تمرين (1): أوجد معادلة المستوي Q المار من A ويوازي المستوي P حيث:

$$P: 2x-y+3z=4 \quad , \quad A(1,0,1)$$

الحل

$$\vec{n_Q}=\vec{n_P}\,(2,-1,3) \quad , \quad A(1,0,1)$$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$\Rightarrow 2(x-1)-(y-0)+3(z-1)=0$$

$$\Rightarrow 2x-2-y+3z-3=0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x-y+3z-5=0}$$

تمرين (2): أوجد معادلة المستوي Q المار من النقطتين $A(1,-1,2)$, $B(2,0,4)$ ويعامد P : $P: x-y+3z-4=0$

الحل

$$\vec{n_P}(1,-1,3) \quad , \quad \vec{AB}(1,1,2)$$

* نفرض $\vec{n_Q}(a,b,c)$ ومنه:

$$\vec{n_Q}\perp\vec{n_P} \Rightarrow \vec{n_Q}\cdot\vec{n_P}=0 \Rightarrow a-b+3c=0 \quad (1)$$

$$\vec{n_Q}\perp\vec{AB} \Rightarrow \vec{n_Q}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow a+b+2c=0 \quad (2)$$

بجمع (1) و(2): $2a+5c=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} a=-\frac{5}{2}c$

نفرض $\boxed{c=2}$ نعوض في (3): $\boxed{a=-5}$ نعوض في (2):

$$-5+b+4=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

ومنه $\vec{n_Q}(-5,1,2)$ ولدينا $A(1,-1,2)$

$$-5(x-1)+(y+1)+2(z-2)=0$$

$$\Rightarrow -5x+5+y+1+2z-4=0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q: -5x+y+2z+2=0}$$

تمرين (3): أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

$$A(4,0,-3) \ , \ B(2,2,2)$$

الحل

* النقطة التي تمر منها المستوي ولتكن I منتصف $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right) \Rightarrow I\left(3,1,-\frac{1}{2}\right)$$

* الناظم: $\vec{n}=\vec{AB}(-2,2,5)$

$$-2(x-3)+2(y-1)+5\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow -2x+6+2y-2+5z+\frac{5}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{-2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0}$$

تمرين (4): أوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين P_1, P_2:

$$P_1: -x+y+z=3 \qquad P_2: 2x-y+2z=1$$

الحل

$$\vec{n_1}(-1,1,1) \ , \ \vec{n_2}(2,-1,2)$$

لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي فهما غير مرتبطين خطياً فالمستويان P_1 و P_2 متقاطعان.

$$-x+y+z=3 \quad (1)$$
$$2x-y+2z=1 \quad (2)$$

بجمع (1) و(2):

$$x+3z=4 \Rightarrow \boxed{x=4-3z}$$

نعوض في (1):

$$-4+3z+y+z=3 \Rightarrow \boxed{y=7-4z}$$

نفرض $z=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك وليكن d:

$$d: \begin{cases} x=4-3t \\ y=7-4t \\ z=t \end{cases} \quad ; t\in\mathbb{R}$$

تمرين (5): أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وقرر إذا كان $d \parallel d'$ أو d تنطبق على d'

$$d': \begin{cases} 3x-y-2z=1 & (1) \\ x-y-z=0 & (2) \end{cases} \quad , \quad d: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases}$$

الحل

* نوجد المعادلات الوسيطية لـ d' وذلك بحل (1) و(2) حلاً مشتركاً:

نطرح (2) من (1):

$$2x-z=1 \Rightarrow \boxed{z=2x-1}$$

نعوض في (2):

$$x-y-2x+1=0 \Rightarrow \boxed{y=-x+1}$$

نفرض $x=\lambda$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d':

$$d: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases} \quad , \quad \text{ولدينا} \quad d': \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda+1 \\ z=2\lambda-1 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

$\vec{u'}(1,-1,2)$, $\vec{u}(1,-1,2)$ مرتبطان خطياً فالمستقيمان d و d' إما متوازيين أو منطبقين.

* نأخذ نقطة من d وذلك بفرض $t=0$ فيكون: $A(0,0,-1)\in d$
* نتحقق إذا كانت A تنتمي إلى d'

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ 0=\lambda \\ (2)\ 0=-\lambda+1 \Rightarrow \lambda=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\neq 1$$

فالنقطة $A\notin d'$ فالمستقيمان d و d' متوازيين.

ملاحظة: إذا انتمت النقطة A إلى المستقيم d' كان المستقيمان منطبقين.

تمرين (6): لتكن لدينا النقطتان: $A(3,-1,1)$, $B(3,-3,-1)$

والشعاعان المستقلان خطياً $\vec{u}(1,0,-2)$, $\vec{v}(2,1,-3)$

المستقيم d مار من A ويقبل شعاع موجه $\vec{u}$

المستقيم d' مار من B ويقبل شعاع موجه $\vec{v}$

① أثبت أن المستقيمين d و d' متقاطعان في نقطة I يطلب تعيينها

② أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'.

الحل

① $d: \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases} ; \lambda\in\mathbb{R}$ $\quad d': \begin{cases} x=3+t \\ y=-1 \\ z=1-2t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

من الواضح أن $\vec u$ و $\vec v$ ليسا مرتبطين خطياً فالمستقيمان d و d' متقاطعان أو تختلفان . نبحث عن t و λ تعيينان.

$$\begin{cases} (1)\ 3+t=3+2\lambda \\ (2)\ -1=-3+\lambda \\ (3)\ 1-2t=-1-3\lambda \end{cases}$$

من (2) نجد $\lambda=2$ نعوض في (3): $1-2t=-1-6 \Rightarrow t=4$

نتحقق من (1):

$3+4=3+4 \Rightarrow 7=7$ محققة

فالمستقيمان d و d' متقاطعان .

* لإيجاد نقطة التقاطع نعوض $\lambda=2$ أو $t=4$:

$x=3+4=7,\ y=-1,\ z=1-8=-7 \Rightarrow \boxed{I(7,-1,-7)}$

② النقطة التي يمر منها المستوي A و B و I

نفرض ناظم المستوي $\vec n(a,b,c)$ فيكون

$\vec n\perp\vec u \Rightarrow \vec n\cdot\vec u=0 \Rightarrow a-2c=0 \quad (1)$

$\vec n\perp\vec v \Rightarrow \vec n\cdot\vec v=0 \Rightarrow 2a+b-3c=0 \quad (2)$

من (1) نجد: $a=2c$ نفرض $\boxed{c=1}$ فيكون $\boxed{a=2}$

نعوض في (2) ونجد $\boxed{b=-1}$

ومنه $\vec n(2,-1,1)$ ولدينا $A(3,-1,1)$

$2(x-3)-(y+1)+(z-1)=0$

$\Rightarrow \boxed{2x-y+z-8=0}$

* ملاحظة :
عند الحل المشترك للتمثيلين الوسيطين في حال لم تتحقق المعادلة الثالثة لكان المستقيمان مختلفان (لا يقعان في مستوٍ واحد) .

تمرين (7): لتكن لدينا النقطتين $A(2,-1,0)$, $B(-1,3,5)$ والمستوي P ،

$P: 2x-3y+z-5=0$

اثبت أن المستقيم AB تقطع المستوي P وأوجد احداثيات نقطة التقاطع

الحل

نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم AB ونعوضها في معادلة المستوي P :

$\vec u=\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$, $A(2,-1,0)$

$$(AB): \begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+4t \\ z=5t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

نعوض في معادلة المستوي P :

$2(2-3t)-3(-1+4t)+5t-5=0 \Rightarrow \boxed{t=\frac{2}{13}}$ فالمستقيم (AB) تقطع المستوي P

* نعوض $t=\frac{2}{13}$ في التمثيل الوسيطي :

$x=2-\frac{6}{13}=\frac{20}{13}$, $y=-1+\frac{8}{13}=\frac{-5}{13}$, $z=\frac{10}{13}$

ومنه نقطة التقاطع $(\frac{20}{13},\frac{-5}{13},\frac{10}{13})$.

تمرين (8): لتكن لدينا النقاط

$A(1,2,0)$, $B(0,0,1)$, $C(1,5,5)$, $D(-11,9,-4)$

أوجد احداثيات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC)

الحل

* نوجد معادلة المستوي (ABC)

نفرض ناظمه $\vec n(a,b,c)$ ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$, $\overrightarrow{AC}(0,3,5)$

$\vec n\perp\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec n\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -a-2b+c=0 \quad (1)$

$\vec n\perp\overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec n\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow 3b+5c=0 \quad (2)$

من (2) نجد: $b=-\frac{5}{3}c$

نفرض $\boxed{c=3}$ فيكون $\boxed{b=-5}$ نعوض في (1) ونجد $\boxed{a=13}$

ومنه $\vec n(13,-5,3)$ ولدينا $B(0,0,1)$ ومنه

$13(x-0)-5(y-0)+3(z-1)=0$

$\Rightarrow \boxed{13x-5y+3z-3=0}$

* نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم L المار من $D(-11,9,-4)$ ويعامد المستوي (ABC)

$\vec u_L=\vec n(13,-5,3)$, $D(-11,9,-4)$

$$L: \begin{cases} x=-11+13t \\ y=9-5t \\ z=-4+3t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

نعوضها في معادلة المستوي P ،

$13(-11+13t)-5(9-5t)+3(-4+3t)-3=0 \Rightarrow t=1$

ومنه احداثيات D' هي ،

$x=-11+13=2$, $y=9-5=4$, $z=-4+3=1 \Rightarrow \boxed{D'(2,4,1)}$

تمرين (6): لتكن لدينا المستويين P , Q :

$P: 2x-y+z-4=0$, $Q: x+y+2z-5=0$, $A(3,-1,2)$

احسب بعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين P و Q

الحل

$\vec n_Q(1,1,2)$, $\vec n_P(2,-1,1)$

$\vec n_P\cdot\vec n_Q=(1)(2)+(1)(-1)+(2)(1)=2-1+2=3\neq 0$

فالمستويين P و Q غير متعامدين .

* نوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك P و Q وذلك بالحل المشترك

$2x-y+z-4=0 \quad (1)$

$x+y+2z-5=0 \quad (2)$

بجمع (1) و (2) :

$3x+3z-9=0 \Rightarrow \boxed{z=-x+3}$

نعوض في (1) : $2x-y-x+3-4=0 \Rightarrow \boxed{y=x-1}$

نفرض $x=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك وليكن L .

$$L: \begin{cases} x=t \\ y=t-1 \\ z=-t+3 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

نعلم أن النقطة A' هي المسقط القائم لـ A على المستقيم L معناه تحقق تمثيله الوسيطي أي:

$$A(t,\ t-1,\ -t+3)$$

نعلم أن $\vec{AN} \perp \vec{U_L} \Rightarrow \vec{AN}\cdot\vec{U_L}=0$

$$\Rightarrow (t-3,\ t,\ -t+1)\cdot(1,1,-1)=0$$

$$\Rightarrow t-3+t+t-1=0 \Rightarrow \boxed{t=\frac{4}{3}}$$

ومنه: $A'\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

يكون بعد النقطة A عن المستقيم L هو نفسه AN:

$$AN=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-3\right)^2+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(\frac{5}{3}-2\right)^2} \Rightarrow \boxed{AN=\frac{\sqrt{42}}{3}}$$

تمرين (10): لتكن لدينا المستويين:

$$P: x+y-2z-1=0 \quad , \quad Q: x+y+z=0$$

1) أثبت أن المستويين P و Q متعامدين.

2) احسب بعد النقطة $A(2,1,2)$ عن الفصل المشترك.

الحل

1) $\vec{n_Q}(1,1,1)$, $\vec{n_P}(1,1,-2)$

$$\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q}=(1)(1)+(1)(1)+(1)(-2)=0$$

ومنه $\vec{n_Q} \perp \vec{n_P}$ فالمستويين P و Q متعامدين

2) نحسب بعد النقطة A عن المستوي P وليكن ℓ_1:

$$\ell_1=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

نحسب بعد النقطة A عن المستوي Q وليكن ℓ_2:

$$\ell_2=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

* يكون بعد النقطة A عن الفصل المشترك لـ P و Q حسب فيثاغورس:

$$\ell=\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2}=\sqrt{\frac{4}{6}+\frac{25}{3}}=\sqrt{\frac{54}{6}}=\sqrt{9}=3$$

تمرين (11): لتكن لدينا النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي P الذي معادلته:

$$x+2y+3z=5$$

أوجد معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل

* نصف قطر الكرة هو بعد مركز الكرة عن المستوي P:

$$R=dist(A,P)=\frac{|(1)(2)+(2)(-2)+(3)(2)-5|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}}$$

تمرين (12): لتكن لدينا النقطتان: $A(2,1,2)$, $B(-2,0,2)$ والنقطة $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$. ε

ما طبيعة النقاط ε.

الحل $\vec{MA}(2-x,\ 1-y,\ 2-z)$ ، $\vec{MB}(-2-x,\ -y,\ 2-z)$

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0 \Rightarrow (2-x)(-2-x)+(1-y)(-y)+(2-z)(2-z)=0$$

$$\Rightarrow x^2-4+y^2-y+z^2-4z+4=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-y+z^2-4z=0$$

نتمم إلى مربع كامل $\Rightarrow x^2+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2-4z+4-4=0$

$$\Rightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$$

ومنه مجموعة النقاط ε تمثل كرة مركزها $\left(0,\frac{1}{2},2\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{17}}{2}$

تمرين (13): عين مجموعة النقاط بالفراغ التي تحقق:

$$\|\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\|=\|3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}-\vec{MD}\|$$

الحل

نفرض G مركز أبعاد متناسبة لـ: $(D,1)$, $(C,1)$, $(B,1)$ ومنه:

$$\ell_1=\|\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\|=\|3\vec{MA}\|$$

$$\ell_2=\|3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}-\vec{MD}\|=\|3\vec{MA}-(\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD})\|$$

$$=\|3\vec{MA}-3\vec{MG}\|=\|3(\vec{MA}+\vec{MG}\|$$

$$=\|3\vec{GA}\|$$

إذاً: $3\|\vec{MA}\|=3\|\vec{GA}\| \Rightarrow \|\vec{MA}\|=\|\vec{GA}\|$

مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA.

تمرين (14): عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\|=\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|$$

الحل

نفرض G مركز أبعاد متناسبة للنقاط: $(C,-1)$, $(B,1)$, $(A,2)$:

$$\ell_1=\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\|=\|2\vec{MG}\|$$

نفرض G' مركز أبعاد متناسبة للنقاط: $(C,1)$, $(B,-1)$, $(A,2)$،

$$\ell_2=\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|=\|2\vec{MG'}\|$$

إذاً: $2\|\vec{MG}\|=2\|\vec{MG'}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\|=\|\vec{MG'}\|$

مجموعة النقاط M تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[MM']$.

تمرين (15): في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نأخذ النقطتين: $A(1,1,1)$, $B(0,-1,-1)$

1) أعط معادلة المجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=2MB$ وما طبيعة هذه المجموعة؟

2) جد على محور التراتيب نقطة C متساوية البعد عن A و B.

الحل

1)

$$MA=2MB$$

$$\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2}=2\sqrt{(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2}$$

نربع $\Rightarrow (1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4\left[(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2\right]$

$$\Rightarrow 1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=4(x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2)$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{36}{9}$$

ومنه مجموعة النقاط ε تمثل كرة مركزها $\Omega\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$ ونصف

قطرها $R=\frac{6}{3}=2$

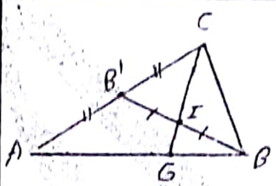
② بما أن النقطة تقع على محور التراتيب إذاً $C(0,y,0)$

$$CA=CB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1)^2+(1-y)^2+(1)^2}=\sqrt{(0)^2+(-1-y)^2+(-1)^2}$$

$$\Rightarrow 1+1-2y+y^2+1=0+1+2y+y^2+1$$

$$\Rightarrow 4y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{C\left(0,\frac{1}{4},0\right)}$$



تمرين (16): انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأعداد α,β,γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α)، (B,β)، (C,γ)

واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA}+\lambda\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

الحل

* بما أن B' هي منتصف $[AC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$، $(C,1)$.
* بما أن I هي منتصف $[BB']$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B',2)$، $(B,2)$

وحسب الخاصة التجميعية فإن I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$، $(C,1)$، $(B,2)$

ومنه $\alpha=1$، $\gamma=1$، $\beta=2$

* G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2)$، $(A,1)$ إذاً:

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Rightarrow \lambda=2$$

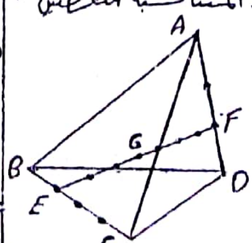
تمرين (17): نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ ونقطتين E و F معرفتين وفق: $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. اثبت أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ يقع على $[EF]$ ثم عين النقطة G على $[EF]$.

الحل

* لدينا: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ إذاً E مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,1)$، $(B,3)$.
* لدينا: $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ إذاً F مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D,2)$، $(A,1)$.

بما أن G مركز أبعاد متناسبة لـ: $(A,1)$، $(B,3)$، $(C,1)$، $(D,2)$

وحسب الخاصة التجميعية فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,4)$، $(F,3)$



فالنقاط G و E و F تقع على استقامة واحدة فالنقطة G تقع على $[EF]$.

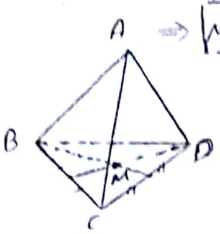
* $\overrightarrow{FG}=\frac{4}{7}\overrightarrow{FE}$

تمرين (18): $ABCD$ رباعي وجوه. اوجد في كل من الحالتين الآتيتين ان النقاط M و B و C و D تقع في مستوٍ واحد ثم عين موضع النقطة M.

①
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}}$$

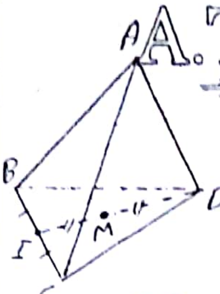


ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$، $(C,1)$، $(D,1)$ والنقطة M هي مركز ثقل المثلث BCD.

②
$$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$$

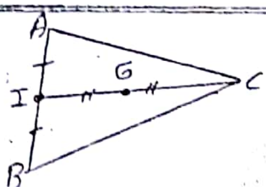
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}}$$



ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$، $(C,1)$، $(D,2)$.

* نفرض I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$ فهي تقع في منتصف $[BC]$.

وحسب الخاصة التجميعية فإن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$، $(D,2)$ فهي تقع في منتصف $[ID]$



تمرين (19): انطلاقاً من الشكل المجاور

① جد الأعداد α,β,γ لتكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α)، (B,β)، (C,γ)

② اثبت أنه إذا كانت النقطة M من الفراغ كان: $4\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$

③ جد مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\|=12$

الحل

① بما أن I هي منتصف $[AB]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$، $(B,1)$

* بما أن G في منتصف $[IC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,2)$، $(C,2)$

وحسب الخاصة التجميعية فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1)$، $(B,1)$، $(C,2)$

ومنه $\alpha=1$، $\beta=1$، $\gamma=2$

② بما أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$، $(B,1)$، $(C,2)$ وأياً كانت M نقطة من الفراغ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}}$$

③
$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\|=12$$

$$\Rightarrow 4\|\overrightarrow{MG}\|=12 \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\|=3$$

ومنه مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها (3)

تمرين (20): ليكن لدينا المستوي P :

$$P: x-2y+2z-4=0$$

1) احسب بعد النقطة $B(2,1,3)$ عن المستوي P .

2) اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي P

الحل

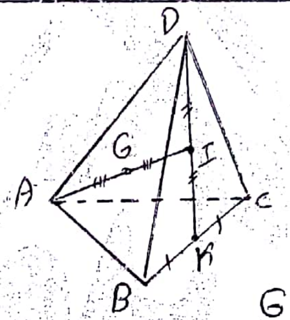
1)
$$dist(B,P)=\frac{|(1)(2)+(-2)(1)+(2)(3)-4|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(2)^2}}$$
$$=\frac{|2-2+6-4|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}$$

2) المركز: $B(2,1,3)$

نصف القطر: $R=dist(B,P)=\frac{2}{3}$

$$(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2=R^2$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{4}{9}$$

تمرين (21): في الشكل المجاور:



لدينا النقطة K المعرفة بالعلاقة: $\vec{BK}=2\vec{KC}$

و I منتصف $[KD]$ و G منتصف $[AI]$.

1) جد الأعداد $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ليكون G مرجح النقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$.

2) عين النقطة M التي تحقق: $2\vec{AM}=\vec{AD}+\vec{AK}$

الحل

1) بما أن K هي منتصف $[BC]$ فهي مرجح لـ $(B,1),(C,1)$.

* بما أن I هي منتصف $[DK]$ فهي مرجح لـ $(D,2),(K,2)$.

* بما أن G هي منتصف $[AI]$ فهي مرجح لـ $(A,4),(I,4)$

$$\underbrace{(K,2)}_{(B,1)\ (C,1)}\quad(D,2)$$

حسب الخاصة التجميعية فإن G مرجح للنقاط

$(A,4),(D,2),(C,1),(B,1)$ ومنه:

$$\alpha=4,\ \delta=2,\ \gamma=1,\ \beta=1$$

2)
$$2\vec{AM}=\vec{AD}+\vec{AK}$$
$$\Rightarrow 2\vec{AM}=2\vec{AI}\Rightarrow \vec{AM}=\vec{AI}$$

ومنه M تنطبق على I

تمرين (22): رباعي وجوه $ABCD$.

K نقطة من $[AB]$ تحقق: $\vec{AK}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ و L نقطة من $[CD]$ تحقق $\vec{CL}=\frac{2}{3}\vec{CD}$ و I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$. نعرف G مرجح النقاط: $(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$.

1) a) أثبت أن النقاط G,I,J تقع على استقامة واحدة.

b) أثبت أن النقاط G,K,L تقع على استقامة واحدة.

2) استنتج وقوع النقاط I,J,K,L في مستوي واحد.

الحل

1) a) بما أن I هي منتصف $[AD]$ فهي مرجح لـ $(A,2),(D,2)$.

* بما أن J هي منتصف $[BC]$ فهي مرجح لـ $(B,1),(C,1)$.

لدينا G مرجح لـ $(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$.

حسب الخاصة التجميعية فإن G مرجح لـ $(I,4)$ و $(J,2)$

فالنقاط G,I,J تقع على استقامة واحدة ومنه $G\in(IJ)$ — (1).

b) لدينا $\vec{AK}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ ومنه K مرجح لـ $(A,2),(B,1)$

لدينا $\vec{CL}=\frac{2}{3}\vec{CD}$ ومنه L مرجح لـ $(C,1),(D,2)$.

لدينا G مرجح لـ $(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$.

حسب الخاصة التجميعية فإن G مرجح لـ $(K,3)$ و $(L,3)$

فالنقاط G,K,L تقع على استقامة واحدة ومنه: $G\in(KL)$ — (2).

2) من (1) و(2) نجد أن المستقيمين (IJ) و (KL) متقاطعان في G فهما يحددان مستوي فالنقاط I,J,K,L تقع في مستوي واحد.

تمرين (23): في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا المستقيم d المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=-t-1\\ y=2t+1\\ z=2t-3\end{cases}$$

أوجد بعد النقطة $C(1,0,-1)$ عن المستقيم d .

الحل

لتكن $C'(x,y,z)$ المسقط العامد لـ C على المستقيم d فهي تحقق تمثيله الوسيطي أي:

$$C'(-t-1,\ 2t+1,\ 2t-3)$$

* نعلم أن: $(CC')\perp d$ ومنه $\vec{CC'}\cdot\vec{U_d}=0$

حيث $\vec{CC'}(-t-2,\ 2t+1,\ 2t-2)$

$(-t-2)(-1)+(2t+1)(2)+(2t-2)(2)=0$

$\Rightarrow t+2+4t+2+4t-4=0 \Rightarrow t=0$

نعوض في $\vec{CC'}$:

$\vec{CC'}(-2,1,-2)$

ومنه فإن بعد C عن المستقيم (d) هو CC' :

$CC' = \sqrt{(-2)^2+(1)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9}$

$\Rightarrow \boxed{CC'=3}$

تمرين (24)، في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقاط: $A(1,2,-1)$ ، $B(2,-1,1)$ ، $C(4,3,-1)$.

① أعط تمثيلا وسيطيا لـ (AB) .

② أثبت أن (AC) و (AB) متعامدان .

الحل

① $\vec{u}=\vec{AB}(1,-3,2)$

$(AB)\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2 \; ; \; t\in\mathbb{R} \\ z=2t-1 \end{cases}$

② $\vec{AC}(3,1,0)$ ، $\vec{AB}(1,-3,2)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(3)(1)+(1)(-3)+(0)(2)$

$=3-3+0=0$

ومنه (AC) و (AB) متعامدان .

تمرين (25)، في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ من الفراغ نتأمل النقاط : $A(1,1,1)$ ، $B(2,0,1)$ ، $C(2,0,-1)$.

① أثبت أن النقاط A, B, C تشكل مستوي .

② نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي السابق ، عين α و β التي تحقق : $\vec{AM}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$

واستنتج معادلة المستوي .

الحل

① $\vec{AB}(1,-1,0)$ ، $\vec{AC}(1,-1,-2)$

$\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي .

② لدينا : $\vec{AM}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} (1)\; x-1=\alpha+\beta \\ (2)\; y-1=-\alpha-\beta \\ (3)\; z-1=-2\beta \end{cases} \Rightarrow$ من (3) نجد $\beta=-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}$ نعوض في (1)

$\alpha=\frac{1}{2}z+x-\frac{3}{2}$

نعوض α و β في (2) :

$y-1=-\cancel{\frac{1}{2}z}-x+\frac{3}{2}+\cancel{\frac{1}{2}z}-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{x+y-2=0}$

تمرين (26)، في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقاط : $A(0,1,1)$ ، $B(-2,1,1)$ ، $C(0,3,-1)$.

① أثبت أن النقاط A, B, C تشكل مستوي .

② أوجد إحداثيات M منتصف $[AB]$

③ عين α و β التي تحقق : $\vec{AM}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$

الحل

① $\vec{AB}(-2,0,0)$ ، $\vec{AC}(0,2,-2)$

$\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي .

② $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right) \Rightarrow M(-1,1,1)$

③ $\vec{AM}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(1) $-1=-2\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$

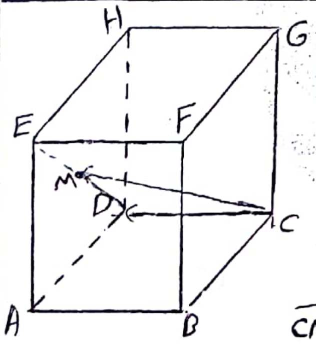
(2) $0=2\beta \Rightarrow \beta=0$

(3) $0=-2\beta \Rightarrow 0=0$ محققة

ومنه $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=0$

$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}+0\vec{AC}$

تمرين (27) مكعب طول ضلعه a



(a). نختار معلم متعامد ومتجانس $\left(A;\frac{\vec{AB}}{a},\frac{\vec{AD}}{a},\frac{\vec{AE}}{a}\right)$

① عين موضع النقطة M : $\vec{CM}=\frac{1}{2}\vec{AE}-\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AD}$

② احسب الجداء السلمي $\vec{AF}\cdot\vec{DC}$.

الحل

① $\vec{CM}=\frac{1}{2}(\vec{AE}-\vec{AD})-\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{CM}=\frac{1}{2}\vec{DE}+\vec{BA} \Rightarrow \vec{CM}=\vec{CD}+\frac{1}{2}\vec{DE}$

ومنه M تقع في منتصف $[DE]$.

② $C(a,a,0)$ ، $D(0,a,0)$ ، $F(a,0,a)$ ، $A(0,0,0)$

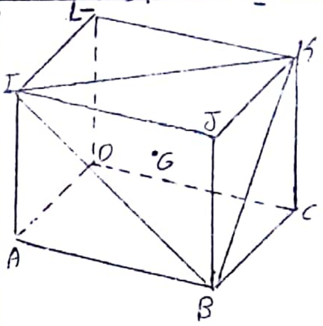
$\vec{AF}(a,0,a)$ ، $\vec{DC}(a,-a,0)$

$\vec{AF}\cdot\vec{CD}=(a)(a)+(0)(-a)+(a)(0)$

$=a^2$

تمرين (23): $ABCDIJKL$ متوازي سطوح، ولتكن G مركز ثقل المثلث BIK.

أثبت أن النقاط J, G, D تقع على استقامة واحدة.



الحل

نختار معلم $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AI})$.

$B(1,0,0)$ ، $D(0,1,0)$ ، $J(1,0,1)$ ، $K(1,1,1)$ ، $I(0,0,1)$

$G\left(\frac{1+0+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}, \frac{0+1+1}{3}\right)$ ، $G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

* نختار الشعاعان: $\vec{DG}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ، $\vec{DJ}(1,-1,1)$

من الواضح أن: $\boxed{\vec{DG} = \frac{2}{3}\vec{DJ}}$ فالشعاعان $\vec{DG}$ و $\vec{DJ}$ مرتبطان خطياً فالنقاط G, J, D تقع على استقامة واحدة.

تمرين (24): لتكن لدينا النقاط:

$A(1,5,4)$ ، $B(10,4,3)$ ، $C(4,3,5)$ ، $D(0,4,5)$

① بين أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

② بين أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد.

③ استنتج أن النقطة D هي م.م.م لـ $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$.

الحل

① $\vec{AB}(9,-1,-1)$ ، $\vec{AC}(3,-2,1)$. بما أن مركباتها غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

② ندرس الارتباط الخطي للأشعة: $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

$\vec{AD} \overset{?}{=} \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}9\\-1\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-1 = 9\alpha + 3\beta & (1)\\ -1 = -\alpha - 2\beta & (2)\\ 1 = -\alpha + \beta & (3)\end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلتين (2) و(3) نجد أن: $\beta = \frac{2}{3}$ و $\alpha = -\frac{1}{3}$

نتحقق من (1): محققة $\ell_2 = 9\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) = -3 + 2 = -1 = \ell_1$

ومنه $\boxed{\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}}$ فالأشعة مرتبطة خطياً والنقاط D, C, B, A في مستوٍ واحد.

③ من العلاقة السابقة: $\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

$\Rightarrow 3\vec{AD} = -\vec{AB} + 2\vec{AC} \Rightarrow 3\vec{AD} = -\vec{AD} - \vec{DB} + 2\vec{AD} + 2\vec{DC}$

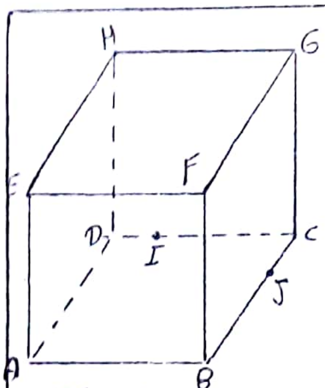
$\Rightarrow \boxed{2\vec{AD} - \vec{BD} + 2\vec{CD} = \vec{0}}$

ومنه D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,2)$ ، $(B,-1)$ ، $(C,2)$

$\alpha = 2$ ، $\beta = -1$ ، $\gamma = 2$

مسألة (1): $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 4، فيه I نقطة و J نقطتان تحققان $\vec{DI} = \frac{1}{4}\vec{DC}$ ، $\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC}$. نختار معلم متجانس $\left(A; \frac{\vec{AB}}{4}, \frac{\vec{AD}}{4}, \frac{\vec{AE}}{4}\right)$



① أوجد إحداثيات رؤوس المكعب وإحداثيات I و J.

$A(0,0,0)$ ، $B(4,0,0)$ ، $C(4,4,0)$ ، $D(0,4,0)$ ، $E(0,0,4)$

$F(4,0,4)$ ، $G(4,4,4)$ ، $H(0,4,4)$ ، $I(1,4,0)$ ، $J(4,3,0)$

② نفرض أن O نقطة تلاقي أقطار المكعب. أثبت أن $\cos(G\hat{O}B) = -\frac{1}{3}$

* بما أن O هي نقطة تلاقي أقطار المكعب فهي في منتصف كل منها

$O\left(\frac{x_A+x_G}{2}, \frac{y_A+y_G}{2}, \frac{z_A+z_G}{2}\right) \Rightarrow O(2,2,2)$

* $\cos(G\hat{O}B) = \frac{\vec{OB}\cdot\vec{OG}}{\|\vec{OB}\|\,\|\vec{OG}\|} = \frac{(2,-2,-2)\cdot(2,2,2)}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{4+4+4}} = \frac{4-4-4}{12}$

$\Rightarrow \boxed{\cos(G\hat{O}B) = -\frac{1}{3}}$

③ أوجد معادلة المستوي (EGC).

* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا: $\vec{EC}(4,4,-4)$ ، $\vec{EG}(4,4,0)$

$\vec{n} \perp \vec{EC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{EC} = 0 \Rightarrow 4a + 4b - 4c = 0 \Rightarrow a + b - c = 0 \; (1)$

$\vec{n} \perp \vec{EG} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{EG} = 0 \Rightarrow 4a + 4b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \; (2)$

نفرض $(b=1)$ فيكون $(a=-1)$ وبعوض في (1) نجد أن: $(c=0)$

ومنه $E(0,0,4)$ ، $\vec{n}(-1,1,0)$

$-1(x-0) + 1(y-0) + 0(z-4) = 0$

$\Rightarrow \boxed{(EGC): -x + y = 0}$

④ احسب بعد F عن المستوي (EGC).

$dist(F, EGC) = \frac{|-4+0|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

⑤ احسب حجم رباعي الوجوه $FEGC$.

$V = \frac{1}{3} S_{EGC} \cdot h$

* $S_{EGC} = \frac{GE \cdot GC}{2} = \frac{4\sqrt{2}\cdot 4}{2} = 8\sqrt{2}$ ، $h = dist(F, EGC) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}(8\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = \frac{32}{3}$

⑥ أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (HI).

$H(0,4,4)$ ، $\vec{u} = \vec{HI}(1,0,-4)$

$$(HI):\begin{cases} x = t+1 \\ y = 4 \\ z = -4t \end{cases} ; t \in R$$

7) إذا علمت أن معادلة المستوي $(EGJ): -4x+4y-z+4=0$
أثبت أن المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).

$\vec{u}(1,0,-4)$, $\vec{n}(-4,4,-1)$

$\vec{u}.\vec{n} = (1)(-4)+(0)(4)+(-4)(-1)=0$

ومنه $\vec{n} \perp \vec{u}$ فالمستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).

8) نفرض أن K نقطة تحقق العلاقة:
$2\vec{AK}=\vec{CB}+\vec{CA}+3\vec{AG}$
أثبت أن K تقع في المستوي (BCG).

* انطلاقاً من العلاقة: $2\vec{AK}=\vec{CB}+\vec{CA}+3\vec{AG}$

$\Rightarrow 2\vec{AK}=\vec{CK}+\vec{KB}+\vec{CK}+\vec{KA}+3\vec{AK}+3\vec{KG}$

$\Rightarrow \boxed{-2\vec{KC}+\vec{KB}+3\vec{KG}=\vec{0}}$

ومنه K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط C, B, G فالنقاط G, B, C, K تقع في مستوٍ واحد.

9) وضع النقطة S في الحالات الآتية:

* $\vec{AS}=\vec{DC}+\vec{BF}+\vec{EH}$ $\boxed{\vec{DC}=\vec{AB},\ \vec{EH}=\vec{FG}}$

$\Rightarrow \vec{AS}=\vec{AB}+\vec{BF}+\vec{FG} \Rightarrow \vec{AS}=\vec{AG}$

ومنه S تنطبق على G

* $\vec{AS}=\frac{1}{2}\vec{DC}-\frac{1}{2}\vec{DA}+\vec{AE}$

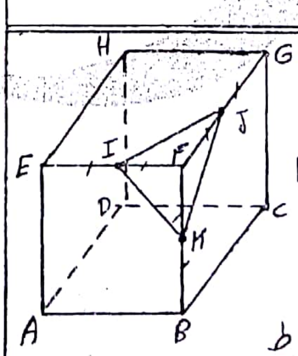
$\Rightarrow \vec{AS}=\frac{1}{2}(\vec{DC}-\vec{DA})+\vec{AE} \Rightarrow \vec{AS}=\frac{1}{2}\vec{AC}+\vec{AE}$ $\boxed{\vec{AC}=\vec{EG}}$

$\Rightarrow \vec{AS}=\vec{AE}+\frac{1}{2}\vec{EG}$

$\Rightarrow \vec{AS}=\vec{AE}+\vec{EN}$ حيث N منتصف EG

$\Rightarrow \vec{AS}=\vec{AN}$

ومنه S تنطبق على N.



مسألة 2: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 ولتكن النقاط I, J, K منتصفات الأحرف $[FE], [FG], [FB]$ على الترتيب. نختار معلماً متجانساً $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1) أوجد إحداثيات رؤوس المكعب والنقاط I, J, K.
2) أوجد معادلة المستوي (IJK).
3) اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من F عمودياً على (IJK).
4) استنتج إحداثيات N المسقط القائم لـ F على المستوي (IJK).
5) احسب حجم رباعي الوجوه $(FIJK)$.
6) اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (IJK)
7) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\vec{CM}=\vec{BA}+\vec{DE}$.

الحل:

1) $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $E(0,0,2)$, $F(2,0,2)$
$G(2,2,2)$, $H(0,2,2)$, $I(1,0,2)$, $J(2,1,2)$, $K(2,0,1)$

2) $\vec{IK}(1,0,-1)$, $\vec{IJ}(1,1,0)$

* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المطلوب فيكون:

$\vec{n}.\vec{IJ}=0 \Rightarrow a+b=0 \ (1)$
$\vec{n}.\vec{IK}=0 \Rightarrow a-c=0 \ (2)$
$\Rightarrow$ نفرض $a=1$ فيكون $c=1$ ومن (1) نجد $b=-1$

ومنه $\vec{n}(1,-1,1)$ ولدينا $I(1,0,2)$

$1(x-1)-1(y-0)+1(z-2)=0$

$\Rightarrow \boxed{(IJK): x-y+z-3=0}$

3) $\vec{n}=\vec{u}(1,-1,1)$, $F(2,0,2)$

$$d:\begin{cases} x=t+2 \\ y=-t \\ z=t+2 \end{cases} ; t\in R$$

4) نعوض المعادلات الوسيطية لـ d في المستوي (IJK):

$t+2+t+t+2-3=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$

$x=-\frac{1}{3}+2=\frac{5}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-\frac{1}{3}+2=\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{N(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})}$

5) $V=\frac{1}{3}S_{IJK}\cdot h$

$S_{IJK}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a)^2$; $a=IJ=JK=IK=\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{IJK}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $h=dist(F,IJK)=\frac{|2+0+2-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ومنه $V=\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{6}$

6) $R=dist(F,IJK)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, المركز $F(2,0,2)$

$(x-x_F)^2+(y-y_F)^2+(z-z_F)^2=R^2$

$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{1}{3}}$

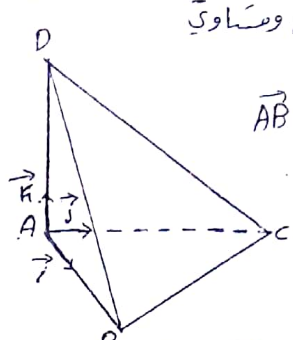
7) $3\vec{CM}=\vec{BA}+\vec{DE}$

$\Rightarrow 3\vec{CM}=\vec{CD}+\vec{DE}$ $\boxed{\vec{BA}=\vec{CD}}$

$\Rightarrow 3\vec{CM}=\vec{CE} \Rightarrow \vec{CM}=\frac{1}{3}\vec{CE}$

انطلق... فالحياة تنتظر منك الكثير!
وتذكر دائماً أن هناك "مكان" في القمة... وهو بانتظارك.

مسألة 3 : ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين و $DA \perp (ABC)$



$\vec{AB}=3\vec{i}$ ، $\vec{AC}=3\vec{j}$ ، $\vec{AD}=3\vec{k}$

نفرض لدينا معلم متجانس مبدؤه A .

① عين احداثيات الرؤوس A, B, C, D .

② اكتب معادلة المستوي (BCD) .

③ أثبت أن مسقط A على (BCD) ولتكن J هو مركز ثقل المثلث BCD

④ عين احداثيات G مركز ثقل (م.ج) للنقاط $(A,1), (B,2), (C,1)$.

⑤ أوجد معادلة الكرة التي مركزها J وتمر من A .

⑥ احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

⑦ استنتج مساحة المثلث BCD .

⑧ عين احداثيات K ليكون الشكل $ABKC$ مربع .

الحل:

① $D(0,0,3)$, $C(0,3,0)$, $B(3,0,0)$, $A(0,0,0)$

② نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب فيكون:

$\vec{n} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{BC}=0 \Rightarrow -3a+3b=0 \quad (1)$

$\vec{n} \perp \vec{BD} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{BD}=0 \Rightarrow -3a+3c=0 \quad (2)$

من (1) نجد: $3a=3b$. بفرض $\boxed{a=1}$ فيكون $\boxed{b=1}$

نعوض في (2) : $-3+3c=0$ ومنه $\boxed{c=1}$

ومنه: $\vec{n}(1,1,1)$ ولدينا $B(3,0,0)$:

$1(x-3)+1(y-0)+1(z-0)=0$

$\Rightarrow \boxed{(BCD):\ x+y+z-3=0}$

③ نوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر من A ويوازي ناظم المستوي موجه له: $A(0,0,0)$, $\vec{u}(1,1,1)$

$$L:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad t\in R$$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي (BCD) :

$t+t+t-3=0 \Rightarrow 3t=3 \Rightarrow \boxed{t=1}$

نعوضها في المعادلات الوسيطية: $J(1,1,1)$

* نفرض $N(x,y,z)$ مركز ثقل المثلث BCD :

$$x_N=\frac{x_B+x_C+x_D}{3}=\frac{3+0+0}{3}=1$$

$$y_N=\frac{y_B+y_C+y_D}{3}=\frac{0+3+0}{3}=1 \quad \Rightarrow N(1,1,1)$$

$$z_N=\frac{z_B+z_C+z_D}{3}=\frac{0+0+3}{3}=1$$

ومنه N تنطبق على J وبالتالي J مركز ثقل المثلث BCD .

④
$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1\times0+2\times3+1\times0}{4}=\frac{3}{2}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1\times0+2\times0+1\times3}{4}=\frac{3}{4}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1\times0+2\times0+1\times0}{4}=0$$

$\Rightarrow \boxed{G\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},0\right)}$

⑤ مركز الكرة: $J(1,1,1)$ ونصف قطرها JA :

$R=JA=\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{3}$

ومنه: $\boxed{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3}$

⑥ $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DA$

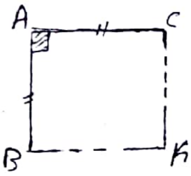
$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\left(\frac{AB\cdot AC}{2}\right)\cdot DA$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{3\times3}{2}\right)\times3=\frac{9}{2}$

⑦ $V=\frac{1}{3}S_{DBC}\cdot AJ$

$\Rightarrow \frac{9}{2}=\frac{1}{3}S_{DBC}\times\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{S_{DBC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}}$

⑧ بما أن الشكل $ABKC$ مربع إذاً

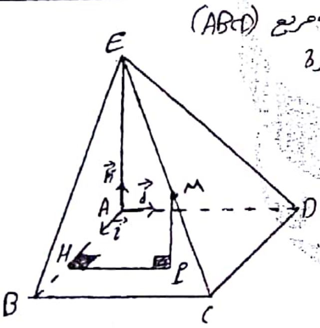


$\vec{AC}=\vec{BK}$

$$\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-3\\y\\z\end{bmatrix}$$

$0=x-3 \Rightarrow x=3$, $y=3$, $z=0 \Rightarrow \boxed{K(3,3,0)}$

مسألة 4 : $E\text{-}ABCD$ هرم قاعدته مربع $(ABCD)$ فيه EA عمودي على مستوي القاعدة $(ABCD)$ وفيه:



$\vec{AB}=3\vec{i}$ و $\vec{AD}=3\vec{j}$ و $\vec{AE}=3\vec{k}$

① أوجد احداثيات رؤوس الهرم .

② أوجد احداثيات مركز ثقل BDE

③ احسب: $\vec{AG}\cdot\vec{BD}$ و $\vec{AG}\cdot\vec{ED}$ وماذا تستنتج؟

④ أوجد معادلة المستوي (EDB) .

⑤ أوجد المعادلات الوسيطية المستقيم (EC) .

⑥ لتكن النقطة M التي تحقق العلاقة ، $\vec{CM}=\frac{1}{3}\vec{CE}$.
ولتكن P المسقط القائم لـ M على مستوي القاعدة $ABCD$
ولتكن H المسقط القائم لـ P على (AB) . احسب $[MH]$.

الحل:

① $E(0,0,3)$, $D(0,3,0)$, $C(3,3,0)$, $B(3,0,0)$, $A(0,0,0)$

② $G\left(\frac{x_B+x_D+x_E}{3},\frac{y_B+y_D+y_E}{3},\frac{z_B+z_D+z_E}{3}\right) \Rightarrow G(1,1,1)$

③ $\vec{ED}(0,3,-3)$ ، $\vec{BD}(-3,3,0)$ ، $\vec{AG}(1,1,1)$

* $\vec{AG}\cdot\vec{BD}=-3+3+0=0 \Rightarrow \vec{AG}\perp\vec{BD}$
* $\vec{AG}\cdot\vec{ED}=0+3-3=0 \Rightarrow \vec{AG}\perp\vec{ED}$

ومنه نستنتج أن $\vec{AG}$ ناظم على المستوي (BDE)

④ ناظم المستوي $\vec{AG}(1,1,1)$ والنقطة التي تمر منه $B(3,0,0)$

$$a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(BDE):\ x+y+z-3=0}$$

⑤ $E(0,0,3)$ ، $\vec{u}=\vec{EC}(3,3,-3)$:

$$(EC):\ \begin{cases} x=3t \\ y=3t \\ z=-3t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

⑥ لدينا $\vec{CM}=\frac{1}{3}\vec{CE} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$x-3=-1 \Rightarrow x=2$ ، $z=1$

$y-3=-1 \Rightarrow y=2$ $\Rightarrow M(2,2,1)$

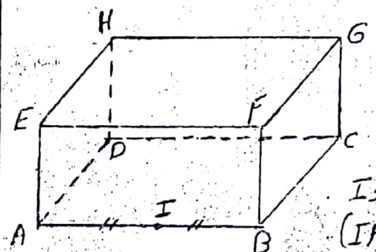
* بما أن P المسقط القائم للنقطة M على $(ABCD)$ $\Leftarrow P(2,2,0)$
* بما أن H المسقط القائم للنقطة P على (AB) $\Leftarrow H(2,0,0)$

ومنه $[MH]=\sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

مسألة 5 : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه :

$BC=CG=1$ ، $AB=2$

ولتكن I منتصف $[AB]$



① أوجد احداثيات الرؤوس و I

② أوجد معادلة المستوي (IFH)

③ احسب بعد G عن المستقيم (IH)

④ أوجد بعد G عن المستوي (IFH).

الحل

① نختار معلم متجانس $(A,\frac{\vec{AB}}{2},\vec{AD},\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ ، $B(2,0,0)$ ، $D(0,1,0)$ ، $F(2,0,1)$

$C(2,1,0)$ ، $G(2,1,1)$ ، $I(1,0,0)$ ، $E(0,0,1)$ ، $H(0,1,1)$

② نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا : $\vec{IF}(1,0,1)$ ، $\vec{IH}(-1,1,1)$

$\vec{n}\perp\vec{IH} \Rightarrow -a+b+c=0 \quad (1)$

$\vec{n}\perp\vec{IF} \Rightarrow a+c=0 \quad (2)$

$\Rightarrow$ نفرض $c=-1$ فيكون $b=2$ و $a=1$

ومنه: $\vec{n}(1,2,-1)$ ولدينا $I(1,0,0)$.

$$1(x-1)+2(y-0)-1(z-0)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(IFH):\ x+2y-z-1=0}$$

③ نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (IH).

$\vec{u}=\vec{IH}(-1,1,1)$ ، $I(1,0,0) \Rightarrow (IH)\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

- نفرض أن النقطة N المسقط القائم لـ G على المستقيم (IH) فهي تحقق تمثيله الوسيطي أي :

$N(-t+1,\ t,\ t)$

$\vec{GN}(-t-1,\ t-1,\ t-1)$ ، $\vec{u}(-1,1,1)$

$(GN)\perp(IH) \Rightarrow \vec{GN}\cdot\vec{IH}=0$

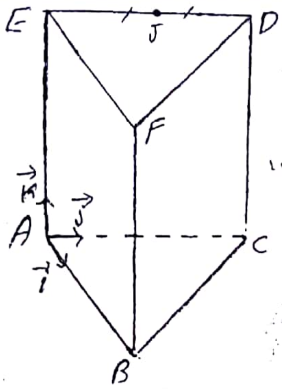
$\Rightarrow t+1+t-1+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

ومنه $N(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

بعد G عن المستقيم (IH) هو نفسه $[GN]$:

$$GN=\sqrt{(\frac{2}{3}-2)^2+(\frac{1}{3}-1)^2+(\frac{1}{3}-1)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

مسألة 6 : $ABCEFD$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A.



النقطة J منتصف $[ED]$

نأخذ المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث :

$\vec{AE}=4\vec{k}$ ، $\vec{AC}=4\vec{j}$ ، $\vec{AB}=3\vec{i}$

① جد احداثيات النقاط B ، C ، D ، E ، J.

② جد معادلة المستوي (JBC).

③ اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (JC).

④ احسب بعد النقطة E عن المستوي (JBC).

⑤ عين احداثيات النقطة K' (م.م) للنقاط المثقلة : $(J,2)$ ، $(B,1)$ ، $(C,2)$

الحل

① $B(3,0,0)$ ، $C(0,4,0)$ ، $E(0,0,4)$ ، $D(0,4,4)$

$J(\frac{x_E+x_D}{2},\frac{y_E+y_D}{2},\frac{z_E+z_D}{2}) \Rightarrow J(0,2,4)$

② $\vec{JC}(0,2,-4)$ ، $\vec{JB}(3,-2,-4)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ فيكون :

$\vec{n}\perp\vec{JC} \Rightarrow 2b-4c=0 \quad (1)$

$\vec{n}\perp\vec{JB} \Rightarrow 3a-2b-4c=0 \quad (2)$

$\Rightarrow$ من (1) نجد $b=2c$

بفرض $\boxed{c=1}$ فيكون $\boxed{b=2}$

نعوض في (2) :

$3a-4-4=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{8}{3}}$

ومنه $\vec{n}(\frac{8}{3},2,1)$ ولدينا $B(3,0,0)$

$$\frac{8}{3}(x-3)+2(y-0)+1(z-0)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{8}{3}x+2y+z-8=0} \xRightarrow{\times 3} \boxed{8x+6y+3z-24=0}$$

③ $\vec{u} = \vec{JC}(0,2,-4)$, $J(0,2,4)$

$$(JC): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 2 \\ z = -4t + 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

④ $E(0,0,4)$, $d = -24$, $\vec{n}(8,6,3)$

$$dist(E, JBC) = \frac{|(8)(0)+(6)(0)+(3)(4)-24|}{\sqrt{64+36+9}} = \frac{12}{\sqrt{109}} = \frac{12\sqrt{109}}{109}$$

⑤
$$x_K = \frac{\alpha x_C + \beta x_B + \gamma x_J}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{2\times 0 + 1\times 3 + 2\times 0}{5} = \frac{3}{5}$$

$$y_K = \frac{\alpha y_C + \beta y_B + \gamma y_J}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{2\times 4 + 1\times 0 + 2\times 2}{5} = \frac{12}{5}$$

$$z_K = \frac{\alpha z_C + \beta z_B + \gamma z_J}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{2\times 0 + 1\times 0 + 2\times 4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{K\left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)}$$

مسألة 7 : في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$

① أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

② أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم المستوي (ABC).

③ استنتج معادلة المستوي (ABC).

④ احسب بعد D عن المستوي (ABC).

⑤ احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

الحل

①
$$* AB = \sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2+(3+1)^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$
$$* AC = \sqrt{(3-1)^2+(1-0)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$* BC = \sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$$

$\left.\begin{array}{l} (BC)^2 = 27 \\ AB^2 + AC^2 = 21 + 6 = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow$ بما أن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ حسب عكس فيثاغورس المثلث ABC قائم في A.

$$* S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{21}\ \sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

② حتى يكون $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC) يجب أن يحقق :

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = 0$ و $\vec{n}\cdot\vec{AC} = 0$

$\vec{AC}(2,1,-1)$, $\vec{AB}(1,2,4)$, $\vec{n}(2,-3,1)$

$$* \vec{n}\cdot\vec{AB} = (2)(1)+(-3)(2)+(1)(4) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AB}$$
$$* \vec{n}\cdot\vec{AC} = (2)(2)+(-3)(1)+(1)(-1) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AC}$$

ومنه $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC).

③ الناظم من الطلب السابق $\vec{n}(2,-3,1)$ والنقطة $A(1,0,-1)$

$$2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{2x - 3y + z - 1 = 0}$$

④
$$dist(D, ABC) = \frac{|2(-4)-3(2)+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

⑤ $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$; $h = dist(D, ABC)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{14}}{2} \cdot \sqrt{14} = \frac{14}{2} = 7$$

مسألة 8 : في معلم متجانس لدينا النقاط :

$A(1,2,4)$, $B(1,0,2)$, $C(2,2,5)$, $M(2,2,-1)$

① جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة D نظيرة I بالنسبة لـ C.

② عين α, β اذا علمت أن : $\vec{AB} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AD}$

③ تحقق أن النقاط A, B, C تعين مستوياً P أوجد معادلته.

④ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من M ويعامد المستوي P

⑤ عين احداثيات النقطة M' المسقط القائم لـ M على المستوي P

الحل

① $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right) \Rightarrow \boxed{I(1,1,3)}$

$D(2x_C - x_I, 2y_C - y_I, 2z_C - z_I) \Rightarrow \boxed{D(3,3,7)}$

②
$$\vec{AB} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AD} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} (1)\ 0 = \alpha + 2\beta \\ (2)\ -2 = \beta \\ (3)\ -2 = \alpha + 3\beta \end{array}\right]$ من (2) نجد : $\boxed{\beta = -2}$ نعوض في (1) : $\Rightarrow 0 = \alpha - 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$

نتحقق من (3) :

$-2 = 4 - 6 \Rightarrow -2 = -2$ محققة

ومنه :

$$\boxed{\vec{AB} = 4\vec{AC} - 2\vec{AD}}$$

③ $\vec{AB}(0,-2,-2)$, $\vec{AC}(1,0,1)$

لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي فهما غير مرتبطين خطياً فالنقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي

* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي فيكون :

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow -2b - 2c = 0$ (1)

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow a + c = 0$ (2)

نفرض $(c = 1)$ فيكون $(a = -1)$ ومنه : $(b = -1)$

لدينا $\vec{n}(-1,-1,1)$ و $B(1,0,2)$

$$-1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-2) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{P: -x - y + z - 1 = 0}$$

④ $\vec{n}_P = \vec{u}(-1,-1,1)$, $M(2,2,-1)$

$$\Delta: \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

⑤ نعوض المعادلات الوسيطية لـ Δ في معادلة المستوي P :

$+t-2+t-2+t-1-1=0 \Rightarrow t=2$

ومنه احداثيات M

$x=-2+2=0 \ , \ y=-2+2=0 \ , \ z=2-1=1 \Rightarrow \boxed{M(0,0,1)}$

مسألة 9 : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(0,-1,-2) \ , \ B(1,2,-1) \ , \ C(1,1,-2)$

① أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة .

② أثبت أن $\vec{n}(2,-1,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC)

③ لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,-1)$ ، $(C,2)$ اكتب احداثيات النقطة G .

④ أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CG)

⑤ جد مجموعة النقاط من الفراغ M التي تحقق :

$\|\vec{MA}-\vec{MB}+2\vec{MC}\|=12$

الحل

① $\vec{AC}(1,2,0) \ , \ \vec{AB}(1,3,1)$

لا ينتج أحدهما من الآخر بضربه بعدد حقيقي فهما غير مرتبطين خطياً

فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة .

② حتى يكون $\vec{n}$ ناظماً على المستوي (ABC) يجب أن يحقق :

$\vec{n}\perp\vec{AC}$ و $\vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=(2)(1)+(-1)(3)+(1)(1)=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=(2)(1)+(-1)(2)+(1)(0)=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AC}$

ومنه $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC) .

لدينا $\vec{n}(2,-1,1)$ و $A(0,-1,-2)$

$2(x-0)-1(y+1)+1(z+2)=0$

$\Rightarrow \boxed{(ABC): \ 2x-y+z+1=0}$

③ $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \ , \ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \ , \ z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

$x_G=\dfrac{0-1+2}{2}=\dfrac{1}{2} \ , \ y_G=\dfrac{-1-2+2}{2}=-\dfrac{1}{2} \ , \ z_G=\dfrac{-2+1-4}{2}=-\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \boxed{G\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-5}{2}\right)}$

④ $\vec{u}=\vec{CG}\left(\frac{-1}{2},\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right) \ , \ C(1,1,-2)$

$$(CG): \begin{cases} x=-\frac{1}{2}t+1 \\ y=-\frac{3}{2}t+1 \\ z=-\frac{1}{2}t-2 \end{cases} \ ; \ t\in R$$

⑤ بما أن G م.أ.م للنقاط $(A,1)$ ، $(B,-1)$ ، $(C,2)$:

$\|\vec{MA}-\vec{MB}+2\vec{MC}\|=12 \Rightarrow \|2\vec{MG}\|=12$

$\Rightarrow \|\vec{MG}\|=6$

ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $R=6$

مسألة 10 : في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقطة $A(6,1,1)$

والمستويان : $P_2: y+z=4 \ , \ P_1: x-2y=5$

① أثبت أن المستويين متقاطعين .

② جد تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك لهما Δ .

③ اكتب معادلة المستوي Q المار من A ويعامد الفصل المشترك .

④ أوجد احداثيات B نقطة تقاطع Q مع الفصل المشترك Δ .

⑤ احسب بعد A عن الفصل المشترك Δ

A.T

A.D

الحل

① $\vec{n}_{P_1}(1,-2,0) \ , \ \vec{n}_{P_2}(0,1,1)$: لا ينتج أحدهما من الآخر بضربه

بعدد حقيقي فهما مستقلين خطياً فالمستويين P_1 و P_2 متقاطعين .

② الحل المشترك لمعادلتي المستويين :

$$\begin{rcases} x-2y=5 \ (1) \\ y+z=4 \ (2) \end{rcases} \Rightarrow$$

من (2) نجد : $z=4-y$

من (1) نجد : $x=5+2y$

نعرض $y=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك Δ :

$$\Delta: \begin{cases} x=5+2t \\ y=t \\ z=4-t \end{cases} \ ; \ t\in R$$

③ النقطة $A(6,1,1)$ ، $\vec{u}_\Delta=\vec{n}_Q(2,1,-1)$

$2(x-6)+(y-1)-(z-1)=0$

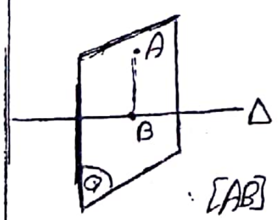
$\Rightarrow \boxed{Q: \ 2x+y-z-12=0}$

④ نعوض المعادلات الوسيطية لـ Δ في معادلة Q :

$2(5+2t)+t-4+t-12=0 \Rightarrow 10+4t+t-4+t-12=0$

$\Rightarrow t=1$

ومنه احداثيات B : $x=5+2=7 \ , \ y=1 \ , \ z=4-1=3 \Rightarrow \boxed{B(7,1,3)}$



⑤ بما أن المستوي Q يمر من A

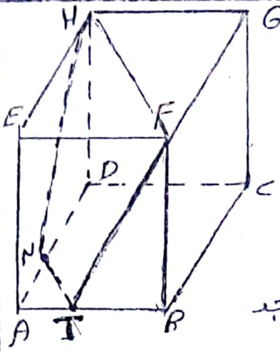
والنقطة B هي نقطة تقاطع Δ

مع المستوي Q فإن $[AB]$ العمودي على المستوي

بعد النقطة A عن المستقيم Δ هو نفسه $[AB]$:

$AB=\sqrt{(7-6)^2+(1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

مسألة (11): المكعب لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه (1). T نقطة من $[AB]$ كحيث $\vec{AT}=\frac{2}{5}\vec{AB}$ و N نقطة من $[AD]$ وكحيث: $\vec{AN}=\frac{2}{5}\vec{AD}$



① في المعلم المتجانس $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ جد احداثيات النقاط T, N, F, H.

② اوجد مركبات الشعاعين $\vec{NH}$ و $\vec{NT}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT)

③ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF).

④ استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

⑤ اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT)، ما طبيعته؟!

الحل

① $A(0,0,0)$ ، $H(0,1,1)$ ، $F(1,0,1)$ ، $N(0,\frac{2}{5},0)$ ، $T(\frac{2}{5},0,0)$

② $\vec{NH}(0,\frac{3}{5},1)$ ، $\vec{NT}(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المطلوب فيكون،

$\vec{n}\perp\vec{NH}\Rightarrow\vec{n}.\vec{NH}=0\Rightarrow\frac{3}{5}b+c=0$ --(1)

$\vec{n}\perp\vec{NT}\Rightarrow\vec{n}.\vec{NT}=0\Rightarrow\frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=0$ --(2)

من (2) نجد: $a=b$ نفرض $b=5$ فيكون $a=5$

نعوض في (1): $c=-3$

$a(x-x_H)+b(y-y_H)+c(z-z_H)=0$

$\Rightarrow 5(x-0)+5(y-1)-3(z-1)=0$

$\Rightarrow \boxed{(HNT): 5x+5y-3z-2=0}$

③ (EF) ← نقطة: $E(0,0,1)$ ، موجه: $\vec{EF}(1,0,0)$

$(EF): \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$ ، $t\in R$

④ نعوض المعادلات الوسيطية لـ $[EF]$ في (HNT):

$5t-3-2=0\Rightarrow t=1$

نعوض في (EF)

$x=1$ ، $y=0$ ، $z=1\Rightarrow\boxed{F(1,0,1)}$

⑤ F هي نقطة تقاطع $(EFGH)$ مع (HNT).

* بما أن (HNT) تقطع الوجه $(ABCD)$ في الفصل (TN) فهو تقطع $(EFGH)$ بمستقيم مار من H ويوازي (TN) وهو (HF).

فالمقطع الناتج هو $HFTN$ وهو شبه منحرف متساوي الساقين لأن $(NT)\parallel(HF)$ و $HN=FT$

مسألة (12): في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متجانس لتكن لدينا النقاط $A(1,0,0)$ ، $B(0,2,0)$ ، $C(0,0,2)$.

① اكتب معادلة المستوي (ABC).

② اكتب تمثيلاً وسيطياً لـ Δ المار من O ويعامد (ABC).

③ عين احداثيات H نقطة تقاطع Δ مع (ABC).

④ احسب الجداءات: $\vec{AH}.\vec{CB}$ و $\vec{BH}.\vec{CA}$

وماذا تمثل H بالنسبة للمثلث ABC.

الحل

① $\vec{AB}(-1,2,0)$ ، $\vec{BC}(0,-2,2)$ غير مرتبطين خطياً.

* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المطلوب فيكون،

$\vec{n}\perp\vec{AB}\Rightarrow\vec{n}.\vec{AB}=0\Rightarrow -a+2b=0$ — (1)

$\vec{n}\perp\vec{BC}\Rightarrow\vec{n}.\vec{BC}=0\Rightarrow -2b+2c=0$ — (2)

من (1): $a=2b$ نفرض $(b=1)$ فتكون $(a=2)$ و $(c=1)$

ونقطة $A(1,0,0)$ ولدينا $\vec{n}(2,1,1)$ نعوض في المعادلة،

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\Rightarrow \boxed{(ABC): 2x+y+z-2=0}$

② بما أن Δ عمودي على (ABC) اذاً: $\vec{n}=\vec{U_\Delta}(2,1,1)$

$\Delta: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ ؛ $t\in R$

③ نعوض المعادلات الوسيطية لـ Δ في المستوي (ABC)

$4t+t+t-2=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}$

نعوض في Δ:

$x=\frac{2}{3}$ ، $y=\frac{1}{3}$ ، $z=\frac{1}{3}\Rightarrow H(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

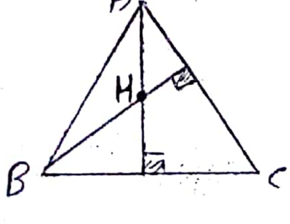
④ $\vec{AH}(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ، $\vec{CB}(0,2,-2)$ ، $\vec{BH}(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

$\vec{CA}(1,0,-2)$

* $\vec{AH}.\vec{CB}=(-\frac{1}{3})(0)+(\frac{1}{3})(2)+(\frac{1}{3})(-2)=0\Rightarrow(AH)\perp(CB)$

* $\vec{BH}.\vec{CA}=(\frac{2}{3})(1)+(-\frac{5}{3})(0)+(\frac{1}{3})(-2)=0\Rightarrow(BH)\perp(CA)$

نستنتج أن H هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC.

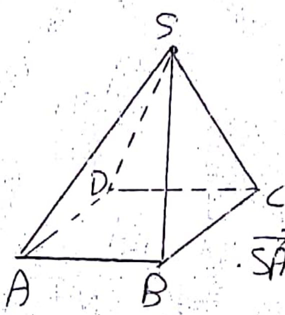


تمرين: [AB] و [CD] حرفان متقابلان من رباعي الوجوه ABCD . I منتصف [AB] و J منتصف [CD] .
أثبت أن G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD تقع في منتصف [IJ] .

الحل

* بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD فهو مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$.
* بما أن I منتصف [AB] فهي مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,1)$
* بما أن J منتصف [CD] فهي مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$, $(D,1)$.
* حسب الخاصة التجميعية فإن G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$, $(J,2)$ وبما أن الثقلات متساوية فإن G تقع في منتصف [IJ] .

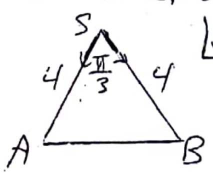
تمرين: هرم رأسه S وقاعدته ABCD مربع. طول كل حرف من حروفه واطوال اضلاع قاعدته (4)
احسب الجداءات السلمية:
$\vec{SA}\cdot\vec{SB}$ و $\vec{SA}\cdot\vec{SC}$ و $\vec{SA}\cdot\vec{AC}$



الحل

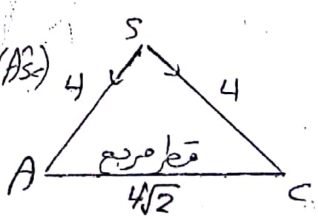
① $\vec{SA}\cdot\vec{SB} = \|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{SB}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$= (4)\cdot(4)\cdot\frac{1}{2} = 8$



② $\vec{SA}\cdot\vec{SC} = \|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{SC}\|\cos(A\hat{S}C)$

حساب $\cos(A\hat{S}C)$ باستخدام الكاشي:

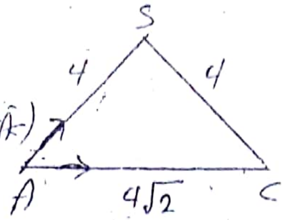


$\cos(A\hat{S}C) = \frac{16+16-32}{2(4)\cdot(4)} = 0$

$\Rightarrow \vec{SA}\cdot\vec{SC} = 0$

③ $\vec{SA}\cdot\vec{AC} = -\vec{AS}\cdot\vec{AC}$

$= -\|\vec{AS}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos(S\hat{A}C)$



حساب $\cos(S\hat{A}C)$ باستخدام الكاشي:

$\cos(S\hat{A}C) = \frac{16+32-16}{32\sqrt{2}} = \frac{32}{32\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه: $\vec{SA}\cdot\vec{AC} = -\vec{AS}\cdot\vec{AC}$

A.T $= -(4)\cdot(4\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -16$

تمرين: A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.
D و E نقطتان: $3\vec{AD} = 2\vec{AB}$ و $\vec{AE} = 3\vec{CE}$

① أثبت أن النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوٍ واحد
② لتكن I منتصف [CD] و J منتصف [BE]. اثبت وقوع النقاط A و I و J على استقامة واحدة.

الحل

① A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي (ABC):

* $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$: D مرجح للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ فالنقاط A و B و D تقع على استقامة واحدة

$\left.\begin{array}{l} D \in (AB) \\ (AB) \subset (ABC) \end{array}\right] \Rightarrow D \in (ABC)$

* $\vec{AE} = 3\vec{CE}$: الشعاعين $\vec{AE}$ و $\vec{CE}$ مرتبطين خطيا فالنقاط A و E و C تقع على استقامة واحدة.

$\left.\begin{array}{l} E \in (AC) \\ (AC) \subset (ABC) \end{array}\right] \Rightarrow E \in (ABC)$

فالنقاط A و B و C و E و D تقع في مستوٍ واحد

② لدينا: $2\vec{AI} = \vec{AC} + \vec{AD}$ و $2\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{AE}$

* $2\vec{AI} = \vec{AC} + \vec{AD} \Rightarrow 2\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{EC}$

$\Rightarrow 2\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AE} - \frac{1}{3}\vec{AE}$

$\Rightarrow 2\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AE}$

$\Rightarrow 2\vec{AI} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AE}) \Rightarrow 2\vec{AI} = \frac{2}{3}(2\vec{AJ})$

$\Rightarrow \vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AJ}$

فالنقاط A و I و J تقع على استقامة واحدة.

تمرين: ما هي نقطة تقاطع المستويات P_1 و P_2 و P_3.

$P_1: x+2y+z=4$ ، $P_2 = 2x-y+2z=3$

$P_3: 3x+2y-3z=2$

1) أوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d للمستويين P_1 و P_2.

2) عين احداثيات نقطة تقاطع المستويات P_1 و P_2 و P_3.

الحل

1)

$(1)\ x+2y+z=4$

$(2)\ 2x-y+2z=3$

$\xrightarrow[-2]{\text{نضرب (1)}}$

$-2x-4y-2z=-8$

$2x-y+2z=3$

نجمع:

$-5y=-5$

$\Rightarrow y=1$

نعوض في (1):

$x+2+z=4 \Rightarrow x=2-z$

نفرض $z=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d:

$$d: \begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

2) نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي P_3:

$6-3t+2-3t=2 \Rightarrow 6t=6 \Rightarrow t=1$

نعوض $t=1$ في التمثيل الوسيطي لـ d:

$x=2-t=1$ ، $y=1$ ، $z=1$

ومنه نقطة تقاطع المستويات P_1 و P_2 و P_3: $(1,1,1)$

تمرين: 1) جد معادلة الاسطوانة التي محورها ينطبق على محور التراتيب ومركزي قاعدتيها $A(0,3,0)$ و $B(0,5,0)$ ونصف قطر قاعدتيها 2.

2) أكتب معادلة المخروط الذي رأسه (0) وقاعدة الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3 ومحوره $(o,\vec{i})$.

الحل

1) $x^2+z^2=4$ ، $3 \le y \le 5$

2) $y^2+z^2-\frac{2}{16}x^2=0$ ، $0 \le x \le 4$

مسألة: نتأمل معلما متعامدا ومتجانسا $(O;\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})$. لتكن G مركز ثقل المثلث ABC.

1) احسب احداثيات G وكذا أن (OG) عمودي على المستوي (ABC) ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).

2) نعرف النقاط $A'(2,0,0)$، $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ والمستوي $A'B'C'$.

a) أكتب معادلة المستوي $(A'B'C')$.

b) عين قيمة العدد الحقيقي K حتى تكون النقطة M حيث: $M(1-K,0,K)$ الى المستوي $(A'B'C')$.

c) احسب احداثيات النقطة K المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوي $(A'B'C')$.

d) احسب احداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) و المستوي $(A'B'C')$.

3) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (KL).

4) اثبت أن المستقيم (KL) هو فصل مشترك المستويين (ABC) و $(A'B'C')$.

الحل

1)

$A(1,0,0)$ ، $B(0,1,0)$ ، $C(0,0,1)$

$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$* \ \vec{AB}(-1,1,0)$ ، $\vec{AC}(-1,0,1)$ ، $\vec{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$\vec{OG}\cdot\vec{AB}=(-1)\left(\frac{1}{3}\right)+(1)\left(\frac{1}{3}\right)+(0)\left(\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow \vec{OG}\perp\vec{AB}\ (1)$

$\vec{OG}\cdot\vec{AC}=(-1)\left(\frac{1}{3}\right)+(0)\left(\frac{1}{3}\right)+(1)\left(\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow \vec{OG}\perp\vec{AC}\ (2)$

من (1) و (2) نجد أن المستقيم (OG) عمودي على المستوي ABC.

2) (ABC):
- الناظم: $\vec{n}=\vec{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
- النقطة: $A(1,0,0)$

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\Rightarrow \boxed{(ABC): x+y+z=1}$

2) a) مستقيمين خطيا: $\vec{A'B'}(-2,2,0)$ ، $\vec{A'C'}(-2,0,3)$:

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب فيكون:

$\vec{n}\perp\vec{A'B'} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{A'B'}=0 \Rightarrow -2a+2b=0\ (1)$

$\vec{n}\perp\vec{A'C'} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{A'C'}=0 \Rightarrow -2a+3c=0\ (2)$

نفرض $a=1$ فيكون $b=1$ ومن (2): $c=\frac{2}{3}$

$a(x-x_{A'})+b(y-y_{A'})+c(z-z_{A'})=0$

$\Rightarrow \boxed{(A'B'C'): 3x+3y+2z-6=0}$

ب) نعوض احداثيات M في معادلة المستوي $(A'B'C')$:

$$3(1-K)+3(0)+2K-6=0 \Rightarrow 3-3K+2K-6=0$$

$$\Rightarrow K=-3$$

ومنه $M(4,0,-3)$

ج) (AC) : الموجه $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ ، النقطة $A(1,0,0)$

$$(AC):\begin{cases} x=-t+1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

نعوض في معادلة المستوي $(A'B'C')$

$$3(-t+1)+3(0)+2t-6=0 \Rightarrow t=-3$$

$$\Rightarrow K(4,0,-3)$$

د) (BC) : الموجه $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ ، النقطة $B(0,1,0)$

$$(BC):\begin{cases} x=0 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

نعوض في معادلة المستوي $(A'B'C')$:

$$3(0)+3(-t+1)+2t-6=0 \Rightarrow t=-3$$

$$\Rightarrow L(0,4,-3)$$

3) (KL) : الموجه $\overrightarrow{KL}(-4,4,0)$: $\overrightarrow{KL}$ ، النقطة $K(4,0,-3)$

$$(KL):\begin{cases} x=-4t+4 \\ y=4t \\ z=-3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

4) نبين أن (KL) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$:

• نعوض (KL) في معادلة المستوي (ABC) :

$$-4t+4+4t-3 \overset{?}{=} 1 \Rightarrow 1=1 \quad \text{محققة} \Rightarrow (KL)\in(ABC) \ ...(1)$$

• نعوض (KL) في معادلة المستوي $(A'B'C')$

$$3(-4t+4)+3(4t)+2(-3)-6 \overset{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow -12t+12+12t-6-6 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0=0 \quad \text{محققة}$$

ومنه $(KL)\in(A'B'C')$ ...(2)

من (1) و(2) نجد أن (KL) هي فصل مشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$