **ما هو ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$**

❷ **هل $f(2)$ قيمة حدية للتابع f ؟ علل اجابتك**

❸ **هل $f(0)$ قيمة حدية للتابع f ؟ علل اجابتك**

❹ **ماعدد المماسات الافقية للخط C**

الحل :

❶ $m = f'(1) = 2$

❷ **نعم قيمة حدية لأن مشتق التابع ينعدم عندها و يغير اشارته**

❸ **لا ليست قيمة حدية لأن مشتق التابع ينعدم عندها دون أن يغير اشارته**

❹ **اثنان**

التمرين 16 :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+2 \parallel -3$	$-$
$f(x)$	$-2 \nearrow$	3	$\searrow 2$

تأمل الجدول المجاور الذي يمثل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب

❶ **اوجد** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ **هل التابع f اشتقاقي عند الصفر ، ولماذا**

❸ **اكتب معادلة نصف المماس الأيمن للخط البياني في النقطة التي فاصلتها $x = 0$**

❹ **اوجد** $f(D_f)$

الحل :

❶ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

❷ ***التابع f غير اشتقاقي عند الصفر ، لأنّ*** $f'(0^-) = +2 \neq f'(0^+) = -3$

❸ $f(0) = 3$ **و** $m = f'(0^+) = -3$

و بالتالي : $y - 3 = -3(x - 0)$ ***أي معادلة نصف المماس الأيمن*** $y = -3x + 3$

❹ $f(D_f) =]-2,3] \cup]2,3] =]-2,3]$

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

التمرين 17 :

x	$-\infty$		-1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

تأمل الجدول المجاور الذي يمثل جدول تغييرات

التابع f المعرف على $]-\infty, 3[$ والمطلوب :

❶ ما عدد القيم الحدية وما نوعها ؟

❷ اكتب معادلة المماس الأفقي .

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

❹ هل يملك الخط البياني للتابع f مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ ؟ ولماذا ؟

الحل :

❶ قيمة حدية واحدة , وهي قيمة صغرى $f(-1) = -3$.

❷ معادلة المماس الأفقي $y = -3$.

❸ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد .

❹ ليس للخط البياني للتابع f مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$

وذلك لوجود مقارب أفقي $y = 0$ في جوار $-\infty$

التمرين 18 :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4

تأمل الجدول المجاور الذي يمثل

جدولاً لتغيرات التابع f الذي خطه

البياني C والمطلوب :

❶ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a

❷ استنتج اشارة $f(x)$

❸ دل على المقارب الأفقي وادرس وضعه النسبي مع الخط البياني للتابع

❹ هل يوجد لخط التابع مماسات أفقية ؟ ولماذا ؟

الحل :

❶ التابع f مستمر ومتناقص تماما على $]-\infty, +\infty[$ و $0 \in]-4, +\infty[= f(]-\infty, +\infty[)$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $a \in]-\infty, +\infty[$

❷ $f(x) > 0 \, ; x \in]-\infty, a[\;, f(x) < 0 \, ; x \in]a, +\infty[$

❸ المقارب الأفقي $y = -4$ ومن جدول التغيرات بما أن $f(x) > -4$

فالخط يقع كاملا فوق المقارب

❹ لا يوجد لخط التابع مماسات أفقية لأن المشتق لا ينعدم

التمرين 19 : دورة 2018 الثانية

نجد فيما يلي جدولاً لتغيرات التابع f المعرف على R

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❹ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

❷ $y = 2$

❸ حلين

❹ $f(2) = -1$

التمرين 20 : دورة 2019 الأولى

نجد فيما يلي جدولاً لتغيرات التابع f المعرف علىR

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني للتابع

❸ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

❹ أحسب $f(]-1,2[)$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

❷ $y = 3$

❸ $f(-1) = -2$

❹ $f(]-1,2[) =]-2,4[$

التمرين 21 : دورة 2020 الثانية

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C. المطلوب:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ دل على القيم الحدية للتابع f مبيناً أنواعها.

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❹ جد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

❷ $f(0) = 2$ قيمة صغرى محلية و $f(4) = 6$ قيمة كبرى محلية

❸ حل وحيد

❹ $]0,4[$

التمرين 22 : النموذج الوزاري الرابع

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❷ ما عدد القيم الحدّيّة محلياً للتابع f ؟

❸ اكتب معادلة مماس منحن التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$

الحل :

❶ حل وحيد

❷ قيمة واحدة

❸ $m = f'(1) = 0$ و $f(1) = 1$ بالتالي معادلة المماس $y = f(1) \Rightarrow y = 1$

التمرين 23 : النموذج الوزاري السادس

نجد فيما يأتي جدول تغيّرات التابع f والذي خطّه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3 ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3

❶ اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C

❷ هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C

❸ هل يوجد للخط البياني C مماسات أفقيّة

❹ أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

الحل :

❶ $y=3$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$ و$+\infty$ و $x=-1$ مقارب شاقولي

و $x=1$ مقارب شاقولي

❷ لا , بسبب وجود مقارب أفقي في جوار $-\infty$ و$+\infty$ ❸ لا

❹ التابع f مستمر ومتناقص تماما على $]-1,1[$ و $0\in\,]-\infty,+\infty[\,=f(]-1,1[)$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $x\in\,]-1,1[$

التمرين 24 : النموذج الوزاري الأول 2020

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	4	↗	6

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

❶ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ اذكر قيمة حدية للتابع f وبين نوعها.

❸ هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع؟

❹ اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع.

❺ اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=ln\big(f(x)\big)$

الحل :

❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=6$.

❷ $f(2)=0$ قيمة صغرى محلية

❸ لا

❹ $y=2$, $y=6$

❺ التابع g معرف بشرط $f(x)>0$ وبالتالي $D=\,]-\infty\,,2[\,\cup\,]2\,,+\infty[$

التمرين 25 :

فيما يلي جدول تغيرات التابع المعرف على $I=]-\infty\,,3]$ والمطلوب :

x	$-\infty$		1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

❶ جد $f(I)$

❷ ما عدد القيم الحدية

❸ ما عدد المماسات الأفقية , أكتب معادلاتها

❹ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

❺ أدرس اشارة f تبعا لقيم x

❻ ليكن التابع $g(x)$ المعرف على $I=]-\infty\,,3]$ ويحقق :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\ ,\ g(3)=2\ ,\ g(1)=1\ \ ,\ g'(x)=f(x)$$

نظم جدولا بتغيرات $g(x)$

الحل :

❶ $f(]-\infty\,,3])=]-1\,,3]$

❷ قيمتين

❸ ثلاث مماسات : $y=0\ ,y=1\ ,y=3$

❹ حل وحيد

❺ $f(x)<0: x\in]-\infty\,,1[$ و $f(x)>0: x\in]1\,,3[$ و $f(x)=0: x=1$

❻ التابع $g(x)$ معرف على $I=]-\infty\,,3]$ و جدول تغيراته :

x	$-\infty$		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

التمرين 26 : دورة 2018 الأولى

ليكن f التابع المعرف R وفق: $f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$, أثبت محدودية f و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3+\cos x}$

الحل

من اجل x من $\mathbb{R}$ فإن $-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 2\le 3+\cos x\le 4\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\ge\frac{1}{3+\cos x}\ge\frac{1}{4}\ \Rightarrow\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\cos x}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{4}\le\frac{x^2}{3+\cos x}\le\frac{x^2}{2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4}=+\infty$ بالتالي حسب مبرهنة المقارنة نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3+\cos x}=+\infty$

التمرين 27 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{x^2+\cos x}{x^2}$

❶ بين أنه من اجل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$

❷ استنتج نهايتي التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$

الحل :

❶ من اجل x من $\mathbb{R}^*$ فإن

$$-1\le \cos x\le 1 \Rightarrow x^2-1\le x^2+\cos x\le 1+x^2 \Rightarrow$$
$$\frac{x^2-1}{x^2}\le\frac{x^2+\cos x}{x^2}\le\frac{1+x^2}{x^2} \Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$$

❷ حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

التمرين 28 : النموذج الوزاري الأول

احسب نهاية التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x+sinx}{x-2}$ عند $+\infty$

الحل :

من اجل $x\in]2,+\infty[$ فإن :

$$-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow 2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-2}\le\frac{2x+\sin x}{x-2}\le\frac{2x+1}{x-2}$$

حسب مبرهنة الاحاطة $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin x}{x-2}=2$

التمرين 29 : النموذج الوزاري السادس

عيّن مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{sinx}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر

الحل :

التابع معرف بشرط $1+x\ge 0$ و $\sqrt{1+x}-1\ne 0$

$$\sqrt{1+x}-1\ne 0 \Rightarrow \sqrt{1+x}\ne 1 \Rightarrow x\ne 0 \quad , \quad 1+x\ge 0 \Rightarrow x\ge -1$$

وبالتالي التابع معرف على $[-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)=1\times 2=2$$

التمرين 30 : النموذج الوزاري الثالث

إذا كان $f(x) = \frac{cosx-1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}^*$ أوجد نهاية التابع f عند الصفر

الحل :

$$f(x) = \frac{cosx-1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} + \frac{1}{2} = -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 + \frac{1}{2} = -2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)(1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

طريقة ثانية :

$$f(x) = \frac{cosx-1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{(cosx-1)(cosx+1)}{x^2(cosx+1)} + \frac{1}{2} = \frac{cos^2x-1}{x^2(cosx+1)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{x^2(cosx+1)} + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{cosx+1}\right) + \frac{1}{2} = -(1)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

التمرين 31 : الاختبار 3

ليكن التابع f المعرّف بالصيغة $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - |x|$ احسب النهايتين:

$$1 - \lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad\qquad 2 - \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

الحل :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|} = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|} = \frac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|} = \frac{2x+3}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} & : x > 0 \\[2ex] -\dfrac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} & : x < 0 \end{cases}$$

❶ $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

❷ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} = -\frac{2}{2} = -1$$

التمرين 32 :

جد نهاية كلا مما يلي عند النقطة $x = a$

1- $f(x) = x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} - \sqrt{2}\right) \qquad a = +\infty$

2- $f(x) = \frac{sin4x-2sin2x}{x^3} \qquad a = 0$

3- $f(x) = \frac{sin(7x)+2sin(3x)}{10xcos(2x)} \qquad a = 0$

4- $f(x) = \frac{2-2cos\sqrt{x}}{x} \qquad a = 0$

5- $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \qquad a = 2$

6- $f(x) = \frac{x^3-8x+7}{x^2-1} \qquad a = 1, -1$

7- $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+E(x)}{x} \qquad a = 0^-$

8- $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+E(x)}{x} \qquad a = +\infty$

9- $f(x) = \frac{xE(x)}{1-x^2} \qquad a = +\infty$

10- $f(x) = x + \sqrt{1-x} \qquad a = -\infty$

11- $f(x) = 2x - \sqrt{1+x} \qquad a = +\infty$

الحل :

1- $f(x) = x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} - \sqrt{2}\right) \qquad a = +\infty$

$$f(x) = x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} - \sqrt{2}\right) = x^2\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} + \sqrt{2}\right)} = \frac{x}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}} + \sqrt{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}} = +\infty$$

2- $f(x)=\frac{\sin 4x-2\sin 2x}{x^3} \qquad a=0$

$$f(x)=\frac{\sin 4x-2\sin 2x}{x^3}=\frac{2\sin 2x\cos 2x-2\sin 2x}{x^3}=\frac{2\sin 2x(\cos 2x-1)}{x^3}$$

$$=\frac{2\sin 2x(-2\sin^2 x)}{x^3}=-4\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}=-8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-8(1)(1)=-8$$

3- $f(x)=\frac{\sin(7x)+\sin(3x)}{10x\cos(2x)} \qquad a=0$

$$f(x)=\frac{\sin(7x)+\sin(3x)}{10x\cos(2x)}=\frac{2\sin(5x)\cos(2x)}{10x\cos(2x)}=\frac{\sin(5x)}{5x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=1$$

4- $f(x)=\frac{2-2\cos\sqrt{x}}{x} \qquad a=0$

$$f(x)=\frac{2-2\cos\sqrt{x}}{x}=\frac{2(1-\cos\sqrt{x})}{x}=\frac{2(1-\cos\sqrt{x})(1+\cos\sqrt{x})}{x(1+\cos\sqrt{x})}$$

$$=\frac{2\left(1-\cos^2(\sqrt{x})\right)}{x(1+\cos\sqrt{x})}=\frac{2\sin^2(\sqrt{x})}{x(1+\cos\sqrt{x})}=\left(\frac{\sin^2(\sqrt{x})}{x}\right)\times\frac{2}{(1+\cos\sqrt{x})}$$

$$=\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\times\frac{2}{(1+\cos\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\times\frac{2}{(1+\cos\sqrt{x})}=1\times 1=1$$

5- $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ $\qquad a=2$

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{(x\sqrt{x}-2\sqrt{2})(x\sqrt{x}+2\sqrt{2})}{(x\sqrt{x}+2\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$f(x)=\frac{x^3-8}{(x\sqrt{x}+2\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x\sqrt{x}+2\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)}$$
$$=\frac{(x^2+2x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x\sqrt{x}+2\sqrt{2})}$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x\sqrt{x}+2\sqrt{2})}=\frac{(4+4+4)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})}=6$$

6- $f(x)=\frac{x^3-8x+7}{x^2-1}$ $\qquad a=1,-1$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3-8x+7}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3-8x+7}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-8x+7}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-7)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-7)}{(x+1)}=\frac{-5}{2}$$

7- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+E(x)}{x}$ $\qquad a=0^-$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+E(x)}{x}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\quad : \quad E(x)=-1\ ; x\in[-1\,,0[$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}$$

8- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+E(x)}{x}$ $\qquad a=+\infty$

$$x-1<E(x)\le x \Rightarrow x-1+\sqrt{x+1}<\sqrt{x+1}+E(x)\le x+\sqrt{x+1} \Rightarrow$$

$$\frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x}<\frac{\sqrt{x+1}+E(x)}{x}\le\frac{x+\sqrt{x+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)=1+0+0=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)=1+0=1$$

حسب مبرهنة الاحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

9- $f(x)=\frac{xE(x)}{1-x^2}$ $\qquad a=+\infty$

$$x-1<E(x)\le x \Rightarrow x^2-x<xE(x)\le x^2 \Rightarrow$$

في حالة $x>1$ يكون $1-x^2<0$ بالتالي :

$$\frac{x^2-x}{1-x^2}>\frac{xE(x)}{1-x^2}\ge\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=-1$$

بالتالي حسب مبرهنة الاحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

10- $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ $\qquad a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)\left(\frac{x}{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=+\infty(-1+0)=-\infty$$

11- $f(x)=2x-\sqrt{1+x}$ $\qquad a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(1+x)\left(\frac{2x}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)=+\infty(2-0)=+\infty$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 33 :

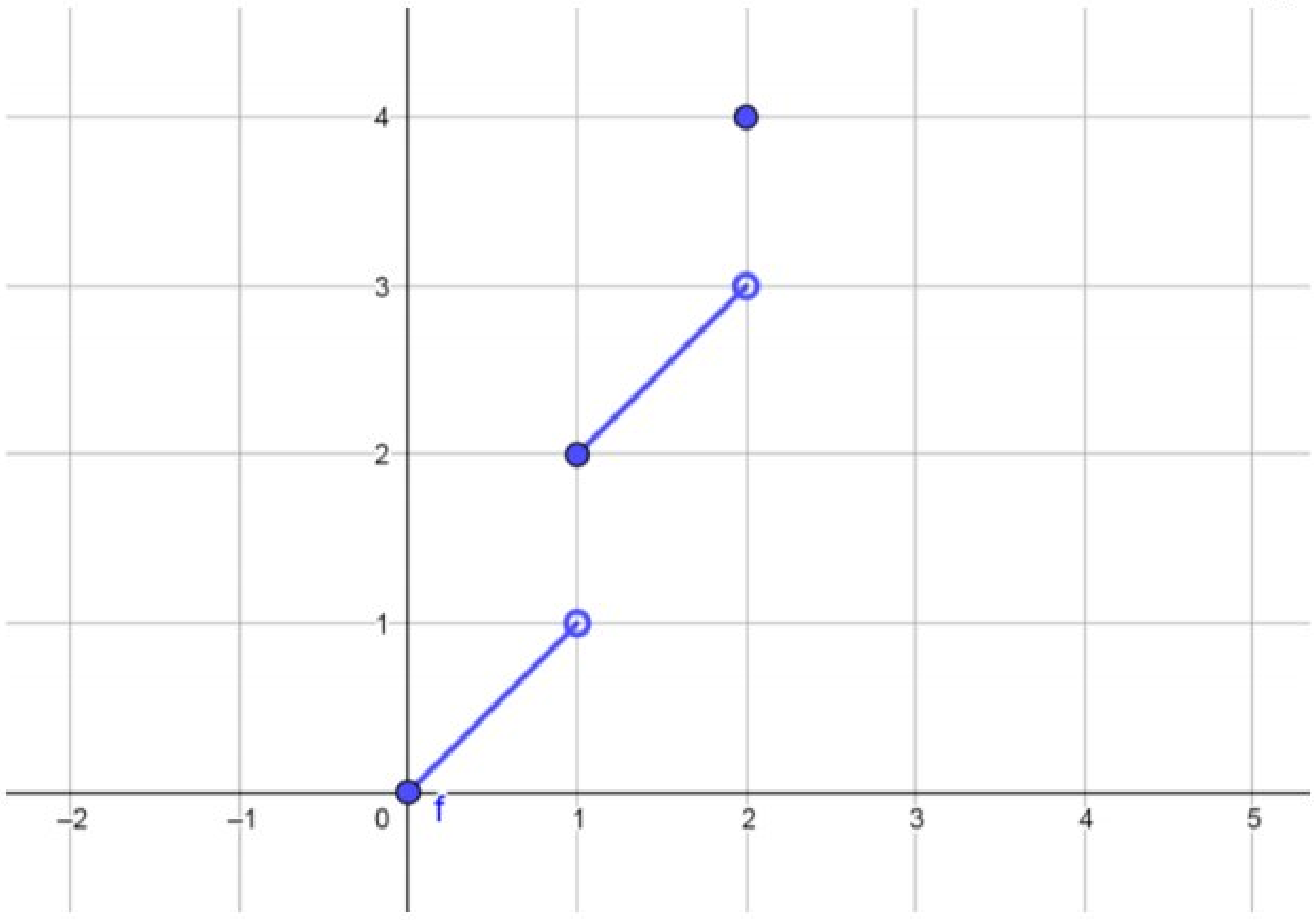
ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق : $f(x) = x + E(x)$ **والمطلوب :**

❶ **أرسم C الخط البياني للتابع f على المجال** $[0,2]$

❷ **هل f مستمر على المجال** $[0,2]$

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1[\\ x+1 & x \in [1,2[\\ 4 & x = 2 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq f(1) = (1+1) = 2$ **بما أن :** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

فالتابع غير مستمر عند $x = 1$ **وبالتالي التابع f غير مستمر على المجال** $[\,0\,,2\,]$

التمرين 34 : دورة 2020 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x - E(x)$. **المطلوب:**

❶ **اكتب** $f(x)$ **بصيغة مستقلة عن** $E(x)$ **على المجال** $[0,2[$.

❷ **ثم جد** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

الحل :

❶ $$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1[\\ x-1 & x \in [1,2[\end{cases}$$

❷ $x - 1 < E(x) \leq x \Rightarrow -x + 1 > -E(x) \geq -x \Rightarrow 1 > x - E(x) \geq 0$

$\frac{1}{x^2} > \frac{f(x)}{x^2} \geq 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow$ **حسب مبرهنة الاحاطة** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

التمرين 35 :

ليكن التابع f والمعرف على $[-1,+\infty[$ و المعطى بالعلاقة وفق :

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$

❶ **جد نهاية التابع f عند** 3

❷ **جد مجال I مركزه 3 يحقق الشرط :**

اذا كان $x\in I$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]1.9,2.1[$.

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+1}=2$

❷ $|f(x)-2|=\left|\sqrt{x+1}-2\right|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2}$

في حالة $x>0$ **يكون** $x+1>1\Rightarrow\sqrt{x+1}>1\Rightarrow\sqrt{x+1}+2>3$ **بالتالي**

$$x+1>1\Rightarrow\sqrt{x+1}>1\Rightarrow\sqrt{x+1}+2>3\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{1}{3}$$

$$|f(x)-2|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{|x-3|}{3}<0.1\Rightarrow|x-3|<0.3\Rightarrow$$

$$x\in]3-0.3,3+0.3[=]2.7,3.3[$$

التمرين 36 :

أوجد نهاية التابع f المُعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$ عند 1 ، ثمّ أوجد مجالاً I مركزه 1 يُحقّق الشرط إذا كان x ينتمي إلى المجال I، كان $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1.99,2.01[$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3}{x+1}=2$

❷ $|f(x)-2|=\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|=\left|\frac{-x+1}{x+1}\right|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

في حالة $x>0$ **يكون** $|x+1|>1$ **ومنه يمكن أن نضع**

$$|f(x)-2|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<\frac{|x-1|}{1}<0.01\Rightarrow|x-1|<0.01\Rightarrow$$

$$x\in]1-0.01,1+0.01[=]0.99,1.01[$$

التمرين 37 :

ليكن التابع f والمعرف على $]-\infty,1[$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{3x-1}{x-1}$

❶ أوجد نهاية التابع f عند $-\infty$

❷ أوجد قيمة A التي تحقق الشرط : اذا كان $x<A$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]2.99,3.01[$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x+1}=3$

❷ $f(x)\in]2.99,3.01[$ مركز المجال هو 3 ونصف قطره 0.01 $\Leftarrow$

$$|f(x)-3|<0.01\Rightarrow\left|\frac{3x}{x+1}-3\right|<0.01$$

$$\Rightarrow\left|\frac{3x-3x-3}{x+1}\right|<0.01\Rightarrow\left|\frac{-3}{x+1}\right|<0.01$$

$$x\in]-\infty,-1[\Rightarrow|x+1|=-x-1\Rightarrow\frac{3}{-x-1}<\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\frac{-x-1}{3}>100$$

$$\Rightarrow -x-1>300\Rightarrow -x>301\Rightarrow x<-301\Rightarrow A\le-301$$

التمرين 38 :

ليكن التابع f والمعرف على $]1,+\infty[$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$

❶ أوجد نهاية التابع f عند $+\infty$

❷ أوجد قيمة A التي تحقق الشرط : اذا كان $x>A$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]4.9,5.1[$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-1}{x-1}=5$

❷ $f(x)\in]4.9,5.1[$ مركز المجال هو 5 ونصف قطره 0.1 $\Leftarrow$

$$|f(x)-5|<0.1\Rightarrow\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<0.1\Rightarrow\left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<0.1\Rightarrow\left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$x\in]1,+\infty[\Rightarrow\frac{x-1}{4}>10\Rightarrow x-1>40\Rightarrow x>41\Rightarrow A\ge41$$

التمرين 39 : النموذج الوزاري الأول 2020

ليكن التابع f المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$. والمطلوب:

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

❷ جد عدداً حقيقياً يحقق الشرط: إذا كان $x>A$, كان $f(x)$ في المجال $]1.99,2.01[$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+5}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=\lim\limits_{x\to2} f(x)=\frac{5}{7}$

❷ $f(x)\in]1.99,2.01[$ مركز المجال هو 2 ونصف قطره 0.01 $\Leftarrow$

$$|f(x)-2|<0.01\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x+5}-2\right|<0.01$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2x+1-2x-10}{x+5}\right|<0.01\Rightarrow\left|\frac{-9}{x+5}\right|<\frac{1}{100}$$

$$x\in]-5,+\infty[\Rightarrow\frac{x+5}{9}>100\Rightarrow x+5>900\Rightarrow x>895\Rightarrow A\geq895$$

التمرين 40 :

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم عين عددا $\propto$ يحقق الشرط :

اذا كان x عنصرا من المجال $]1-\propto,1+\propto[$ مختلفا عن 1 كان $f(x)>10^5$

الحل :

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{5x-1}{(x-1)^2}=+\infty$ وبما ان $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^5$

البسط يسعى نحو 4 عندما x تسعى نحو 1 لذلك نختار $5x-1>3.6$

في حالة $x>0.92$ و $x\neq1$ اي :

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{3.6}{(x-1)^2}>10^5\Rightarrow(x-1)^2<\frac{3.6}{10^5}\Rightarrow(x-1)^2<\frac{36}{10^6}\Rightarrow|x-1|<\frac{6}{10^3}$$

$$\Rightarrow|x-1|<0.006$$

وبالتالي : $I=]1-0.006,1+0.006[=]0.994,1.006[$

التمرين 41 : الاختبار 2

أوجد نهاية التابع f المعرّف بالعلاقة $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$

ثمّ اعط عدداً حقيقيّاً α يحقّق الشرط : إذا كان $x > \alpha$ كان $f(x) \in]2.9,3.1[$.

الحل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{x+1}\right) = 3$$

$$f(x) \in]2.9,3.1[\iff 2.9 < \frac{3x+4}{x+1} < 3.1 \Rightarrow 2.9 < 3 + \frac{1}{x+1} < 3.1 \Rightarrow -0.1 < \frac{1}{x+1} < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < 0.1$$

$$\Rightarrow |x+1| > 10 \Rightarrow x+1 > 10 \Rightarrow x > 9 \Rightarrow \alpha \geq 9$$

طريقة ثانية : $|f(x) - 3| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{3x+4}{x+1} - 3\right| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < 0.1 \Rightarrow |x+1| > 10$

$$\Rightarrow x+1 > 10 \Rightarrow x > 9 \Rightarrow \alpha \geq 9$$

التمرين 42 :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x+3}{x+3} & x \neq -3 \\ m & x = -3 \end{cases}$$

والمطلوب : ما قيمة m التي تجعل f مستمرا على $\mathbb{R}$

الحل :

$x \mapsto \frac{x^2+4x+3}{x+3}$ مستمر على كل من المجالين $]-3,+\infty[$, $]-\infty,-3[$ فهو مستمر على $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$

يكون f مستمرا على $\mathbb{R}$ اذا كان مستمرا عند $x = -3$ أي $\lim_{x\to-3} f(x) = f(-3) = m$

$\Rightarrow$ حالة تعيين من الشكل $\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{x^2+4x+3}{x+3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{(x+1)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to-3}(x+1) = -2 \Rightarrow m = -2$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 43 : دورة 2019 الثانية

ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x)=\begin{cases} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & x\neq 0 \\ m & x=0 \end{cases}$

❶ جد نهاية التابع f عند الصفر

❷ عين قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر

الحل :

❶ حالة تعيين من الشكل $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}\times\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}+1=2\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2\times 1=2$$

❷ $x\mapsto x\sin x$ مستمر على $\mathbb{R}$ و $x\mapsto\sqrt{x^2+1}-1$

مستمر على $\mathbb{R}$ و ينعدم فقط عند $x=0$

بالتالي $x\mapsto\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ مستمر على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ و يكون f مستمرا على $\mathbb{R}$

اذا كان مستمرا عند $x=0$ أي $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=m\Rightarrow m=2$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 44 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{d\}$

وفق : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$ حيث $a\,,b\,,c\,,d\in R$

❶ جد الأعداد الحقيقية $a\,,b\,,c\,,d$ علما" أن الخواص الآتية محققة

a/ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=1$ مقارب للخط البياني C

b/ المستقيم المائل الذي معادلته $y=-2x+3$ مقارب للخط البياني C

c/ الخط البياني C يمر بالنقطة $A(2,1)$

❷ أثبت أن $2-x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ و أن $f(2-x)+f(x)=2$ ماذا تستنتج ؟

الحل :

❶ a/ $\lim\limits_{x\to d}f(x)=\pm\infty$ و بالتالي $x=d$ مقارب شاقولي للخط C

و بما أنّ : $x=1$ مقارب شاقولي للخط البياني C فإنّ : $d=1$

b/ $f(x)-(ax+b)=ax+b+\frac{c}{x-d}-(ax+b)=\frac{c}{x-d}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-(ax+b)=0\Rightarrow$ C مقارب مائل للخط $y=ax+b$

و بما أنّ : $y=-2x+3$ مقارب للخط البياني C ، أي : $a=-2\;,b=3$

c/ $f(x)=-2x+3+\frac{c}{x-1}$ و الخط C يمر من $A(2,1)$ فإنّ :

$f(2)=-2(2)+3+\frac{c}{2-1}=1\Rightarrow c=2$ و بالتالي : $f(x)=-2x+3+\frac{2}{x-1}$

❷ $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Rightarrow\ 2-x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(2-x)=-2(2-x)+3+\frac{2}{2-x-1}=2x-1+\frac{2}{1-x}$$

$$f(2-x)+f(x)=2x-1+\frac{2}{1-x}-2x+3+\frac{2}{x-1}=2$$

بالتالي الخط C متناظر بالنسبة للنقطة $(1,1)$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 45 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}$ والمطلوب :

❶ جد a , b اذا علمت أن $f(1) = 1$ قيمة حدية للتابع

❷ من أجل $a = 1$ و $b = -1$ ادرس نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف واستنتج معادلة المقارب الشاقولي

❸ أثبت أن C يقبل مقاربا مائلا جد معادلته وادرس وضع C بالنسبة له

❹ أدرس تغيرات f على مجموعة تعريفه ونظم جدولا بها وارسم المقاربات وارسم C

❺ أثبت أن النقطة $Q(0 , -1)$ مركز تناظر للخط البياني للتابع

❻ ناقش بيانيا بحسب قيم m عدد حلول المعادلة $x^2 - x(m+1) + 1 = 0$

الحل :

❶ $f(x) = ax + b + \frac{1}{x} \quad , \quad f'(x) = a - \frac{1}{x^2}$

$$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + 1 = 1 \Rightarrow a = -b \quad ①$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad ②$$

$a = 1$ نعوض في نجد : $b = -1$

❷ $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} \quad : \quad x \in]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$x = 0$ محور التراتيب مقارب شاقولي للخط C

❸ $f(x) - (x-1) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

بالتالي المستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$ و $+\infty$

$f(x) - (x-1) = \frac{1}{x} < 0 : \ x \in]-\infty , 0[$ والخط C يقع تحت المقارب

$f(x) - (x-1) = \frac{1}{x} > 0 : \ x \in]0 , +\infty[$ والخط C يقع فوق المقارب

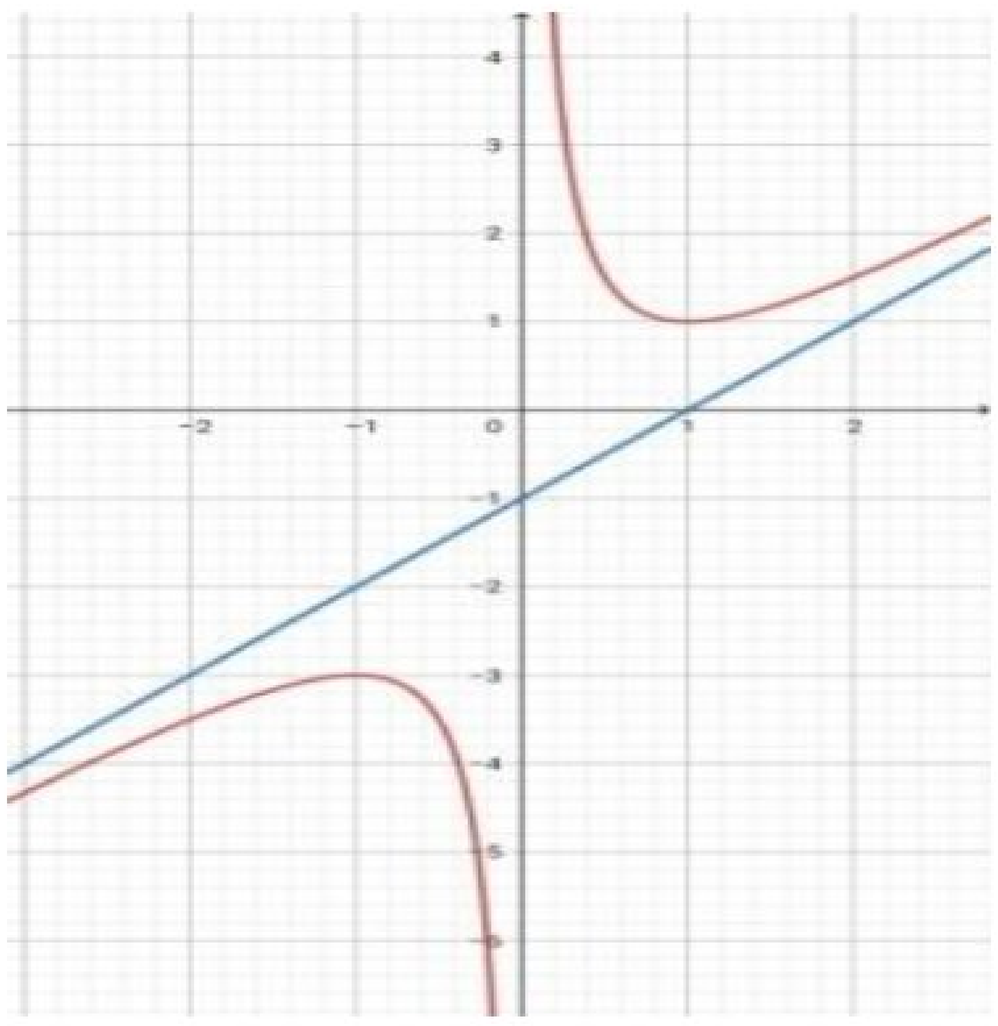
وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038 | زياد داوود — سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183 | مروان بجور — حمص 0930170828

❹ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ **المقام موجب فإشارة المشتق من اشارة المقدار**

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = -3 \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$



❺

$$x_0 = 0 \ , \ y_0 = 0 \ , \ 2x_0 - x = -x$$

$$\forall x \in D \Rightarrow 2x_0 - x \in D$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$$

$$f(-x) + f(x) = -x - 1 - \frac{1}{x} + x - 1 + \frac{1}{x} = -2$$

بالتالي لنقطة $Q(0, -1)$ **مركز تناظر للخط البياني للتابع** f

❻

$$x^2 - x(m+1) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - mx - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = mx \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x} = m \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x} = m \Rightarrow f(x) = m$$

$m \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ **للمعادلة حلين** $m \in \{-3, 1\}$ **للمعادلة حل وحيد**

و $m \in]-3, 1[$ **ليس للمعادلة حلول**

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 46 :

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{x^2-x-5}{x-2}$ المعرف على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ والمطلوب :

❶ أحسب نهاية التابع f عند أطراف مجموعة التعريف

❷ أكتب التابع f بالشكل $f(x)=x+1-\frac{3}{x-2}$

❸ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع الخط البياني C

الحل :

❶

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-5}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-x-5}{x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-x-5}{x-2}=-\infty \quad ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-5}{x-2}=+\infty$$

❷ بالقسمة الاقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x-2 & x^2 \quad -x \quad -5 \\ & \mp x^2 \pm 2x \\ \hline & 0 + x - 5 \\ & \mp x \pm 2 \\ \hline & -3 \end{array}$$

وبالتالي : $f(x)=x+1-\frac{3}{x-2}$

❸ $f(x)-(x+1)=x+1-\frac{3}{x-2}-(x+1)=-\frac{3}{x-2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{x-2}=0 \Rightarrow$ وبالتالي $y=x+1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي :

x	$-\infty$ $\quad$ 2	$+\infty$
اشارة $-\frac{3}{x-2}$	$+$	$-$
	C يقع فوق d	C يقع تحت d

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 093649703	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

التمرين 47 : دورة 2019 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}^*$ وفق : $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$ والمطلوب :

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

و ادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم Δ

الحل :

$$f(x) - (x+3) = -\frac{1}{x^2} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

وبالتالي $y = x + 3$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

$f(x) - (x+3) = -\frac{1}{x^2} < 0$ بالتالي الخط C يقع تحت المقارب Δ على $\mathbb{R}^*$

التمرين 48 : دورة 2020 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

والمطلوب:

❶ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

❷ ادرس الوضع النسبي بين C وΔ.

الحل :

❶ $$f(x) - (2x) = x + \sqrt{x^2+1} - 2x = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(f(x) - (2x)\right) = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(f(x) - (2x)\right) = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = 0$$

ومنه فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❷ دراسة الوضع النسبي : $f(x) - (2x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$$x^2 + 1 > x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \geq x \Longrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Longrightarrow$$

بالتالي الخط C يقع فوق المقارب Δ على $\mathbb{R}$

التمرين 49 :

ليكن لدينا التابع $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ المعرف على $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

والمطلوب :

❶ أدرس قابلية الاشتقاق للتابع $f(x)$ عند $x = 1$ ثم أوجد $f'(x)$ على المجال $]1, +\infty[$

❷ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

ثم أدرس الوضع النسبي للمقاربΔ والخط C

❸ نرمز بالرمز h للتابع المعرف على $I =]e, +\infty[$ فق $h(x) = f(lnx)$

أثبت أن h اشتقاقي على $]e, +\infty[$ ثم استنتج $h'(x)$ على I

الحل :

❶
$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) - 1}{x - 1} = \frac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \left(1 - \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\right) = -\infty$$

طريقة ثانية لإيجاد النهاية :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{(x - 1)\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-2(x - 1)}{(x - 1)\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-2}{x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}} = -\infty$$

وبالتالي $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند $x = 1$ ، $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

❷ $f(x)-(2x)=x-\sqrt{x^2-1}-2x=-\sqrt{x^2-1}-x$

حالة عدم تعيين من الشكل

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(2x))=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{x^2-1}-x\right)=-\infty+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(2x))=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x}\right)=0$$

ومنه فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي :

$$f(x)-(2x)=-\sqrt{x^2-1}-x$$

مستحيلة $-\sqrt{x^2-1}-x=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=-x \xRightarrow{-x>0\Rightarrow x<0} x^2-1=x^2$

والاشارة ثابتة في كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1]$ لتحديد الاشارات نختار قيمة من كل مجال

x	$-\infty$ -1		1 $+\infty$
اشارة $-\sqrt{x^2-1}-x$	$+$		$-$
	الخط C يقع فوق المقارب		الخط C يقع تحت المقارب

❸ $x\mapsto lnx$ **اشتقاقي على** $]e,+\infty[$ و $I=]e,+\infty[$ و $ln\,x>1$

وبالتالي $h(x)=f(lnx)$ **اشتقاقي على** $I=]e,+\infty[$

$$h'(x)=f'(lnx)\,(lnx)'=$$

$$\left(1-\frac{lnx}{\sqrt{(lnx)^2-1}}\right)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{lnx}{x\sqrt{(lnx)^2-1}}=\frac{\sqrt{(lnx)^2-1}-lnx}{x\sqrt{(lnx)^2-1}}$$

التمرين 50 : دورة 2017 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي بين Δ و C .

الحل :

❶

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = +\infty$$

❷

$$f(x) - (x+1) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1\right)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

وبالتالي $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❸ $f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x^2 + 1 = x^2$ مستحيلة

والاشارة ثابتة على $\mathbb{R}$

ولتحديد الاشارة نختار قيمة ولتكن 0 يكون $\frac{0}{\sqrt{0+1}} - 1 = -1 < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
اشارة $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$	$-$
	C يقع تحت d

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 51 :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

❶ **احسب** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **ثم** $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (x+1)\right)$

واستنتج المقارب المائل Δ عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي بين Δ و C.

❷ **احسب** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **ثم أثبت وجود عدد حقيقي a بحيث** $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ **وان**
$\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = b$

استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C عند $-\infty$

❸ **ادرس التغيرات وارسم الخط البياني.**

الحل :

❶

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2+2x+4 - (x^2+2x+1)\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\left(\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)\right)} = 0$$

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1) =$$

$$\sqrt{x^2+2x+1+3} - (x+1) = \sqrt{(x+1)^2+3} - (x+1) > 0$$

والخط C يقع فوق المقارب على $\mathbb{R}$

وسيم فاطمة　　زياد داوود　　أحمد الشيخ عيسى　　مروان بجور
اللاذقية 0936497038　　سلمية 0936834268　　الرقة 0988024183　　حمص 0930170828

❷
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}=-\sqrt{1+0+0}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}=-1$$

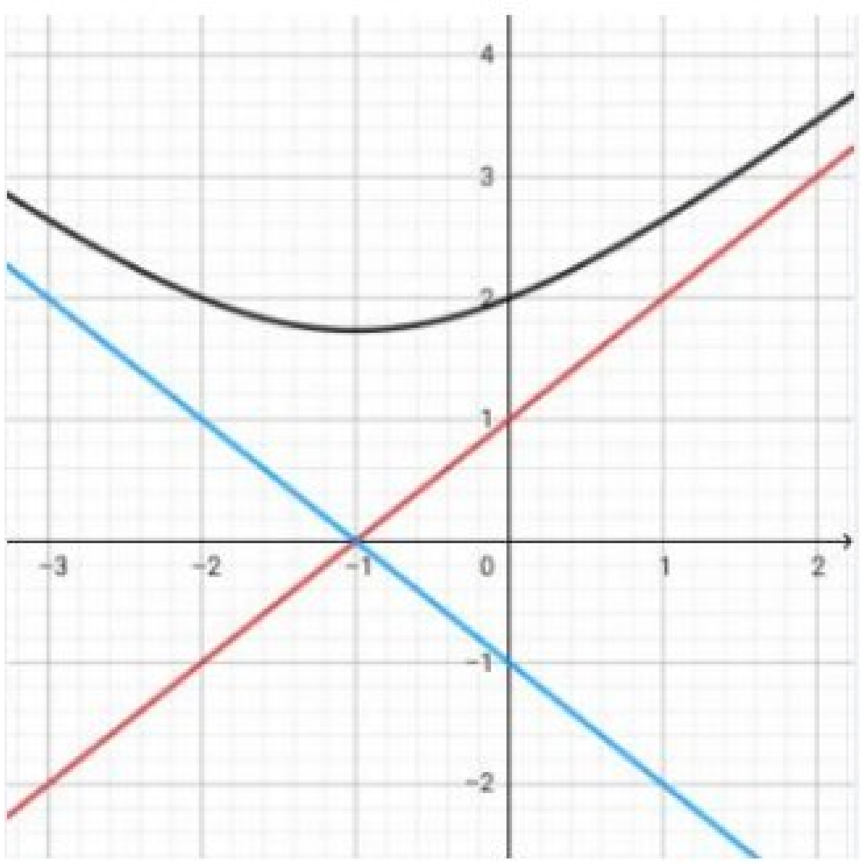
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=-1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x-1)=0$$

وبالتالي $\Delta:\ y=-x-1$ **مقارب مائل للخط** C **في جوار** $-\infty$

❸
$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow$$
$$x=-1\Rightarrow f(-1)=\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



التمرين 52 : النموذج الوزاري 2019

ليكن C لخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x+3}$

❶ أحسب $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم احسب $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$

❷ استنتج معادلة المقارب المائل Δ

ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط البياني C .

الحل :

❶
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2-7x-3}{x-3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x-3}{x^2-3x} = 2 = a$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-7x-3}{x-3} - 2x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x}{x-3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x-3}{x-3}\right) = -1 = b$$

❷ نستنتج أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 1$

مقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - (2x-1) = \frac{2x^2-7x-3}{x-3} - (2x-1) = \frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x+x-3}{x-3} = \frac{-6}{x-3}$$

نلاحظ أن

اشارة $\frac{-6}{x-3}$ هي عكس إشارة المقام

x	$-\infty$ $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$	
اشارة $\frac{-6}{x-3}$	$+$	$-$
الوضع النسبي	C يقع فوق	C يقع تحت d

التمرين 53 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{9x^2-6x+3}$.

❶ ادرس نهاية f عند $+\infty$

❷

a . اكتب $9x^2-6x+3$ بالشكل القانوني

b . ادرس نهاية h المعرف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(3x-1)^2}$ عند $+\infty$

c . استنتج ان الخط C يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ يطلب ايجاد معادلته

❸ اثبت ان الخط C يقع فوق المقارب

الحل :

❶ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-6x+3}=+\infty$$

❷ $$9x^2-6x+3=9\left(x^2-\frac{6}{9}x\right)+3=9\left(x^2-\frac{6}{9}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)+3$$

$$=9\left(x^2-\frac{6}{9}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+3=9x^2-6x+1-1+3=(3x-1)^2+2$$

b . في جوار $+\infty$ يكون $\sqrt{(3x-1)^2}=|(3x-1)|=3x-1$

ح ع ت $$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(3x-1)^2+2}-\sqrt{(3x-1)^2}\right)=+\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{(3x-1)^2+2}-\sqrt{(3x-1)^2}\right)\left(\sqrt{(3x-1)^2+2}+\sqrt{(3x-1)^2}\right)}{\left(\sqrt{(3x-1)^2+2}+\sqrt{(3x-1)^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{(3x-1)^2+2}+\sqrt{(3x-1)^2}\right)}=0$$

وبالتالي $y=3x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$h(x)=f(x)-(3x-1)=\frac{2}{\left(\sqrt{(3x-1)^2+2}+\sqrt{(3x-1)^2}\right)}>0$ والخط C يقع فوق المقارب

التمرين 54

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+1}$ **أثبت أن** f **مستمر على** $\mathbb{R}$ **واحسب** $f(\mathbb{R})$

الحل :

ان f **هو تابع كسري حدودي مقامه لا ينعدم وبالتالي فهو مستمر على** $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2\quad,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$$

$$f'(x)=\frac{(4x)(x^2+1)-(2x)(2x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{4x^3+4x-4x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

من جدول التغيرات نجد $f(\mathbb{R})=[1\,,2[$

طريقة ثانية :

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-1}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)-1}{x^2+1}=2-\frac{1}{x^2+1}$$

أيا كان $x\in\mathbb{R}$ **فإن**

$$x^2\geq 0\Rightarrow x^2+1\geq 1\Rightarrow 0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1\Rightarrow 0>-\frac{1}{x^2+1}\geq -1$$

$$2>2-\frac{1}{x^2+1}\geq 1\Rightarrow f(\mathbb{R})=[1\,,2[$$

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية | زياد داوود 0936834268 سلمية | أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة | مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 55 : دورة 2020 الأولى

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\ , f(0) = (0)$

في حالة $x \neq 0$. المطلوب :

❶ **أثبت أن f اشتقاقي عند** $x = 0$.

❷ **احسب $f'(x)$ على** $\mathbb{R}^*$.

❸ **جد** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل :

❶ $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = x\sin\frac{1}{x} \quad , \ -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$

في حالة $x > 0$

$$-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x \Rightarrow \lim_{x\to0^+} -x = \lim_{x\to0^+} x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

في حالة $x < 0$

$$-x \ge x\sin\frac{1}{x} \ge x \Rightarrow \lim_{x\to0^-} -x = \lim_{x\to0^-} x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ **و التابع f اشتقاقي عند** $x = 0$

طريقة ثانية :

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| \le |x| \Rightarrow$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ **فإن** $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

و التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

❷ $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \left(\frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right) \times x^2 = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = (+\infty)(1) = +\infty$

حيث

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{u\to0}\left(\frac{\sin u}{u}\right) = 1$$

التمرين 56 :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right) & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$

والمطلوب :

أدرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند الصفر ثم استنتج معادلة المماس للخط عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

الحل :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right)}{x}=\frac{x}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}xlnx-\frac{3}{4}x\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}xlnx-\frac{3}{4}x\right)=0-0=0$$

وبالتالي التابع f قابل للاشتقاق عند الصفر و $f'(0)=0$

وبالتالي المماس عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ أفقي معادلته $y=f(0)=0$

التمرين 57 : النموذج الوزاري الأول 2020

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,3]$ وفق $f(x)=(x-3)\sqrt{x(3-x)}$,

جد $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$, واستنتج أنه اشتقاقي عند ال $x=3$.

الحل :

$$\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3^-}\frac{(x-3)\sqrt{x(3-x)}-0}{x-3}=\lim_{x\to3^-}\sqrt{x(3-x)}=0$$

بالتالي $f(x)$ اشتقاقي عند $x=3$

التمرين 58 : النموذج الوزاري الثاني

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ والمطلوب :

❶ ما نهاية التابع f عند $-\infty$ ؟

❷ ادرس قابليّة اشتقاق التابع f عند الصفر

ثمّ اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطّه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

الحل :

❶
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+|x|}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)=1$$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x}=\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x(x^2+1)}\\ \dfrac{x^2-x}{x(x^2+1)}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+1} & ;x>0\\ \dfrac{x-1}{x^2+1} & ;x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x-1}{x^2+1}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1\Longrightarrow \lim_{x\to0^-} g(x)\neq\lim_{x\to0^+} g(x)$$

وبالتالي التابع f ليس اشتقاقيا عند الصفر و $f'(0^+)=1$ و $f'(0^-)=-1$

❷ معادلة نصف المماس الأيمن عند النقطة $A(0,0)$ هي :

$$y-y_0=m(x-x_0)\Longrightarrow y-0=1(x-0)\Longrightarrow y=x$$

التمرين 59 : النموذج الوزاري الخامس

ليكن $g(x)=tanx$ والمطلوب : احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $g'(x)$, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *ثمّ استنتج* $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tanx-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

الحل :

بفرض $g(x)=\tan x$ الاشتقاقي على $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و مشتقه $g'(x)=1+tan^2 x$ بالتالي :

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\,,\qquad g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1=2\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

التمرين 60 : النموذج الوزاري الثالث 2020

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \cos x$

❶ جد $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$. ❷ استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

الحل :

❶ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x) = -\sin x$ بالتالي :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

❷ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{cos\, x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

التمرين 61 : دورة 2020 الثانية

نتأمل التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x - \sin x$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ❷ أثبت أن التابع f متزايد.

الحل :

$$-1 \le -sin\,x \le 1 \Rightarrow x-1 \le x - sin\,x \le x+1 \Rightarrow$$

حسب مبرهنة المقارنة : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 - cos\,x \ge 0 \Rightarrow$ f متزايد

التمرين 62 :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

جد $f'(x)$ و استنتج مشتق كل من التابعين $g(x) = f(lnx)$ و $h(x) = \frac{2\sin x}{\sin x-1}$

الحل :

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x-1)-1(2x)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = f(lnx) \Rightarrow g'(x) = f'(lnx)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{(lnx-1)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{x(lnx-1)^2}$$

$$h(x) = \frac{2\,sin\,x}{sin\,x-1} = f(sin\,x) \Rightarrow h'(x) = \frac{-2}{(sin\,x-1)^2}(cos\,x) = \frac{-2\,cos\,x}{(sin\,x-1)^2}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 63 : النموذج الوزاري الأول 2020

ليكن التابع f المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$. والمطلوب:

جد $f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$, حيث إن $g(x)=\frac{2\sin x+1}{\sin x+5}$

الحل :

$$f'(x)=\frac{2(x+5)-(2x+1)}{(x+5)^2}=\frac{9}{(x+5)^2}$$

$$g(x)=\frac{2\sin x+1}{\sin x+5}=f(\sin x)\Longrightarrow g'(x)=f'(\sin x)\times(\cos x)$$

$$\Longrightarrow g'(x)=\frac{9\cos x}{(\sin x+5)^2}$$

التمرين 64 :

ليكن $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ المعرف على $\mathbb{R}/\{1\}$

❶ ارسم الخط البياني للتابع g على المجال $J=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

❷ أثبت وجود حل وحيد للمعادلة $g(x)=-2$ في المجال J

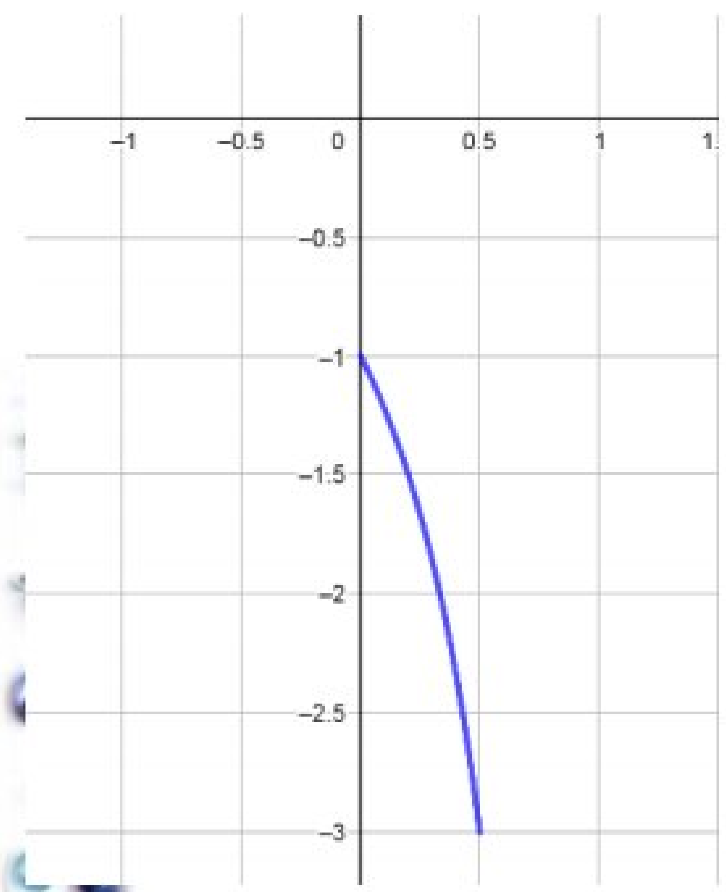
❸ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$

❹ اعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعدد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x

الحل :

❶ $g(0)=-1 \quad , \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=-3$

$$g'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}<0$$



x	0		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-3

❷ g مستمر و متناقص تماماً على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ و

$-2\in[-3,-1]=g\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$ بالتالي للمعادلة $g(x)=-2$ حلاً وحيداً α

❸ في جوار $+\infty$ $g(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

$$\lim_{x\to+\infty} g\big(g(x)\big)=\lim_{x\to1^+} g(x)=+\infty$$

❹
$$g\big(g(x)\big)=g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{2x}{2}=x$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g\big(g(x)\big)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

التمرين 65 :

ليكن التابع g المعرّف على المجال $]-\infty\,,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

❷ أعد حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$ بعد كتابة $f\big(f(x)\big)$ بدلالة x

الحل :

❶ $f(x)=\frac{x-3}{x-1}=\frac{x-1-2}{x-1}=1-\frac{2}{x-1}<1 \Rightarrow$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-1}=1$

بالتالي $f(x)$ يسعى الى 1 بقيم اصغر من 1 عند $+\infty$ ومنه :

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$$

❷ $$f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=\frac{\frac{x-3}{x-1}-3}{\frac{x-3}{x-1}-1}=\frac{\frac{x-3-3x+3}{x-1}}{\frac{x-3-x+1}{x-1}}=\frac{-2x}{-2}=x$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

التمرين 66 : الاختبار 2

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{x^3+4-4cosx}{x^2}$

❶ أوجد $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

❷ أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب للخط C

الحل:

❶ عدم تعيين $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\frac{0}{0}$

$$f(x)=x+4\left(\frac{1-cosx}{x^2}\right)=x+4\left(\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{(4)\frac{x^2}{4}}\right)=x+2\left(\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+2\left(\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\right)=0+2(1)^2=2$$

❷ أثبات أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل

$$f(x)-x=\frac{x^3+4-4cosx}{x^2}-x=\frac{4-4cosx}{x^2}=\frac{4(1-cosx)}{x^2}$$

$$-1\le -\cos x\le 1\Rightarrow 0\le 1-\cos x\le 2$$

$$\Rightarrow 0\le 4(1-\cos x)\le 8\Rightarrow 0\le\frac{4(1-\cos x)}{x^2}\le\frac{8}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2}=0 \xRightarrow{\text{بالإحاطة}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4(1-\cos x)}{x^2}\right)=0\Rightarrow$$

المستقيم $y=x$ مقارب مائل للخط في جوار $+\infty$

التمرين 67 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{x^2+2-\sin x}{x}$

❶ جد قيمة تقريبية للعدد $\sin(0.1)$

❷ جد نهاية التابع f عند $+\infty$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $f(1000)$

❸ أثبت أن للخط C مقارب مائل Δ معادلته $y=x$ في جوار $+\infty$

❹ أدرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ على $]0,+\infty[$

الحل :

❶ $g(x)=sin\,x \Longrightarrow g'(x)=cos\,x \Longrightarrow g(0)=0 \Longrightarrow g'(0)=1$

$a+h=0.1 \Longrightarrow a=0\ ,\ \ h=0.1$

$$g(a+h)\approx g(a)+hg'(a) \Longrightarrow g(0.1)\approx g(0)+(0.1)g'(0)$$

$$\Longrightarrow g(0.1)\approx 0.1$$

❷ $$-1\le -sin\,x\le 1 \Longrightarrow 1\le 2-sin\,x\le 3 \Longrightarrow$$

$$x^2+1\le x^2+2-sin\,x\le x^2+3$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2+1}{x}\le\frac{x^2+2-sin\,x}{x}\le\frac{x^2+3}{x}\Longrightarrow x+\frac{1}{x}\le\frac{x^2+2-sin\,x}{x}\le x+\frac{3}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{3}{x}\right)=+\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$1000+\frac{1}{1000}\le f(1000)\le 1000+\frac{3}{1000}\Longrightarrow 1000.001\le f(1000)\le 1000.003$$

❸ $$h(x)=f(x)-(x)=\frac{x^2+2-sin\,x}{x}-\frac{x^2}{x}=\frac{2-sin\,x}{x}$$

$$-1\le -sin\,x\le 1\Longrightarrow 1\le 2-sin\,x\le 3\Longrightarrow \frac{1}{x}\le\frac{2-sin\,x}{x}\le\frac{3}{x}$$

حسب مبرهنة الاحاطة $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

وبالتالي $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❹ $$1\le 2-sin\,x\le 3\Longrightarrow 2-sin\,x>0\Longrightarrow\frac{2-sin\,x}{x}>0\ ,\ \ x\in\,]0,+\infty[$$

والخط C يقع فوق المقارب Δ على المجال $]0,+\infty[$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 68 :

نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - \cos x$

❶ أحسب $f(0)$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج أنه يوجد عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$

❷ اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي الى المجال $[-1, 1]$

❸ استنتج أن كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي الى المجال $]0, 1[$

❹ استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي الى المجال $]0, 1[$

الحل

❶ $f(0) = 0 - cos0 = -1 < 0 \ , \ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$

وبما أن f مستمر نستنتج :

حسب مبرهنة القيمة الوسطى يوجد حل حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$ حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

❷ بفرض x حل للمعادلة $f(x) = 0$ وبالتالي :

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x - \cos x = 0 \Longrightarrow x = \cos x \in [-1, 1]$$

❸ اذا كان $x \in [-1, 0]$ كان

$$\cos x > 0 \Longrightarrow -\cos x < 0 \Longrightarrow x - \cos x < x \Longrightarrow x - \cos x < 0 \Longrightarrow f(x) < 0$$

وبالتالي ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل ينتمي الى المجال $[-1, 0]$

وبما أن $f(1) \neq 0$ فإن كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي الى المجال $]0, 1[$

❹ على المجال $]0, 1[$ يكون $f(x) = x - \cos x \Longrightarrow f'(x) = 1 + \sin x > 0$

وبالتالي $f(x)$ متزايد تماما على $]0, 1[$

بما أن $f(x)$ مستمر و متزايد تماما على $]0, 1[$ فهو ينعدم مرة واحدة على الأكثر على $]0, 1[$

ومن الطلب الأول وجدنا أن $f(\alpha) = 0$ وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 69 :

ليكن f **التابع المعرف على** $\mathbb{R}$ **وفق** $f(x) = x\cos x$

أثبت مستخدما البرهان بالتدريج أن مهما تكن $n \geq 1$ **فلدينا :**

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$ **أيا يكن** $x \in \mathbb{R}$

الحل :

$f(x) = x\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - x\sin x$ **لتكن** $E(n)$ **الخاصة التالية :**

$$E(n): f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

أيا تكن x **من** $\mathbb{R}$

نبرهن صحة الخاصة $E(1)$

$$l_2 = x\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x+0) = -x\sin x + \cos x = f'(x) = l_1$$

والخاصة صحيحة

نفرض الخاصة $E(n)$ **صحيحة ولنبرهن صحة الخاصة** $E(n+1)$

$$(n+1): f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \ ; \ x \in \mathbb{R}$$

نشتق العلاقة $f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$ **نجد :**

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - x\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - n\sin\left(x + (n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi - \pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ **والخاصة** $E(n+1)$ **صحيحة**

وبذلك نكون برهنا صحة الخاصة $E(n)$ **أيا يكن** $x \in \mathbb{R}$

مروان بجور	أحمد الشيخ عيسى	زياد داوود	وسيم فاطمة
حمص 0930170828	الرقة 0988024183	سلمية 0936834268	اللاذقية 0936497038

التمرين 70

ليكن التابع f المعرّف على المجال $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $f(x)=\left(\cos(2x)-\frac{1}{2}\right)^2$ والمطلوب :

❶ أثبت أن دوره $T=\pi$ و أثبت أنه زوجي

❷ أدرس تغيرات التابع على المجال $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ونظم جدولا بها وارسم خطه البياني على $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

الحل :

$$f(x+\pi)=\left(\cos(2x+2\pi)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\cos(2x)-\frac{1}{2}\right)^2=f(x)$$

بالتالي فإن f دوري ودوره $T=\pi$

$$\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$$

$$f(-x)=\left(\cos(-2x)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\cos(2x)-\frac{1}{2}\right)^2=f(x)$$

بالتالي فإن f زوجي وخطه متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$$f(0)=\left(\cos(0)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\cos(\pi)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

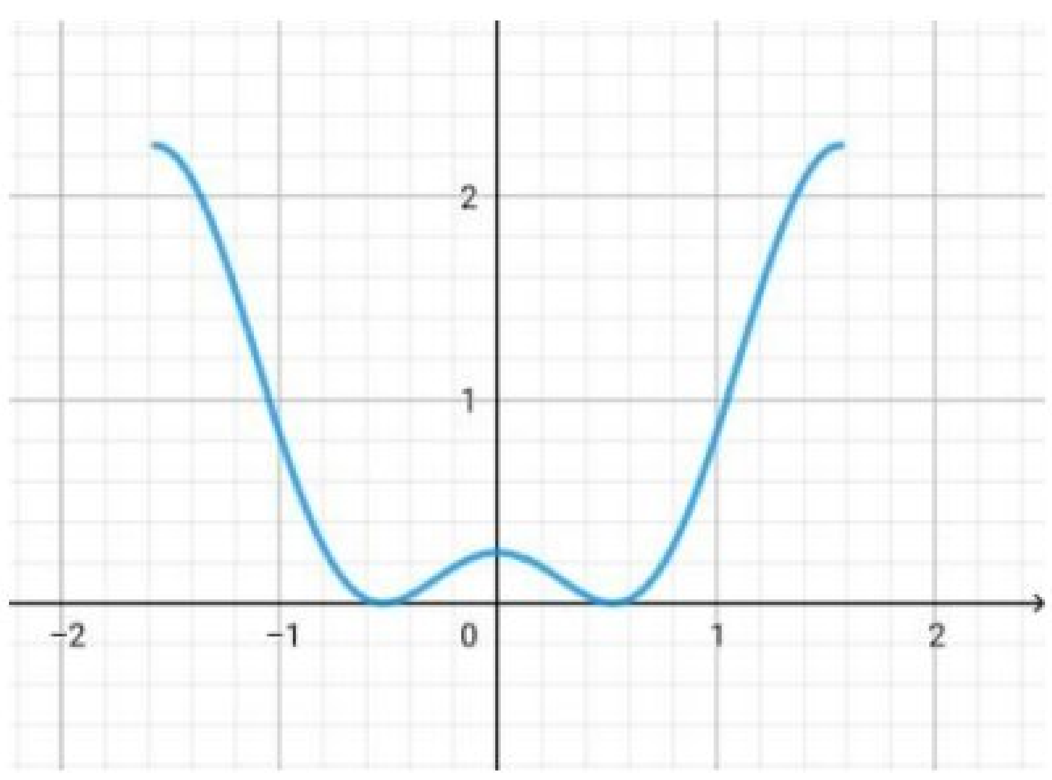
$$f'(x)=2\left(\cos(2x)-\frac{1}{2}\right)(-2\sin(2x))=-4\sin(2x)\left(\cos(2x)-\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -4\sin(2x)\left(\cos(2x)-\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow$$

$$-4\sin(2x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\frac{1}{4}$$

$$\cos(2x)-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\cos(2x)=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$



وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 71 :

نتأمّل التابع f وفق $f(x)=\sqrt{1-cosx}$.

❶ ما مجموعة تعريف f

❷ أيكون f مستمراً على مجموعة تعريفه

❸ بين أن التابع f زوجي ويقبل 2π دوراً له

❹ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$ أثبت أن g اشتقاقي وارسم خطه البياني .

❺ استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $]-2\pi,2\pi[$ ما مجموعة تعريف f'

الحل :

❶ $1-cosx\geq 0$ مهما تكن $x\in R$ فمجموعة تعريف f هي R

❷ التابع f مستمراً على مجموعة تعريفه لأن $1-cosx$ مستمر و $\sqrt{x}$ مستمر على مجموعة تعريفهما

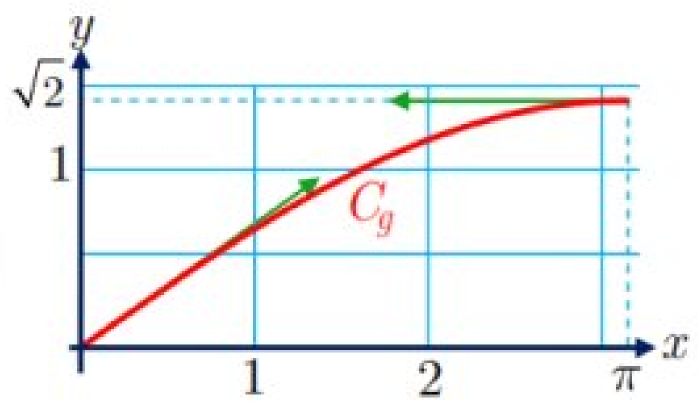
❸ مهما تكن $x\in R$ فإن $-x\in R$ فالشرط الأول محقق

$f(-x)=\sqrt{1-cos(-x)}=\sqrt{1-cos(x)}=f(x)$. فالشرط الثاني محقق والتابع زوجي

مهما تكن $x\in R$ فإن $x+2\pi\in R$ فالشرط الأول محقق

$f(x+2\pi)=\sqrt{1-cos(x+2\pi x)}=\sqrt{1-cos(x)}=f(x)$. فالشرط الثاني محقق والتابع دوري ودوره 2π

❹ لدينا $g(x)=\sqrt{1-cos(x)}=\sqrt{2sin^2\frac{x}{2}}=\left|\sqrt{2}sin\frac{x}{2}\right|$

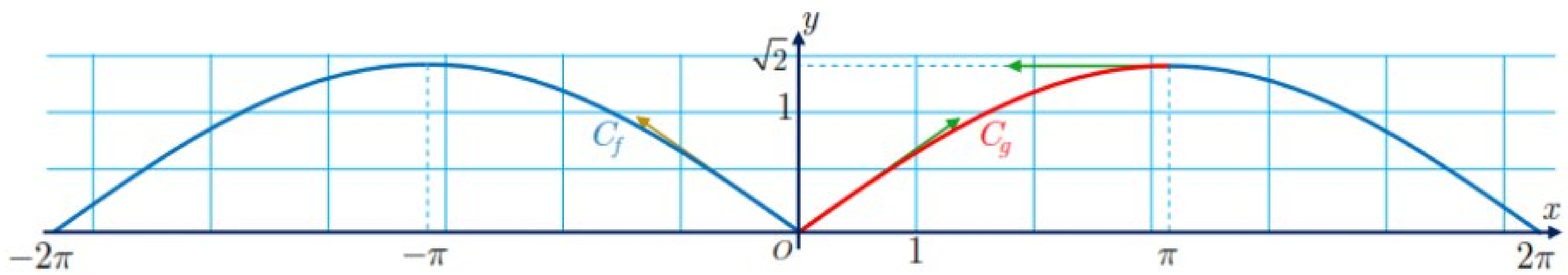


وبما أن $x\in[0,\pi]$ فإن : $\left|\sqrt{2}sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{2}sin\frac{x}{2}$

وهو اشتقاقي على المجال $[0,\pi]$ ويمكن رسمه بسهولة

❺ لما أن التابع زوجي فخطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

من الرسم نجد أن f' غير معرف عند الصفر وعند كل $x=2\pi k$ باعتبار f دوري ودوره 2π



Scanned with CamScanner

التمرين 72 : دورة 2018 الثانية

ليكن f للتابع المعرف على $]2,+\infty[$ وفق: $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

❶ ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ونظم جدولاً بها

❷ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

❸ أكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -2 \;,\; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;,\; f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| -2	$\nearrow$	$+\infty$

❷ f مستمر و متزايد تماماً على $]2,+\infty[$ و $0 \in]-2,+\infty[= f(]2,+\infty[)$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً $x \in]2,+\infty[$

❸ $x = 3 \Rightarrow f(3) = 0 \;,\; f'(3) = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x-3)$

التمرين 73 : الاختبار 3

أثبت أنّ للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ ثمّ بيّن أنّ $\alpha \in]-1,0[$

الحل :

ليكن التابع $f(x) = x^3 + x + 1$ المعرف على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;\&\; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;,\; f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر و متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ و $0 \in]-\infty,+\infty[= f(\mathbb{R})$ بالتالي للمعادلة

$f(x) = 0$ حلاً وحيداً α

$f(0) = 1 > 0 \;,\; f(-1) = -1 < 0$ وبالتالي $f(-1) \times f(0) < 0$ وبالتالي

$\alpha \in]-1,0[$

وسيم فاطمة اللاذقية 093649703
زياد داوود سلمية 093683426
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 74 : النموذج الوزاري الثالث 2020

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$, والمطلوب:

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$, ثم جد هذا الحل جبرياً.

❸ استنتج مشتق التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = 2\sin x - \sqrt{sin^2 x + 5}$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+5}\right) = +\infty - \infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(2x - |x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(2 - \sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right) = +\infty\left(2 - \sqrt{1+0}\right) = +\infty$$

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{2\sqrt{x^2+5} - x}{\sqrt{x^2+5}} > 0 \ ,$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2\sqrt{x^2+5} - x = 0 \Longrightarrow 2\sqrt{x^2+5} = x$$

مستحيلة $\Longrightarrow \sqrt{x^2+5} = \frac{1}{2}x \Longrightarrow x^2 + 5 = \frac{1}{4}x^2 \Longrightarrow \frac{3}{4}x^2 = -5 \Longrightarrow x^2 = -\frac{20}{3}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر و متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ و $0 \in]-\infty, +\infty[= f(\mathbb{R})$ بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α

$f(2) = 1 > 0$, $f(1) = 2 - \sqrt{6} < 0$ وبالتالي $f(1) \times f(2) < 0$ وبالتالي $\alpha \in]1,2[$

$$f(x) = 0 \Longrightarrow 2x - \sqrt{x^2+5} = 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+5} = 2x \quad : x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2+5} = 2x \Longrightarrow x^2 + 5 = 4x^2 \Longrightarrow 3x^2 = 5 \Longrightarrow x^2 = \frac{5}{3}$$

بما أن $x \geq 0$ فإن : $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه مركب تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$

$$g(x) = 2\,sin\,x - \sqrt{sin^2 x + 5} \Longrightarrow g(x) = f(sin\,x)$$

$$g'(x) = f'(sin\,x) \times (sin\,x)' = \left(2 - \frac{sin\,x}{\sqrt{(sin\,x)^2+5}}\right)(\cos x)$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 75 : النموذج الوزاري الخامس

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

❶ ادرس نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبيّن إذا كانت له نهاية حقيقيّة عند $x = -1$

❷ أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

❸ احسب $f'(x)$ ونظّم جدول تغيّرات f وعيّن ما له من قيم حديّة محليّة .

❹ أوجد معادلة المماس للخط C في النقطة منه والتي فاصلتها $x = -2$

❺ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الاحداثيّات والمستقيم $x = 3$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{(x+1)^2} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{(x+1)^2} = 0$$

$y = 0$ محور الفواصل مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$ وليس للتابع نهاية حقيقية عند $x = -1$

❷ $g(x) = f(x) - (0) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

إشارة $g(x)$ من إشارة $x + 2$ الذي ينعدم عند $x = -2$

عندما $x < -2$ فإنّ $x + 2 < 0$ وبالتالي $g(x) < 0$ و C تحت المقارب الأفقي.

عندما $x > -2$ فإنّ $x + 2 > 0$ وبالتالي $g(x) > 0$ و C فوق المقارب الأفقي.

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038 | زياد داوود — سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183 | مروان بجور — حمص 0930170828

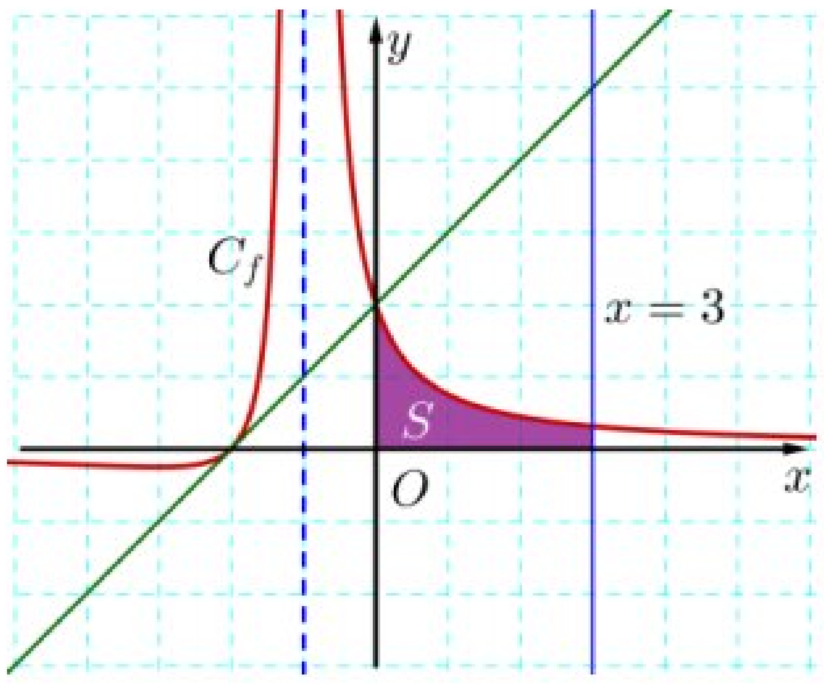
❸. $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4} = \dfrac{-x^2-4x-3}{(x+1)^4}$

إشارة f' من إشارة $-x^2-4x-3 = -(x+1)(x+3)$ الذي ينعدم عند:

$x = -1 \notin D$ و $x = -3$ ومنه $f(-3) = -\frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗ $+\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

$f(-1) = -\frac{1}{4}$ قيمة محليّة صغرى.



4. $x = -2 \implies f(-2) = 0\,, f'(-2) = \dfrac{1}{1} = 1$

$T: y = m(x - x_0) + y_0 \quad \& \quad T: y = x + 2$

5. $S = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$

$$= \left[\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\right]_0^3 = \left(\ln 4 - \frac{1}{4}\right) - (0 - 1) = \frac{3}{4} + 2\ln 2$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 76 :

ليكن التابع f المعرف على $[1\,,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \sqrt{x-1}$

والتابع g المعرف وفق العلاقة : $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-3}}$

والمطلوب :

❶ اثبت ان مجموعة تعريف التابع g هي $[1\,,3\,[\,\cup]3,+\infty[$

❷ هل g مستمراً على مجموعة تعريفه

❸ اثبت ان g هو مقصور f على $[1\,,3\,[\,\cup]3,+\infty[$

الحل :

❶ التابع معرف بشرط $\frac{x^2-4x+3}{x-3} \geq 0$ و $x \neq 3$ أي

$\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)} \geq 0 \Leftarrow (x-1) \geq 0$ و $x \neq 3 \Leftarrow D_g = [1\,,3\,[\,\cup]3,+\infty[$

❷

$x \longmapsto \frac{x^2-4x+3}{x-3}$ مستمر على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ فهو مستمر على $[1\,,3\,[\,\cup]3,+\infty[$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ مستمر على $[0\,,+\infty[$ فهو مستمر على $[1\,,3\,[\,\cup]3,+\infty[$

بالتالي تركيب التابعين مستمر على $[1\,,3\,[\,\cup]3,+\infty[$

❸ بملاحظة أن $D_g \subseteq D_f$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-3}} = \sqrt{\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}} = \sqrt{x-1} = f(x)$

ومنه g مقصور f على المجموعة $[1\,,+3\,[\,\cup]3,+\infty[$

التمرين 77 :

ليكن التابع f والمعرف على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$

❶ جد نهاية التابع f عند $+\infty$

❷ جد قيمة A التي تحقق الشرط : اذا كان $x>A$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]4.9,5.1[$

❸ برهن ان التابع $f:]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow]-\infty,5[\cup]5,+\infty[$ تقابل ثم جد تقابله العكسي f^{-1}

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-1}{x-1}=5$

❷ $f(x)\in]4.9,5.1[$ مركز المجال هو 5 ونصف قطره 0.1 $\Leftarrow$

$$|f(x)-5|<0.1\Rightarrow\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<0.1$$

$$\Rightarrow\left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<0.1\Rightarrow\left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$x\in]1,+\infty[\Rightarrow\frac{x-1}{4}>10\Rightarrow x-1>40\Rightarrow x>41\Rightarrow A\geq 41$$

❸ أيا كان $x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f(x)\in]-\infty,5[\cup]5,+\infty[$

أيا كان $y\in]-\infty,5[\cup]5,+\infty[$ فإن :

$$y=\frac{5x-1}{x-1}\Rightarrow xy-y=5x-1\Rightarrow x(y-5)=y-1\Rightarrow x=\frac{y-1}{y-5}$$

وبالتالي للمعادلة $y=f(x)$ حل وحيد وبالتالي $f(x)$ تقابل و تقابله العكسي هو $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x-5}$

طريقة ثانية :

$$f(x)=\frac{5x-1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{5x-5-5x+1}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}<0$$

أيا كان $x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f(x)\in]-\infty,5[\cup]5,+\infty[$

وبما أن التابع f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

و $y\in]-\infty,5[\cup]5,+\infty[=f(\,]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\,)$

بالتالي للمعادلة $f(x)=y$ حل وحيد $x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

وبالتالي $f(x)$ تقابل و تقابله العكسي هو $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-2}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

تمارين اضافية :

التمرين 78 : إيجاد تابع

نفترض وجود تابع f معرّف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها ، ويحقّق : $f(0)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

وليكن C خطّه البياني في معلم متجانس

❶ ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

a . تحقّق أنّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$. b . احسب $g(0)$ واستنتج أنّ التابع f فردي.

❷ ليكن h التابع المعرّف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

a . تحقّق أنّ h اشتقاقي على I . واحسب $h'(x)$ على I .

b . أثبت أنّ $h(x)=2f(1)$ ، أيّاً يكن x من I .

c . استنتج أنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$.

d . ماذا تستنتج بشأن الخط البياني C ؟

❸ ليكن k التابع المعرّف على $J=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق : $k(x)=f(tanx)-x$

a . احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k ؟

b . احسب $f(1)$.

c . نظّم جدولاً بتغيّرات f على $\mathbb{R}$.

d . ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني C

وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها -1 و 0 و 1 ثمّ ارسم C .

الحل:

❶ a . بما أنّ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x)=f(x)+f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويكون :

$$g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

b . بما أنّ $g'(x)=0$ فإنّ g تابع ثابت وبالتالي : $g=0 \Longleftarrow g(0)=f(0)+f(0)=0$

والتابع f فردي $\Rightarrow f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(-x)=-f(-x)$

❷ a . $f(x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$

بالتالي : $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I

$$h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow$$ h تابع ثابت

b . بما أنّ h تابع ثابت ولأن $h(1)=2f(1)$ نستنتج أن $h(x)=2f(1)$ أياً كانت قيمة x من I

c . **نلاحظ في حالة** $x > 0$: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(1) \Rightarrow f(x) = 2f(1) - f\left(\frac{1}{x}\right)$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2f(1) - 0 = 2f(1)$

d . **إذاً يقبل الخط البياني للتابع** f **مستقيماً مقارباً أفقيّاً معادلته** $y = 2f(1)$

❸ a . **في حالة** x **من** J **لدينا :** $k(x) = f(tanx) - x$ **بالتالي :**

$$k'(x) = f'(tanx)(1 + tan^2 x) - 1 = \frac{1}{1 + tan^2 x}(1 + tan^2 x) - 1 = 0$$

إذاً التابع k **تابع ثابت على** J **، لكن** $k(0) = f(0) + 0 = 0$ **إذاً** $f(tanx) = x$ **في حالة** x **من** J

b . **لإيجاد** $f(1)$ **نختار** $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **بحيث** $tanx = 1$ **بالتالي باختيار** $x = \frac{\pi}{4}$ **نجد** $f(1) = \frac{\pi}{4}$

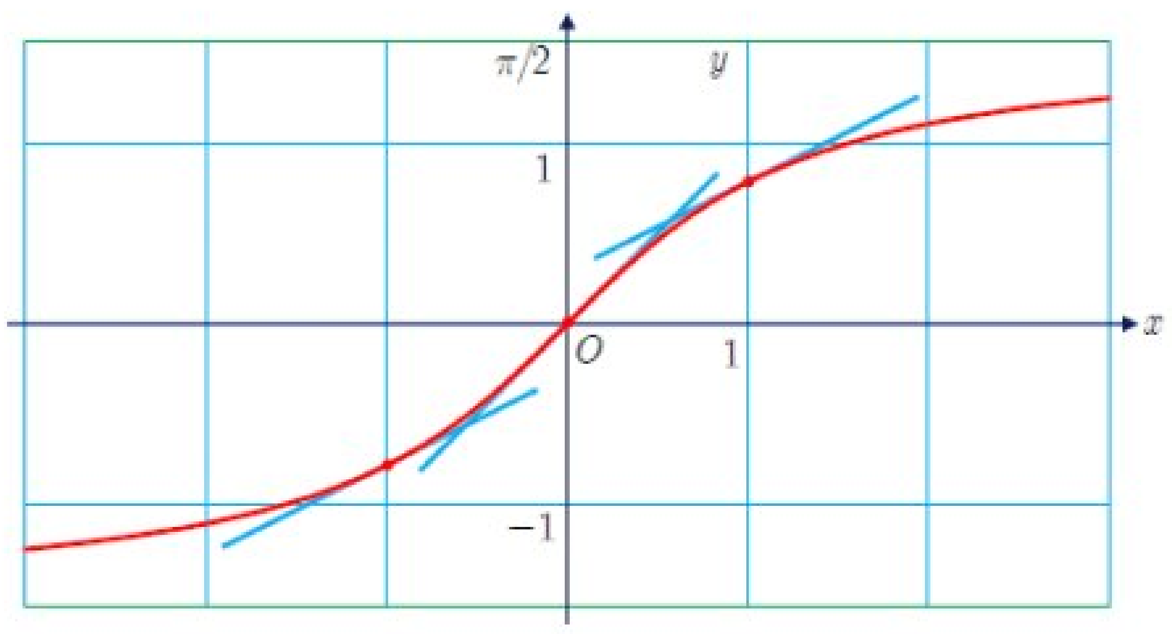
c . **مما سبق وجدنا :** $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2f(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ **وبما أنّ التابع فردي يكون**

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

d . **معادلة المماس في** $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ **هي :** $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi - 2}{4}$$

من التناظر نرسم باقي المماسات



التمرين 79 :

ليكن f تابعا مستمرا ومعرفا على المجال $I=[0\,,1]$ ويحقق $f(x)\in I$ أيا كان x من I

نرمز بالرمز k الى التابع المعرف على I وفق $k(x)=f(x)-x$

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$

الحل :

$$x\in[0\,,1]\Rightarrow f(x)\in[0\,,1]\Rightarrow f(0)\geq 0\quad,\quad f(1)\leq 1$$
$$k(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0\;,\;\; k(1)=f(1)-1\leq 0$$

التابع k مستمر على I و $0\in[k(1)\,,k(0)]\subset k(I)$ اذن يوجد $a\in[0\,,1]$ يحقق

$$k(a)=0\Rightarrow f(a)=a$$

التمرين 80 :

ليكن f و g تابعان معرفان على $I=[0,+\infty[$ وفق $g(x)=\begin{cases}-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & x>0\\ \frac{-1}{2} & x=0\end{cases}$ و $f(x)=\cos\sqrt{x}$

❶ أثبت أن f تابع أصلي لـ g على المجال I

❷ استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^2}{4}}\frac{\cos\sqrt{x}}{x-\frac{\pi^2}{4}}$

الحل :

❶ التابع $x\mapsto\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

التابع $x\mapsto\cos x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$

بالتالي $f(x)=\cos\sqrt{x}$ هو مركب تابعين اشتقاقيين على $]0,+\infty[$

فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$

ندرس قابلية اشتقاق f عند الصفر

$$h(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to0^+}-2\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to0^+}-2\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\times\frac{1}{2}\right)^2=-2\left(1\times\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-1}{2}\qquad;\ \lim_{X\to0^+}\frac{\sin X}{X}=1$$

بالتالي f اشتقاق عند الصفر و يحقق $f'(x)=\begin{cases}-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & x>0\\ \frac{-1}{2} & x=0\end{cases}$ أي $f'(x)=g(x)$

بالتالي f تابع أصلي للتابع g على $[0,+\infty[$

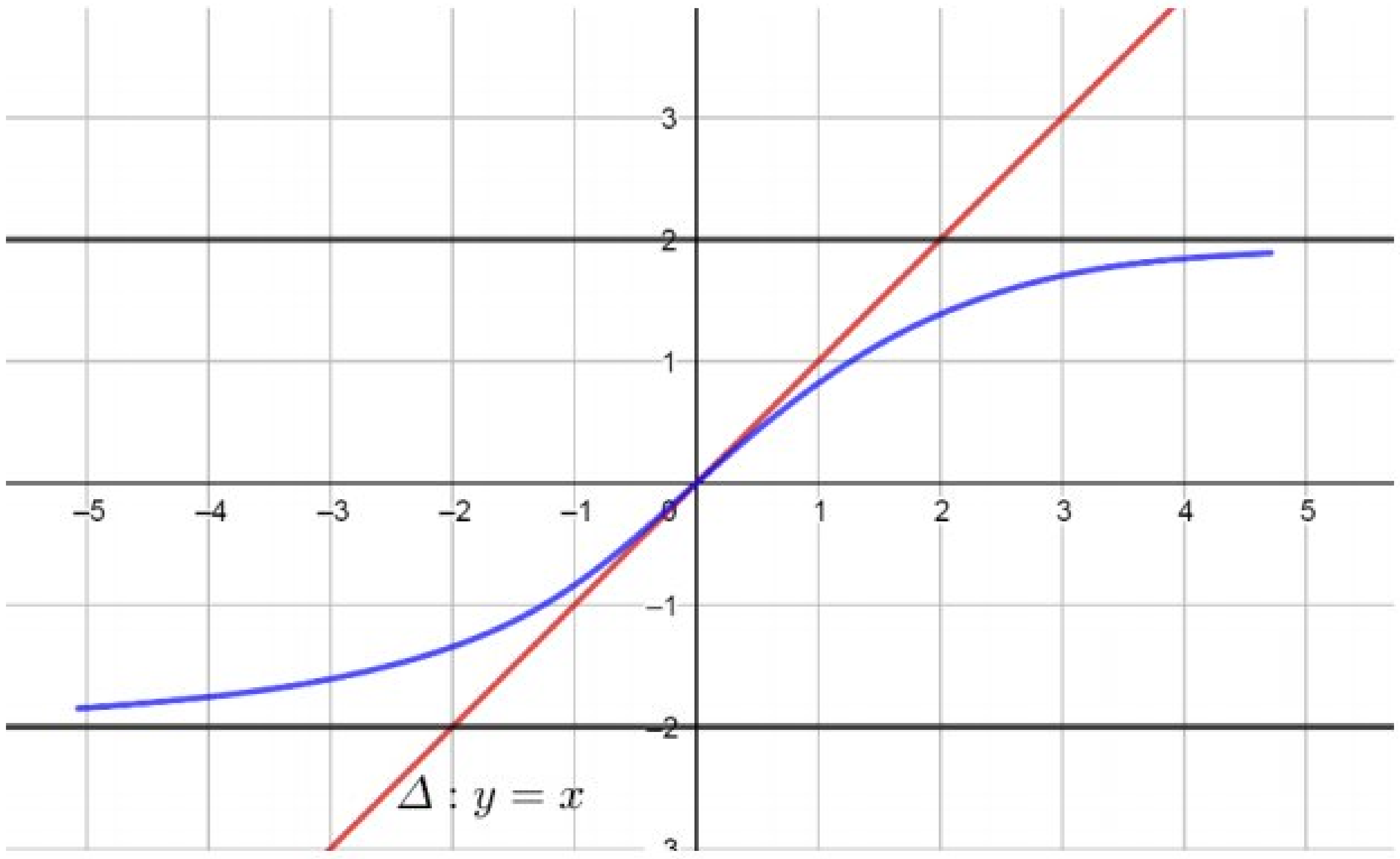
❷ $$\lim_{x\to\frac{\pi^2}{4}}\frac{\cos\sqrt{x}}{x-\frac{\pi^2}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi^2}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)}{x-\frac{\pi^2}{4}}=f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)=-\frac{\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{-1}{\pi}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 81 :

C المرسوم جانباً هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$.

أجب عن الأسئلة الآتية:



1. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
2. هل f تابع زوجي أم فردي؟ علل.
3. أوجد معادلة Δ واحسب $f'(0)$.
4. ماهي حلول المعادلة $f(x) = x$؟
5. ادرس الوضع النسبي ل C مع Δ. واستنتج حلول المتراجحة $f(x) \geq x$.
6. كم حل للمعادلة $f(x) = 3ln2$؟
7. أوجد $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$.
8. هل f محدود أم لا؟ علل.

الحل:

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. f تابع فردي لأن خطه C متناظر بالنسبة للمبدأ 0.
3. $\Delta: y = x$ وميله 1 $\Leftarrow f'(0) = m_{\Delta} = 1$.
4. C و Δ يتقاطعان مرة واحدة إذاً للمعادلة حل وحيد وهو فاصلة نقطة التقاطع $x = 0$.
5. في المجال $]-\infty, 0[$ يكون C فوق Δ وفي المجال $]0, +\infty[$ يكون C تحت Δ ويتقاطعان عند $x = 0$ $\Leftarrow$ حلول المتراجحة $f(x) \geq x$ هي $]-\infty, 0]$.
6. $f(x) = ln8 > 2$ إذاً المعادلة ليس لها حلول.
7. $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$.
8. نعم محدود لأن $-2 \leq f(x) \leq 2$.