الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم

الفصل الثاني

2019-2020

قسم الاحصاء الرياضي - السنة الثالثة

مقرر

احصاء 2

د. سلطان محمد الصلخدي

مراجعة عامة

بعض أهم التوزيعات الاحتمالية

1 - توزيع برنولي :

نقول عن متغير عشوائي منفصل X أنه يتوزع وفق توزيع برنولي اذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل :

x	0	1
$P(X=x)$	q	p

مع العلم أنّ $0<p<1$; $p+q=1$ أي حالة تجربة ثنائية مكررة $n=1$ مرة, ولهذا التوزيع شكل أخر هو: $f(x)=p^x(1-p)^{1-x}\quad ,x=0,1\ \&\ 0<p<1$

مبرهنة: إذا كان للمتغير X توزيع برنولي وسيطه p عندئذ فإنّ :

$$E(X)=p\quad ;\quad Var(X)=p(1-p)$$

2 - التوزيع الحداني:

نقول عن متغير عشوائي منفصل X أنّه يتوزع وفق التوزيع الحداني وسيطاه n و p إذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل التالي:

$$f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}\quad ,\quad x=0,1,2,\dots,n\ ;\ 0<p<1\ ,p+q=1$$

ونكتب رمزا على أنّ X يتوزع وفق التوزيع الحداني $b(x;n,p)$.

أنّ التوزيع الحداني يعالج التجارب الحدانية أو التجارب الثنائية وتعرف التجارب الثنائية بأنّها التجارب المكونة من n محاولة من المحاولات المستقلة وكل محاولة لها احتمالان يسمى الأول نجاح p ويسمى الثاني فشل q بحيث يبقى احتمال النجاح ثابتاً من محاولة لأخرى و يدل X على عدد مرات النجاح.

ملاحظة 1: لنفرض أنّ $X_1,X_2,\dots\dots,X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي برنولي X وسيطه p فإنّ توزيع المتغير $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ هو متغير حداني وسيطاه n و p .

ملاحظة 2: لتكن $X_1,X_2,\dots\dots,X_\kappa$ عينة عشوائية لمتغير حداني وسيطاه n و p فإنّ توزيع المتغير $Y=\sum_{i=1}^{\kappa}X_i$ هو متغير حداني وسيطاه $n\kappa$ و p .

مبرهنة: إذا كان X متغير عشوائي له التوزيع الحداني وسيطاه n و p عندئذ فإنّ :

$$E(X)=np\quad ,\quad Var(X)=np(1-p)$$

3 – التوزيع البواسوني:

نقول عن متغير عشوائي منفصل X أنّه يتوزع وفق التوزيع البواسوني وسيطه θ اذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}, \quad x = 0,1,\ldots \qquad \theta = np > 0 \quad ; \quad 0 < p < 1$$

وهذا التوزيع هو نهاية لدالة الاحتمال للتوزيع الحداني وذلك عندما تصبح n كبيرة بقدر كاف و يصبح p صغير جداً بحيث يبقى الجداء مساويا عدداً ثابتاً.

ملاحظة 3: لتكن $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ عيّنة عشوائية لمتغير عشوائي بواسّوني وسيطه θ فإنّ توزيع المتغير $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ هو متغير بواسّوني وسيطه $n\theta$.

مبرهنة: إذا كان X متغير عشوائي بواسوني وسيطه ϑ عندئذ فإنّ :

$$E(X) = \theta \quad ; \quad Var(X) = \theta$$

4 – التوزيع الهندسي:

نقول عن متغير عشوائي منفصل X أنّه يتوزع وفق التوزيع الهندسي وسيطه p اذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل:

$$f(x) = p(X = x) = p(1-p)^x \ , \ x = 0,1,2,\ldots\ldots, \quad p + q = 1 \quad ; \quad 0 < p < 1$$

أو بالشكل:

$$f(x) = p(X = x) = p(1-p)^{x-1} \ , x = 1,2,3,\ldots\ldots, \quad p + q = 1 \quad ; \quad 0 < p < 1$$

مبرهنة: إذا كان X متغير عشوائي له التوزيع الهندسي وسيطه p عندئذ يكون:

$$E(X) = \frac{q}{p} \qquad Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

وفي الحالة الثانية:

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

5 – توزيع باسكال:

نقول عن متغير عشوائي منفصل X أنّه يتوزع وفق توزيع باسكال إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل التالي :

$$f(x) = p(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \ , \ x = k, k+1, k+2, \ldots$$

6 – التوزيع المنتظم على الفترة $[a, b]$:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّه يتوزع وفق التوزيع المنتظم على الفترة $[a, b]$ إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل التالي :

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad ; \quad a\le x\le b$$

مبرهنة : إذا كان X متغيراً عشوائيّاً له التوزيع المنتظم على الفترة $[a,b]$ عندئذ يكون:

$$E(X)=\frac{b+a}{2} \quad ; \quad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

7 – التوزيع الطبيعي:

نقول عن متغير عشوائي مستمرX أنّه يتوزع وفق التوزيع الطبيعي وسيطاه σ^2، μ اذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل التالي :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ;x\in R \ \ ;\sigma>0 \ ; \ \mu\in R$$

ويكتب هذا التوزيع بالشكل $N(\mu,\sigma^2)$.

مبرهنة : إذا كانX متغيراً عشوائيّاً طبيعيّاً فعندئذ يكون : $Var(X)=\sigma^2 \quad ; \quad E(X)=\mu$

ملاحظة 4 : إذا كان$\mu=0,\sigma=1$ فإنّ هذا التوزيع يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري وتصبح دالة الكثافة الاحتمالية بالشكل : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \ ;x\in R$

ونرمز له في هذه الحالة بالرمز $N(0,1)$ ويكون هنا التوقع والتباين معطيأنّ كما يلي :

$$E(X)=0 \quad , \quad Var(X)=1$$

ونظرًا لأهمية التّوزيع الطبيعي المعياري نرمز للمتغير بالرمز Z وتصبح دالة الكثافة بالشكل التالي :

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad ; \quad z\in R$$

ملاحظة 5 : إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1,X_2,\ldots\ldots,X_n$ متغيرات مستقلة وكانت توزيعاتها هي توزيعات طبيعية $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ ($i=1,2,\ldots,n$) فإنّ توزيع المتغّير العشوائي $Y=X_1+X_2+\cdots.+X_n$ هو التوزيع الطبيعي وسيطاه $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$ ، $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$.

ملاحظة 6 : إذا كانت هذه المتغيرات العشوائية $X_1,X_2,\ldots\ldots,X_n$ تشكل عينة عشوائية للمتغير العشوائي X الذي له التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإنّ توزيع المتغّير العشوائي $Y=X_1+X_2+\cdots.+X_n$ هو التوزيع الطبيعي وسيطاه $n\sigma^2$, $n\mu$.

ملاحظة 7 : إذا كان $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ هو متوسط العينة العشوائية فإنّ : $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

8 – التوزيع الأسي :

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّه يتوزع وفق التوزيع الأسي وسيطه θ إذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0 \quad \& \quad \theta > 0$$

مبرهنة: إذا كانX يتوزع وفق التوزيع الأسي وسيطه θ عندئذ يكون:

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \quad , \quad Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

ملاحظة 8 : هناك شكل أخر لدالة الكثافة:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّه يتوزع وفق التوزيع الأسي وسيطه $\alpha = \frac{1}{\theta}$ إذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل التالي: $f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad ; \quad x > 0 \quad \& \quad \alpha > 0$

وعندئذ يكون لدينا : $E(X) = \alpha \quad ; \quad Var(X) = \alpha^2$

9 – توزيع غاما وسيطه α:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّه يتوزع وفق توزيع غاما وسيطه α إذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \quad , x > 0 \; ; \; \alpha > 0$$

حيث : $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \; , \; \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)$

ومن أجل كون n صحيحاً موجباً و $\alpha = n$ نجد:

$$\Gamma(n) = (n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1$$

وفي حالة كون $\alpha > 0$ حقيقياً موجباً وليست صحيحة فإنّنا نهتم بالقيمة $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ حيث يمكننا أنّ نثبت أنّ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

10 – توزيع غاما بوسيطين α, β :

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّه يتوزع وفق توزيع غاما وسيطاه α, β إذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل :

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

مبرهنة: إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع غاما وسيطاه α, β فعندئذ يكون لدينا :

$$E(X) = \alpha\beta \qquad Var(X) = \alpha\beta^2$$

ملاحظة 9: هناك شكل أخر لدالة الكثافة:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّه يتوزع وفق توزيع غاما وسيطاه $\alpha, \beta = \frac{1}{\lambda}$ إذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل : $f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad \alpha, \beta = \frac{1}{\lambda} > 0$

وفي هذه الحالة يكون لدينا : $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$, $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$.

ملاحظة 10: إذا كان $\alpha = 1\ , \beta > 0$ فإنّ توزيع غاما والذي وسيطاه $\alpha = 1$ و β يؤول إلى التوزيع الآسي وسيطه $\lambda = \frac{1}{\beta}$ أي أنّ كثافته تصبح بالشكل التالي $G(1,\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$.

ومن أجل κ صحيح موجب وبفرض أنّ $\alpha = \frac{\kappa}{2}\ ,\ \beta = 2$ عندها يصبح $G(\alpha,\beta) = G\left(\frac{k}{2},2\right)$.

وأنّ الكثافة تصبح بالشكل : $\mathrm{G}\left(\frac{\kappa}{2},2\right) = \frac{1}{(2)^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}(x)^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

حيث أنّ $x > 0$ وهي كثافة توزيع كاي مربع درجة حريته k .

ملاحظة 11 : لتكن $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي غمّاوي والذي وسيطاه α, β فإنّ توزيع المتغير $\mathrm{Y} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_i}$ هو توزيع غمّاوي وسيطاه β, $n\alpha$.

11 - توزيع كاي مربّع $\chi^2_{(\mathrm{n})}$ درجة حريته n :

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّ له توزيع كاي مربع درجة حريته n إذا كانت كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{(2)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad , \ x \geq 0$$

مبرهنة : إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق توزيع كاي مربع درجة حريته n عندئذ يكون :

$$E(X) = n \qquad ; \qquad Var(X) = 2n$$

ملاحظة 11 : إذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ كانت متغيرات عشوائية مستقلة من النمط كاي مربع درجة حريته الواحد فإنّ المتغير $Y = X_1 + X_2 + \cdots . + X_n$ له النمط كاي مربع درجة حريته n .

ملاحظة 12 : لتكن $\mathrm{X_1}, \mathrm{X_2}, \dots\dots, \mathrm{X_n}$ متغيرات عشوائية مستقلة تتوزع وفق توزيع كاي مربع بدرجات حرية هي على الترتيب $r_1, r_2, \dots, r_n$ عندئذ يتوزع المتغير العشوائي $Y = X_1 + X_2 + \cdots . + X_n$ وفق توزيع كاي مربع درجة حريته $\sum_{i=1}^{n} r_i$.

ملاحظة 13 : ليكن $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ عندئذ يتوزع $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ وفق التوزيع الطبيعي المعياري ويتوزع أيضا Z^2 وفق توزيع كاي مربع درجة حريته الواحد .

12 - توزيع ستيودنت (t) درجة حريته n :

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنّه يتوزع وفق توزيع ستيودنت درجة حريته n اذا كانت كثافته الاحتمالية بالشكل التالي: $f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad , \quad -\infty < x < +\infty$

ملاحظة 14: إذا كان X متغير عشوائي طبيعي معياري أي أنّ $X\sim N(0,1)$ مستقل عن متغير عشوائي أخر له توزيع كاي مربع درجة حريته n أي أنّ $Y\sim \chi^2(n)$ فإنّ توزيع المتغير العشوائي $T=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ هو توزيع ستيودنت درجة حريته n .

13 – توزيع فيشر درجتا حريته m وn على الترتيب :

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنه يتوزع وفق فيشر درجتا حريته m وn على الترتيب اذا كانت كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}(x)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad , \quad x>0$$

14 – توزيع بيتا :

نقول عن متغير عشوائي مستمر أنّه يتوزع وفق توزيع بيتا وسيطاه m,n إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل:

$$f(x)=\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}x^{m-1}(1-x)^{n-1} \ , \ m,n>0 \,, 0<x<1$$

دالة بيتا : يعرف تكامل بيتا (دالة بيتا) من أجل $m>0 \ , \ n>0$ بالعلاقة:

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad , \ m>0 \ , \ n>0$$

العلاقة بين دالة غاما ودالة بيتا:

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad , \ m>0 \ , \ n>0$$

ملاحظة 15: نظرية النهاية المركزية :

لتكن $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي له عزوم من مراتب عالية عندئذ يكون لدينا $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ من النمط الطبيعي المعياري حيث أنّ : $Var(X)=\sigma^2 \quad ; \quad E(X)=\mu$

متباينة تشيبتشيف : ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2 فإذا كان a أي عدد موجب فإنّ :

$$P\{|X-\mu|\geq a\}\leq\frac{\sigma^2}{a^2}$$

قانون الأعداد الكبيرة: ليكن $f(x)$ دالة كثافة لـ X بمتوسط μ وتباين محدد σ^2 وليكن $\bar{X}$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية مأخوذة من$f(x)$ حجمها n وليكن $\varepsilon\,,\delta$ أي عددين موجبين عندئذ يمكن إيجاد عدد n_0 بحيث أنّ: $P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\delta$ من اجل جميع قيم $n>n_0$.

الفصل الأول

توزيعات العينة

Sample distributions

إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X أو التوزيع المشترك لعدة متغيرات عشوائية معروفة فكيف نستطيع استخدام هذه المعرفة للوصول الى شكل التوزيع الاحتمالي لدالة ما في X أو أكثر في مجموعة من المتغيرات العشوائية .

أولاً : إيجاد دالة الكثافة لمتغير عشوائي تابع لمتغير عشوائي أخر دالة كثافته معلومة :

نفرض أنّ دالة الكثافة للمتغير X هي $f(x)$ معلومة وأنّنا نريد معرفة دالة الكثافة للمتغير الجديد Y المعرف بالعلاقة $Y = U(X)$ سوف نعالج ثلاث حالات:

1 – الدالة $U(X)$ متزايدة باطراد :

لدينا في هذه الحالة دالة التوزيع للمتغير Y تكتب بالشكل:

$$G(y) = p(Y \leq y) = p\big(U(X) \leq u(x)\big) = p(X \leq x) = F(x)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ y نجد:

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}F(x) = \frac{d}{dx}F(x)\frac{dx}{dy} = f(x)\frac{dx}{dy}$$

حيث نعبر عن الطرف الأيمن بدلالة y . أي أنّ دالة الكثافة للمتغير Y تصبح بالشكل:

$$g(y) = f(x)\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=u^{-1}(y)}$$

2 – الدالة $U(X)$ متناقصة باطراد:

لدينا في هذه الحالة دالة التوزيع للمتغير Y تكتب بالشكل:

$$G(y) = p(Y \leq y) = p\big(U(X) \leq u(x)\big) = p(X \geq x) = 1 - F(x)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ y نجد:

$$g(y) = -\frac{d}{dy}G(y) = -\frac{d}{dy}F(x) = \frac{d}{dx}F(x)\left(-\frac{dx}{dy}\right) = f(x)\left(-\frac{dx}{dy}\right)$$

حيث نعبر عن الطرف الأيمن بدلالة y . أي أنّ دالة الكثافة للمتغير Y تصبح بالشكل:

$$g(y) = f(x)\left.\left(-\frac{dx}{dy}\right)\right|_{x=u^{-1}(y)}$$

ويمكن دمج الحالتين معاً بالعلاقة الآتية :

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=u^{-1}(y)}$$

مثال: ليكن لدينا متغير عشوائي X دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وليكن Y متغير عشوائي آخر معرف بالشكل: $Y = x^3 - 8$.

المطلوب أوجد دالة الكثافة للمتغير Y .

الحل :

طريقة أولى: الدالة المعطاة متزايدة وذلك لأن قيم x مو جبة دوما :

$$G(y) = P(Y \le y) = P(X^3 - 8 \le y) = P(X^3 \le y + 8)$$

$$= P\left(X \le \sqrt[3]{y+8}\right) = \int_0^{\sqrt[3]{y+8}} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt[3]{y+8}} 2x\,dx = x^2\Big|_0^{\sqrt[3]{y+8}} = (y+8)^{\frac{2}{3}}$$

ومنه نجد دالة الكثافة للمتغير Y باشتقاق دالة التوزيع مباشرة :

$$g(y) = \frac{2}{3}(y+8)^{-\frac{1}{3}} \quad , \quad -8 \le y \le -7$$

طريقة ثانية: بالاعتماد على القانون مباشرة نجد أنّ:

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=u^{-1}(y)} = 2x\frac{1}{3}(y+8)^{-\frac{2}{3}}\Big|_{x=(y+8)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}(y+8)^{\frac{1}{3}}(y+8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(y+8)^{-\frac{1}{3}}$$

أي أن:

$$g(y) = \frac{2}{3}(y+8)^{-\frac{1}{3}} \quad , \quad -8 \le y \le -7$$

وهي نفس النتيجة السابقة التي حصلنا عليها .

3 - الدالة $U(X)$ ليست دالة مطردة فهي متزايدة تارة ومتناقصة تارة أخرى:

ففي هذه الحالة نقسم مجال X إلى مجالات تكون فيها الدالة $U(X)$ في كل منها وحيدة الطور أي متزايدة باطراد ثم نطبق القاعدة السابقة في كل من هذه المجالات.

لنأخذ حالة تكون فيها الدالة تمر بطورين فقط , متزايدة ثم متناقصة فنجد:

$$g(y) = f(x_1)\frac{dx_1}{dy}\Big|_{x_1=u_1^{-1}(y)} + f(x_2)\left(-\frac{dx_2}{dy}\right)\Big|_{x_2=u_2^{-1}(y)}$$

$$= f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right|\Big|_{x_1=u_1^{-1}(y)} + f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|\Big|_{x_2=u_2^{-1}(y)}$$

ويمكن تعميم النتيجة إلى الحالة التي يقابل فيها كل قيمة لـ y عدد من القيم لـ x ولتكن n مثلاً فنكتب :

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right|\Big|_{x_i=u_i^{-1}(y)}$$

مثال: ليكن لدينا متغير عشوائي X له التوزيع الطبيعي المعياري اي أنّ دالة كثافته معرفة بالشكل التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \;\; ; x \in R$$

وليكن $Y = X^2$ أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y .

الحل:

بما أن: $\quad y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

فإنّنا نجد قيمتان لـ x هما : $\quad x_1 = \sqrt{y}\;,\;\; x_2 = -\sqrt{y}$

ومنه نجد أنّ:

$$g(y) = f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x_1^2}{2}} + e^{-\frac{x_2^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

نعوض الآن كل من x_1, x_2 بما يساويها فنحصل على:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{y}{2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}$$

أي أن:

$$g(y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} \quad , \; y \geq 0$$

وهي دالة الكثافة لتوزيع كاي مربع درجة حريته الواحد.

ثانياً: إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمجموعة من المتغيرات العشوائية التابعة لمجموعة أخرى من المتغيرات العشوائية دالة كثافتهما الاحتمالية معلومة :

لتكن لدينا X_1, X_2, X_3 ثلاثة متغيرات عشوائية كثافتها المشتركة معلومة , ولنفرض أنّ Y_2, Y_2, Y_3 ثلاثة متغيرات عشوائية أخرى معرفة بالشكل :

$$Y_1 = U_1(X_1, X_2, X_3)$$
$$Y_2 = U_2(X_1, X_2, X_3)$$
$$Y_3 = U_3(X_1, X_2, X_3)$$

المطلوب إيجاد الكثافة المشتركة للمتغيراتY_2, Y_2, Y_3.

الحل:

إنّ دالة الكثافة المشتركة لـ Y_1, Y_2, Y_3 تعطى بالعلاقة :

$$g(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)|J|$$

حيث أنّ J هو معين اليعقوبي ويعطى كما يلي :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

مثال: لتكن X, Y عينة عشوائية حجمها $n = 2$ مأخوذة من مجتمع إحصائي له التوزيع الطبيعي المعياري , وبفرض أنّ U, V متغيرين عشوائيين مستقلين جديدين معرفين بالعلاقتين التاليتين:

$$U = X + Y \; ; \; V = X - Y$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهذين المتغيرين العشوائيين U, V .

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من هذين المتغيرين العشوائيين U, V .

3 – أثبت أنّ هذين المتغيرين العشوائيين U, V مستقلان عشوائياً .

الحل:

1 – بما أنّ X, Y متغيران عشوائيان مستقلان فإنّ دالة الكثافة المشتركة تعطى بالعلاقة:

$$f(x, y) = f(x)f(y) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^2 e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}$$

بفرض أنّ:

$$\left.\begin{matrix} u = x + y \\ v = x - y \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{matrix}\right.$$

ثم نحسب معين اليعقوبي بالشكل التالي:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow |J|=\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ U,V تعطى بالشكل:

$$g(u,v)=f(x,y)|J|=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\left|-\frac{1}{2}\right|\Bigg|_{\substack{x=\frac{u+v}{2}\\ y=\frac{u-v}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{4}}$$

أي أنّ :

$$g(u,v)=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}\quad ;\ -\infty<u,v<\infty$$

2 – لنوجد دالة الكثافة الهامشية لكل من المتغيرين U,V :

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty}g(u,v)dv=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{4}}}_{N(0,2)}dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{4}}$$

أي أن:

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{4}}\quad ;\ -\infty<u<\infty$$

$$g(v)=\int_{-\infty}^{\infty}g(u,v)du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{4}}}_{N(0,2)}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{4}}$$

أي أن:

$$g(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{4}}\quad ;\ -\infty<v<\infty$$

3 – نلاحظ أن:

$$g(u,v)=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{4}}=g(u)g(v)$$

وبالتالي فإنّ هذين المتغيرين مستقلين وتوزيع كل منهما هو التوزيع الطبيعي وسيطاه $\mu = 0 \ , \sigma^2 = 2$ أي أنّ توزيع كل منهما هو التوزيع الطبيعي $N(0,2)$.

مثال: ليكن X متغير عشوائي له التوزيع الطبيعي المعياري وليكن Z متغيرا عشوائيّا أخراً له توزيع كاي مربّع درجة حريته n وبفرض أنّ X,Z مستقلان, وأنّ T,Y متغيرين عشوائيين معرفين بالعلاقتين التاليتين:

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Z}{n}}} \quad , \quad Y = Z$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين T,Y .

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير T .

الحل:

1 – بما أنّ: $Z \sim \chi^2(n) \quad ; \quad X \sim N(0,1)$ وأنّ X,Z مستقلان , فإن:

$$f(x,z) = f(x)f(z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{(2)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(z)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}\right]$$

نفرض أن:

$$\left.\begin{matrix} t = \frac{x}{\sqrt{\frac{z}{n}}} \\ y = z \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} x = t\sqrt{\frac{y}{n}} \\ z = y \end{matrix}\right.$$

ثم نحسب معين اليعقوبي بالشكل التالي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{y}{n}} & \text{مقدارما} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{y}{n}}$$

وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ T,Y تعطى بالشكل:

$$g(t,y) = f(x,z)|J|\Big|_{\substack{x = t\sqrt{\frac{y}{n}} \\ z = y}}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{(2)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(z)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}\right]\sqrt{\frac{y}{n}}\Bigg|_{\substack{x = t\sqrt{\frac{y}{n}} \\ z = y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(y)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t^2 y}{2n}} e^{-\frac{y}{2}}\sqrt{\frac{y}{n}}$$

إذا أصبح لدينا:

$$g(t,y)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}\ (2)^{\frac{n+1}{2}}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{y}{2}(1+\frac{t^2}{n})}y^{\frac{n-1}{2}} \quad ; \quad y>0\ ; t\in R$$

2 – وبالتالي فإنّ دالة الكثافة الهامشية لـ T تعطى بالشكل:

$$f(t)=\int_0^{\infty}g(t,y)dy=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}(2)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{y}{2}(1+\frac{t^2}{n})}y^{\frac{n-1}{2}}dy$$

نجري تغيير في المتحول بالشكل:

$$z=\frac{y}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\Longrightarrow y=\frac{2z}{(1+\frac{t^2}{n})}\Longrightarrow dy=\frac{2dz}{(1+\frac{t^2}{n})}$$

ومنه نجد :

$$f(t)=a\int_0^{\infty}e^{-z}\left(\frac{2z}{1+\frac{t^2}{n}}\right)\frac{2dz}{(1+\frac{t^2}{n})}=\frac{a2^{\frac{n+1}{2}}}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{\infty}z^{\frac{n-1}{2}}e^{-z}dz$$

علما أنّ: $a=\frac{1}{\sqrt{n\pi}(2)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

وبالتالي يمكن أنّ نكتب:

$$f(t)=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}(2)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{\infty}z^{\frac{n-1}{2}}e^{-z}dz$$

ومن دالة غاما نجد: $\Gamma(\vartheta)=\int_0^{\infty}x^{\vartheta-1}e^{-x}dx\Longrightarrow\frac{n-1}{2}=\vartheta-1\Longrightarrow\vartheta=\frac{n+1}{2}$

أي أنّ: $\int_0^{\infty}z^{\frac{n-1}{2}}e^{-z}dz=\Gamma(\frac{n+1}{2})$

نعوض مباشرةً فنجد أنّ :

$$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت درجة حريته n .

ويمكن صياغة المبرهنة بشكل أخر : إذا كان لدينا $X\sim N(0,1)\ ,\ Y\sim\chi^2_{(n)}$ وحيث أنّ X,Y مستقلان فهذا يؤدي إلى أنّ $T=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ له توزيع ستيودنت درجة حريته n .

مثال: ليكن U,V متغيرين عشوائيين مستقلين لكل منهما توزيع كاي مربع درجة حريتهما على الترتيب r_1,r_2 وبفرض أنّ F,Z متغيرين عشوائيين معرفين بالعلاقتين التاليتين:

$$F=\frac{U/r_1}{V/r_2}\quad ,\quad Z=V$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين F, Z .

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير F ثم بين نوعه .

الحل:

1 – لدينا

$$U\sim\chi^2(r_1) \Rightarrow f(u) = \frac{1}{2^{\frac{r_1}{2}}}\frac{1}{\Gamma(\frac{r_1}{2})}u^{\frac{r_1}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}$$

$$V\sim\chi^2(r_2) \Rightarrow f(v) = \frac{1}{2^{\frac{r_2}{2}}\Gamma(\frac{r_2}{2})}v^{\frac{r_2}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}}$$

وبما أنّ U, V متغيرين عشوائيين مستقلين, فإن :

$$f(u,v) = \frac{1}{(2)^{\frac{r_1+r_2}{2}}\Gamma(\frac{r_1}{2})\Gamma(\frac{r_2}{2})}u^{\frac{r_1}{2}-1}v^{\frac{r_2}{2}-1}e^{-\frac{u+v}{2}}$$

نفرض أن:

$$\left.\begin{array}{c} f == \dfrac{u/r_1}{v/r_2} \\ z = v \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} u = \dfrac{r_1}{r_2}fz \\ v = z \end{array}$$

ثم نحسب معين اليعقوبي بالشكل التالي:

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(f,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial f} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial f} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{r_1}{r_2}z & \frac{r_1}{r_2}f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{r_1}{r_2}z$$

وبالتالي فإنّ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تعطى بالشكل:

$$g(f,z) = f(u,v)|J|$$

$$= \frac{1}{(2)^{\frac{r_1+r_2}{2}}\Gamma(\frac{r_1}{2})\Gamma(\frac{r_2}{2})}u^{\frac{r_1}{2}-1}v^{\frac{r_2}{2}-1}e^{-(\frac{u+v}{2})}\left|\frac{r_1}{r_2}z\right|\Bigg|_{\substack{u=\frac{r_1}{r_2}fz \\ v=z}}$$

$$= \frac{1}{(2)^{\frac{r_1+r_2}{2}}\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)}\left(\frac{r_1}{r_2}f.z\right)^{\frac{r_1}{2}-1}z^{\frac{r_2}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}f+1\right)}\frac{r_1}{r_2}z$$

$$= \frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}}f^{\frac{r_1}{2}-1}}{(2)^{\frac{r_1+r_2}{2}}\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)}z^{\frac{r_1+r_2}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}f+1\right)} \quad , \ 0 < f, z < \infty$$

2 – لنوجد الآن دالة الكثافة الهامشية لـ f بالشكل :

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(f, z) dz$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} f^{\frac{r_1}{2}-1}}{(2)^{\frac{r_1+r_2}{2}} \Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} z^{\frac{r_1+r_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}f+1\right)z} dz$$

لإجراء التكامل نفرض أنّ: $y = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2} f + 1\right) z \Rightarrow z = \frac{2y}{\frac{r_1}{r_2}f+1} \Rightarrow dz = \frac{2dy}{\frac{r_1}{r_2}f+1}$

$$g(f) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} f^{\frac{r_1}{2}-1} \left(\frac{2y}{\frac{r_1}{r_2}f+1}\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}-1}}{(2)^{\frac{r_1+r_2}{2}} \Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} e^{-y} \frac{2}{\frac{r_1}{r_2}f+1} \right) dy$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} f^{\frac{r_1}{2}-1} \left(1+\frac{r_1}{r_2}f\right)^{-\frac{r_1+r_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \right) \underbrace{\int_0^{\infty} (y)^{\frac{r_1+r_2}{2}-1} e^{-y} dy}_{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} f^{\frac{r_1}{2}-1} \left(1+\frac{r_1}{r_2}f\right)^{-\frac{r_1+r_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \right) \Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \quad , \quad 0 < f < \infty$$

أي أن:

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} f^{\frac{r_1}{2}-1} \left(1+\frac{r_1}{r_2}f\right)^{-\frac{r_1+r_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \quad , \quad 0 < f < \infty$$

وهي دالة احتمالية لتوزيع فيشر.

مثال: لتكن X, Y عينة عشوائية حجمها $n = 2$ مأخوذة من مجتمع إحصائي دالة كثافه معرفة بالشكل:

$$f(x) = e^{-x} \ ; \ x \geq 0$$

وبفرض أنّ U, V متغيران عشوائيان معرفان بالشكل:

$$U = X + Y \quad , \quad V = \frac{X}{Y}$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهذين المتغيرين العشوائيين U, V .

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من هذين المتغيرين العشوائيين U, V .

3 – أثبت أنّ هذين المتغيرين العشوائيين U, V مستقلان عشوائياً .

الحل:

1 – بما أن X,Y متغيرين عشوائيين مستقلين, فإن :

$$f(x,y) = f(x)f(y) = e^{-(x+y)}$$

بفرض أنّ:

$$\left.\begin{array}{c} u = x + y \\ v = \frac{x}{y} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \frac{uv}{v+1} \\ y = \frac{u}{v+1} \end{array}\right.$$

ثم نحسب معين اليعقوبي بالشكل التالي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(v+1)^2} \Longrightarrow |J| = \frac{u}{(v+1)^2}$$

وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ U,V تعطى بالشكل:

$$g(u,v) = f(x,y)|J| = e^{-(x+y)} \left|-\frac{u}{(v+1)^2}\right| \Bigg|_{\substack{x=\frac{uv}{v+1} \\ y=\frac{u}{v+1}}}$$

$$= e^{-u}\frac{u}{(v+1)^2} = \frac{ue^{-u}}{(v+1)^2}$$

أي أنّ :

$$g(u,v) = \frac{ue^{-u}}{(v+1)^2} \quad ; \quad u,v > 0$$

2 – لنوجد دالة الكثافة الهامشية لكل من المتغيرين U,V :

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u,v)dv = \int_0^{\infty} \frac{ue^{-u}}{(v+1)^2}dv$$

$$= ue^{-u}\int_0^{\infty} \frac{dv}{(v+1)^2} = ue^{-u}$$

أي أنّ :

$$g(u) = ue^{-u} \quad ; \quad u > 0$$

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u,v)du = \int_0^{\infty} \frac{ue^{-u}}{(v+1)^2}du$$

$$= \frac{1}{(v+1)^2}\int_0^{\infty} ue^{-u}du = \frac{1}{(v+1)^2}$$

أي أنّ :

$$g(v) = \frac{1}{(v+1)^2} \quad ; \quad v > 0$$

3 – نلاحظ أن:

$$g(u,v)=\frac{ue^{-u}}{(v+1)^2}=(ue^{-u})\left(\frac{1}{(v+1)^2}\right)=g(u)g(v)$$

وبالتالي فإنّ هذين المتغيرين مستقلين .

مثال: لتكن X,Y,Z ثلاثة متغيرات عشوائية دالة كثافتهما الاحتمالية المشتركة معرفة بالشكل:

$$f(x,y,z)=\frac{6}{(1+x+y+z)^4} \quad , \qquad x>0\ ,\ y>0\ ,\ z>0$$

وبفرض أنّ $U\ ,V\ ,W$ ثلاثة متغيرات عشوائية أخرى معرفة بالشكل:

$$U=X+Y+Z \quad , \quad V=Y+Z \quad , \quad W=Z$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهذه المتغيرات العشوائية أنّ $U\ ,V\ ,W$.

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير $U=X+Y+Z$.

الحل:

1 – نفرض أن:

$$\left.\begin{array}{l} u=x+y+z \\ v=y+z \\ w=z \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x=u-v \\ y=v-w \\ z=w \end{cases}$$

ثم نحسب معين اليعقوبي بالشكل التالي:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

وبالتالي فإنّ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تعطى بالشكل:

$$f(u,v,w)=f(x,y,z)|J|\ \Big|_{\substack{x=u-v\\ y=v-w\\ z=w}}=\frac{6}{(1+u)^4}$$

أي أنّ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ $U\ ,V\ ,W$ تصبح بالشكل: :

$$f(u,v,w)=\frac{6}{(1+u)^4} \qquad ; \qquad 0<w<v<u<\infty$$

2 – لنوجد الآن دالة الكثافة الهامشية $f(u)$ بالشكل :

$$f(u)=\int_0^u\int_0^v\frac{6}{(1+u)^4}\,dwdv=\frac{3u^2}{(1+u)^4} \quad , \ u\geq 0$$

مثال: لتكن X_1, X_2, X_3 عينة عشوائية حجمها $n = 3$ مأخوذة من مجتمع إحصائي دالة كثافه معرفة بالشكل:

$$f_X(x) = e^{-x} \qquad ;x > 0$$

وبفرض أنّ Y_1 , Y_2 , Y_3 ثلاثة متغيرات عشوائية معرفة بالشكل:

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2} , Y_2 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3} , Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهذه المتغيرات العشوائية Y_1 , Y_2 , Y_3.

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من هذه المتغيرات العشوائية Y_1 , Y_2 , Y_3 .

3 – أثبت أنّ هذه المتغيرات العشوائية Y_1 , Y_2 , Y_3 مستقلة عشوائياً .

الحل:

بما أنّ المتغيرات العشوائية X_1, X_2, X_3 مستقلة عشوائياً فإنّ دالة الكثافة المشتركة تعطى بالشكل:

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{من الاستقلال}}{=} f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\, f_{X_3}(x_3)$$
$$= e^{-x_1}e^{-x_2}e^{-x_3} = e^{-\sum_{i=1}^{3} x_i}$$

وبفرض أن :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{x_1+x_2} \\ y_2 &= \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3} \\ y_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1y_2y_3 \\ x_2 = (1-y_1)y_2y_3 \\ x_3 = (1-y_2)y_3 \end{cases}$$

لنوجد الآن محدد اليعقوبي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2 \\ -y_2y_3 & (1-y_1)y_3 & (1-y_1)y_2 \\ 0 & -y_3 & (1-y_2) \end{vmatrix}$$

$$= y_2y_3(1-y_1)y_3(1-y_2) + y_1y_2(-y_2y_3)(-y_3) + y_2y_3(1-y_1)y_2y_3 +$$
$$+(y_1y_3)(y_2y_3)(1-y_2) = y_2y_3^2 - y_1y_2y_3^2 - y_2^2y_3^2 + y_1y_2^2y_3^2 + y_1y_2^2y_3^2 +$$
$$y_2^2y_3^2 - y_1y_2^2y_3^2 + y_1y_2y_3^2 - y_1y_2^2y_3^2 = y_2y_3^2$$

وبالتالي فإنّ دالة الكثافة المشتركة للمتغيرات العشوائية Y_1 , Y_2 , Y_3 تعطى بالشكل:

$$g_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3)\, |J| \; \begin{matrix} x_1=y_1y_2y_3 \\ x_2=(1-y_1)y_2y_3 \\ x_3=(1-y_2)y_3 \end{matrix}$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$g_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = e^{-y_3}y_2y_3^2 = y_2y_3^2e^{-y_3} = 1 \times 2y_2 \times \frac{1}{2}y_3^2e^{-y_3} \quad ;\begin{cases} y_3 \ge 0 \\ 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 \le y_1 \le 1 \end{cases}$$

$$= [(1)]\left[\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2)\Gamma(1)}y_2^{2-1}(1-y_2)^{1-1}\right]\left[\frac{1^3}{\Gamma(3)}y_3^{3-1}e^{-y_3}\right]$$

$$= \underbrace{g_{Y_1}(y_1)}_{\text{منتظم على}[0,1]} \quad \underbrace{g_{Y_2}(y_2)}_{\text{بتاوي وسيطاه } m=2, n=1} \quad \underbrace{g_{Y_3}(y_3)}_{\text{غماوي وسيطاه } \lambda=3, \alpha=1} \quad ; \quad 0 \le y_1, y_2 \le 1, y_3 \ge 0$$

$\Leftarrow$ Y_1, Y_2, Y_3 مستقلة عشوائياً.

أو يمكننا اثبات الاستقلال العشوائي بالشكل التقليدي التالي:

$$g_{Y_1}(y_1) = \int_0^1\left(\int_0^\infty y_2y_3^2e^{-y_3}dy_3\right)dy_2 = \int_0^1 y_2\Gamma(3)dy_2 = \int_0^1 2y_2dy_2 = 1, \ 0 \le y_1 \le 1$$

$$g_{Y_2}(y_2) = \int_0^1\left(\int_0^\infty y_2y_3^2e^{-y_3}dy_3\right)dy_1 = \int_0^{y_2} 2y_2dy_1 = 2y_2, \ 0 \le y_2 \le 1$$

$$g_{Y_3}(y_3) = \int_0^1\left(\int_0^1 y_2y_3^2e^{-y_3}dy_2\right)dy_1 = y_3^2e^{-y_3}\int_0^1\left(\int_0^1 y_2dy_2\right)dy_1$$

$$= e^{-y_3}y_3^2\int_0^1\frac{1}{2}dy_1 = \frac{1}{2}y_3^2e^{-y_3}, y_3 \ge 0$$

نلاحظ أنّ:

$$g_{Y_1}(y_1)\, g_{Y_2}(y_2)\, g_{Y_3}(y_3) = 1 \times 2y_2 \times \frac{1}{2}y_3^2e^{-y_3} = y_2y_3^2e^{-y_3}$$

$$= g_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)$$

وبالتالي فإنّ المتغيرات العشوائية Y_1 , Y_2 , Y_3 مستقلة عشوائياً.

مثال: لتكن X_1, X_2, X_3 عينة عشوائية حجمها $n = 3$ مأخوذة من مجتمع إحصائي دالة كثافه معرفة بالشكل:

$$f_X(x) = e^{-x} \qquad ; x > 0$$

وبفرض أنّ Y_1, Y_2, Y_3 ثلاثة متغيرات عشوائية معرفة بالشكل:

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2+X_3}, Y_2 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}, Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهذه المتغيرات العشوائية Y_1, Y_2, Y_3.

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من هذه المتغيرات العشوائية Y_1, Y_2, Y_3 .

3 – أثبت فيما إذا كانت هذه المتغيرات العشوائية Y_1, Y_2, Y_3 مستقلة عشوائياً أم لا .

الحل:

بما أن المتغيرات العشوائية X_1, X_2, X_3 مستقلة عشوائياً فإنّ دالة الكثافة المشتركة تعطى بالشكل:

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) \quad \overset{\text{من الاستقلال}}{=} \quad f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot f_{X_3}(x_3)$$

$$= e^{-x_1}e^{-x_2}e^{-x_3} = e^{-\sum_{i=1}^{3} x_i}$$

وبفرض أن :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3} \\ y_2 &= \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3} \\ y_3 &= x_1+x_2+x_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= y_1y_3 \\ x_2 &= (y_2-y_1)y_3 \\ x_3 &= (1-y_2)y_3 \end{aligned}\right.$$

لنوجد الآن محدد اليعقوبي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 & 0 & y_1 \\ -y_3 & y_3 & (y_2-y_1) \\ 0 & -y_3 & (1-y_2) \end{vmatrix}$$

$$= y_3[y_3(y_2-y_1)+y_1y_3] + (1-y_2)y_3^2 = y_2y_3^2 - y_1y_3^2 + y_1y_3^2 + y_3^2 - y_2^2y_3^2 = y_3^2$$

وبالتالي فإنّ دالة الكثافة المشتركة للمتغيرات العشوائية $Y_1\ , Y_2\ , Y_3$ تعطى بالشكل:

$$g_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)\ |J|\ \Big|_{\substack{x_1=y_1y_3 \\ x_2=(y_2-y_1)y_3 \\ x_3=(1-y_2)y_3}}$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد دالة الكثافة المشتركة:

$$g_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = y_3^2e^{-y_3}\ ;\quad 0 \le y_1 \le y_2 \le 1, y_3 \ge 0$$

لنوجد دوال الكثافات الهامشية بالشكل:

$$g_{Y_1}(y_1) = \int_0^1\left(\int_0^\infty y_3^2e^{-y_3}dy_3\right)dy_2 = \int_0^1 \Gamma(3)dy_2 = \int_0^1 2dy_2 = 2\ ,\ 0 \le y_1 \le \frac{1}{2}$$

$$g_{Y_2}(y_2) = \int_0^{y_2}\left(\int_0^\infty y_3^2e^{-y_3}dy_3\right)dy_1 = \int_0^{y_2} \Gamma(3)dy_1 = \int_0^{y_2} 2dy_1 = 2y_2\ ,\ 0 \le y_2 \le 1$$

$$g_{Y_3}(y_3) = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 y_3^2e^{-y_3}dy_2\right)dy_1 = y_3^2e^{-y_3}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 dy_2\right)dy_1$$

$$= y_3^2e^{-y_3}\int_0^{\frac{1}{2}} dy_1 = \frac{1}{2}y_3^2e^{-y_3}\ , y_3 \ge 0$$

نلاحظ أنّ:

$$g_{Y_1}(y_1)\ g_{Y_2}(y_2)\ g_{Y_3}(y_3) = 2 \times 2y_2 \times \frac{1}{2}y_3^2e^{-y_3} = 2y_2y_3^2e^{-y_3}$$

$$\ne e^{-y_3}y_3^2 = g_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)$$

وبالتالي فإنّ المتغيرات العشوائية $Y_1\ , Y_2\ , Y_3$ غير مستقلة عشوائياً.

مثال: ليكن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين غمّاويين مستقلين , وسيطاهما α, β على الترتيب , دالة كثافتهما الاحتمالية المشتركة معرفة بالشكل التالي:

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}e^{-x_1-x_2}\quad ;\quad 0 < x_1,x_2 < \infty\quad \alpha,\beta > 0$$

وبفرض أنّ Y_1 , Y_2 متغيرين عشوائيين معرفين بالشكل:

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين Y_1 , Y_2.

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من المتغيرين العشوائيين Y_1 , Y_2 .

الحل:

1 – لدينا من الفرض أنّ:

$$\left.\begin{array}{r} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 y_2 \\ x_2 = y_1(1-y_2) \end{cases}$$

لنوجد الآن معين اليعقوبي J :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1 \Longrightarrow |J| = |-y_1| = y_1$$

بالتعويض نجد أنّ:

$$\begin{aligned} g(y_1,y_2) &= f(x_1,x_2)|J| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(y_1y_2)^{\alpha-1}(y_1 - y_1y_2)^{\beta-1}e^{-y_1}y_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(y_1)^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}(y_2)^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1} \end{aligned}$$

وبالتالي فإنّ دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين Y_1 , Y_2 تعطى بالشكل:

$$g(y_1,y_2) = \frac{{y_1}^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-y_1}(y_2)^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1} \; ; \; y_1 > 0 \quad , \quad 0 < y_2 < 1 \;\; , \;\; \alpha,\beta > 0$$

2 – إنّ دالة الكثافة الهامشية للمتغير العشوائي Y_1 تعطى بالشكل:

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int_0^\infty g(y_1,y_2)dy_2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{y_1}^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}\int_0^1 (y_2)^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1}\,dy_2 \\ &= \frac{{y_1}^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}Be(\alpha,\beta) \\ &= \frac{{y_1}^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{{y_1}^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

أي أنّ:

$$g(y_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} {y_1}^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1} \quad ; \; y_1 > 0 \;, \quad \alpha, \beta > 0$$

أنّ دالة الكثافة الهامشية للمتغير العشوائي Y_2 تعطى بالشكل:

$$\begin{aligned} g(y_2) &= \int_0^1 g(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (y_2)^{\alpha-1} (1-y_2)^{\beta-1} \int_0^\infty {y_1}^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1} \, dy_1 \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (y_2)^{\alpha-1} (1-y_2)^{\beta-1} \end{aligned}$$

أي أنّ:

$$g(y_2) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (y_2)^{\alpha-1} (1-y_2)^{\beta-1} \; ; \quad 0 < y_2 < 1 \,, \quad \alpha, \beta > 0$$

مثال: لتكن X, Y عينة عشوائية حجمها $n = 2$ مأخوذة من مجتمع إحصائي يخضع لتوزيع كاي مربع درجة حريته (2) . وبفرض أنّ U, V متغيران عشوائيان معرفان بالشكل:

$$U = \frac{1}{2}(X - Y) \quad , \quad V = Y$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهذين المتغيرين العشوائيين U, V .

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي U .

الحل:

1 – بما أن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين, فإن :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x) f(y) \\ &= \left[\frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \right] \left[\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \right] \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y} \right] \\ &= \frac{1}{4} e^{-\left(\frac{x+y}{2}\right)} \; ; \quad x, y > 0 \end{aligned}$$

وبفرض أنّ:

$$\left. \begin{array}{c} u = \frac{1}{2}(x - y) \\ v = y \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2u + v \\ y = v \end{array} \right.$$

و أنّ هذا التحويل هو تحويل مطابق من $\mathcal{A} = \{(x,y); 0 < x < \infty \,, 0 < y < \infty\}$ إلى

$$= \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\right] \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}\right]$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\left(\frac{x+y}{2}\right)} \;; \quad x, y > 0$$

بفرض أنّ:

$$\left.\begin{array}{c} u = (x-y) \\ v = y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = u+v \\ y = v \end{array}\right.$$

وبفرض أن هذا التحويل هو تحويل مطابق من $\mathcal{A} = \{(x,y); 0 < x < \infty , 0 < y < \infty \}$ إلى

$$\mathcal{B} = \{(u,v) \,; -u < v \;, 0 < v, -\infty < u < \infty\}$$

عندئذ فإن محدد اليعقوبي يعطى بالشكل التالي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Longrightarrow |J| = 1$$

وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ U, V تعطى بالشكل:

$$g(u,v) = f(x,y)|J| = \frac{1}{4} e^{-\left(\frac{x+y}{2}\right)} |1| \Big|_{\substack{x=u+v \\ y=v}}$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(u+2v)}$$

أي أنّ :

$$g(u,v) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(u+2v)} \quad ; \quad (u,v) \in \mathcal{B}$$

2 – لنوجد دالة الكثافة الهامشية للمتغير العشوائي U :

$$g(u) = \begin{cases} \int_{-u}^{\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(u+2v)}\right) dv = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}u} \;; -\infty < u < 0 \\ \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(u+2v)}\right) dv = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}u} \;; \; 0 \le u < \infty \end{cases}$$

أي أنّ :

$$g(u) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}|u|} \quad ; \; -\infty < \; u < \infty$$

مثال: لتكن X_1, X_2 عينة عشوائية حجمها $n = 2$ مأخوذة من مجتمع إحصائي له التوزيع المنتظم المعرف على الفترة $[0,1]$, دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل:

$$f_X(x) = 1 \qquad ; 0 < x < 1$$

وبفرض أنّ Y_1 , Y_2 متغيرين عشوائيين معرفين بالشكل:

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = X_1 - X_2$$

المطلوب:

1 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين $Y_1\,,Y_2$.

2 – أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من المتغيرين العشوائيين $Y_1\,,Y_2$.

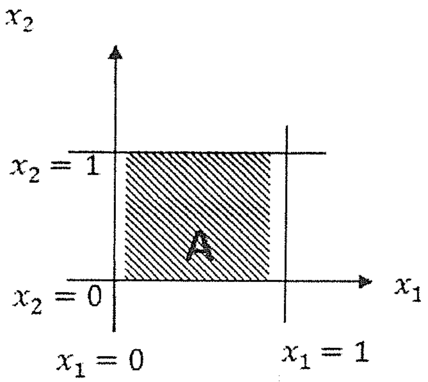
الحل:

1 – بما أن X_1, X_2 مستقلين فإن:

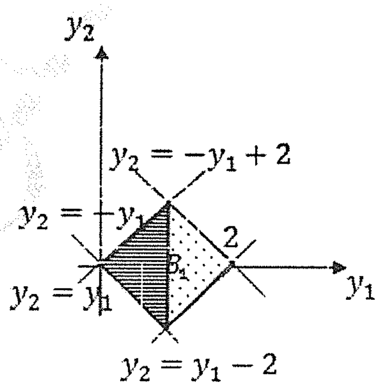
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \quad \overset{\text{من الاستقلال}}{\triangleq} \quad f_{X_1}(x_1)\,.\,f_{X_2}(x_2) = 1 \quad ; \quad 0 < \; x_1,x_2 < 1$$

ولدينا من الفرض:

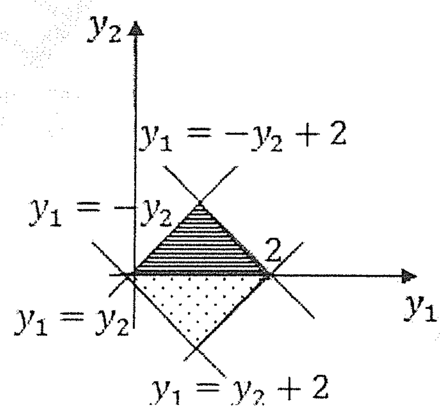
$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_1-y_2}{2} \end{array}\right.$$



الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)

لنوجد محدد اليعقوبي:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين Y_1 , Y_2 تعطى بالعلاقة التالية:

$$g_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \ \left|-\frac{1}{2}\right| \Bigg|_{\substack{x_1 = \frac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_1-y_2}{2}}} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

أي أن دالة الكثافة تصبح بالشكل:

$$g_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \ ; (y_1, y_2) \epsilon \ B$$

2 – لنوجد دالة الكثافة الهامشية للمتغير العشوائي Y_1 :

$$\begin{aligned} g_{Y_1}(y_1) &= \int_{R(y_2)} g_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) \ dy_2 \\ &= \left\{ \begin{matrix} \int_{y_2=-y_1}^{y_2=y_1} \frac{1}{2} dy_2 \ = y_1 \ ; 0 < y_1 \leq 1 \\ \int_{y_2=y_1-2}^{y_2=-y_1+2} \frac{1}{2} dy_2 \ = 2 - y_1 \ ; 1 < y_1 < 2 \end{matrix} \right\} (\text{شكل } 1) \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g_{Y_1}(y_1) dy_1 &= \int_0^1 y_1 dy_1 + \int_1^2 (2 - y_1) dy_1 \\ &= \left[\frac{y_1^2}{2}\right]_0^1 + \left[2y_1 - \frac{y_1^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right) - (0)\right] + \left[(4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] \equiv 1 \end{aligned}$$

لنوجد دالة الكثافة الهامشية للمتغير العشوائي Y_2

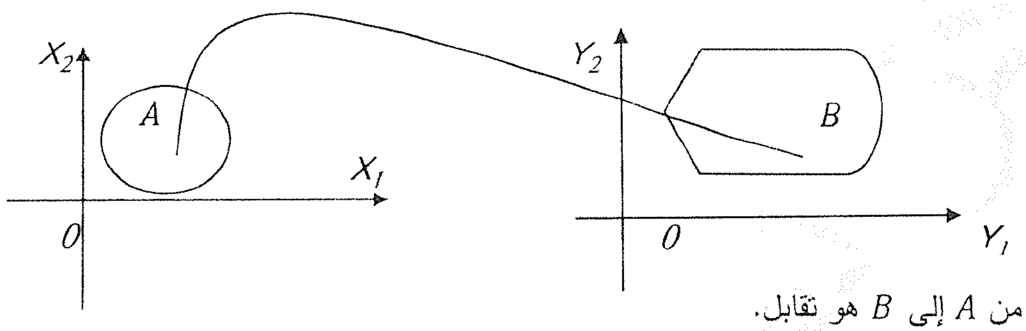
$$\begin{aligned} g_{Y_2}(y_2) &= \int_{R(y_1)} g_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) \ dy_1 \\ &= \left\{ \begin{matrix} \int_{y_1=-y_2}^{y_1=y_2+2} \frac{1}{2} dy_1 \ = 1 + y_2 \ ; -1 < y_2 \leq 0 \\ \int_{y_1=y_2}^{y_1=-y_2+2} \frac{1}{2} dy_1 \ = 1 - y_2 \ ; 0 < y_2 < 1 \end{matrix} \right\} (\text{شكل } 2) \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g_{Y_2}(y_2) dy_2 &= \int_{-1}^0 (1 + y_2) dy_2 + \int_0^1 (1 - y_2) dy_2 \\ &= \left[y_2 + \frac{y_2^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[y_2 - \frac{y_2^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \left[(0) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - (0)\right] \equiv 1 \end{aligned}$$

إيجاد الكثافة المشتركة لمتغيرين عشوائيين تابعين لمتغيرين آخرين(التوزيعات المنقطعة):

إذا كانت الدالة$f(x_1,x_2)$ الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين المنقطعين X_1,X_2 حيث A هي مجموعة النقاط والتي هي عبارة عن أزواج مرتبة من الأعداد الحقيقية التي تجعل دالة الكثافة المشتركة غير سالبة أي أنّ $f(x_1,x_2) \geq 0$ ولتكن كل من $Y_1 = U_1(X_1,X_2)$, $Y_2 = U_2(X_1,X_2)$ دالتين تعرفانّ التحويل واحد لواحد أي $B \longrightarrow A$ كما في الشكل التالي:



أي أنّ التطبيق من A إلى B هو تقابل.

$$\left.\begin{matrix} y_1 = u_1(x_1,x_2) \\ y_2 = u_2(x_1,x_2) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = u_1^{-1}(y_1,y_2) \\ x_2 = u_2^{-1}(y_1,y_2) \end{cases}$$

أنّ الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين الجديدين : $Y_1 = U_1(X_1,X_2)$, $Y_2 = U_2(X_1,X_2)$

تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(y_1,y_2) = f[u_1^{-1}(y_1,y_2), u_2^{-1}(y_1,y_2)] \qquad ; \qquad (y_1,y_2) \in B$$

حيث :$(x_1,x_2) = (u_1^{-1}(y_1,y_2), u_2^{-1}(y_1,y_2)$ هي نقطة وحيدة(أحادية).

مثال: ليكن X,Y متغيرين عشوائيين بواسونيين مستقلين وسيطاهما على الترتيب λ_1,λ_2 وبفرض أنّ U,V متغيرين عشوائيين معرفين بالشكل:

$$U = X + Y \quad , \quad V = Y$$

والمطلوب:

1- أوجد دالة الكثافة المشتركة لـ U,V .

2- أوجد دالة الكثافة للمتغير U واستنتج نوعه.

الحل:

بما أنّ X,Y مستقلان فإنّ: $f(x,y) = f(x)f(y) = \frac{\lambda_1^x}{x!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^y}{y!} e^{-\lambda_2}$

أي أنّ : $$f(x,y) = \frac{\lambda_1^x.\lambda_2^y}{x!y!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

ومنه نستطيع أنّ نجري التحويل التالي: $v = y \quad ; \quad u = x + y\} \Rightarrow x = u - v \quad , y = v$

وبالتالي فإنّ دالة الكثافة المشتركة لـ U,V تعطى بالشكل التالي:

$$g(u,v)=\frac{\lambda_1^{u-v}\lambda_2^{v}}{(u-v)!.v!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\quad,(u,v)\in B$$

علماً بأنّ: $B=\{(u,v):v=0,1,2,\ldots,u\quad;\quad u=0,1,2,\ldots\}$

لنوجد دالة الكثافة للمتغير U كما يلي:

$$g(u)=\sum_{v=0}^{u}g(u,v)=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{u!}\sum_{v=0}^{u}\frac{u!}{(u-v)!.v!}\lambda_1^{u-v}\lambda_2^{v}$$

وبالتالي: $g(u)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{u}}{u!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\quad:\quad u=0,1,\ldots.$

وهو توزيع بواسوني وسيطه $(\lambda_1+\lambda_2)$ وبذلك يتم المطلوب.

مركز العلوم للخدمات الجامعية
محاضرات - مخبريات - قرطاسية
هـ ٠٩٦٦٢٧٨٧٥٧ - ٠٩٢١٨٧٩٧٩٧