المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم
MINISTRY OF EDUCATION

وفوق كل ذي علم عليم

3.3 Derivatives of trigonometric functions.

3.4 Chain Rule.

Notes

15

- التركيز على المفاهيم الاساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- امثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

السعدي

رياضيات ١١٠
Math.110

جمال السعدي

استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية

0566664790

3.3

Derivatives of trigonometric functions
مشتقات الدوال المثلثيه

● ينقسم هذا السكشن إلى ثلاث مواضيع :

(1) مشتقات الدوال المثلثيه .
(2) معادله المماس كتطبيق على مشتقات الدوال المثلثيه.
(3) نظريات في النهايات عندما $x \to 0$.

● **الموضوع الأول :**

* نبدأ بمشتقات الدوال المثلثيه ← (القوانين حفظ)

Function f(x) الداله	Derivative F′(x) المشتقه
$\sin x$	$\cos x$
* $\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
* $\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
* $\csc x$ *ملحوظه : كل ما يبدأ بحرف c في الداله به اشاره سالبه في المشتقه.	$-\csc x \cot x$

Notes :

* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
* $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
* $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

* $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ * $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ * $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

- Find the derivative of the function

Page 195

① $F(x) = x - 3\sin x$

$F'(x) = 1 - 3\cos x$

③ $y = \sin x + 10 \tan x$

$y' = \cos x + 10 \sec^2 x$

⑥ $g(t) = 4 \sec t + \tan t$

$g'(t) = 4 \sec t \tan t + \sec^2 t$

⑯ $y = \underline{\underline{x}}^2 \, \underline{\underline{\sin x}} \, \underline{\underline{\tan x}}$

$$y' = \underset{\downarrow \atop \text{مشتقة الأولى}}{2x} \cdot \underbrace{\sin x \tan x}_{\text{الدالتين}} + \underset{\downarrow \atop \text{مشتقة الثانية}}{\cos x} \cdot \underbrace{x^2 \tan x}_{\text{الدالتين}} + \underset{\downarrow \atop \text{مشتقة الثالثة}}{\sec^2 x} \cdot \underbrace{x^2 \sin x}_{\text{الدالتين}}$$

Find y' ?

① $y = x^3 \sin x$

* مشتقة حاصل ضرب دالتين

الأولى   مشتقة الثانية   الثانية . مشتقة الأولى

$y' = 3x^2 \cdot \sin x + \cos x \cdot x^3$

x^2 عامل مشترك

$= x^2 (3 \sin x + x \cos x)$

② $y = x^2 \sec x$

$y' = 2x \cdot \sec x + \sec x \tan x \cdot x^2$

$x \sec x$ عامل مشترك

$= x \sec x \, (2 + x \tan x)$

③ $y = \sqrt{x} \tan x$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \tan x + \sec^2 x \cdot \sqrt{x}$

$= \frac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \sec^2 x$

④ $y = \frac{\tan x}{1 + x^2}$

مشتقة خارج قسمة دالتين

$y' = \frac{\sec^2 x \cdot (1+x^2) - 2x \cdot \tan x}{(1+x^2)^2}$

⑤ $y = \underline{\sec x}\ \underline{\tan x}$

$$y' = \overset{\text{مشتقة الأولى}}{\sec x \tan x} \cdot \overset{\text{الثانية}}{\tan x} + \overset{\text{مشتقة الثانية}}{\sec^2 x} \cdot \overset{\text{الأولى}}{\sec x}$$

$$= \sec x\,(\tan^2 x + \sec^2 x)$$

⑥ $y = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}$

$\therefore\ y = 1$

$y' = 0$

⑦ $y = \sec x$ find y'' ?

$y' = \sec x \tan x$

$y'' =$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

نفس ناتج ⑤

$= \sec x\,(\tan^2 x + \sec^2 x)$

⑧ $y = 2\cos x$ find $y^{(4)}$ $\underline{\underline{\text{or}}}$ $\dfrac{d^4y}{dx^4}$?

$y' = -2\sin x$

$y'' = -2\cos x$

$y''' = 2\sin x$

$y^{(4)} = 2\cos x = y \Rightarrow y^{(4)} = y$

⑨ $$y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$$

$$y = 4 \sec x + \cot x$$

$$y' = 4 \sec x \tan x - \csc^2 x$$

---

⑩ $$y = \sqrt{x} \cot x + \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cot x + (-\csc^2 x) \cdot \sqrt{x} + \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{\cot x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \csc^2 x - \frac{1}{x^2}$$

<u>Page 195</u> Differentiate :

⑮ $$F(x) = \underline{\underline{x}}\ \underline{\underline{e^x}}\ \underline{\underline{\csc x}}$$

$$F'(x) = \underset{\underset{\text{مشتقة الأولى}}{\downarrow}}{1} \cdot \underset{\text{الدالتين}}{(e^x \csc x)} + \underset{\underset{\text{مشتقة الثانية}}{\downarrow}}{e^x} \cdot \underset{\text{الدالتين}}{(x \csc x)} + \underset{\underset{\text{مشتقة الثالثة}}{\downarrow}}{\underline{-\csc x \cot x}} \cdot \underset{\text{الدالتين}}{(x e^x)}$$

$$= e^x \csc x (1 + x - x \cot x)$$

● الموضوع الثاني : معادله المماس eq. of tangent line
كتطبيق على مشتقة الدالة

Page 195

Find an equation of tangent line to the curve at the given point.

(23) $y = x + \cos x$ $\qquad (\underset{x_1}{\overset{\downarrow}{0}}, \underset{y_1}{\overset{\downarrow}{1}})$

$$y' = 1 - \sin x$$

$$m = 1 - \underbrace{\cancel{\sin} 0}_{\rightarrow \text{zero}}$$

$$\therefore \boxed{m = 1}$$

eq. of tangent line is
معادله المماس

$$\boxed{y = m(x - x_1) + y_1} \rightarrow$$ حفظ

$$y = 1(x - 0) + 1$$

$$\boxed{y = x + 1}$$

** اذا طلب منك eq. of normal line
معادله العمودي

or eq. of perpendicular line $\Rightarrow y = \frac{-1}{m}(x - x_1) + y_1$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{1}(x - 0) + 1 \Rightarrow \boxed{y = -x + 1}$

● الموضوع الثالث : نظريات على الدوال المثلثية

في حالة $X \to 0$

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b} \longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \frac{3}{5}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 7x} = \frac{2}{7}$

* مقلوبات الصور السابقة صحيحة

$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$

(4) * $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{bx} = 0$ * $\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - 1}{bx} = 0$

Find the limits :

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{1}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= \boxed{1}$$

page 196 find the limits

(39) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \frac{3}{1} = 3$$

---

(40) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

---

(41) $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 6x}{\sin 2x} = \frac{6}{2} = 3$$

---

(42) $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$$

بالقسمه بسطاً ومقاماً
على θ
وذلك للوصول إلى
شكل النظريات

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\cos\theta - 1}{\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{0}{\frac{1}{1}} = \frac{0}{1} = 0$$

---

(43) $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\cos\theta)}{\sec\theta}$$

* تعويض مباشر
لأنها ليست صوره لأى نظريه

$$= \frac{\sin(\cos 0)}{\sec 0} = \frac{\sin(1)}{\frac{1}{\cos C}} = \frac{\sin 1}{\cancel{\frac{1}{1}}} = \sin 1$$

---

(44) $$\lim_{t \to 0} \frac{\sin^2 3t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t}{t} \cdot \frac{\sin 3t}{t} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{1} = 9$$

فك التربيع

(45) $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta + \tan\theta}$$

* بالقسمه بسطاً ومقاماً على θ
وذلك للحصول على
صوره النظريه

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{1 + \frac{\tan\theta}{\theta}}$$

$$= \frac{\frac{1}{1}}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

* ممكن الحل بمجرد النظر
بأخذ المعاملات لل θ

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta + \tan\theta} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

---

(46) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

بالضرب بسطاً ومقاماً
في x للحصول على
صوره النظريه

$$= \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$$

---

(47) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$$

* لاحظ أن x تؤول إلى عدد
وليس zero
∴ تعويض مباشر

$$= \frac{1 - \tan 45}{\sin 45 - \cos 45} = \frac{1 - 1}{\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2} = \frac{0}{0} \text{ (I.f.)}$$

by (L.H.R) باستخدام لوبيتال

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2 x}{\cos x + \sin x} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 45}}{\cos 45 + \sin 45}$$

$$= \frac{-\frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2/4}}{\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = -\frac{\frac{1}{1/2}}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

CH $\boxed{3.4}$

CHain Rule
قاعده التسلسل

- If: $y = y(u)$ and $u = u(x)$

Then: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Example :

If: ① $y = u^4$ and $u = x^3 - x$ Find $\dfrac{dy}{dx}$?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 4\underset{\substack{\downarrow \\ \text{استبدال } u \\ \text{بدلالة } x}}{(u)^3} \cdot (3x^2 - 1)$$

$$= 4(x^3 - x)^3 \cdot (3x^2 - 1)$$

* حل آخر : بالاشتقاق المباشر

$\because y = u^4$ ، $u = x^3 - x$

$$y = (x^3 - x)^4$$

$$\Rightarrow y' = 4(x^3 - x)^3 \cdot (3x^2 - 1)$$

② $y = \sqrt{u}$ and $u = x^2 + 1$ Find $\dfrac{dy}{dx}$?

$y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Notes :

(1) • * $y = \sin(\underset{\text{زاوية}}{F(x)})$

$$y' = \underset{\text{مشتقة الزاوية}}{F'(x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{مشتقة} \\ \text{الدالة} \\ \sin}}{\cos}(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{الزاوية} \\ \text{كما هي}}}{f(x)})$$

Example: ① $y = \sin(x^2)$ find y'?

$$y' = \underset{\text{مشتقة الزاوية}}{2x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{مشتقة} \\ \text{الدالة} \\ \sin}}{\cos}(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{الزاوية} \\ \text{كما هي}}}{x^2})$$

② $y = \tan\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec^2\sqrt{x}$$

---

(2) • * $y = \sin^n(F(x))$

$$y' = \underset{\text{مشتقة الزاوية}}{F'(x)} \cdot \underset{\text{تنزيل الأس}}{n \sin^{n-1}(F(x))} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{مشتقة} \\ \text{الدالة} \\ \sin}}{\cos}(F(x))$$

Example :

If: $y = \sin^3(2x^3-1)$ find y'?

$$y' = (6x^2) \cdot 3\sin^2(2x^3-1) \cdot \cos(2x^3-1)$$

$$= 18x^2 \sin^2(2x^3-1)\cos(2x^3-1)$$

$$* \; y = \underset{\longleftarrow \textcircled{3}}{\sin} \; (\underset{\longleftarrow \textcircled{2}}{\tan} \; \underset{\leftarrow \textcircled{1}}{\sqrt{x}}) \qquad \text{Find } y' \; ?$$

$$y' = \underset{\underset{\textcircled{1}}{\downarrow}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \cdot \underset{\underset{\textcircled{2}}{\downarrow}}{\sec^2 \sqrt{x}} \cdot \underset{\underset{\textcircled{3}}{\downarrow}}{\cos} (\tan\sqrt{x})$$

الا شتقاقه يكون حسب ترتيب الأسهم

$$* \; y = \underset{\longleftarrow \textcircled{3}}{\sin} (\underset{\longleftarrow \textcircled{2}}{\sec} \; \underset{\leftarrow \textcircled{1}}{x^2})$$

$$y' = \underset{\textcircled{1}}{\underline{2x}} \cdot \underset{\textcircled{2}}{\underline{\sec x^2 \; \tan x^2}} \cdot \underset{\textcircled{3}}{\underline{\cos}} (\sec x^2)$$

$$* \; y = \cos \underset{\text{الزاويه}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y' = \overset{\text{مشتقة الزاويه}}{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}} \cdot \overset{\overset{\text{مشتقة الدالة}}{\cos}}{-\sin\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{-x \sin\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$* \; y = \tan \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$y' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} \cdot \sec^2 \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \cdot \sec^2 \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$ find $g'(t)$?

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{(1\times 1) - (2x-2)}{(2t+1)^2}$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{5}{(2t+1)^2}$$

$$= 9\,\frac{(t-2)^8}{(2t+1)^8} \cdot \frac{5}{(2t+1)^2}$$

$$= \frac{45\,(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

$$y = e^{\sin x}$$

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

الدالة الأسية كما هي

مشتقة الأس

---

* $$y = \underset{\longleftarrow \textcircled{3}}{\sin}\Big(\underset{\longleftarrow \textcircled{2}}{\cos}\big(\underset{\longleftarrow \textcircled{1}}{\tan x}\big)\Big)$$

$$y' = \sec^2 x \cdot -\sin(\tan x) \cdot \cos(\cos(\tan x))$$

$$= -\sec^2 x \sin(\tan x) \cos(\cos(\tan x))$$

Page 204

Find the first and second derivatives

(48) $y = xe^{cx}$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$y' = 1 \cdot e^{cx} + ce^{cx} \cdot x$

$\boxed{y' = e^{cx} + cxe^{cx}} \rightarrow$ first derivatives
المشتقة الأولى

$y'' = ce^{cx} + c \cdot e^{cx} + ce^{cx} \cdot cx$

$y'' = ce^{cx}(1+1+cx)$

$\boxed{y'' = ce^{cx}(2+cx)} \rightarrow$ Second derivatives
المشتقة الثانية

---

(31) $y = 2^{\sin \pi x}$

$y' = \underbrace{2^{\sin \pi x}}_{\text{الدالة الأسية كما هي}} \cdot \underbrace{\pi \cdot \cos \pi x}_{\text{مشتقة الأس}} \cdot \underbrace{\ln 2}_{\text{اللوغاريتم الطبيعي للأساس}}$

---

(32) $y = \tan^2(3\theta)$

$y' = 3 \cdot 2\tan^1(3\theta) \cdot \sec^2(3\theta)$

$= 6\tan(3\theta)\sec^2(3\theta)$

Suppose that the functions f(x) and g(x) and there derivatives with respect to x have the following values at $x = 0$ and $x = 1$

x	f(x)	g(x)	f´(x)	g´(x)
0	1	1	5	$\frac{1}{3}$
1	3	−4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$

Find $\frac{dy}{dx}$?

① $y = 5f(x) - g(x)$ at $x = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot f'(x) - g'(x)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 5\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{-5}{3} + \frac{8}{3} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

Rule :

$$\left.\begin{array}{l}(F\circ g)'(x) \\ \left(F(g(x))\right)'\end{array}\right\} \rightarrow F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$*\quad y = f(g(x)) \quad$ at $x = 0$

$y' = \left(F(g(x))\right)'$

$= F'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\boxed{\text{at } x=0} = F'($ [illegible]

$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$= \boxed{-\frac{1}{9}}$

$* \ y = f(x)\, g^3(x) \qquad$ at $x = 0$

$y' = F'(x) \cdot g^3(x) + 3g^2(x) \cdot g'(x) \cdot f(x)$

$\boxed{\text{at } x=0} = 5 \cdot 1^3 + \cancel{3}(1)^2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 1 = 5+1 = \boxed{6}$

If: $F(u) = u^5 + 1$ ، $u = g(x) = \sqrt{x}$

find $(fog)'$ at $x = 1$

solution

أولاً : نوجد التحصيل

fog

$(fog) = \sqrt{x}^5 + 1 = x^{\frac{5}{2}} + 1$

نعوض بـ g
في دالة f

ثانياً مشتقة ناتج التحصيل

$(fog)' = [illegible]\, x^{\frac{3}{2}}$

$(fog)'|_{x=1} = \frac{5}{2}(1)^{2} = \frac{5}{2}$.

السؤال ١٢

Find the limit:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}$$

مع كل التمنيات بالنجاح والتوفيق

السعدي

CH. 2

2.2

Notes

- التركيز على المفاهيم الاساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- أمثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

The limit of the Function

السعدي

رياضيات ١١٠
Math. 110

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
0566664790

CH. 2

2.2

The limit of A function

If : $f(x) = x + 3$

what is the value of f(x) approaches it ? when X approaches 2 .

$\longrightarrow 2^-$ $\qquad\qquad$ $2^+ \longleftarrow$

X	1	1.8	1.9	2	2.1	2.2	3
F(x) = X + 3	4	4.8	4.9	5	5.1	5.2	6

النهايه اليسرى

$$\lim_{x\to 2^-} (x+3) = 5$$

النهايه اليمنى

$$\lim_{x\to 2^+} (x+3) = 5$$

$$\Rightarrow \underset{\text{اليسرى}}{\lim_{x\to 2^-} f(x)} = \underset{\text{اليمنى}}{\lim_{x\to 2^+} f(x)} = 5$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} F(x) = 5$$

Definition :

تقترب   تقترب

If: f(x) approaches L when X approaches a

$$f(x) \longrightarrow L \quad \text{when} \quad x \longrightarrow a$$

- X close to a on either side of a but ≠ a
- F(x) tends to get closer and closer to L .

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Note that :

النهايه اليمنى   النهايه اليسرى

① If: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

---

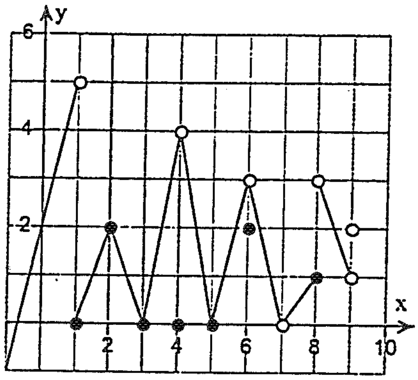
② If: $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{does not exist.}$$

غير موجوده

عدم تساوى النهايه اليمنى واليسرى

يؤدى إلى النهايه غير موجوده (does not exist)



* $\lim_{x\to1^-} f(x)=5$ * $\lim_{x\to1^+} f(x)=0$

اليسرى $\neq$ اليمنى

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)$ does not exist

* $\lim_{x\to2^-} f(x)=2$ * $\lim_{x\to2^+} f(x)=2$

اليسرى $=$ اليمنى

$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=2$

* $\lim_{x\to8^-} f(x)=1$ * $\lim_{x\to8^+} f(x)=3$

اليسرى $\neq$ اليمنى

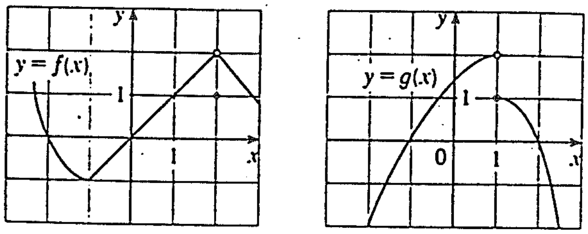
$\therefore \lim_{x\to8} f(x)$ does not exist

* $F(1)=0$ * $F(4)=0$

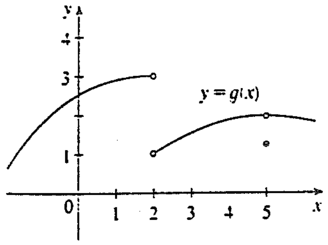
* $F(7)$ does not exist

* $F(6)=2$ * $F(8)=1$

The graphs of f and g are given. Use them to evaluate each limit, if it exists. If the limit does not exist, explain why.



(a) $\lim_{x\to2}[f(x)+g(x)]$ (b) $\lim_{x\to1}[f(x)+g(x)]$



* $\lim_{x\to2^-} g(x)=3$ * $\lim_{x\to2^+} g(x)=1$

اليسرى $\neq$ اليمنى

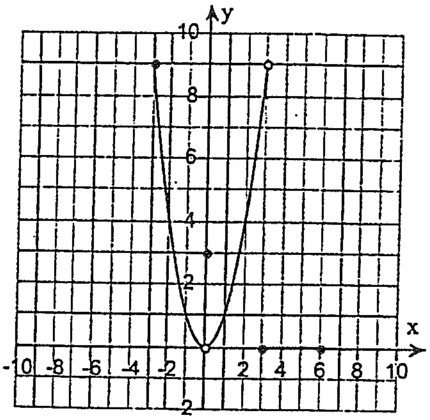
$\therefore \lim_{x\to2} g(x)$ does not exist

* $\lim_{x\to5^-} g(x)=2$ * $\lim_{x\to5^+} g(x)=2$

اليسرى $=$ اليمنى

$\therefore \lim_{x\to5} g(x)=2$ * $g(5)=1$

Which of the following statements about the function v = f(x) graphed here are true, and Use the graph below to determine whether the statements about the function y = f(x) are true or false.



* $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 9$

---

* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

اليسرى = اليمنى

∴ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

---

* $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 9$ * $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$

اليسرى ≠ اليمنى

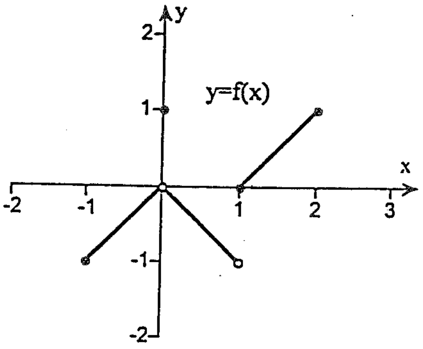
∴ $\lim_{x \to 3} f(x)$ does not exist

---

* $\lim_{x \to 6^-} f(x) = 0$

---

* $f(-2) = 9$ * $f(0) = 3$ * $F(3) = 0$



* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ النهايه اليسرى

* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ النهايه اليمنى

∴ اليمنى = اليسرى

∴ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ exist
موجوده

---

* $\lim_{x \to 1^-} F(x) = -1$ النهايه اليسرى

* $\lim_{x \to 1^+} F(x) = 0$ النهايه اليمنى

∴ اليمنى ≠ اليسرى

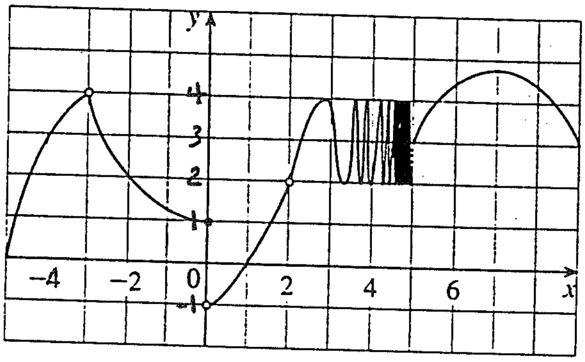
∴ $\lim_{x \to 0} f(x)$ does not exist
غير موجوده

---

* $F(0) = 1$ * $F(1) = 0$ * $F(2) = 1$

For the function h(x) whose graph is given.

Find:



① $* \lim_{x \to -3^-} h(x) = \underline{4}$

$* \lim_{x \to -3^+} h(x) = \underline{4}$

$\because \lim_{x \to -3} h(x) = \lim_{x \to -3^+} h(x) = 4 \Rightarrow * \lim_{x \to -3} h(x) = \underline{4}$

$* \ h(-3)$ does not exist.

② $* \lim_{x \to 0^-} h(x) = \underline{1}$ $\quad * \lim_{x \to 0^+} h(x) = \underline{-1}$

$\because \lim_{x \to 0^-} h(x) \neq \lim_{x \to 0^+} h(x)$ النهايه اليمنى ≠ النهايه اليسرى

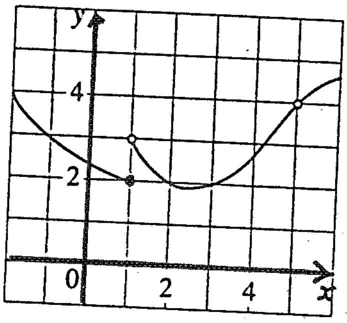
$* \lim_{x \to 0} h(x)$ does not exist $\quad * \ h(0) = \underline{1}$

③ $* \lim_{x \to 5^+} h(x) = \underline{3}$ $\quad * \lim_{x \to 5^-} h(x) =$ does not exist

∵ النهايه اليمنى ≠ النهايه اليسرى

$\Rightarrow \lim_{x \to 5} h(x)$ does not exist.

Use the given graph of F(x) to Find:



① $\lim_{x \to 1} f(x)$ نوجد النهاية اليمنى واليسرى

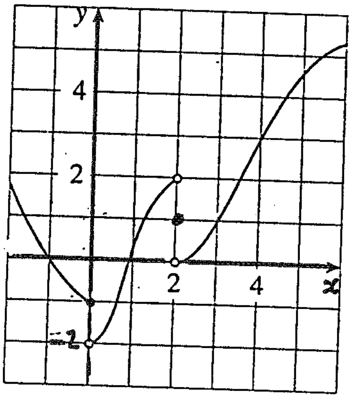
$* \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ $* \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)$ does not exist. (غير موجوده)

② $\lim_{x \to 5} F(x) = 4$ ③ F(5) does not exist لوجود انفصال

Use the given graph of f(x) to find:



① $* \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $* \lim_{x \to 0^+} f(x) = -2$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ does not exist

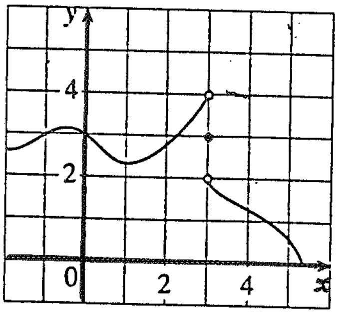
② $* \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ $* \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$

النهاية اليسرى ≠ النهاية اليمنى

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ does not exist

③ $F(2) = 1$ ④ $\lim_{x \to 4} F(x) = 3$

Use the given graph of f(x) to find:



① $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

② $* \lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$ $* \lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$

النهاية اليسرى ≠ النهاية اليمنى

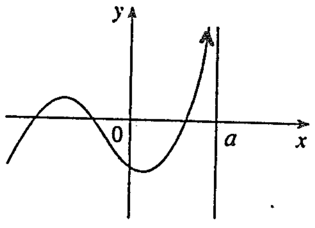
$\therefore \lim_{x \to 3} f(x)$ does not exist

③ $F(3) = 3$

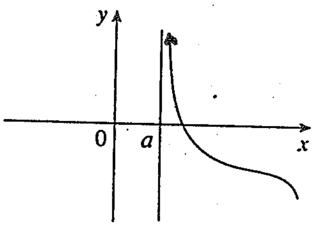
DEFINITION The line $x = a$ is called a vertical asymptote of the curve $y = f(x)$ if at least one of the following statements is true:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

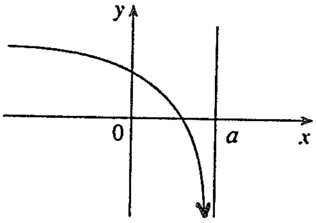
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$



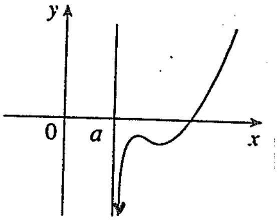
(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$



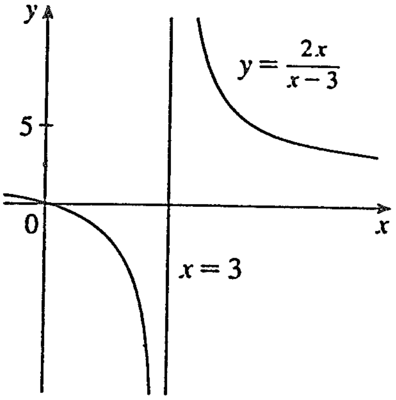
(c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

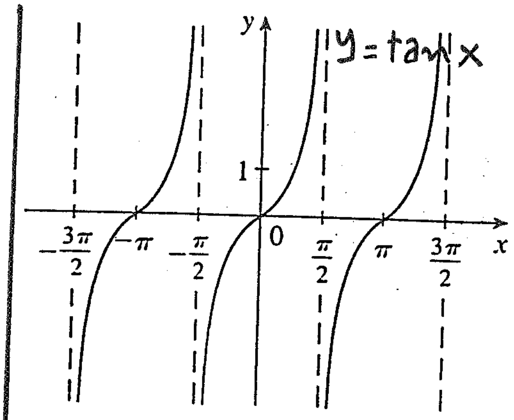
$X = a$ is vertical asymptote.

Find the equation of the vertical asymptote:



V. asymptote:

$X = 3$



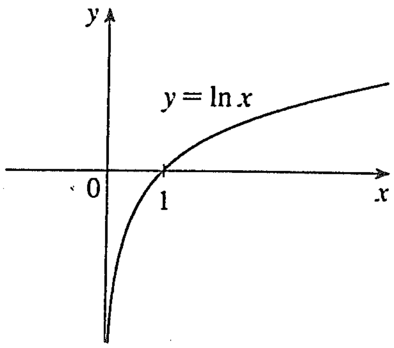
V. asymptote:

$X = \pm\frac{\pi}{2} , \pm\frac{3\pi}{2} , \ldots$

معامل π فردي . odd

OR $X = \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$

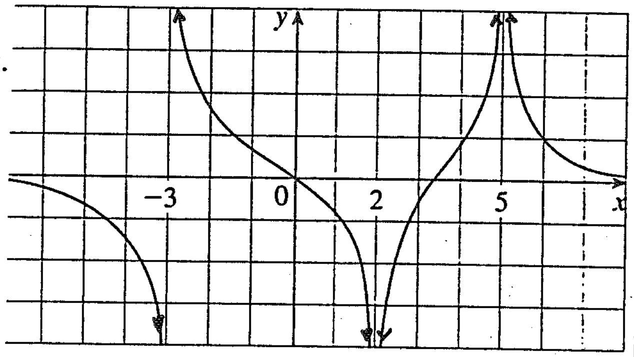
where n is whole number عدد كلي



V. asymptote:

$X = 0$

For the function R whose graph is shown, state the following.



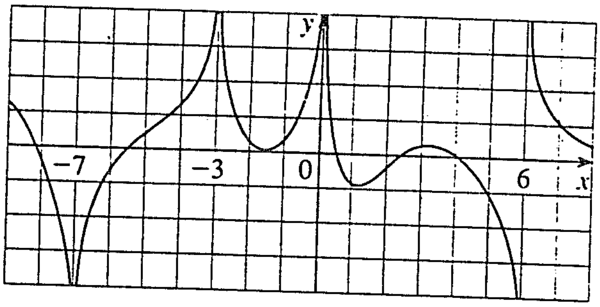
(a) $\lim_{x\to 2} R(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x) = \infty$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x) = \infty$

(e) The equations of the vertical asymptotes.

* $X = -3$ * $X = 2$ * $X = 5$

For the function f whose graph is shown, state the following.



(a) $\lim_{x\to -7} f(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = -\infty$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x) = \infty$

(f) The equations of the vertical asymptotes.

* $X = -7$ * $X = -3$ * $X = 0$ * $X = 6$

قاعده هامه

- فى حاله النهايه اليمنى أو اليسرى لداله كسريه
  - * تحديد اشاره المقام أولاً.
  - * تعويض مباشر ثانياً.
- فى حاله النهايه لداله كسريه بدون يمنى أو يسرى
  - * تعويض مباشر فقط.

Find the infinite limit

① $$\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5} = \frac{+6}{+(5-5)} = \frac{6}{0} = \infty$$

② $$\lim_{x \to 5^-} \frac{6}{x-5} = \frac{+6}{-(5-5)} = -\frac{6}{0} = -\infty$$

اذا عوضنا بعدد على يسار 5 في المقام يكون الناتج سالب

③ $$\lim_{x \to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{2-1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

تعويض مباشر فقط
لعدم وجود يمنى أو يسرى

---

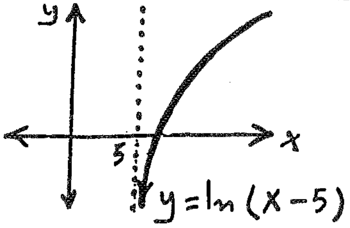
④ $$\lim_{x \to 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3} = \frac{+e^5}{-(5-5)^3} = -\frac{e^5}{0} = -\infty$$

اذا عوضنا بعدد على يسار 5 في المقام يكون الناتج سالب

---

⑤ $$\lim_{x \to 5^+} \ln(x-5) = -\infty$$

عندما x تقترب من العدد 5 من اليمين
فإن منحنى الداله يقترب من ∞ -



---

⑥ $$\lim_{x \to -2^+} \frac{x-1}{\underbrace{x^2}_{\text{موجب}}\underbrace{(x+2)}_{\text{موجب}}} = \frac{-3}{+0} = -\infty$$

⑦ $$\lim_{x \to -\overset{+}{4}} \frac{2x}{x+4} = \frac{-8}{+(-4+4)} = -\frac{8}{0} = -\infty$$

---

⑧ $$\lim_{x \to -\bar{1}} \frac{3x}{2x+2} = \frac{-3}{-(-2+2)} = +\frac{3}{0} = \infty$$

---

⑨ $$\lim_{x \to \bar{0}} \frac{1}{x} = \frac{+1}{-0} = -\infty$$

---

⑩ $$\lim_{x \to \bar{0}} \frac{1}{x^2} = \frac{+1}{+0} = \infty$$

يسار zero عندما يُربع
يتحول إلى موجب

---

⑪ $$\lim_{x \to \bar{0}} \frac{2}{x^{2/3}} = \lim_{x \to \bar{0}} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{+2}{+0} = \infty$$

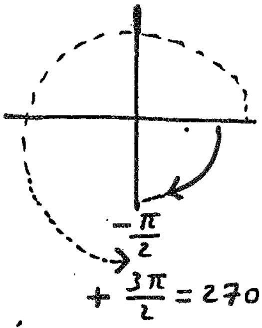
موجب لوجود
التربيع

---

⑫ $$\lim_{x \to \bar{0}} \frac{2}{x^{3/5}} = \lim_{x \to \bar{0}} \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{+2}{-0} = -\infty$$

تكعيب السالب يعطي سالب
الجذر الخامس لعدد سالب يعطي سالب

Note : $-\frac{\pi}{2}$ تناظر 270



* على يسارها ∴ في الربع الثالث

* « يمينها ∴ « « الرابع

⑬ $\lim_{x \to (-\pi/2)^-} \sec x$

$= \lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x}$

في الربع الثالث

cos x في الربع الثالث سالبه

$= \frac{+1}{-0}$

$= -\infty$

⑭ $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{+1}{+0} = \infty$

في الربع الأول
كل الدوال المثلثيه
موجبه

⑮ $\lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{+0} = -\infty$

في الربع الرابع

كل التمنيات بالنجاح والتوفيق

السعدي

2.3

Limits by using limits laws

9

Notes

- التركيز على المفاهيم الاساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- امثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

السعدي

رياضيات ١١٠
Math. 110

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
0566664790

2.3

Calculating limits using the limits laws

In this section:

To calculate limits we use the following properties of limits called " The limits laws "

limit laws

suppose that : $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$

and c is constant.

① $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

توزيع النهاية على الجمع والطرح .

---

② $\lim_{x \to a} [f(x)\ g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

توزيع النهاية على الضرب .

---

③ $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ (If : $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$)

توزيع النهاية على القسمة .

$= \frac{L}{M}$ (If : $M \neq 0$)

④ $\lim\limits_{x \to a} [c\, f(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \cdot L$

---

⑤ $\lim\limits_{x \to a} c = c$

نهاية الثابت نفس الثابت

where c is constant

---

⑥ $\lim\limits_{x \to a} x = a$

التعويض عن X بـ a

---

⑦ $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n = L^n$

---

⑧ $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

التعويض عن X بـ a

---

⑨ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

(If: n is even $\overset{\text{زوجي}}{}$
a must be positive) $\underset{\text{موجب}}{}$

---

⑩ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

(If: n is even
L must be positive)

Example :

Evaluate the following limits

① $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ [by direct substitution]
بالتعويض المباشر

$= 2\lim_{x \to 5} x^2 - 3\lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4$ ← *ممكن عدم كتابة هذه الخطوه

$= 2(5)^2 - 3(5) + 4$

$= 50 - 15 + 4$

$= 39$

② $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

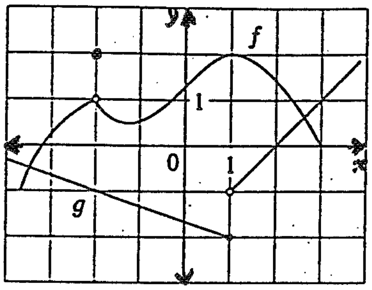
$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2\lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3\lim_{x \to -2} x}$$ ← *ممكن عدم كتابة هذه الخطوه

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$

$$= \frac{\cancel{-8} + \cancel{8} - 1}{5 + 6} = \frac{-1}{11}$$

Example :

Use the limit laws and graphs of F and g in figure to evaluate the following limits (if they exist).



① $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$

$= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x)$

$= 1 + 5(-1)$

$= 1 - 5 = \boxed{-4}$

من الرسم نجد أن :

$* \lim_{x \to -2} f(x) = 1$

$* \lim_{x \to -2} g(x) = -1$

② $\lim_{x \to 1} [f(x)\, \underline{\underline{g(x)}}]$

Does not exist

because :
the $\lim_{x \to 1} g(x)$ is not exist

where $\underbrace{\lim_{x \to 1^+} g(x)}_{(-1)} \neq \underbrace{\lim_{x \to 1^-} g(x)}_{(-2)}$

$* \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$* \lim_{x \to 1} g(x)$ does not exist

$* \lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4$

$* \lim_{x \to 2} g(x) = 0$

③ $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 2} F(x)}{\lim_{x \to 2} g(x)} = \frac{1.4}{0} \Rightarrow$ Does not exist

لأن المقام zero

النهايه من حاله الدوال المعرفه بأكثر من قاعده (فرعين أو أكثر)

- الحاله الأولى : وجود العلامات $<$ ، $>$

* نوجد النهايه اليمنى بالتعويض في الفرع الذي يحتوي على علامه أكبر من

* " " اليسرى " " " " " " " " اصغر من

☐ اذا كانت : النهايه اليمنى = النهايه اليسرى تكون النهايه موجوده .

☐ اذا كانت : النهايه اليمنى ≠ النهايه اليسرى تكون النهايه غير موجوده .

(Does not exist)

Example:

$$\text{If: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & ; x > 4 \\ 8-2x & ; x < 4 \end{cases}$$

Find the $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$?

* نوجد النهايه اليمنى من الفرع الذي يحتوي على أكبر من

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0$$

* نوجد النهايه اليسرى من الفرع الذي يحتوي على اصغر من

$$\lim_{x \to 4^-} (8-2x) = 8-2(4) = 8-8 = 0$$

∵ النهايه اليمنى = النهايه اليسرى = zero

∴ النهايه موجوده Exist وتساوي zero

$$\therefore \lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

- الحاله الثانيه : وجود علامه ≠ ، =

Example:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \neq 3 \\ x+5 & ; x = 3 \end{cases}$$

Find: $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

نستخدم الفرع الذي يحتوي على ≠

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x+1) = 2(3)+1 = \boxed{7}$$

- في حاله وجود داله القيمه المطلقه $f(x) = |\quad|$
لابد من أعاده تعريف المطلقه
ثم ايجاد النهايه اليمين من عند اكبر من
والنهايه اليسرى من عند اصغر من .

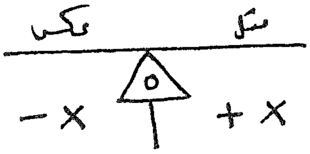
Example :

Find : $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$?

لابد من اعاده تعريف المطلقه :

$|x|$

نصفر مابداخل المطلقه ← $x = 0$



$$* \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (1) = \boxed{1}$$ النهايه اليمين

$$* \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = \boxed{-1}$$ النهايه اليسرى

$$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) \text{ Does not exist.}$$

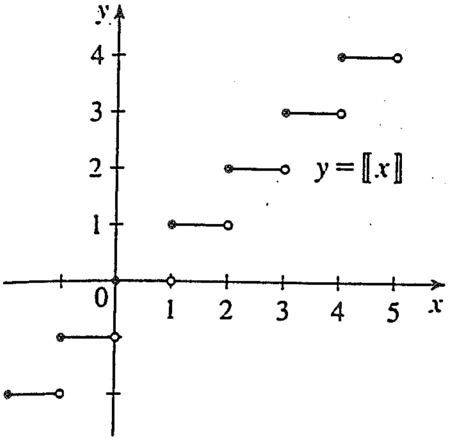
اى أنه النهايه غير موجوده
لعدم تساوى النهايتين
اليمين واليسرى .

- The greatest integer function (دالة الصحيح)

is defined by

$[\![x]\!]$ = the largest integer that is less than or equal to x

Other notations for $[\![x]\!]$ are $[x]$ and $\lfloor x \rfloor$. The greatest integer function is sometimes called the *floor function.*



Greatest integer function

$$[\![x]\!] = a \quad \text{for } a \le x < a+1$$

Note:

⟦ عدد صحيح ⟧ = نفس العدد الصحيح

⟦ عدد غير صحيح ⟧ = العدد الصحيح الأقل من العدد الغير صحيح
(الموجود على يساره)

Example: Find the value of :

$[\![2]\!] = 2$ ، $[\![-2]\!] = -2$ ، $[\![2.9]\!] = 2$ ، $[\![-2.9]\!] = -3$

$[\![\underset{\underset{3.14}{\downarrow}}{\pi}]\!] = 3$ ، $[\![\underset{\underset{2.7}{\downarrow}}{e}]\!] = 2$ ، $[\![\underset{\underset{1.7}{\downarrow}}{\sqrt{3}}]\!] = 1$ ، $[\![-\sqrt{3}]\!] = -2$

Example: Find $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$

$* \lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \boxed{3}$
كأنه تعويض مباشر

$* \lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \boxed{2}$ ⇒ اليمين ≠ اليسار
كأنه تعويض مباشر -1

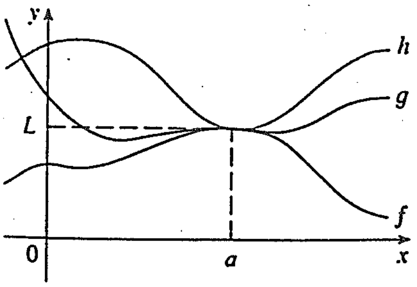
$\Rightarrow \lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ Does not exist.

نظريات هامه

① If: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

---

② (squeeze theorem)



If: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

and $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$

then $\lim_{x\to a} g(x) = L$

Example:

If: $4x-9 \leq f(x) \leq x^2-4x+7$ for $x \geq 0$

Find: $\lim_{x\to 4} F(x)$?

$* \lim_{x\to 4}(4x-9) = 16-9 = \boxed{7}$

$* \lim_{x\to 4}(x^2-4x+7) = \cancel{16}-\cancel{16}+7 = \boxed{7}$

$\boxed{\lim_{x\to 4} f(x) = 7}$

---

③ ● من حاله ايجاد نهايه حاصل ضرب دالتين احدهما نهايتها صفر والأخرى محدوده يكون الناتج zero

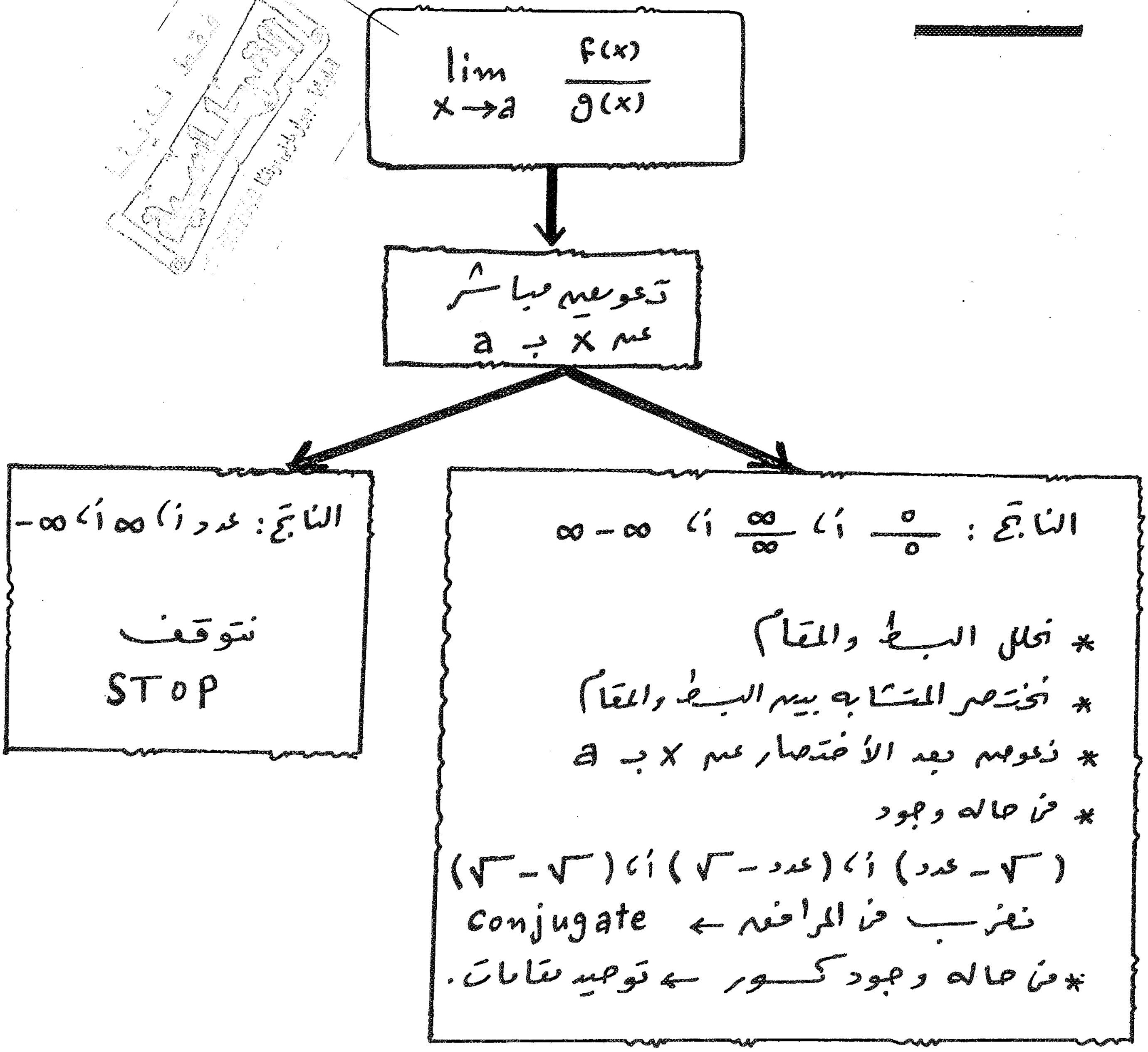
Example: ① $\lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\text{نهايتها صفر}} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{داله محدوده}} = 0$

② $\lim_{x\to 0} \underbrace{x^4}_{\text{نهايتها صفر}} \cdot \underbrace{\cos\frac{2}{x}}_{\text{داله محدوده}} = 0$

$-1 \leq \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \leq 1$

اى أن دوال sin & cos
دوال محدوده دائماً
بين 1 و -1

مهم جداً : عند إيجاد النهايه



$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

تعويض مباشر
عن x ب a

الناتج : عدد أ، ∞ أ، $-\infty$

نتوقف
STOP

الناتج : $\frac{0}{0}$ أ، $\frac{\infty}{\infty}$ أ، $\infty - \infty$

* نحلل البسط والمقام
* نختصر المتشابه بين البسط والمقام
* نعوض بعد الأختصار عن x ب a
* في حاله وجود
($\sqrt{\ }$ - عدد) أ، (عدد - $\sqrt{\ }$) أ، ($\sqrt{\ }$ - $\sqrt{\ }$)
نضرب في المرافق ← conjugate
* في حاله وجود كسور ← توحيد مقامات.

●● هناك تصرف أسرع وأسهل (بدلاً من التحليل ----)
وهو استخدام قاعده لوبيتال ← L'Hopital Rule
بأن نشتق البسط والمقام كلاً على حده ثم التعويض بعد الاشتقاق عن x ب a
اذا كان الناتج بعد الاشتقاق :

(1) عدد أ، ∞ أ، $-\infty$ نتوقف STOP

(2) $\frac{0}{0}$ أ، $\frac{\infty}{\infty}$ ---- نشتق مره أخرى ونعوض عن x ب a ....
حتى نحصل على الناتج عدد أ، ∞ أ، $-\infty$.

Exercises :

① $\lim\limits_{x \to 2} (2x+1) = 2(2)+1 = \boxed{5}$ تعويض مباشر

عدد ← stop.

---

② $\lim\limits_{y \to 5} \frac{y^2}{5-y} = \frac{(5)^2}{5-5} = \frac{25}{0} = \boxed{\infty}$ تعويض مباشر

→ stop.

---

③ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{4+2-6}{2-2} = \frac{0}{0}$ (I.f.) حالة عدم تعيين

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim\limits_{x \to 2} (x+3) = 2+3 = \boxed{5}$ ← ممكن بالتحليل *

(by L.H.R) أو ممكن باستخدام قاعدة لوبيتال *
بأنه نشتق البسط والمقام كلاً على حده.

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x+1}{1} = 2(2)+1 = \boxed{5}$

---

④ $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4} = \frac{16-20+4}{16-12-4} = \frac{0}{0}$ (I.f.) حالة عدم تعيين

$\lim\limits_{x \to -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x+1)}{\cancel{(x+4)}(x-1)} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-3}{-5} = \boxed{\frac{3}{5}}$ ← ممكن بالتحليل *

* ممكن باستخدام قاعدة لوبيتال (by L.H.R) ← أسهل وأسرع

$\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{2x+5}{2x+3} = \frac{-8+5}{-8+3} = \frac{-3}{-5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

⑤ $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \frac{16-16}{16-12-4} = \frac{0}{0} \quad (\text{I.f.})$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2x-4}{2x-3} = \frac{8-4}{8-3} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

---

⑥ $$\lim_{t\to -3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3} = \frac{9-9}{18-21+3} = \frac{0}{0} \quad (\text{I.f.})$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{t\to -3} \frac{2t}{4t+7} = \frac{-6}{-12+7} = \frac{\cancel{-}6}{\cancel{-}5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

---

⑦ $$\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+t}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \quad (\text{I.f.})$$

* في حاله الكسور توحيد مقامات أولاً

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t(t+1)}\right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t+1}{t(t+1)} - \frac{1}{t(t+1)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{t+\cancel{1}-\cancel{1}}{t(t+1)}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t+1} = \frac{1}{0+1}$$

$$= \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

⑧ $$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}=\frac{(4+0)^2-16}{0}=\frac{16-16}{0}=\frac{0}{0}$$

(I.f.)

(by L.H.R)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(4+h)^1\cdot 1}{1}=\lim_{h\to 0}2(4+h)=2(4+0)=\boxed{8}$$

---

⑨ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$ (I.f.)

(by L.H.R)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{3x}{2}=\frac{3(1)}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

---

⑩ $$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+8}=\frac{-2+2}{-8+8}=\frac{0}{0}$$ (I.f.)

(by L.H.R)

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{3(-2)^2}=\frac{1}{3(4)}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

---

⑪ $$\lim_{t\to 9}\frac{9-t}{3-\sqrt{t}}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$ (I.f.)

(by L.H.R)

$$=\lim_{t\to 9}\frac{\cancel{-}1}{\cancel{-}\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\lim_{t\to 9}\cancel{1}\cdot\frac{2\sqrt{t}}{\cancel{1}}=2\sqrt{9}=2(3)$$

$$=\boxed{6}$$

⑫ $$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7} = \frac{\sqrt{9} - 3}{7 - 7} = \frac{0}{0} \text{ (I.f.)}$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{x \to 7} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{1} = \lim_{x \to 7} \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

---

⑬ $$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{\sqrt{1+0} - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (I.f.)}$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+h}}}{1} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{1+h}} = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

---

⑭ $$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \frac{16 - 16}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ (I.f.)}$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{x \to 2} \frac{4x^3}{1} = 4(2)^3 = 4(8) = \boxed{32}$$

---

⑮ $$\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{-4}}{4 + (-4)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{4 - 4} = \frac{0}{0} \text{ (I.f.)}$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{x \to -4} \frac{0 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{0 + 1} = \lim_{x \to -4} -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(-4)^2} = \boxed{-\frac{1}{16}}$$

مشتقة $\frac{1}{x}$

هي $-\frac{1}{x^2}$

⑯ $$\lim_{x \to 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0} \quad (\text{I.f.})$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{x \to 9} \frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 9} 2x \cdot 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \to 9} 4x\sqrt{x} = 4(9)\sqrt{9} = 36(3) = \boxed{108}$$

⑰ $$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^{-1} - 3^{-1}}{h} = \frac{3^{-1} - 3^{-1}}{0} = \frac{0}{0} \quad (\text{I.f.})$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1(3+h)^{-2} \cdot 1}{1} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(3+h)^2}$$

$$= \frac{-1}{(3+0)^2} = \frac{-1}{(3)^2} = \boxed{\frac{-1}{9}}$$

⑱ $$\lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x + 4} = \frac{\sqrt{16+9} - 5}{-4 + 4} = \frac{0}{0} \quad (\text{I.f.})$$

(by L.H.R)

$$= \lim_{x \to -4} \frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}}{1} = \lim_{x \to -4} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{16+9}} = \frac{-4}{\sqrt{25}} = \boxed{\frac{-4}{5}}$$

⑲ $$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$$

$(I.f.)$

توحيد مقامات .

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}\right)$$

$$=\frac{0}{0}\ (I.f.)$$

بالضرب في مرافقه البسط
(بسطاً ومقاماً)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-(1+t)}{t\sqrt{1+t}\,(1+\sqrt{1+t})}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}-t}{t\sqrt{1+t}\,(1+\sqrt{1+t})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\cancel{t}}{\cancel{t}\sqrt{1+t}\,(1+\sqrt{1+t})}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+t}\,(1+\sqrt{1+t})}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+0}\,(1+\sqrt{1+0})}=\frac{-1}{1\,(1+1)}=\boxed{\frac{-1}{2}}$$

---

⑳ $$\lim_{x\to 0}\underbrace{\sqrt{x^3+x^2}}_{\text{دالة نهايتها zero}}\ \underbrace{\sin\frac{\pi}{x}}_{\text{دالة محدودة بين -١ ، ١}}=\boxed{0}$$

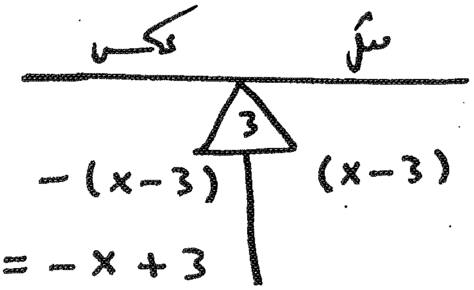
نظرية
③ page 8

㉑ $\lim_{x\to 3} (2x + |x-3|)$

اعاده تعريفا المطلقه

$x-3=0$

$x=3$



$= -x+3$

النهايه اليمين

$*\lim_{x\to 3^+} (2x + x - 3)$

$= \lim_{x\to 3^+} (3x-3) = 9-3 = \boxed{6}$

النهايه اليسرى

$*\lim_{x\to 3^-} (2x - x + 3)$

$= \lim_{x\to 3^-} (x+3) = 3+3 = \boxed{6}$

النهايه اليمين = النهايه اليسرى

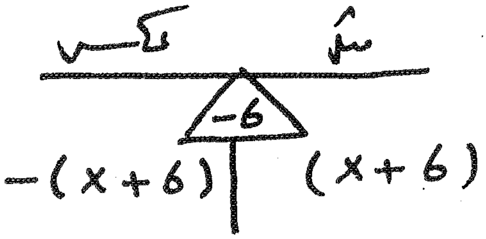
$\therefore \lim_{x\to 3^+} = \lim_{x\to 3^-} = 6 \Rightarrow \lim_{x\to 3} (2x+|x-3|) = \boxed{6}$

㉒ $\lim_{x\to -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$

اعاده تعريفا المطلقه

$x+6=0$

$x=-6$



$*\lim_{x\to -6^+} \frac{2(\cancel{x+6})}{(\cancel{x+6})} = \boxed{2}$

$*\lim_{x\to -6^-} \frac{2(\cancel{x+6})}{-(\cancel{x+6})} = \frac{2}{-1} = \boxed{-2}$

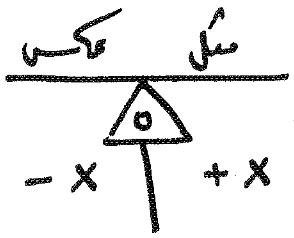
$\therefore \lim_{x\to -6^+} \neq \lim_{x\to -6^-}$ النهايه اليمين ≠ النهايه اليسرى

$\therefore \lim_{x\to -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$ does not exist

㉓ $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

اعاده تعريف المطلقه

$x = 0$



$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{-x} \right)$

$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right)$

$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2}{x} \right) = \frac{2}{0} = \boxed{\infty}$

㉔ $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

$= \lim_{x \to 0^+} \left(\cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x}} \right)$

$= \lim_{x \to 0^+} (0) = \boxed{0}$

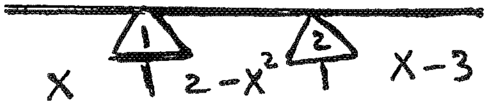
㉕ $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$ does not exist.

لأن النهايه اليمنى $\neq$ النهايه اليسرى .

㉖

$$\text{let}: \quad g(x) = \begin{cases} x & ; \ x < 1 \\ 3 & ; \ x = 1 \\ 2 - x^2 & ; \ 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & ; \ x > 2 \end{cases}$$

Evaluat each of the following limits if it exists :



(1) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x) = \boxed{1}$

(2) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2 - x^2) = 2 - 1 = \boxed{1}$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$ (لأن النهاية اليمنى = النهاية اليسرى =1)

(4) $g(1) = 3$

---

(5) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - x^2) = 2 - 4 = \boxed{-2}$

(6) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 3) = 2 - 3 = \boxed{-1}$

(7) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ does not exist

لأن النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى .

㉗ If n is integer عدد صحيح

Find

① $\lim\limits_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1$ في النهاية اليسرى
تعويض مباشر -1

② $\lim\limits_{x \to n^+} [\![x]\!] = n$ في النهاية اليمنى
تعويض مباشر فقط

③ $\lim\limits_{x \to n} [\![x]\!]$ does not exist
لأن النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

㉘ If : $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$

Find: $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? and $f(2)$?

$* \lim\limits_{x \to 2^+} \left([\![\underset{2.1}{x}]\!] + [\![\underset{-2.1}{-x}]\!] \right) = (2) + (-3) = 2 - 3 = -1$

$* \lim\limits_{x \to 2^-} \left([\![\underset{1.9}{x}]\!] + [\![\underset{-1.9}{-x}]\!] \right) = (1) + (-2) = 1 - 2 = -1$

∵ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$

$* F(2) = [\![2]\!] + [\![-2]\!]$
$= 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$

㉙ If : $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$

Find $\lim_{x \to 1} f(x)$?

$$\because \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{\lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} 8}{\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 1} = 10$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} 8 = 10\left(\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) - 8 = 10 (1 - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \underset{\to 0}{10(0)} + 8$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 8$$

③⓪ If:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$$

Find :

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

$$\because \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$$

$$\frac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to 0} x^2} = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 5 \cdot \lim_{x \to 0} x^2$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 5 \cdot (0)^2$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = \boxed{0}$$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\because \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{F(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{5}{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{5}{\frac{1}{0}}$$

$$= 5 \cdot \frac{0}{1}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 5 \cdot (0) = \boxed{0}$$

㉛ $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1} = \frac{\sqrt{6-2} - 2}{\sqrt{3-2} - 1} = \frac{\sqrt{4} - 2}{\sqrt{1} - 1}$$

$$= \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0} \ (\text{I.f.})$$

* ممكن الضرب من المرافقه مره للبسط ومره للمقام
لكن الأسهل والأسرع استخدام لوبيتال

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{6-x}}}{\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{-1}}{\cancel{2}\sqrt{6-x}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{3-x}}{\cancel{-1}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{3-2}}{\sqrt{6-2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(32) If there a number a such that :

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$ exist موجوده

(1) Find the value of a.

(2) Find the value of the limit .

① ∵ $$\lim_{x \to -2} \frac{3(-2)^2 + a(-2) + a + 3}{(-2)^2 + (-2) - 2}$$

$$= \frac{12 - 2a + a + 3}{4 - 2 - 2} = \frac{15 - a}{0}$$

∵ النهايه exist موجوده

∴ لا بد أن البسط = 0

$$15 - a = 0 \Rightarrow -a = -15 \Rightarrow \boxed{a = 15}$$

② $$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 15x + 15 + 3}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 15x + 18}{x^2 + x - 2} = \frac{12 - 30 + 18}{4 - 2 - 2} = \frac{0}{0}$$

(I.F.)

(by L.H.R) $$= \lim_{x \to -2} \frac{6x + 15}{2x + 1} = \frac{-12 + 15}{-4 + 1} = \frac{3}{-3} = \boxed{-1}$$

㉝ Find: $\lim_{x \to 0} \underbrace{\sqrt{x}}\ \underbrace{e^{\sin(\frac{\pi}{x})}}$

داله نهايتها zero

داله محدوده
حيث أن

$$-1 \leqslant \sin(\tfrac{\pi}{x}) \leqslant 1$$

$$\bar{e}^{1} \leqslant e^{\sin(\frac{\pi}{x})} \leqslant e^{1}$$

∴ $e^{\sin(\frac{\pi}{x})}$ داله محدوده بينه $\bar{e}^{1}$ ، e

$$\therefore \lim_{x \to 0} \sqrt{x}\ e^{\sin(\frac{\pi}{x})} = 0$$

(نظرية)
(3) page 8

الدالة الأولى نهايتها صفر

داله محدوده بينه $\bar{e}^{1}$ ، e

كل التمنيات بالنجاح والتوفيق

السعدى

2.5 Continuity
الأتصال

10

Notes

- التركيز على المفاهيم الاساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- أمثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

السعدي

رياضيات ١١٠
Math.110

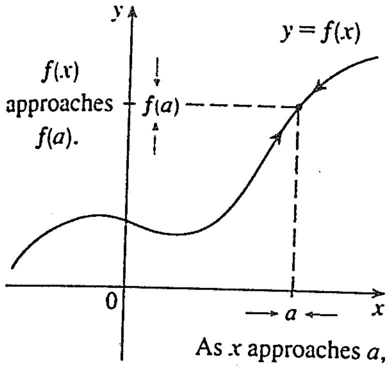
جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
0566664790

2.5

Continuity
الأتصال

- Continuous at the number $X = a$ ← الأتصال عند عدد

- requires three things
  يتطلب ثلاثة اشياء



① $f(a)$ is defined (الداله معرفه عند a)

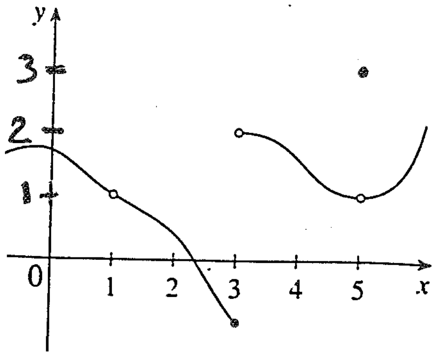
② $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exist (النهايه موجوده)

③ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F(a)$ (النهايه = قيمه الداله)

* اذا لم تتحقق الشروط الثلاثه السابقه معًا

(discontinuous at $\underline{\underline{a}}$) ← $x = a$ تكون الداله غير متصله عند

Example: From the figure



** at $x = 1$

$F(1)$ is not defined

$\therefore f(x)$ is discontinuous at $x = 1$

** at $x = 3$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ does not exist

$\therefore f(x)$ is discontinuous at $x = 3$

** at $x = 5$

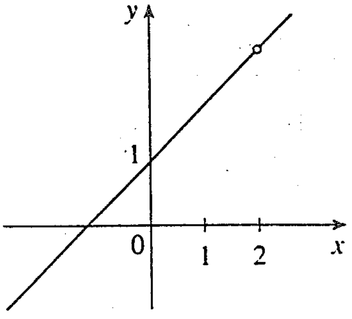
$(F(5) = 3)$ $(\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1)$

$\therefore f(x)$ is discontinuous at $x = 5$

Example:

Where are each of the following functions discontinuous ?

① $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$



$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

$f(2)$ is not defined

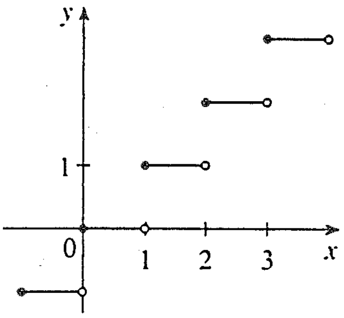
So $f(x)$ is discontinuous at $x = 2$

or $f(x)$ is continuous on $R - \{2\}$

بشكل آخر $f(x)$ 〃 〃 on $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

---

② $f(x) = [\![x]\!]$

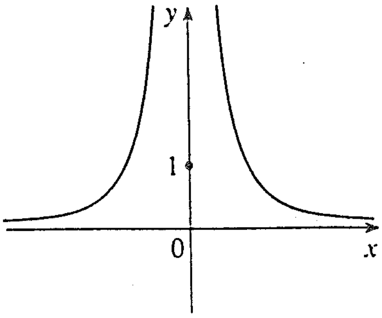


$f(x) = [\![x]\!]$

$f(x)$ is discontinuous at all of the integers where the $\lim\limits_{x \to n} [\![x]\!]$ does not exist (where n is integer)

---

③ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$



$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ does not exist

So $f(x)$ is discontinuous at $x = 0$

Definition :

If: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ is continuous from the right a .

متصله على يمينا a

If: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ is continuous from the left a .

متصله على يسار a

Example :

If: $f(x) = [\![x]\!]$

at each integer a

$* \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} [\![x]\!] = \underline{\underline{a}}$ $\quad * f(a) = \underline{\underline{a}}$

$\therefore$ F(x) is continuous from the right a

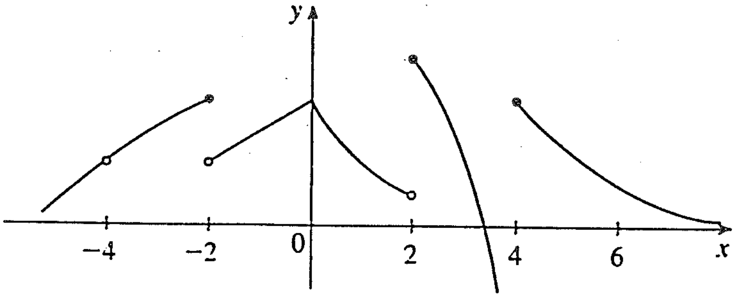
متصله على يمين العدد a

$* \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} [\![x]\!] = \underline{\underline{a-1}}$ $\quad * f(a) = \underline{\underline{a}}$

$\therefore$ f (x) is discontinuous from the left a

غير متصله على يسار العدد a

3. (a) From the graph of f, state the numbers at which f is discontinuous and explain why.
(b) For each of the numbers stated in part (a), determine whether f is continuous from the right, or from the left, or neither.



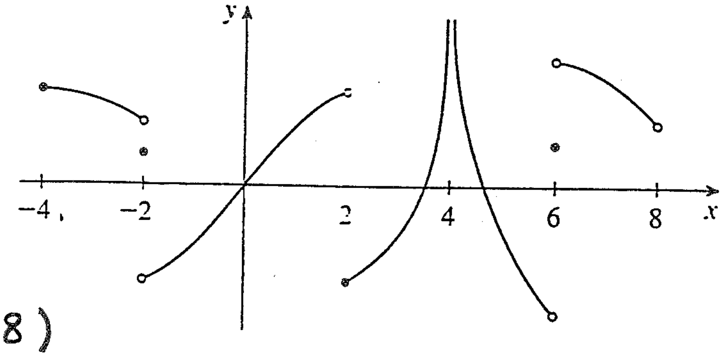
* at $x = -4$ $F(x)$ is discontinuous where $f(-4)$ undefined
$F(x)$ neither continuous from right nor from left.

* at $x = -2$ $f(x)$ is discontinuous (Jump)→ قفزة
$F(x)$ is continuous from the left. $\left(\lim_{x \to -2^-} f(x) = f(-2)\right)$

* at $x = 2$ $f(x)$ is discontinuous (Jump)
$F(x)$ is continuous from the right. $\left(\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)\right)$

* at $x = 4$ $f(x)$ is discontinuous (Jump)
$F(x)$ is continuous from the right. $\left(\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)\right)$

4. From the graph of g, state the intervals on which g is continuous.



$g(x)$ is continuous on:

* $[-4, -2)$ * $(-2, 2)$

* $[2, 4)$ * $(4, 6)$ * $(6, 8)$

• Continuous on the interval الأتصال على فترة

① اذا كانت f(x) كثيرة حدود (polynomial)
تكون متصلة على $R = (-\infty, \infty)$

② اذا كانت f(x) كسرية (rational)
تكون متصلة على R − { اصفار المقام }

③ اذا كانت f(x) جذرية (root function)

$$F(x) = \sqrt[n]{\quad}$$

n is odd
دليل الجذر فردي

- الجذر في المقام
  تكون الداله متصله على R − { اصفار المقام }
  $F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$
  متصله على $R - \{2\}$
- الجذر في البسط
  تكون الداله متصله على $R = (-\infty, \infty)$
  $F(x) = \sqrt[3]{x-2}$
  متصله على $(-\infty, \infty)$

n is even
دليل الجذر زوجي

- الجذر في المقام
  تكون الداله متصله على الفترات الموجبه مفتوحه من عند العدد
  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$
  متصله على $(2, \infty)$
- الجذر في البسط
  تكون الداله متصله على الفترات الموجبه مغلقه من عند العدد
  $F(x) = \sqrt{x-2}$
  متصله على $[2, \infty)$

Note that :

The following types of function are continuous (متصله) on their domain (مجالها).

- * trigonometric function . الدوال المثلثيه
- * Inverse trigonometric function. الدوال المثلثيه العكسيه
- * exponential function. الدوال الأسيه
- * logarithmic function. الدوال اللوغاريتميه

Exmple :

① $F(x) = \ln(X-2)$ داله ما متصله على

الفترات الموجبه مفتوحه من عند العدد 2

$\therefore f(x)$ is continuous on $(2, \infty)$

---

② $f(x) = \tan^{-1}x$ داله $\tan^{-1}x$ متصله على مجالها

$\therefore f(x)$ is continuous on $(-\infty, \infty)$

---

③ $f(x) = \ln(x-2) + \tan^{-1}x$ متصله على

$\therefore f(x)$ is continuous المجال المشترك

on $(2, \infty) \cap (-\infty, \infty) = (2, \infty)$

Example :

Where is the function f(x) continuous?

① $$f(x) = \frac{\ln x + \tan^{-1}x}{x^2 - 1}$$

* الدالة $f(x)$ متصلة على المجال المشترك لدالة $\ln x$ ، $\tan^{-1}x$

باستبعاد اصفار المقام

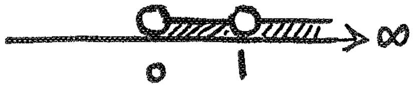
$\tan^{-1}x \to (-\infty, \infty)$ $\quad$ $\ln x \to (0, \infty)$

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

$\therefore$ F(x) is continuous

on $(-\infty, \infty) \cap (0, \infty) - \{-1, 1\}$

$= (0, \infty) - \{-1, 1\}$



$= (0, 1) \cup (1, \infty)$

---

② $F(x) = 2x^3 - x^2 + 1 \longrightarrow$ Polynomial كثيرة حدود

f(x) is continuous on $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

---

③ $* f(x) = 2 \quad * f(x) = \sqrt{5} \quad * f(x) = -\frac{2}{3} \quad * f(x) = 0$

are continuous on $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

④ $f(x) = |x-3|$ continuous on $(-\infty,\infty)$

---

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{|x-3|}$

متصله على $R - \{$أصفار المقام$\}$

$\therefore$ $f(x)$ continuous on $R-\{3\} = (-\infty,3)\cup(3,\infty)$

---

⑥ $f(x) = \dfrac{1}{|x|-3}$

أصفار المقام $|x|-3=0$

$|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$

$\therefore$ $f(x)$ continuous on $R-\{-3,3\} = (-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

---

⑦ $f(x) = \dfrac{2x-1}{|x|+3}$

المقام ليس له أصفار

لأن $|x|+3=0$

$|x| = -3$ مرفوض (discard)

$\therefore$ $f(x)$ continuous on R.

---

⑧ $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-9} \Rightarrow$ أصفار المقام $x^2-9=0$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$\therefore$ $f(x)$ continuous on $R-\{-3,3\} = (-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

---

⑨ $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+9}$

المقام ليس له أصفار

لأن x^2+9

لا يمكن أن تساوي zero

$\therefore$ $f(x)$ continuous on R.

---

⑩ $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$

جذر تكعيبي في البسط

$\therefore$ $f(x)$ continuous on $R = (-\infty,\infty)$

---

⑪ $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

جذر تكعيبي في المقام

$\therefore$ متصله على $R - \{$أصفار المقام$\}$

$f(x)$ continuous on $R-\{-2,2\}$

⑫ $f(x) = \sqrt[5]{x^2-x}$ الجذر الخامس (دليل الجذر n فردي)

والجذر من البسط

∴ f(x) متصلة على R .

---

⑬ $F(x) = \frac{2}{x}$ دالة كسرية

متصلة على

R - {اصفار المقام}

متصلة

∴ F(x) continuous on $R - \{0\}$

غير متصلة

OR f(x) is discontinuous at $x = 0$

---

⑭ $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-5x+6} - 5x$ دالة كسرية

اصفار المقام

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-3)(x-2) = 0$

$x = 3$ ، $x = 2$

f(x) is continuous on $R - \{2, 3\}$

---

⑮ $F(x) = \frac{2x-1}{x^2-5x+6} + \frac{2x^2}{3}$

discontinuous at x = اصفار المقام

$x = 2, 3$

⑯ Find the interval

on which ① $f(x) = \sqrt{|x|-2}$ is continuous.

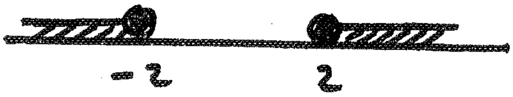
* جذر تربيعي في البسط

∴ الداله متصله على الفترات الموجبه مُغلقه من عند العدد

$\Longrightarrow \quad |x| - 2 \geq 0$

$|x| \geq 2$

$x \geq 2$ or $x \leq -2$ نظرية



∴ $f(x)$ is continuous on $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

---

② $f(x) = \sqrt{2-|x|}$

$\Longrightarrow \quad 2 - |x| \geq 0$

$\Rightarrow -|x| \geq -2 \Longrightarrow |x| \leq 2$

$-2 \leq x \leq 2$ نظرية

∴ $f(x)$ is continuous on $[-2, 2]$

⑰ $F(x) = \sqrt{x^2-16}$

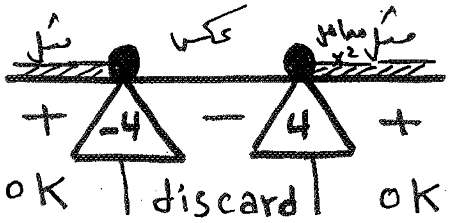
* جذر تربيعي في البسط

∴ متصلة على الفترات الموجبة مغلقة من عند العدد

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$



$f(x)$ continuous on $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

** $f(x)$ discontinuous on $(-4, 4)$

---

⑱ $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-16}}$

* جذر تربيعي في المقام

∴ متصلة على الفترات الموجبة مفتوحة من عند العدد

نفس المثال السابق

$F(x)$ continuous on $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

Note that :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \geq a \\ h(x) & ; x < a \end{cases}$$

الداله المعرفه بأكثر من قاعده
في حاله وجود أكبر من و أقل من
لكي تكون الداله متصله عند $X = a$

لابد أنه :

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} h(x) = g(a)$$

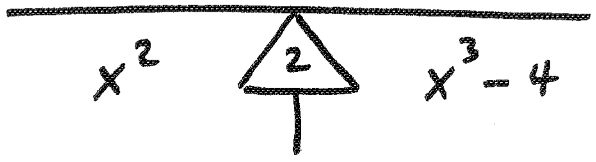
قيمة الداله = النهايه اليسرى = النهايه اليمنى أي أنه

التعويض في الطرف الموجود به علامة المساواه.

التعويض في طرف أصغر من.

التعويض في طرف أكبر من.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4 & ; \quad x \geq 2 \\ x^2 & ; \quad x < 2 \end{cases}$$



* f(x) is continuous on $(-\infty, 2)$ and $(2, \infty)$
because : it is polynomail كثيره حدود

* at $x = 2$ نقطه فاصله

∴ لابد من ايجاد النهايه اليمنى ، اليسرى ، قيمه الداله

• $\lim_{x \to 2^+} (x^3 - 4) = 8 - 4 = \underline{\underline{4}}$ النهايه اليمنى *
التعويض في طرف أكبر من

• $\lim_{x \to 2^-} x^2 = \underline{\underline{4}}$ النهايه اليسرى *
التعويض في طرف أصغر من

• $F(2) = (2^3 - 4) = 8 - 4 = \underline{\underline{4}}$ قيمه الداله *
التعويض في الطرف الذي به علامه المساواه

$$\therefore \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

∴ f(x) is continuous at $x = 2$

** f(x) is continuous on $(-\infty, \infty)$

Example :

Find the value of c

which makes

$$F(x) = \begin{cases} cx + 5 & ; x < 2 \\ cx^2 + 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

is continuous at $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^+} (cx^2+1) = \lim_{x \to 2^-} (cx+5)$$

$$c(2^2) + 1 = c(2) + 5$$

$$4c + 1 = 2c + 5$$

$$4c - 2c = 5 - 1$$

$$2c = 4 \Longrightarrow c = 2$$

Note that :

فى حالة الدالة المعرفة بقاعدتين
احدهما تحتوي على $(x \neq a)$
والأخرى تحتوي على $(x = a)$

* نوجد النهاية من عند $\neq$ ، قيمة الدالة من عند $=$
اذا تساوى الناتجين تكون الدالة متصلة عند $x = a$
وإلا تكون الدالة غير متصلة عند $x = a$

Example :

$$\text{If : } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & ; \; x \neq 4 \\ 7 & ; \; x = 4 \end{cases}$$

Is $f(x)$ continuous at $x = 4$?

* نوجد النهاية من عند $x \neq 4$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{16-16}{4-4} = \frac{0}{0} \quad (\text{I.f.})$$

by $\underline{\underline{\text{L.H.R}}}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x}{1} = \boxed{8}$$

* نوجد قيمة الدالة من عند $x = 4$

$$f(4) = \boxed{7}$$

$\because \lim_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$ نهاية الدالة $\neq$ قيمة الدالة

$\therefore f(x)$ is discontinuous at $x = 4$

Intermediate value theorem

الوسطى القيمة نظرية

* اذا كانت الداله $f(x)$ متصله على $[a, b]$
فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c

where $a \leqslant c \leqslant b$

$$\Longrightarrow f(a) \leqslant f(c) \leqslant f(b)$$

Example :

For the function $f(x) = x^3 - x^2 + x$
there is a number $c \in [1, 3]$
Such that $f(c) = \ldots\ldots$

$\boxed{A}$ 0 $\boxed{B}$ 10 $\boxed{C}$ -1 $\boxed{D}$ 40

Solution

$$\because \quad c \in [1, 3]$$

$$1 \leqslant c \leqslant 3$$

$$\underset{\text{عوض بـ 1 في الداله } f(x)}{f(1)} \leqslant f(c) \leqslant \underset{\text{عوض بـ 3 في الداله } f(x)}{f(3)}$$

$$\downarrow$$

$$1 \leqslant f(c) \leqslant 21$$

الأختيار المناسب هو $\boxed{B}$ 10 لأنه الوحيد المحصور بين 1 ، 21 .

• Removable discontinuity → ازاله عدم الأتصال

* اعاده تعريفا الداله الغير متصله بحيث تصبح متصله *

اذا كانت f(x) داله غير متصله عند a
فإنه يمكن اعاده تعريف الداله f(x) بشكل آخر (داله أخرى g(x))
تكون متصله عند a كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} \underset{\text{قاعده الداله } f}{f(x)} & ; \ x \neq a \\ \underset{\text{نهايه الداله } f}{\lim_{x \to a} f(x)} & ; \ x = a \end{cases}$$

* مع العلم أن الداله f(x) : يمكن اعاده تعريفها اذا كانت نهايتها $\boxed{\frac{0}{0}}$

: لا يمكن اعاده تعريفها اذا كانت نهايتها $\boxed{\frac{\text{عدد}}{0}}$

Example :

which of the following functions f has removable discontinuity ?

① $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x-1}$ discontinuous at $x=1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = \boxed{\frac{\text{عدد}}{0}} = \infty$$

∴ discontinuity is not removable لا يمكن ازالة عدم الأتصال

(Infinite discontinuous)

② $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

داله كسريه

∴ غير متصله عند اصفار المقام

F(x) is discontinuous at $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \boxed{\frac{0}{0}} (I.f.)$$

⇒ We can removable discontinuity

يمكننا ازاله عدم الاتصال كما يلي

$$* \lim_{x \to 1} \frac{4x^3}{1} = 4(1^3) = 4$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{\underset{\text{f قاعده الداله}}{x - 1}} & ; \ x \neq 1 \\ \underset{\text{f نهايه الداله}}{4} & ; \ x = 1 \end{cases}$$

---

9 page 128

If: f and g are continuous functions with $F(3) = 5$ and $\lim_{x \to 3} [2f(x) - g(x)] = 4$

Find: g(3) ?

$$\lim_{x \to 3} [2F(x) - g(x)] = 4$$

$$2F(3) - g(3) = 4$$

$$2(5) - g(3) = 4 \Rightarrow g(3) = 10 - 4 = \boxed{6}$$

Example: Page 125

Evaluate

$$\lim_{x \to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$$

$$= \arcsin\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$$

تعويض مباشر $\frac{0}{0}$

by L.H.R لوبيتال

$$= \arcsin\left(\lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}\right)$$

$$= \arcsin\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30 = \frac{\pi}{6}$$

2.6

- limits at infinity.
- Horizontal asymptotes.

Notes

11

- التركيز على المفاهيم الاساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- أمثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

السعدي

رياضيات ١١٠
Math. 110

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
0566664790

2.6

• Limits at infinity
النهاية عند اللا نهاية

• Horizontal asymptotes
خطوط التقارب الأفقية

Note that :

* $(\infty)^n = \infty$ حيث n موجب

* $(-\infty)^n = \begin{cases} \infty \rightarrow \text{حيث n زوجي} \\ -\infty \rightarrow \text{حيث n فردي} \end{cases}$

* $(\pm\infty)^n = \text{zero}$ حيث n سالب

* $\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$

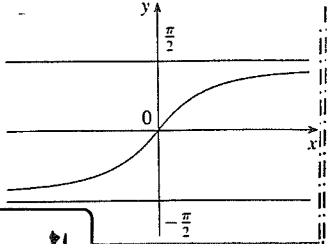
* $\frac{\pm\infty}{\text{عدد}} = \pm\infty$

* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty} = 0$ اذا كانت a أصغر من b $\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$

* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty} = \infty$ اذا كانت a أكبر من b $\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$

* $e^{\infty} = \infty$ * $e^{-\infty} = 0$

* $\tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$ * $\tan^{-1}-\infty = \frac{-\pi}{2}$ $\longrightarrow \tan^{-1}x$



* أسهل طريقة لإيجاد النهاية

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$$

(1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - x}{3x^2 + 1} = \dfrac{2}{3}$

اذا كانت درجه البسط = درجه المقام)

يكون الناتج $\dfrac{\text{معامل أكبر أس لـ } x \text{ فى البسط}}{\text{معامل أكبر أس لـ } x \text{ فى المقام)}}$

---

(2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x + 1}{x^2 - x} = 0$

اذا كانت درجه البسط أصغر من درجه المقام)

يكون الناتج **Zero**

---

(3) $*\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x + 1}$

$= \dfrac{+}{+}\infty = \infty$

اذا كانت درجه البسط أكبر من درجه المقام)

الناتج ∞ ولتحديد اشارته

نعوض فى الحد الذى يحتوى على أكبر أس فى البسط

والحد الذى يحتوى على أكبر أس فى المقام)

عن x

$* \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - x - 2}{2x + x^2} = \dfrac{-}{+}\infty = -\infty$

$* \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - x - 2}{2x - x^2} = \dfrac{-}{-}\infty = \infty$

Find the limits :

(1) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$

البسط أصغر من المقام
الناتج 0

(2) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$

البسط أكبر من المقام
الناتج ∞

(3) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$

(4) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^{x} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^{-\infty} = \left(\frac{e}{\pi}\right)^{\infty} = 0$

$e \approx 2.7$ أصغر من $\pi \approx 3.14$

(5) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\pm\infty}} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$

(6) $\lim_{x \to \infty} \frac{\boxed{x^{-1}} + x^{-4}}{\boxed{x^{-2}} - x^{-3}}$

درجة البسط ← -1
أكبر من
درجة المقام ← -2

$= \frac{+}{+}\infty = \infty$

⑦ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x} \right) = \infty - \infty \quad (\text{I. F.})$

حاله عدم تعيين

الضرب في المرافقه

ضرب ضرب

$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

⑧ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + 4x^2}}{4 + x} = \dfrac{+\sqrt{4}}{+1} = 2$

x^2 تحت الجذر تعني x

اي أن البسط درجه أولى

والمقام درجه أولى

⑨ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1 + 4x^2}}{4 + x} = \dfrac{-\sqrt{4}}{1} = -2$

⑩ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}} = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\infty}\right)}{1 + \frac{1}{\infty}}$

$$= \frac{\cos 0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

نظرية هامة جداً :

$$\lim_{x\to a} f(x)\,.\,g(x) = 0$$

نهاية حاصل ضرب دالتين احدهما نهايتها ٥ والأخرى محدوده

يكون الناتج ٥ .

* ملحوظة : داله sin ، cos دوال محدوده دائماً

Example :

$$-1 \leq \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \leq 1$$

Find the limits

① $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cos x = 0$$

$$\frac{1}{x} \downarrow \quad \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \cos x \downarrow \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

محدوده

حاصل ضرب دالتين

* الأولى نهايتها ٥

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

* الثانية $\cos x$

محدوده بين ١- ، ١

② $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin 2x = 0$$

$$\frac{1}{x} \downarrow \quad \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \sin 2x \downarrow \quad -1 \leq \sin 2x \leq 1$$

محدوده

Find the limit :

① $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \infty - \infty \quad (\text{I.F.})$$

حاله عدم
تعيين

بالضرب في المرافقه

ضرب ضرب

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x) - (x^2-x)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x - \cancel{x^2}+x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

x^2 تحت $\sqrt{\ }$ تعني x عندما $x\to\infty$
وتعني $-x$ عندما $x\to-\infty$
∴ درجة البسط = درجة المقام

$$= \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

② $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos\frac{1}{x}\right)\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)$$ تعويض مباشر

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

$$= \left(\frac{3}{\infty} - \cos\frac{1}{\infty}\right)\left(1 + \sin\frac{1}{\infty}\right)$$

$$= (0 - \cos 0)\ (1 + \sin 0)$$

$$= (0 - 1)(1+0) = (-1)(1) = \boxed{-1}$$

③ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos(\frac{1}{x})}{1 + \frac{1}{x}}$ تعويض مباشر

$$= \frac{\cos(\frac{1}{\infty})}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{\cos 0}{1+0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

قاعده هامه

$$* \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin ax}{bx} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{3x} = 0$$

$$* \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cos ax}{bx} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cos 3x}{5x} =$$

Example:

Find: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - x + \sin x}{x + \cos x}$

للوصول لشكل القاعده السابقه نقسم بسطاً ومقاماً على X

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{0 - 1 + 0}{1 + 0} = \frac{-1}{1}$$

$$= \boxed{-1}$$

Page 141

⑪ Guess the value of the limit:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x}$$

* عندما تزداد x حتى تقترب من ∞
فإن المقام يصل أسرع إلى ∞
قبل البسط لأن أسه ؛

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

x :	1	2	---- 10	---> ∞
x^2 :	1	4	----- 100	---> عدد
2^x :	2	4	----- 1024	---> ∞

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

للتوضيح $\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{x^2} = \frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

㉘ $\lim_{x \to \infty} \cos x$

* عند ∞ تكون cosx
اما $\boxed{1}$ أو $\boxed{-1}$

⇐ لها نهايتان مختلفتان

$\therefore$ Does Not Exist.

* * $\lim_{x \to \infty} |\cos x| = 1$

في حالة ١ ، ١- المطلقة يعطيها $\underline{\underline{1}}$.

(35) $\lim_{x\to\infty} \left(\bar{e}^{2x} \quad \cos x \right) \quad = \quad 0$

حاصل ضرب دالتين أحدهما داله محدوده بين ١- ، ١ والأخرى داله نهايتها ٥

حيث $\bar{e}^{\infty} = 0$

---

(31) $\lim_{x\to-\infty} \left(x^4 + x^5 \right)$

عامل مشترك x^4

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot (1 + x)$$

تعويض مباشر

$$= (-\infty)^4 \cdot (1 - \infty)$$

$$= (\infty) \cdot (-\infty) = \boxed{-\infty}$$

---

(33) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x} = \dfrac{-\infty}{\infty}$

بالقسمه على e^x بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\infty} - 1}{\frac{1}{\infty} + 2} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

㉞ $\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4)$ x^2 عامل مشترك

$= \lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1}\left[x^2(1-x^2)\right]$

$= \tan^{-1}\left[\infty\cdot(1-\infty)\right]$

$= \tan^{-1}\left[\infty\cdot -\infty\right] = \tan^{-1}[-\infty] = -\frac{\pi}{2}$

㊱ $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} e^{\tan x} = e^{-\infty} = 0$

الربع الثاني

* tan سالبه

* $\tan 90 = \infty$

Page 142

(57) Find: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ if $\frac{10e^{x}-21}{2e^{x}} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

by: Sandwich theorem

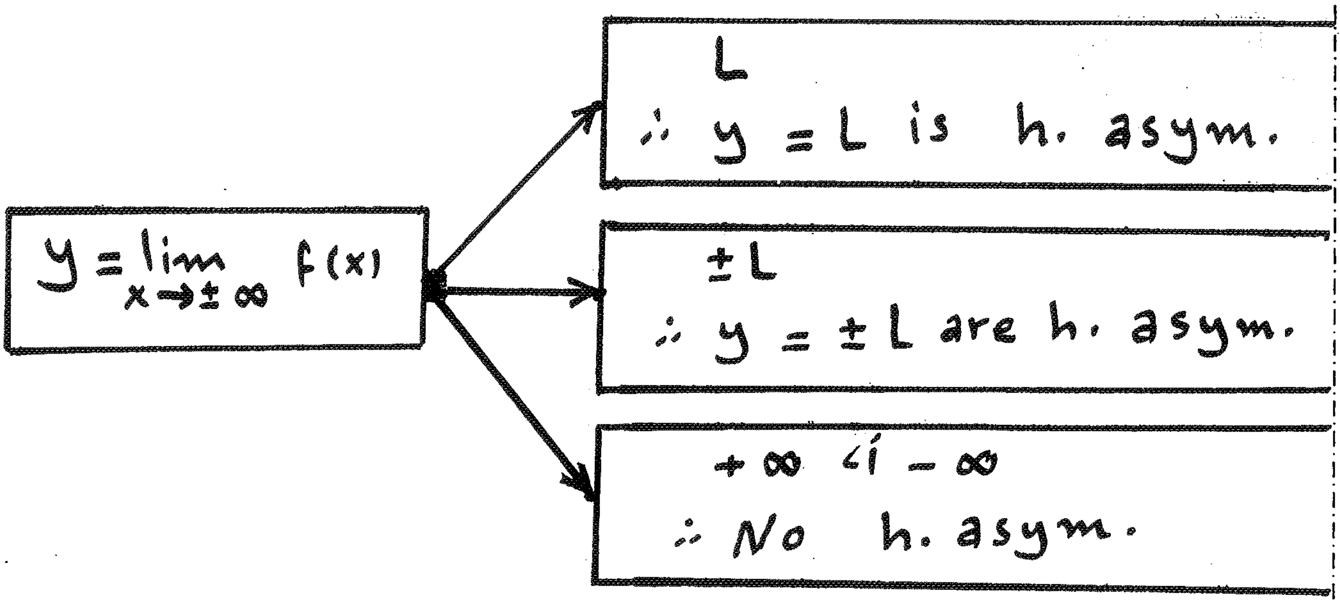
باستخدام نظرية الساندويتش

$* \lim\limits_{x\to\infty} \frac{10e^{x}-21}{2e^{x}} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \boxed{5}$

$* \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{5}{1} = \boxed{5}$

Horizontal asymptotes
خطوط التقارب الأفقية



$y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

L

$\therefore y = L$ is h. asym.

$\pm L$

$\therefore y = \pm L$ are h. asym.

$+\infty$ أو $-\infty$

$\therefore$ No h. asym.

Example : Find horizontal asymptotes

① $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

(درجة البسط = درجة المقام)

$y = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\therefore y = 1$ is horizontal asymptote

$\Longrightarrow (y = 1$ is h. asym. $)$

* لاحظ أنه :

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{عندما } x \to \infty \\ -x & \text{عندما } x \to -\infty \end{cases}$$

② $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

* $y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2}+1} = \dfrac{+2}{+1} = \boxed{2}$

* $y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2}+1} = \dfrac{+2}{-1} = \boxed{-2}$

$\Rightarrow$ $y = 2$ ، $y = -2$ are h. asym.

---

③ $F(x) = \dfrac{|x+2|}{x+4}$ → لابد من اعاده تعريفا المطلقه

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

عكس -2 مثل

$-(x+2)$ | $+(x+2)$

* $y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{x+4} = \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$

* $y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-(x+2)}{x+4} = \dfrac{-1}{1} = \boxed{-1}$

$\Rightarrow$ $y = 1$ ، $y = -1$ are h. asym.

---

④ $f(x) = \dfrac{x^4}{|x|}$

* $y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \boxed{\infty}$

* $y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = -(-\infty) = \boxed{\infty}$

$\Rightarrow$ F(x) has not h. asym. ليس لها خطوط تقارب افقيه.

Vertical asymptotes
خطوط التقارب الرأسيه

* خطوات ايجاد خطوط التقارب الرأسيه V. asym.

- نوجد أصفار مقام الداله المعطاه f(x) ولتكن a, b
- نعوض بـ a ، b في الداله نفسها :

مثلاً

$f(a) = \frac{\text{عدد}}{0}$

$\therefore x = a$

is V. asym.

x=a يمثل خط تقارب رأسي

مثلاً

$f(b) = \frac{0}{0}$

$\therefore x = b$

not V. asym.

x=b لا يمثل خط تقارب رأسي

Example :

find the vertical asymptotes :

① $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

* اصفار المقام

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = \frac{2(2)-1}{2-2} = \frac{3}{0} = \frac{\text{عدد}}{0}$

$\Rightarrow x = 2$ is V. asym.

② $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

* $f(2) = \dfrac{4-10+6}{4-4} = \dfrac{0}{0}$

$\Rightarrow X=2$ is $\underline{\underline{\text{not}}}$ V. asym.

* اصفار المقام

$X^2-4=0$

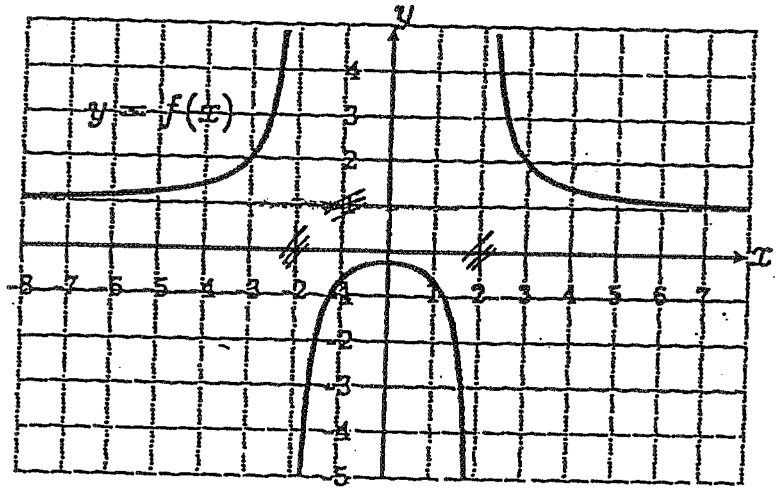
$X^2=4$

$X=\pm 2$

* $f(-2) = \dfrac{4+10+6}{4-4} = \dfrac{20}{0} = \dfrac{\text{عدد}}{0}$

$\Rightarrow X=-2$ is V. asym.

The horizontal and vertical asymptotes of f are



(a) $y=-2,\quad y=2,\quad x=1$

[✓ (b) $x=-2,\quad x=2,\quad y=1$]

(c) $x=-2,\quad x=0,\quad y=1$

(d) $x=0,\quad x=2,\quad y=1$

For the function g whose graph is given, state the following.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 2$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$

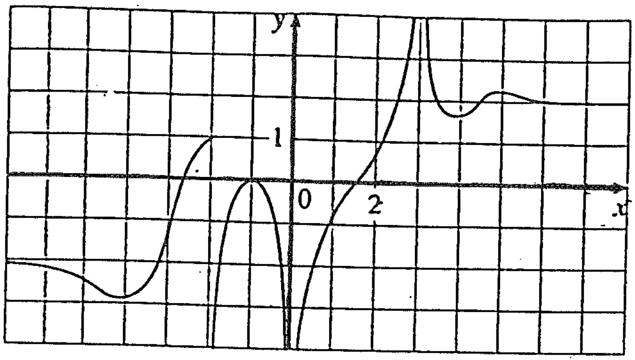
(c) $\lim\limits_{x\to3} g(x) = \infty$ (d) $\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty$

(e) $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = -\infty$ (f) The equations of the asymptotes ⟹ *V. asymptotes

X = −2 ، X = 0 ، X = 3

*H. asymptotes

y = −2 ، y = 2



For the function f whose graph is given, state the following.

(a) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$

(c) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ (f) The equations of the asymptotes ⟹ * V. asymptotes

X = −1 ، X = 2

* H. asymptotes

y = 1 ، y = 2