الاسم :.........

حل ورقة العمل في مادة الرياضيات

قراءة الخطوط البيانية وجداول التغيرات للصف الثالث الثانوي العلمي (2020)

السؤال الأول : الجدول الآتي يمثل جدول تغيرات للتابع f المعرّف والاشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ خطّه البياني C:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

❶ بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ جذرين مختلفين على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

❷ أوجد معادلة المقارب الشاقولي للخط البياني C .

❸ هل يوجد للخط C مقارب مائل ؟ علل إجابتك .

❹ دل على قيمته الحدية محلياً مبيّناً نوعها .

الحل

❶ ❐ في المجال $]-\infty,0]$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه و $f(]-\infty,0])=]1,2]$ و $0\notin]1,2]$

ومنه ليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]-\infty,0]$.

❐ في المجال $]0,2[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه

و $f(]0,2[)=]-\infty,2[$ و $0\in]-\infty,2[$ ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_1 يقع في المجال $]0,2[$.

❐ في المجال $]2,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه

و $f(]2,+\infty[)=]-\infty,1[$ و $0\in]-\infty,1[$ ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_2 يقع في المجال $]2,+\infty[$.

❷ $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط C .

❸ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ وبالتالي المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$

ومنه ليس للخط C أي مستقيم مقارب مائل.

❹ $f(0)=2$ قيمة كبرى محلياً .

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني لتابع f معرّف على D جدول تغيّراته هو الآتي:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	▨	▨	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-3 ▨	▨	▨ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

❶ عيّن D مجموعة تعريف التابع f وعيّن مجموعة اشتقاقه .

❷ ما نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه المفتوحة ؟ ثمّ استنتج معادلة مستقيم مقاربه الشاقولي لخطّه البياني.

❸ دل على القيم الحدّية محلياً مبيّنةً نوعها .

❹ أوجد $f(D)$. وهل يتقاطع C مع محور الفواصل ؟

❺ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ ؟ و ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ ومنه $x=1$ مستقيم مقارب شاقولي .

❷ $f(-2)=-2$ قيمة كبرى محلياً ، $f(-1)=-3$ قيمة صغرى محلياً .

❸ $f(D)=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$ ونلاحظ أنّ $0\notin f(D)=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$ ومنه ليس للمعادلة $f(x)=0$ أية حلول

أي أنّ الخط C لا يتقاطع مع محور الفواصل .

❹ مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي $x\in]-\infty,-1]$. ومجموعة حلول المتراجحة $f'(x)<0$ هي $x\in]-2,-1[\cup]1,2[$

السؤال الثالث : ليكن f تابعاً اشتقاقياً على $]-1,+\infty[$ ، خطّه البياني C_f . جدول تغيّراته هو الآتي :

x	-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-4	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

❶ جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه ثمّ استنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C_f .

وهل يوجد للخط C_f مستقيم مقارب مائل ؟ علل إجابتك .

❷ جد $f(]-1,+\infty[)$.

❸ احسب $f(0)$ و $f'(0)$ ثمّ اكتب معادلةً لمماس الخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

❹ بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً .

❺ بافتراض $f(1)=0$. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ ؟

❻ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$ ؟

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$ ومنه $x=-1$ مستقيم مقارب شاقولي يوازي yy' .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي يوازي xx' . و لا يوجد مستقيم مقارب مائل لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

❷ $f(]-1,+\infty[)=[-1,+\infty[$.

❸ $f(0)=3$ و $f'(0)=-4$ فتكون معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$ من الشكل :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ وبالتالي $y=-4(x-0)+3$ إذن $y=-4x+3$

❹ ❐ في المجال $]-1,2[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه و $0\in f(]-1,2[)=]-1,+\infty[$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_1 يقع في المجال $]-1,2[$.

❐ في المجال $[2,+\infty[$ يكون f مستمراً عليه و $0\notin f([2,+\infty[)=[-1,0[$

فليس للمعادلة $f(x)=0$ أية حلول في المجال $[2,+\infty[$.

❺ بافتراض $f(1)=0$ فتكون مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي $x\in]1,+\infty[$.

❻ مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$ هي $x\in]-1,2]$.

السؤال الرابع : ليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ جدول تغيّراته هو الآتي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

❶ بالاستفادة من الجدول استنتج نهاية التابع $f:x\mapsto e^{g(x)}$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

❷ أوجد $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثمّ نظّم جدولاً بتغيّرات f . واستنتج مجموعة قيم التابع f .

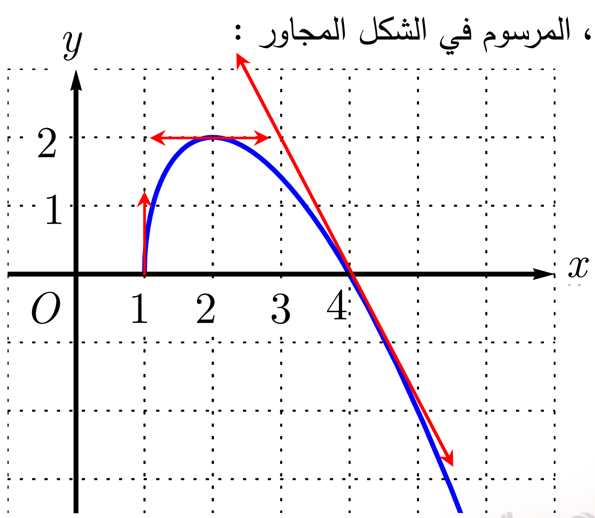
الحل

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^0=1$.

❷ $f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$ نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ وبالتالي نستنتج جدول تغيّرات التابع f كالآتي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	1

السؤال الخامس : f تابعٌ معرّف على $[1,+\infty[$. خطّه البياني C_f، المرسوم في الشكل المجاور :



❶ هل f اشتقاقي عند $x=1$ ؟ علل إجابتك .

❷ احسب كلاً من $f(2)$ و $f'(2)$ و $f(4)$ و $f'(4)$.

❸ اكتب معادلةً للمماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=4$.

❹ استنتج مجموعة تعريف التابع $g:x\mapsto \ln(f(x))$

❺ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ ؟

❻ نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f .

الحل

❶ f ليس اشتقاقياً عند $x=1$ لأنّ المماس شاقولي عند هذه النقطة .

❷ $f(2)=2$ و $f'(2)=0$ (لأنّ المماس أفقي في النقطة التي فاصلتها 2)

$f(4)=0$ و لحساب $f'(4)$ (إنّ $f'(4)$ تعني هندسياً ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 4)

حيث أنّ المماس للخط C في هذه النقطة يمر بالنقطتين $(4,0)$ و $(3,2)$. ومنه $m=\dfrac{0-2}{4-3}=-2=f'(4)$.

❸ معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=4$ هي : $y=f'(4)(x-4)+f(4)$

ومنه $y=-2(x-4)+0$ أي $y=-2x+8$.

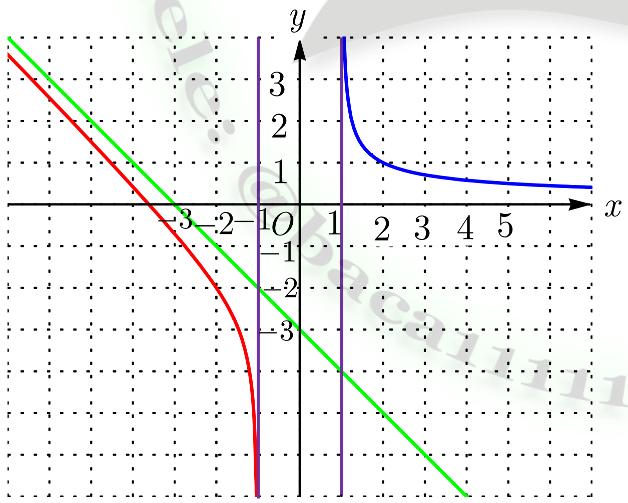
❹ g معرّف عندما يكون $f(x)>0$ وهذا محقّق عندما $x\in]1,4[=D_g$.

❺ مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ هي $x\in[2,+\infty[$.

❻

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

السؤال السادس :



ليكن f التابع المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

خطه البياني C_f المرسوم في الشكل المجاور:

$x=-1$ و $x=1$ و $y=0$ و $y=-x-3$ مستقيمات

مقاربة لخطه البياني C_f .

❶ احسب كلاً من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x+3)$

و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

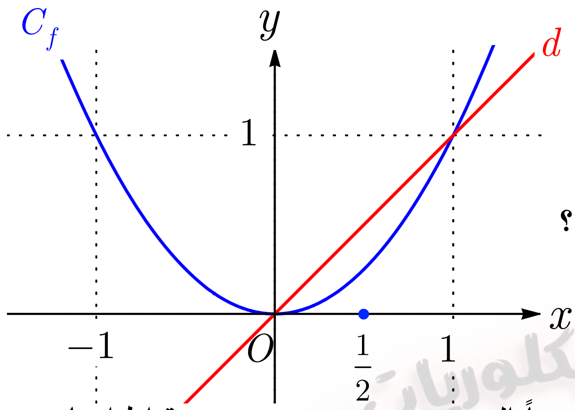
الحل

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x+3)=0$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

❷ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد .

السؤال السابع: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ والمرسوم في الشكل المجاور :



وليكن المستقيم d الذي معادلته : $y = x$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ دل على القيمة الحدية محلياً مبيّناً نوعها .

❸ ما حلول المعادلة $f(x) = x$ ؟ وما حلول المتراجحة $f(x) < x$ ؟

❹ هل f تابعٌ زوجي أم فردي ؟ علل إجابتك .

❺ لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة التدريجية: $u_0 = \frac{3}{4}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ أعد الرسمة على ورقة إجابتك ثمّ مثّل هندسياً الحدود u_0 و u_1 و u_2 .خمّن جهة اطرادها.

أهي محدودة من الأدنى ؟ ما نهايتها المحتملة؟

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ $f(0) = 0$ قيمة صغرى محلياً .

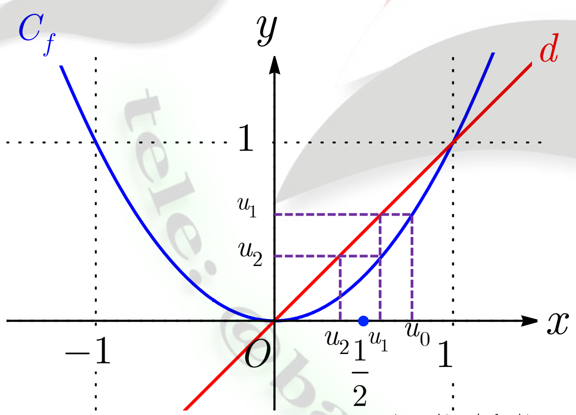
❸ للمعادلة $f(x) = x$ حلّان هما $x = 0$ و $x = 1$. وحلول المتراجحة $f(x) < x$ هي $x \in]0,1[$.

❹ f تابعٌ زوجي لأنّ خطّه البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

❺ $g : x \mapsto \ln(f(x))$ معرّف عندما $f(x) > 0$ وهذا محقّق عندما $x \in \mathbb{R}^*$ أي $x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

$g(x) = 0$ وهذا يكافئ $f(x) = 1$ ومنه $x = -1$ أو $x = 1$

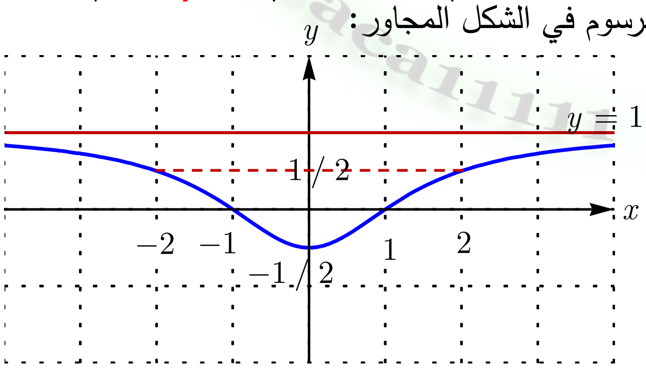
❻



نخمّن بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد صفر

ونهايتها المحتملة تساوي الصفر .

السؤال الثامن : f تابع معرف على $\mathbb{R}$، C خطّه البياني المرسوم في الشكل المجاور:



❶ ما حلول المتراجحة $f(x) > 0$ ؟

واستنتج مجموعة تعريف التابع $g : x \mapsto \ln f(x)$

❷ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸ جد $f(\mathbb{R})$. و ما هي حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}$ ؟

الحل

❶ حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. وهي نفسها مجموعة تعريف التابع g .

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

❸ $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2},1[$. وحلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ هي $x = -2$ أو $x = 2$.

....انتهت الأسئلة...