1

الأشعة في الفراغ

1. عموميات
2. الارتباط الخطّي لثلاثة أشعّة
3. المعلم في الفراغ
4. المسافة في الفراغ
5. مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

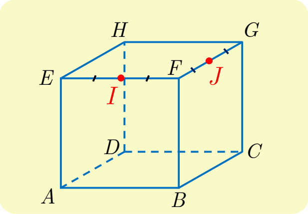
- الارتباط الخطي لثلاثة أشعة.
- اختيار معلم مناسب في الفراغ واستعماله في حل مسائل هندسية مختلفة.
- حساب المسافة في الفراغ، وصيغتها في معلم متجانس.
- حساب مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ، الخاصة التجميعية، وتطبيقات ذلك في حل بعض مسائل الهندسية المختلفة.

الأشعة في الفراغ

تدرّب ص16

① $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$، J منتصف $[FG]$.

❶ في كلٍّ من الحالات التالية، بيّن إذا كانت النقطة M المعرّفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب. وعلِّلْ إجابتك.



1. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}$.
2. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
3. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DG}$.
4. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$.
5. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB}\right)$.

الحل

1. نعم لأن $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$. ومنه $M=F$.
2. نعم، M تنطبق على G لأنّ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}$.
3. نعم، M تنطبق على E لأنّ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}$.
4. لا، لأنّ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$ تقتضي أنّ $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}$. إذن G منتصف $[CM]$ فلا يمكن أن تكون M رأساً من رؤوس المكعب.
5. نعم ، M تنطبق على B لأنّ

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{AB}$$

❷ في كلٍّ من الحالات الآتية، حدِّدْ موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

1. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FJ}$.
2. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}$.
3. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}$.

الحل

1. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{AJ}$ ومنه N تنطبق على J .
2. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{AJ}$ ومنه $N=J$.
3. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AI}$ ومنه $N=I$.

❸ في كلٍّ من الحالات الآتية، عبِّرْ عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاعٍ واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً.

1▪ $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BA}$. 2▪ $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$. 3▪ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$. 4▪ $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{JF}$.

الحل

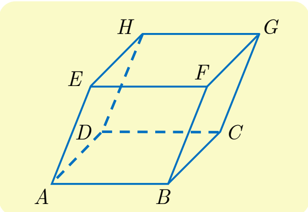
1▪ $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BJ}$.

2▪ $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$.

3▪ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AI}$.

4▪ $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{JF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

② $ABCDEFGH$ متوازي سطوح.



❶ أثبت صحة المساواة الشعاعية، في كل من الحالات الآتية:

1▪ $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$. 2▪ $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

3▪ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$. 4▪ $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}$.

الحل

1▪ استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$.

2▪ استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CF}$ وبما أن $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ نجد $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

3▪ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{EB}$ وبطريقة مماثلة لما سبق نجد $\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

4▪ لدينا $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}$ كما أن $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}$ واستناداً إلى علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FD}$$

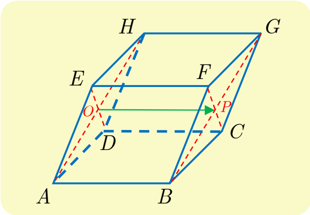
❷ وضِّعْ النقاط P و Q و R بحيث يكون:

1▪ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

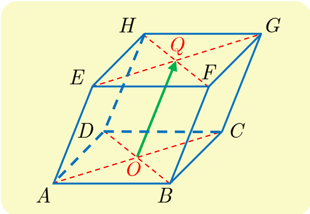
2▪ $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

3▪ $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

الحل

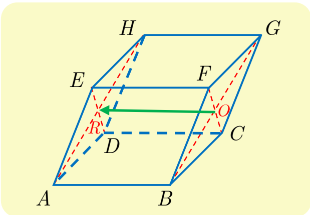


1. لتكن O مركز الوجه $ADHE$، عندئذ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}$ ومنه P هي صورة O وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$ أي P هي مركز الوجه $ACGF$.



2. لتكن O مركز الوجه $ABCD$، عندئذ $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AE}$ ومنه Q هي صورة O وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي Q هي مركز الوجه $EFGH$.

3. لدينا

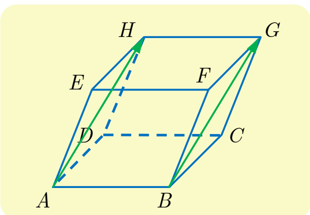


$$\overrightarrow{CR}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CD}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CO}$$

لتكن O مركز الوجه $BCGF$، عندئذ تكون R صورة O وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CD}$ أي R هي مركز الوجه $ADHE$.

3 عيّن شعاعاً يساوي $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}$ وأثبت أنَّ هذا الشعاع يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$.

الحل



استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$ و لأن $BCGF$ متوازي الأضلاع وجدنا

$$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AH}$$

أي $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}$ يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$.

4 أوجد شعاعاً يساوي $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}$ وأثبت أنَّ هذا الشعاع يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$.

الحل

بما أن الشكل $FBCG$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FC}$ وبما أنَّ بما أن كل وجه من أوجه متوازي السطوح هو متوازي أضلاع فإنَّ $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}$ ومنه

$$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{DF}$$

أي $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}$ يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$.

تدرّبْ ص20

① A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. أتكون الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيّاً؟

الحل

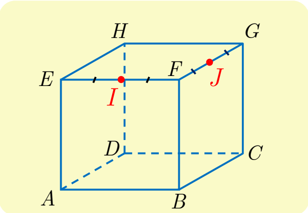
نعم لأنها تقع في مستوٍ واحد، كما إن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ وضوحاً.

② A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. E نقطة تحقّق $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$، و F نقطة تحقق $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. أتقعُ النقاط A و B و C و E و F في مستوٍ واحد؟

الحل

من العلاقة $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ نجد أن النقاط B و C و E على استقامة واحدة ومنه E تقع في المستوي (ABC)، و من العلاقة $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ نجد أن النقاط A و E و F على استقامة واحدة ومنه F تقع في المستوي (ABE) أي المستوي (ABC) و النقاط A و B و C و E و F في مستوٍ واحد.

③ $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$.



❶ أتنتمي النقطة J إلى المستوي (ABI)؟

❷ أتقعُ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AJ}$ في مستوٍ واحد؟

الحل

❶ لا، J لا تقع في في الوجه $(ABFE)$ وهو نفسه المستوي (ABI).

❷ لا، وإلا انتمت J إلى المستوي (ABI).

④ $ABCD$ رباعي وجوه. و M هي النقطة المحققة للعلاقة

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

عبِّر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$. واستنتج أنّ M تنتمي إلى المستوي (ABC).

الحل

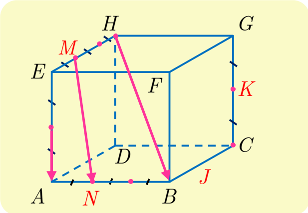
بالاستفادة من علاقة شال لدينا $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

إذن M تنتمي إلى المستوي (ABC).

⑤ $ABCDEFGH$ مكعب. فيه M نقطة تُحقّق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$، و N نقطة تُحقّق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

❶ أثبت أنَّ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

❷ أتكون الأشعة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطياً ؟

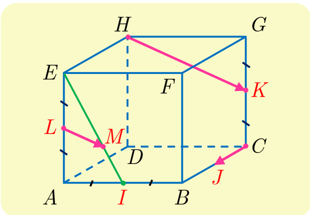


الحل

❶ بالاستناد إلى علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AN}=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{EA}=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}$$

❷ $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{EA}$ إذن $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ فالأشعة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيّاً.



⑥ $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و $[AE]$. ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{EI}$.

❶ لماذا M هي مركز ثقل المثلث AEB ؟

❷ أتكون الأشعة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيّاً ؟

الحل

❶ $[EI]$ متوسط في المثلث EAB ، والعلاقة $3\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{EI}$ تنص على أنّ النقط M تقسم هذا المتوسط بنسبة $1:2$ إذن M هي نقطة تلاقي متواسطات المثلث EAB ، أو مركز ثقله.

❷ $[BL]$ متوسط آخر في المثلث EAB . إذن

$$\overrightarrow{LM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{LB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{HG})=\frac{1}{3}\overrightarrow{HK}$$

فالأشعة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً لأنّ الشعاعين $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطان خطياً، أو

$$\overrightarrow{LM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HK}+0\,\overrightarrow{CJ}$$

تَدرَّبْ ص 24

① نتأمّل النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ و $D(-2,5,1)$ و $E(3,9,2)$ و $F(8,13,3)$ ،
في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ.

❶ احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[CD]$ و $[EF]$.

❷ احسب مركّبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$.

❸ عيّن إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

❹ جد مرّكبات كلٍّ من الشعاعين :

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} \quad \text{و} \quad \vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$$

الحل

❶ منتصف $[AB]$ هو $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right) = \left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$

منتصف $[CD]$ هو $\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right) = \left(-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

منتصف $[EF]$ هو $\left(\frac{x_E+x_E}{2},\frac{y_E+y_F}{2},\frac{z_E+z_F}{2}\right) = \left(\frac{11}{2},11,\frac{5}{2}\right)$

❷ وكذلك

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

❸ يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$ فإذا وضعنا $K(x,y,z)$
كتبت المساواة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$ بالشكل $(-x,-2-y,2-z) = (-1,-6,1)$ ومنه $K(1,4,1)$.

❹

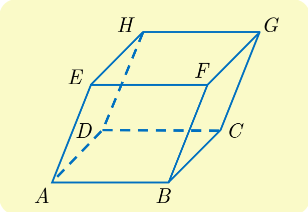
$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -3.5 \\ 5.5 \end{bmatrix}$$

② في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ. نعطى إحداثياتِ أربعٍ من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً، وهي

$A(2,1,-1)$ و $B(1,3,-1)$ و $C(-3,2,0)$ و $E(3,-1,3)$.

جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.



الحل

- لما كان $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \\ z_C-z_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي $D(-2,0,0)$.

- ولما كانت النقاط F و G و H تنتج بالترتيب من النقاط B و C و D بإجراء انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AE}=(1,-2,4)$ استنتجنا أنّ

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

أي $F(2,1,3)$ و $G(-2,0,4)$ و $H(-1,-2,4)$.

③ لدينا، في معلمٍ للفراغ، النقاط $A(3,0,-1)$ و $B(-2,3,2)$ و $C(1,2,-2)$.

❶ جد إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$.

❷ جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C.

❸ جد إحداثيات النقطة M التي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.

❹ جد إحداثيات النقطة N التي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NC}$.

الحل

❶ $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

❷ D نظيرة I بالنسبة إلى C، أي $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CD}$ ومنه

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}$$

وهي تكتب باستعمال المركّبات كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

أي $D(1.5, 2.5, -4.5)$.

❸ من $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ وباستعمال علاقة شال نستنتج أنّ $\overrightarrow{OM} = -4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$.
إذن

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أي $M(-13, 12, 2)$

❹ $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$ أي $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = 2\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{ON}\right)$ أو $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$. ومنه

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

إذن $N(-1, 4, -3)$

④ لدينا النقطتان $A\left(2, 3, -2\right)$ و $B\left(5, -1, 0\right)$. جِدْ، **إنْ أمكن**، في كل حالة، إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة.

❶ $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$ ❷ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

❸ $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ❹ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

الحل

❶ $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$ تكافئ $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$ ومنه

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \\ -6 \end{bmatrix}$$

أي $M(-4, 11, -6)$.

❷ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ تكافئ $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ وهذا تناقض، إذن لا يوجد M تحقق هذه المساواة.

❸ $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ تكافئ، $-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ أو $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$. فهي المعادلة ❶ ذاتها، وحلها $M(-4, 11, -6)$.

❹ لدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ فالمعادلة تكافئ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$، ولأن $A \neq B$ كانت مجموعة الحلول خالية.

⑤ أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة ؟

الحل

حتى تقع النقاط M و B و A على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطياً، أي أن يوجد عدد حقيقي k غير معدوم يحقق $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{AB}$ ، تكافئ هذه المساواة

$$(a-3, b-2, 1) = k(1, -1, 1)$$

ومنه $k = 1$ و $b = 1$ و $a = 4$.

⑥ أيمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطّياً ؟

الحل

يكون الشعاعان مرتبطين خطياً إذا وجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{v} = k.\vec{u}$ أي $(1,-2,a) = (2k, ka, 5k)$

ومنه نحصل على جملة المعادلات $2k = 1 ...①$ و $-2 = ka...②$ و $a = 5k...③$ ، من ① نجد $k = \frac{1}{2}$ ، نعوض في ② نجد $a = -4$ وهذه النتائج لا تحقق ③ إذن لا يمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً.

⑦ في كلٍّ من الحالات الآتية، بيّن إذا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

❶ $A(3,-1,2)$, $B(0,2,4)$, $C(2,0,-3)$,

❷ $A(-4,1,3)$, $B(-2,0,5)$, $C(0,-1,7)$,

❸ $A(1,-1,0)$, $B(1,-1,4)$, $C(1,-1,-3)$,

الحل

حتى تكون النقاط A و B و C على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطياً.

❶ $\overrightarrow{AB} = (-3,3,2)$ و $\overrightarrow{BC} = (2,-2,-7)$ المركبات غير متناسبة إذن لا تقع النقاط على استقامة واحدة.

❷ $\overrightarrow{AB} = (2,-1,2)$ ، $\overrightarrow{BC} = (2,-1,2)$ ، نلاحظ أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ إذن B منتصف $[AC]$ والنقاط واقعة على استقامة واحدة.

❸ $\overrightarrow{AB} = (0,0,4)$ ، $\overrightarrow{BC} = (0,0,-7)$ ، نلاحظ أن $\overrightarrow{BC} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$ والنقاط واقعة على استقامة واحدة.

تَدرَّبْ ص 27

① احسب نظيم $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في كل من الحالات الآتية:

❶ $\vec{u}\left(2,-2,3\right)$ و $\vec{v}\left(4,-4,-2\right)$ و $\vec{w}\left(4,1,-2\right)$.

❷ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+5\vec{k}$ و $\vec{w}=\sqrt{2}\,\vec{i}-\sqrt{3}\,\vec{j}+\vec{k}$.

الحل

❶

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$$
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{9^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6$$
$$\|\vec{w}\|=\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$$

❷

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+0}=\sqrt{13}$$
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{1+0+25}=\sqrt{26}$$
$$\|\vec{w}\|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{6}$$

② فيما يأتي، بيّن هل المثلث ABC قائم ؟ هل هو متساوي الساقين ؟ هل هو متساوي الأضلاع ؟

❶ في حالة $A(1,3,-1)$ و $B(3,6,-2)$ و $C(0,4,0)$.

❷ في حالة $A(1,3,-2)$ و $B(2,-1,0)$ و $C(6,-3,-1)$.

الحل

❶ $AB=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$ و $AC=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ و $BC=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$.
والمثلث قائم في A حسب عكس فيثاغورث وغير متساوي الساقين وغير متساوي الأضلاع لأن أضلاعه مختلفة في الطول.

❷ لدينا $AB=\sqrt{21}$ و $AC=\sqrt{62}$ و $BC=\sqrt{21}$. والمثلث غير قائم لأنه لا يحقق عكس فيثاغورث ولكنه متساوي الساقين حيث $AB=BC$ وغير متساوي الأضلاع .

③ لدينا النقطتان $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$. بيِّن أيُّ النقاط C أو D أو E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$، في حالة $C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$ و $E(3,2,1)$.

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها المسافة نفسها.

الحل

لدينا $AC = BC = \sqrt{59}$ أي C متساوية البعد عن طرفي القطعة $[AB]$ فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

وكذلك $AD = BD = \sqrt{21}$ أي D متساوية البعد عن طرفي القطعة $[AB]$ فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

وأخيراً $AE = \sqrt{8}$ و $BE = 2$ إذن $AE \neq BE$، والنقطة E لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

④ نتأمّل النقاط $A(1,1,\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O. أثبت أنَّ المثلث ABC مثلّثٌ قائم ومتساوي الساقين.

الحل

نلاحظ أنّ $OA = OB = 2$ وأنّ

$$AB^2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 8 = OA^2 + OB^2$$

إذن OAB مثلث قائم في O ومتساوي الساقين. ولأنّ C نظيرة A بالنسبة إلى O استنتجنا أنّ B تقع على محور $[AC]$ فالمثلث ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B. وهو قائم لأنّ $OA = OB = OC$. (المتوسط يساوي نصف طول الضلع المقابل) إذن ABC قائم ومتساوي الساقين.

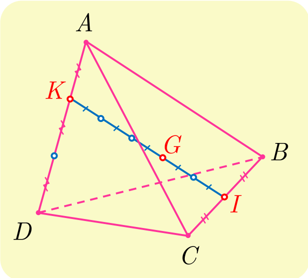
⑤ نتأمّل النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(2,8,-1)$ و $C(7,3,-1)$ و $D(1,-3,3)$ و $E(5,3,3)$. أثبت أنَّ B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A.

الحل

نحسب الأطوال AB و AC و AD و AE، فنجدها جميعاً تساوي 5. فهي تقع على الكرة التي مركزها A ونصف قطرها 5.

تَدرَّبْ ص31

① بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور، عيّن الأعداد الأربعة a و b و c و d ليتحقق ما يأتي :



❶ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,a) و (D,d).

❷ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,b) و (C,c).

❸ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d).

الحل

❶ من الرسم نجد أن $\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{KA}=\vec{0}$ إذن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,1)$. ومنه نستنتج أنّ $a=2d\neq 0$.

❷ I منتصف $[BC]$ فهي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$. إذن $c=b\neq 0$.

❸ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(K,2)$ إذن $\dfrac{c+b}{3}=\dfrac{a+d}{2}$ ومنه $9d=4b$.
فإذا اخترنا $d=4$ مثلاً كي لا نحصل على أوزان كسرية، وجدنا $(a,b,c,d)=(8,9,9,4)$، وبالطبع أي حل آخر ينتج عن ضرب جميع هذه الأوزان بالعدد غير المعدوم نفسه هو حلٌّ مقبول.

② عين مركز ثقل المثلث ABC، في حالة $A\left(-4,-1,2\right)$ و $B\left(-2,1,0\right)$ و $C\left(6,3,-5\right)$.

الحل

مركز ثقل المثلث ABC هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ ومنه

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{x_A+x_B+x_C}{3}=0 \\ y_G &= \frac{y_A+y_B+y_C}{3}=1 \\ z_G &= \frac{z_A+z_B+z_C}{3}=-1 \end{aligned}$$

ومنه $G(0,1,-1)$.

③ لدينا ثلاث نقاط في الفراغ A و B و C.

❶ أثبت وجود نقطة وحيدة M تُحقّق $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

❷ ما القول عن M عندما تكون A و B و C على استقامة واحدة ؟

❸ ما القول عن الرباعي $ACBM$ عندما لا تقع A و B و C على استقامة واحدة؟

الحل

❶ الشرط $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$. إذن M هي صورة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$.

❷ إذا انتمت A إلى المستقيم (BC) انتمت صورتها M وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ إلى المستقيم (BC) نفسه، ومن ثم وقعت النقاط M و A و B و C على استقامة واحدة.

❸ نستنتج من العلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$ عندما لا تقع النقاط A و B و C على استقامة واحدة أنّ $ACBM$ متوازي الأضلاع.

④ ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1. لتكن I و J و K و L النقاط المعرفة بالعلاقات : $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CK}=k\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CL}=k\overrightarrow{CB}$.

❶ أثبت أنَّ $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$ واستنتج أنَّ النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

❷ ما طبيعة الشكل الرباعي $IJKL$؟

الحل

❶ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=k\overrightarrow{BD}...①$

$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CK}=-k\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{CD}=k(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=k\overrightarrow{BD}...②$

من ①و ② نجد $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$ أي $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ أي إن المستقيم (IJ) يوازي (LK) النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

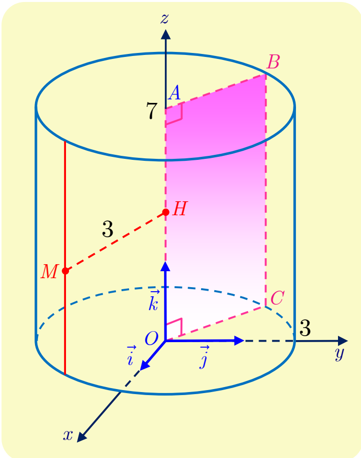
❷ بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ فإن الشكل $IJKL$ متوازي أضلاع.

أنشطة

نشاط 1 معادلة أسطوانة ومعادلة مخروط

❶ معادلة أسطوانة

لتكن A النقطة التي إحداثياتها $(0,0,7)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نتأمل **الأسطوانة المولّدة** من دوران الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حول المستقيم (OA) حيث $AB=3$. ولتكن M نقطة متحولة من الأسطوانة، و H مسقطها القائم على القطعة المستقيمة $[OA]$.



① نفترض أنّ $M(x,y,z)$. ما إحداثيات النقطة H؟ أثبت أنَّ إحداثيات M تُحقّق العلاقتين:

$0\le z\le 7$ و $x^2+y^2=9$.

② بالعكس، إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطةً من الفراغ تُحقق إحداثياتها $x^2+y^2=9$ و $0\le z\le 7$.

فأثبت أنّ $MH=3$، واستنتج أنَّ M تقع على الأسطوانة.

النتيجة : معادلة هذه الأسطوانة هي $x^2+y^2=9$ و $0\le z\le 7$.

③ أيُّ النّقاط الآتية تقع على الأسطوانة $D(3,0,3)$ و $E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$ و $F(1,3,1)$؟

④ a. جد معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{j})$ وقاعدتها الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

b. أعد السؤال ④ a. في حالة مركز قاعدة الأسطوانة هو النقطة $Q(0,8,0)$.

⑤ جد معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ ومركز قاعدتها $T\left(3,0,0\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

⑥ صِفْ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققّ إحداثياتها العلاقات

$1\le z\le 4$ و $x^2+y^2=25$.

الحل

① إن احداثيات H هي $(0,0,z)$ لأنها نقطة من المحور OZ. عندما تتحول M على سطح الأسطوانة فإن المسافة MH تبقى ثابتة وقيمتها (3)، وهذا يكافئ $\sqrt{x^2+y^2+0^2}=3$ أو $x^2+y^2=9$ وبما أن M نقطة من الأسطوانة المولدة بالضلع $[BC]$ فإن H نقطة من المسقط القائم لـ $[BC]$ على OZ أي H نقطة من $[OA]$ وبالتالي $z_O \leq z \leq z_A$ وهذا يكافئ أن $0 \leq z \leq 7$.

② لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ تحقق $x^2+y^2=9$ و $0 \leq z \leq 7$. إنّ مسقط M على OZ هو $H(0,0,z)$ ويحقق $MH^2=x^2+y^2+0=9$ أي $MH=3$ وبالتالي فإن M تقع الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حيث $B=(x,y,7)$ و $C(x,y,0)$، في أحد أوضاعه عندما يدور حول (OA). إذن M نقطة من الأسطوانة، وأن معادلة الأسطوانة هي $x^2+y^2=9$ و $0 \leq z \leq 7$.

③ النقطة D تحقق $x_D^2+y_D^2=9+0=9$ وتحقق $0 \leq z_D=3 \leq 7$ ومنه فإن D تقع على الأسطوانة (لأنها تحقق معادلة الأسطوانة) .

النقطة E تحقق $x_E^2+y_E^2=6+3=9$ كما إن $0 \leq z_E=4 \leq 7$ وبالتالي E تقع على الأسطوانة .

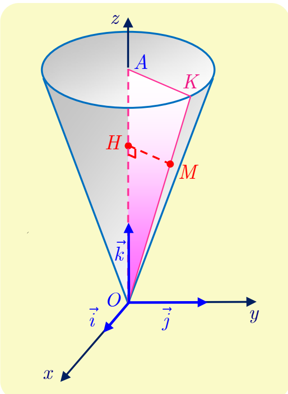
النقطة F لا تقع على الأسطوانة لأن $x_F^2+y_F^2 \neq 9$.

④ a. معادلة الأسطوانة هي $x^2+z^2=4$.

b. معادلة الأسطوانة هي $x^2+z^2=4$.

⑤ معادلة الأسطوانة هي $y^2+z^2=6$.

⑥ مجموعة النقاط M هي أسطوانة محورها OZ ونصف قطرها (5) ومركزي قاعدتيها هما $O(0,0,1)$ و $O'(0,0,4)$.



❷ معادلة مخروط

لتكن A النقطة التي إحداثياتها $(0,0,5)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لنتأمل المخروط المولّد من دوران الضلع $[OK]$ من المثلث OAK حول (OA) مع $AK=2$.

① لتكن M نقطة من المخروط، و H مسقطها القائم على القطعة $[OA]$.

a. أثبت أنَّ $\frac{MH}{OH}=\frac{2}{5}$، ثمّ $MH^2=\frac{4}{25}OH^2$.

b. اكتب المساواة السابقة بدلالة إحداثيات M ولتكن (x,y,z). وأثبت أنّه إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطةً من المخروط، كان $x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ و $0 \leq z \leq 5$.

② بالعكس، لتكن $M(x,y,z)$ نقطةً من الفراغ تُحقق إحداثياتها العلاقات

$x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ و $0\le z\le 5$.

أثبت أنه إذا كان $z\neq 0$، كان $\frac{MH}{OH}=\frac{2}{5}$. واستنتج أنَّ M تقع على المخروط. لا تنسَ حالة $z=0$.

النتيجة : معادلة هذا المخروط هي $x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ مع $0\le z\le 5$.

③ عيّن من بين النقاط الآتية، تلك التي تقع على المخروط، مبرّراً إجابتك :

$Q(2,0,5)$ و $R(-2,1,5)$ و $S(1,1,3)$ و $T(2,2\sqrt{3},10)$

④ اكتب معادلةً للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3.

الحل

① .a المثلثان OAK و OHM متشابهان وبالتالي فإن أضلاعهما متناسبة ومنه $\frac{OH}{OA}=\frac{MH}{AK}$ وهذا يكافئ $\frac{OH}{5}=\frac{MH}{2}$ وتكافئ $\frac{2}{5}=\frac{MH}{OH}$ وبالتالي $MH=\frac{2}{5}OH$ ومن ثم $MH^2=\frac{4}{25}OH^2$

.b إذا فرضنا $M(x,y,z)$ فإن $H(0,0,z)$ ومنه $OH^2=z^2$ ، $MH^2=x^2+y^2$ وبالتالي فالعلاقة $MH^2=\frac{4}{25}OH^2$ تكافئ $x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2$ وتكافئ $x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ مع $0\le z\le 5$

② لدينا $M(x,y,z)$ و $H(0,0,z)$ و $O(0,0,0)$ ومنه $MH=\sqrt{x^2+y^2}$ و $OH=z$ (لأن $z\ge 0$) وبالتالي عندما $0<z<5$ فإن $\frac{2}{5}=\frac{\frac{2}{5}z}{z}=\frac{\sqrt{\frac{4}{25}z^2}}{z}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\frac{MH}{OH}$ وبالتالي فإن $\frac{AK}{OA}=\frac{MH}{OH}$ أو $\frac{OH}{OA}=\frac{MH}{AK}$ وبالتالي فلابد أن النقطة M تقع على الضلع $[OK]$ وهذا يعني أنها تقع على المخروط .

وفي حالة $z=0$ فإن H تنطبق على O وهذا بدوره يعني انطباق M على O و O هي نقطة من المخروط وضوحاً. نستنتج أنَّ معادلة المخروط هي $x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ مع $0\le z\le 5$

③ نلاحظ أن $0\le z_Q=5\le 5$ و ${x_Q}^2+{y_Q}^2-\frac{4}{25}{z_Q}^2=0$ ومنه Q نقطة من المخروط ، بينما R و S و T لا تقع على المخروط .

④ معادلة المخروط هي $y^2+z^2-\frac{9}{16}x^2=0$ مع $0\le x\le 4$.

تمرينات ومسائل

1 $ABCD$ رباعي وجوه. فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$.

① املأ الفراغ : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\cdots+\overrightarrow{CD}$. واستنتجْ أنَّ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

② بسِّطْ كلّاً من $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$. استنتج أنَّ

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$$

③ لماذا $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$؟ استنتجْ أنَّ

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

④ لتكن K منتصف $[AD]$، و L منتصف $[BC]$. أثبت أنّ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
استنتج أنَّ $ILJK$ متوازي أضلاع.

الحل

① استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$، وبتطبيقها مرة ثانية نجد $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$ ومنه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

② إنّ $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$ وبجمع العلاقتين طرفا لطرف نجد:

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$

فينتج $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$.

③ هذه قاعدة متوازي الأضلاع في جمع الأشعة ومنه نستنتج

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}=2(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ})=\vec{0}$$

④ $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ وبالمثل نجد $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. إذن $\overrightarrow{LJ}=\overrightarrow{IK}$
والرباعي $ILJK$ متوازي الأضلاع.

2 $ABCD$ رباعي وجوه. وضِّعْ على شكلٍ النقاط الآتية:

① I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$.

② J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,2)$ و $(D,1)$.

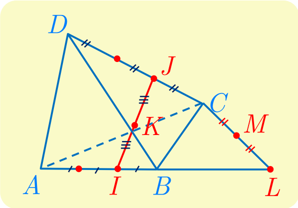
③ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$.

④ L مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$.

⑤ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$.

⑥ N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$.

الحل

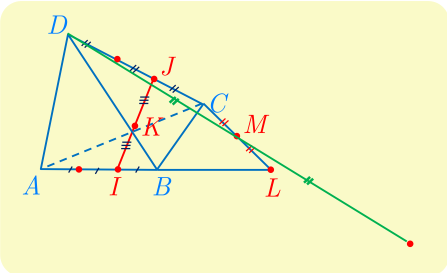


① بما أنّ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$ فيتحقق $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

② بما أنّ J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,1)$ و $(C,2)$ فيتحقق $\overrightarrow{JD}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

③ بما أنّ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1)$ و $(C,2)$ و $(A,1)$ و $(B,2)$ فينتج أنّ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(J,3)$ **(حسب الخاصة التجميعية)** ومنه K منتصف $[JI]$.

④ بما أنّ L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-2)$ فيتحقق $\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{LB}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AB}$.



⑤ بما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ فينتج أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,-1)$ و $(C,-1)$ **(حسب الخاصة التجميعية)** ومنه M منتصف $[CL]$.

⑥ بما أنّ N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$ فينتج أنّ N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(M,-2)$ و $(D,1)$ ومنه $\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DM}$.

3 في المقولات الآتية، بيّن الصحيح من الخطأ معللاً إجابتك.

① ABC مثلّث. مهما كانت D من الفراغ كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً.

② $ABCD$ رباعي الوجوه. لتكن I النقطة المعرّفة بالعلاقة $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. عندئذ تقع I على أحد حروف رباعي الوجوه.

③ نتأمّل الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$. نفترض أنّ أي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً، عندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطياً.

④ **النقاط** $A(5,1,3)$ و $B(2,-\sqrt{5},-2)$ و $C(3,-3,3)$ **متساوية البعد عن** $K(2,0,1)$.

⑤ النقاط $C(4,0,0)$ و $D(0,-2,0)$ و $E(1,2,6)$ و $F(5,1,1)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة التي طرفيها $A(4,-2,2)$ و $B(2,2,0)$.

الحل

① المقولة خطأ، فإذا كانت D في المستوي (ABC) كانت الأشعة مرتبطة خطياً، أما إذا كانت D خارج المستوي (ABC) كانت الأشعة غير مرتبطة خطياً.

② المقولة صحيحة لأنّه بالاستفادة من علاقة شال ومن العلاقة المعطاة نجد

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IB} &= 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}_{\vec{0}} = \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

إذن I منتصف الحرف BD.

③ المقولة خطأ إذا قد تقع النقطة D في المستوي ABC وعندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيّاً.

④ المقولة صحيحة ، لنحسب الأطوال AK, BK, CK فنجد $AK = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$ و $BK = \sqrt{0+5+9} = \sqrt{14}$ و $CK = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ إذن النقطة K متساوية البعد عن النقاط A و B و C .

⑤ المقولة ليست صحيحة ، لأنّ أي نقطة من المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ تكون متساوية البعد عن طرفيها، ولكن $\overrightarrow{EA}(3,-4,-4)$ ومنه $EA = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$ ، ولدينا $\overrightarrow{EB}(1,0,-6)$ ومنه $EB = \sqrt{1+0+36} = \sqrt{37}$. إذن $EA \neq EB$.

لنتعلّم البحث معاً

4 إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد

نتأمّل، في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط الآتية :

$A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,5,0)$ و $D(-3,-5,6)$ و $E(3,1,2)$.

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد $\mathcal{P}$ ، وتبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$.

نحو الحلّ

☝ غيرُ مجدٍ هنا رسمُ شكل. إذ تكمن الفائدة الوحيدة من الرسم في العمل على إظهار نقاط تقع على استقامة واحدة. ولكن قد تبدو النقاط في شكلٍ فراغي على استقامة واحدة دون أن تكون كذلك. في حين تدعونا معرفة إحداثيات النقاط المفروضة إلى التعامل مع المسألة **تحليلياً**.

يتعلق الأمرُ بمعرفة إذا كانت النقاط A و B و C و D واقعةً في مستوٍ واحد. لهذا، نتحرّى وجود شعاعين غير مرتبطين خطياً من بين الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

1. احسب مركّبات كلٍّ من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.
2. استنتج أنَّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، على سبيل المثال، غير مرتبطين خطياً.

استناداً إلى المبرهنة 4، يؤول إقرار انتماء نقطة D إلى المستوي (ABC)، إلى وجود عددين حقيقيين a و b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

1. اكتب المساواة الشعاعية السابقة بلغة الإحداثيات، وتحقّق أنك ستحصل على جملةٍ من ثلاث معادلات خطيّة بالمجهولين a و b هي:

$$\begin{cases} -a + 3b = -5 \\ -2a + 5b = -5 \\ -b = 5 \end{cases}$$

2. لحل مثل هذه الجملة من المعادلات، اختر جملة من معادلتين من هذه المعادلات الثلاث وحلها. هل العددان a و b اللذان وجدتهما حلولٌ للمعادلة الثالثة؟ أكمل.
3. تصرَّف بالمثل مع النقطة E.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أن

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-2,0) \text{ و } \overrightarrow{AC} = (3,5,-1) \text{ و } \overrightarrow{AD} = (-5,-5,5)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما ليست متناسبة إذن A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستوياً (ABC) وتكون D نقطة من المستوي (ABC) اذا فقط واذا وجد عددان a و b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ أي

$$(-5,-5,5) = a(-1,-2,0) + b(3,5,-1)$$

أي $(-5,-5,5) = (-a+3b,-2a+5b,-b)$ ومنه

$$\begin{cases} -a + 3b = -5 & ① \\ -2a + 5b = -5 & ② \\ -b = 5 & ③ \end{cases}$$

ومنه $b = -5$ وبالتعويض في ① نجد $a = -10$ ونلاحظ أن حل المعادلتين ① و ③ يحقق المعادلة ② إذن $\overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$ وبالتالي فالأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً والنقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد.

لنبحث الآن عن عددين α و β بحيث يكون $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ أي

$$(1,1,1)=\alpha(-1,-2,0)+\beta(3,5,-1)$$

ومنه

$$\begin{cases}-\alpha+3\beta=1 & ①\\ -2\alpha+5\beta=1 & ②\\ -\beta=1 & ③\end{cases}$$

من ③ تكون $\beta=-1$ وبالتعويض في ② نجد $\alpha=-3$ ونلاحظ أن الحل الناتج $(\alpha=-3,\beta=-1)$ لا يحقق المعادلة ① ومنه فالأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مرتبطة خطياً والنقطة E لا تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$.

5 إثبات تقاطع مستقيمين

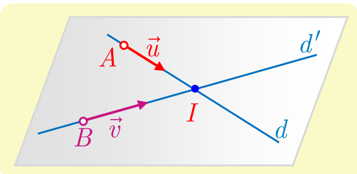
في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$، والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$. d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجَّه بالشعاع $\vec{u}$، و d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجَّه بالشعاع $\vec{v}$. أثبت أنَّ المستقيمين d و d' متقاطعان، ثمَّ عيّن I نقطة تقاطعهما.

نحو الحلّ

- ليس مفيداً، هنا، رسمُ شكل بالنقاط والأشعة والمستقيمات المفترضة. إذ قد يبدو مستقيمان في الفراغ متقاطعين، دون أن يكونا كذلك، لأنهما غير واقعين في مستوٍ واحد.

يتعلَّق الأمر بإثبات تقاطع مستقيمين من الفراغ، إذن يجب إثبات أنّهما غير متوازيين ويقعان في مستوٍ واحد. وتدعونا معرفة إحداثيات النقاط ومركّبات الأشعة إلى التعامل مع المسألة **تحليلياً**.

1. أثبت أنَّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.
2. ما قولك بشأن المستقيمين d و d'؟



- يبقى إثبات وقوع المستقيمين d و d' في مستوٍ واحد. المستقيم d والنقطة B يعينان مستوياً $\mathcal{P}$ طالما B لا تقع على d. فلإثبات أنَّ d و d' يقعان في مستوٍ واحد، يكفي إثبات أنَّ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطيّاً.

1. تحققْ، بذكر المبرهنة ذات الصلة، أنَّ المسألة تؤول إلى إثبات وجود عددين حقيقيين a و b يحققان $\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v}$.
2. اكتب المساواة السابقة بلغة الإحداثيات، فتحصل على جملةٍ من ثلاث معادلات خطيّة بمجهولين.

3. اختر اثنتين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حل الجملة المؤلّفة منهما. أيكون العددان الحقيقيان a و b اللذان وجدتهما حلولاً للمعادلة الثالثة؟ أتممْ.

لحساب إحداثيات $I(x,y,z)$، نقطة تقاطع المستقيمين d و d'. نسعى، بالتعامل شعاعياً، إلى التوثّق من أنَّ I تقع على كلٍّ من d و d'.

1. تحقّق من وجود عددين حقيقيين α و β يحققان $\overrightarrow{AI} = \alpha\vec{u}$ و $\overrightarrow{BI} = \beta\vec{v}$.
2. اكتب هاتين المساواتين بلغة الإحداثيات لتستنتج α و β ومن ثمَّ إحداثيات النقطة I.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. الشعاعان $\vec{u}(1,0-2)$ و $\vec{v}(2,1-3)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة.
2. لما كان الشعاعان غير مرتبطين خطياً كان المستقيمان d و d' غير متوازيين.

النقطة B لا تقع على المستقيم d فرضاً، فالمستقيم d والنقطة B يعينان مستوياً $\mathcal{P}$. ولكي نثبت أن d و d' يقعان في مستوٍ واحد، نثبت أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

1. لنثبت أنّه يوجد عددان حقيقان a و b يحققان : $\overrightarrow{AB}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$.
2. العلاقة الشعاعية تكافئ : $(0,-2,-2)=a(1,0-2)+b(2,1-3)$. ومنه جملة المعادلات

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 0+\ b=-2 \\ -2a-3b=-2 \end{cases}$$

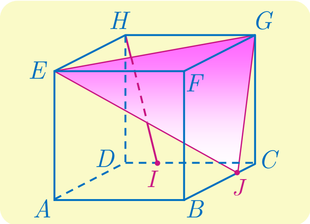
3. بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية نجد $b=-2$ و $a=4$، وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد أنها محققة. إذن يقع المستقيمان d و d' في مستوٍ واحد. وهما متقاطعان في نقطة I لأننا أثبتنا أنّ d و d' غير متوازيين .

لحساب إحداثيات $I(x,y,z)$، نستفيد من انتماء النقطة I إلى كلٍ من d و d' .

1. **لأنّ** $I\in d$ **يوجد عدد حقيقي** α **يحقق** $\overrightarrow{AI}=\alpha\cdot\vec{u}$. **ولأن** $I\in d'$ **يوجد عدد حقيقي** β **يحقق** $\overrightarrow{BI}=\beta\cdot\vec{v}$.
2. نستنتج إذن أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}$ وهذا يقتضي أن يكون $\alpha=4$ و $\beta=2$ استناداً إلى الفقرة السابقة. إذن $\overrightarrow{AI}=4\vec{u}$. أو $(x-3,y+1,z-1)=4(1,0,-2)$. ومنه نجد أن $I(7,-1,-7)$.

6 التوازي في الفراغ

لنتأمّل المكعب $ABCDEFGH$. النقطة I من الحرف $[CD]$ تُحقّق المساواة $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة J من $[BC]$ تحقّق المساواة $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. أثبت أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).



نحو الحلّ

- لا يُظهرُ الشكل مستقيماً من المستوي (EGJ) موازياً (HI). إذ لو كان مستقيمٌ من المستوي (EGJ) موازياً (HI)، لتأكّد لنا أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ). لنفكرْ إذن بالتعامل مع المسألة تحليلياً. نختار $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ معلماً للفراغ، لأنّه من السهل تعيين إحداثيات نقاط الشكل في هذا المعلم. عيّن في هذا المعلم إحداثيات النقاط G,E,J,I,H.
- لإثبات أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)، باستعمال الأشعة، يكفي، على سبيل المثال، إثبات أنَّ الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ واقعة في مستوٍ واحد.

1. أثبت أنَّ هذا يقودنا إلى إثبات وجود عددين حقيقيين x و y يُحقّقان $\overrightarrow{HI}=x\overrightarrow{EG}+y\overrightarrow{EJ}$
2. اكتب هذه المساواة الشعاعية بلغة الإحداثيات: ستحصل على جملةٍ من ثلاث معادلات بمجهولين.
3. اختر اثنتين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حل الجملة المؤلّفة منهما. هل العددان الحقيقيان x و y اللذان وجدتهما حلول للمعادلة الثالثة؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

حلٌّ آخر

فيما سبق، لم نسعَ إلى إظهار مستقيمٍ في المستوي (EGJ) يوازي (HI)، فلجأنا إلى التعامل مع الإحداثيات. ولكنّ دراسة تقاطع المكعب مع المستوي (EGJ)، تظهرُ مستقيماً من هذا القبيل.
المستويان (EFG) و (ABC) متوازيان، والمستوي (EGJ) يقطعهما بفصلين مشتركين متوازيين.

1. ارسم الفصل المشترك للمستويين (EGJ) و (ABC)، ولتكن K نقطة تقاطعه مع (AB).
   بيّن لماذا $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ؟ أثبت أنّ $\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{HI}$.
2. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (HI) و (EK)؟ وكذلك بشأن المستقيم (HI) والمستوي (EGJ) ؟

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ نختار $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ معلماً في الفراغ ، فنجد إحداثيات النقاط G,E,J,I,H :

$$G(1,1,1),E(0,0,1),J(1,\tfrac{3}{4},0),I(\tfrac{1}{4},1,0),H(0,1,1)$$

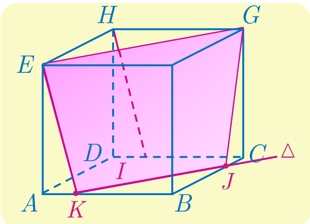
✌ 1. لنثبت أنّ الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ واقعة في مستوٍ واحد ، أي نثبت وجود عددين x و y يحققان العلاقة ① $\overrightarrow{HI}=x\,\overrightarrow{EG}+y\,\overrightarrow{EJ}$.

2. لدينا $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{4},0,-1)$ و $\overrightarrow{EG}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{EJ}(1,\frac{3}{4},-1)$ وبالتعويض في العلاقة ① نجد:

$$\begin{cases} x+y &= \frac{1}{4} & (1)\\ x+\frac{3}{4}y &= 0 & (2)\\ 0-y &= -1 & (3)\end{cases}$$

3. وبحل المعادلتين الأولى والثانية نجد أنّ $y=1$ و $x=-\frac{3}{4}$ ومن المعادلة الثالثة لدينا $y=1$ وهذا يوافق الحل الناتج، إذن أصبح لدينا $\overrightarrow{HI}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$ فالأشعة $\overrightarrow{EJ}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{HI}$ تقع في مستوٍ واحد ومنه (EGJ) يوازي (HI).

حلٌّ آخر:

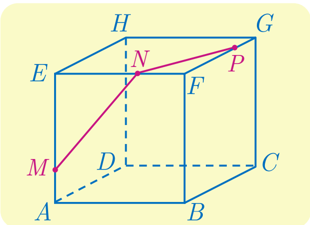


1. المستويان (EFG) و (ABC) متوازيان قطعناهما بمستوٍ (EGJ) فهو يحدد عليهما فصلين مشتركين متوازيين. وبالتالي يوازي (EG) Δ، حيث Δ مستقيم مار من J ويوازي (EG) أي يوازي (AC) ، ومنه Δ يقطع AB في نقطة K حيث $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

لدينا إذن $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$ ، إذن $\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{DI}-\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{EK}$.

2. نستنتج إذن أنّ $(HI)\parallel(EK)$، ولكنّ (EK) محتوى في المستوي (EJK) ومنه (HI) يوازي (EGJ).

7 مقطعُ مكعب بمستوٍ



$ABCDEFGH$ مكعب. M و N و P ثلاث نقاط من الأحرف $[AE]$ و $[EF]$ و $[FG]$ بالترتيب، كما في الشكل المجاور. يُطلب إيجاد مقطع المكعب بالمستوي (MNP).

نحو الحلّ

☝ نريد تعيين تقاطع المستوي (MNP) مع وجوه المكعب. ولكن بمَ نبدأ؟ نعلمُ أنّه عندما يقطع المستوي (MNP) وجهين متقابلين من المكعب، وهما في مستويين متوازيين، يكون الفصلان المشتركان الناتجان متوازيين.

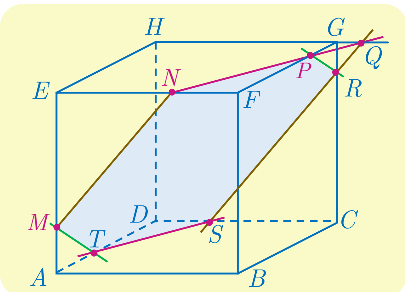
1. أيُّ وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع (MNP) ويوازي (MN)؟
2. أيُّ وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع (MNP) ويوازي (NP)؟
3. أيَّ وجه تختار إذن لتتعامل معه؟

✌ لنبدأ، على سبيل المثال، بالبحث عن تقاطع المستوي (MNP) مع الوجه $(DCGH)$. لإيجاد الفصل المشترك لهذين المستويين، يكفي إيجاد نقطة مشتركة بينهما. لنبحث إذن عن نقطة من هذا القبيل.

1. لماذا نقطة تقاطع (PN) و (HG) ملائمة؟ ارمزْ إلى تلك النقطة بالرمز Q.
2. المستقيم المار بالنقطة Q موازياً المستقيم (MN)، يقطع (CG) في R ويقطع (DC) في S. حدِّدْ الفصل المشترك للمستوي (MNP) والوجه $(DCGH)$.

1. لِماذا يفيد المستقيم المار بالنقطة S موازياً (PN)، في تحديد الفصل المشترك للمستوي (MNP) والوجه $(ABCD)$؟ لتكن T نقطة تقاطعه مع $[AD]$.
2. ما الفصل المشترك للمستوي (MNP) مع كلٍّ من الوجهين $(BCGF)$ و $(ADHE)$؟

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.



الحل

1. (MNP) يقطع $(DCGH)$ بفصل مشترك يوازي MN.
2. (MNP) يقطع $(ABCD)$ بفصل مشترك يوازي NP.
3. نختار مثلاً $(DCGH)$.

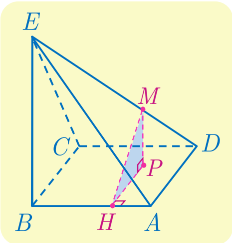
✌ لتعيين الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(DCGH)$ نحتاج إلى نقطة مشتركة بينهما. لتكن Q نقطة تقاطع المستقيمين (HG) و (PN) فهي نقطة مشتركة بين المستويين (MNP) و $(DCGH)$. فيكون الفصل المشترك المطلوب هو المستقيم المار بالنقطة Q ويوازي (MN)، وهو يقطع (CG) في R، ويقطع (CD) في S، فالفصل المشترك هو (SR).

S نقطة مشتركة بين المستويين (MNP) و $(ABCD)$ فالمستقيم المار بالنقطة S موازياً (NP) هو الفصل المشترك للمستويين السابقين فيقطع (AD) في T، فالفصل المشترك هو (ST).

2. الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(BCGF)$ هو المستقيم (PR).

الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(ADHE)$ هو المستقيم (MT).

8 حسابُ مسافة



$ABCDE$ هرمٌ رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$. M نقطة من القطعة $[ED]$ تُحقّق $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$. لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB). احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$.

نحو الحلّ

☝ تدعونا مختلف أوضاع التعامد والتساوي في الشكل إلى التعامل تحليلياً مع هذا التمرين. يحضرنا، هنا، المعلم المتجانس $(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{BA} = 4\vec{i}$ و $\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}$ و $\overrightarrow{BE} = 4\sqrt{2}\vec{k}$.

1. جد، في هذا المعلم، إحداثيات كلٍّ من النقطتين D و E.
2. حدِّد إحداثيات النقطة M.

✌ P هي المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$، فتُستنتج إحداثيات P، بسهولة، من إحداثيات النقطة M. وبالمثل، تُستنتج إحداثيات النقطة H من إحداثيات P.

1. حدِّد إحداثيات كلّ من النقطتين P و H.
2. احسب طول $[MH]$.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ لدينا المعلم المتجانس $(B; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ عندئذٍ تكون:

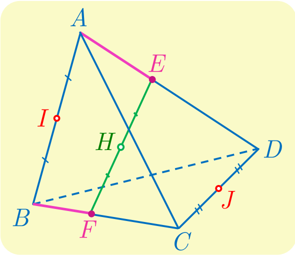
1. إحداثيات $D(4,4,0)$ و $E(0,0,4\sqrt{2})$.
2. نفترض النقطة $M(x,y,z)$ من ED تحقق $3\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE}$ ومنه

$3(x-4,y-4,z-0)=(-4,-4,4\sqrt{2})$ فينتج $z = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ و $y = \frac{8}{3}$ و $x = \frac{8}{3}$ ومنه $M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

✌ 1. P هي المسقط القائم للنقطة M على $(ABCD)$ إذن $P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$ فيكون $H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$.

2. حسب فيثاغورث في المثلث MPH القائم في P ، حيث $MP = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ و $PH = \frac{8}{3}$ نجد

$$MH = \sqrt{\frac{64}{9}+\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$



9 $ABCD$ رباعي وجوه، و a عددٌ حقيقي. I و J هما، بالترتيب، منتصفا $[AB]$ و $[CD]$. و E و F نقطتان تحقّقان، العلاقتين: $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

أثبت أنَّ I و J و H تقع على استقامة واحدة.

نحو الحلّ

نهدف إلى إثبات وقوع ثلاث نقاط من الفراغ على استقامة واحدة. تدعونا الفرضيات التي تحدد نقاط الشكل إلى استعمال مركز الأبعاد المتناسبة أداةً للإثبات. يكفي إذن، على سبيل المثال، إثبات أنَّ H هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين I و J. وقد أسندنا إليهما ثقلين مناسبين.

1. تيقّن أنَّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a)$ و (D,a)، وأنَّ F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-a)$ و (C,a).
2. بالاستفادة من الخاصّة التجميعيّة، أثبت أنَّ H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ و (C,a) و (D,a).
3. استنتج أنَّ النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لإثبات أنّ النقاط I و J و H على استقامة واحدة ، يكفي أن نثبت أنّ H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين I و J وقد أسند لها ثقلين مناسبين.

1. من الفرض لدينا $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$ ومنه $(1-a)\overrightarrow{EA} + a\overrightarrow{ED} = \vec{0}$، إذن E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a)$ و (D,a).

ومن الفرض لدينا $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$ ومنه $(1-a)\overrightarrow{FB} + a\overrightarrow{FC} = \vec{0}$، إذن F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-a)$ و (C,a).

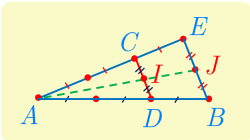
2. ولما كان H منتصف $[FE]$ كان H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,1)$ و $(F,1)$. وحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ و (C,a) و (D,a).
3. ولما كان I منتصف $[AB]$ كان I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ ولما كان J منتصف $[CD]$ كان J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,a) و (C,a). وحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ و (C,a) و (D,a)، هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2a)$ و $(J,2a)$، فالنقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة وهو المطلوب.

10 A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ. و D و E نقطتان تحققان:
$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$.

① أثبت أنَّ النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوٍ واحد.

② لتكن I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$. أثبت أنَّ A و I و J تقع على استقامة واحدة.

الحل



① لدينا $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ إذن النقاط A و B و D تقع على استقامة واحدة ومنه D تقع على المستقيم (AB) المحتوى في (ACB). وبالمثل من العلاقة $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$ نجد أن E تقع على المستقيم (AC) المحتوى في (ACB). وبالتالي النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوٍ واحد هو (ACB).

② I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$، إذن

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AE} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right) = \tfrac{4}{3}\overrightarrow{AJ}\end{aligned}$$

ومنه $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$، فالنقاط أنَّ A و I و J تقع على استقامة واحدة.

11 $ABCD$ رباعي وجوه. و E و F و G هي نظائر A بالنسبة إلى منتصفات $[BC]$ و $[CD]$ و $[DB]$ بالترتيب.

① أثبت أنَّ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.

② استنتج أنَّ للقطعتين $[DE]$ و $[FB]$ المنتصف نفسه.

③ أثبت أنَّ المستقيمات (BF) و (DE) و (CG) متلاقية في نقطة واحدة.

الحل

① استناداً إلى خواص متوازي الأضلاع $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. ومنه باستعمال علاقة شال:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF}$$

② إذن $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF}$، والرباعي $BEFD$ متوازي الأضلاع، فقطراه $[DE]$ و $[FB]$ متناصفان.

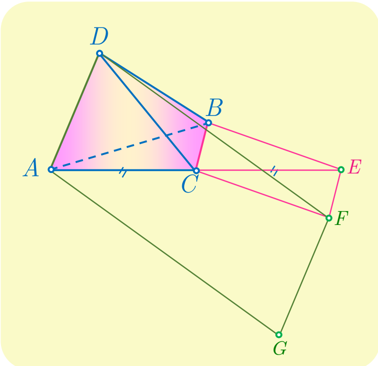
③ نجد بالمثل أنّ $[DE]$ و $[CG]$ متناصفان.

12 $ABCD$ رباعي وجوه. و E هي نظيرة A بالنسبة إلى C، و F و G هما النقطتان اللتان تجعلان $EBCF$ و $FDAG$ متوازيي الأضلاع.

① أثبت أنَّ $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$.

② استنتج أنَّ $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$، ثُمَّ أنَّ النقاط B و C و D و G تقع في مستوٍ واحد.

الحل



① عملاً بالفرض يمكن أن نكتب

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$
$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}.$$

② لدينا $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$ لأن C منتصف $[AE]$ واستناداً إلى ① نجد

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$$
$$= 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$$

أي كُتب الشعاع $\overrightarrow{DG}$ عبارة خطية بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DB}$ فالنقاط B و C و D و G تقع في مستوٍ واحد.

13 نتأمّل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$.

① أثبت أنَّ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النقطةُ $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC)؟

③ ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد؟

الحل

①لدينا في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$ ، فالشعاعان غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة، والنقاط A و B و C ليست على استقامةٍ واحدة ، فهي تشكل مستوياً.

② تنتمي $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان العلاقة :

$\overrightarrow{AM} = a\cdot\overrightarrow{AB} + b\cdot\overrightarrow{AC}$، أي $(m-3,-1,2) = a(-2,0,-1) + b(0,-1-3)$ ومنه

$$\begin{cases} m-3 = -2a \\ -1 = -b \\ 2 = -a-3b \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد $b = 1$ ، و $a = -5$ ومن ثَمّ $m = 13$.

③ تقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد إذا وجد عددان حقيقيان α و β يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}$ ومنه

$$\begin{cases} x-3=-2\alpha & ① \\ y-2=-\beta & ② \\ 2=-\alpha-3\beta & ③ \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد $\beta=-y+2$ و $\alpha=\dfrac{-x+3}{2}$ وبالتعويض في ③ نجد $x+6y=19$.

14 مجموعة نقاط

لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققُ إحداثياتها العلاقة : $x-2y+3z-5=0$.

① أثبت أنَّ النقاط $A(7,1,0)$ و $B(5,0,0)$ و $C(2,0,1)$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{E}$.

② أثبت أنَّ النقاط A و B و C تحدِّد مستوياً $\mathcal{P}$.

③ $a.$ أثبت أنَّ مركّبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y-3z,y,z)$.

$b.$ استنتج أنَّ $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$. ماذا يمكنك أن تستنتج من ذلك؟

④ بالعكس، أثبت أنَّ أية نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي $\mathcal{P}$ تحقق المعادلة:

$$x-2y+3z-5=0$$

ما هي المجموعة $\mathcal{E}$؟

الحل

① مجموعة النقاط $\mathcal{E}$ هي نقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقة $x-2y+3z-5=0$.
نلاحظ أنّ إحداثيات النقاط A و B و C تحقق العلاقة المعطاة، إذن النقاط A و B و C هي نقاط من المجموعة $\mathcal{E}$.

② لما كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-2,-1,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-5,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، كانت النقاط A و B و C غير واقعة على استقامةٍ واحدة ، فهي تحدد مستوياً $\mathcal{P}$.

③ $a.$ من جهة أولى $\overrightarrow{BM}=(x-5,y,z)$، ولأنّ النقطة M من $\mathcal{E}$ فإنّ $x-2y+3z-5=0$ ومنه $x-5=2y-3z$، إذن $\overrightarrow{BM}=(2y-3z,y,z)$.

$b.$ لما كان $(2y-3z,y,z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)$، كان $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$. ومنه نستنتج أنّ النقاط A و B و C و M تقع في مستوٍ واحد $\mathcal{P}$.

④ وبالعكس. إذا كانت النقطة M تقع في المستوي $\mathcal{P}$، يوجد عددان حقيقيان α و β يحققان العلاقة: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$. ولدينا $\overrightarrow{AM}=(x-7,y-1,z)$، إذن

$$(x-7,y-1,z)=\alpha(-2,-1,0)+\beta(-5,-1,1)$$

هذا يكافئ

$$\begin{cases} x-7=-2\alpha-5\beta & ① \\ y-1=-\alpha-\beta & ② \\ z=\beta & ③ \end{cases}$$

بحساب α و β من المعادلتين الأخيرتين ثُمّ بالتعويض في الأولى نجد $x-7=2(y+z-1)-5z$ أو $x-2y+3z-5=0$، إذن M تنتمي إلى $\mathcal{E}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{P}=\mathcal{E}$.

15 نتأمّل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم d المارّ بالنقطة $A(2,0,5)$ والموجَّه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$، والمستقيم d' المارّ بالنقطة $B(2,2,-1)$ والموجَّهُ بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$. هل d و d' متقاطعان؟ في حالة الإيجاب، أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

الشعاعان $\vec{u}(2,5,-1)$ و $\vec{v}(1,2,1)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، إذن المستقيمان d و d' غير متوازيين ، لنرى هل يقعان في مستوٍ واحد ؟ يقع المستقيمان d و d' في مستوٍ واحد إذا وجد عددان حقيقيان α و β يحققان $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$، أي $(0,2,-6)=\alpha(2,5,-1)+\beta(1,2,1)$ وهذا يكافئ

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 & ① \\ 5\alpha+2\beta=2 & ② \\ -\alpha+\beta=-6 & ③ \end{cases}$$

بحل المعادلتين ① و ③ نجد $\alpha=2$ و $\beta=-4$ ، وبتعويض هذه النتائج في المعادلة ② نجدها محققة إذن $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-4\vec{v}$، والمستقيمان d و d' يقعان في مستوٍ واحد وغير متوازيين، فهما متقاطعان في نقطة I. تُحقّق $\overrightarrow{AI}=a\cdot\vec{u}$ و $\overrightarrow{BI}=b\cdot\vec{v}$، إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=a\vec{u}-b\vec{v}$، ولكن وجدنا أنّ هذه المساواة تقتضي أن يكون $a=2$ و $b=4$. ومن المساواة $\overrightarrow{AI}=2\cdot\vec{u}$ نستنتج أنّ إحداثيات $I(x,y,z)$ تحقق، $(x-2,y,z-5)=(4,10,-2)$ أي $I(6,10,3)$.

16 جدْ على محور الفواصل نقطةً C متساوية البُعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$.

الحل

لأنّ النقطة C تقع على محور الفواصل كانت $C(x,0,0)$. ولأنّ C متساوية البعد عن النقطتين A و B كان $CA=CB$ ومنه $CA^2=CB^2$ أي $(x-2)^2+1+9=x^2+25+1$. ومنه $x=-3$ ، فإحداثيات C هي $(-3,0,0)$.

17 ليكن α عدداً حقيقياً، ولنتأمّل النقاط الثلاث $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$. أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين، أيّاً كان α. أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع ؟

الحل

لدينا

$$CB = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3-\alpha)^2} = \sqrt{25 + \alpha^2 + 6\alpha}$$
$$CA = \sqrt{4^2 + 0 + (3-\alpha)^2} = \sqrt{25 + \alpha^2 + 6\alpha}$$

وهكذا نجد أنه مهما تكن α من $\mathbb{R}$ فإن $CA = CB$ والمثلث متساوي الساقين رأسه C.

حتى يكون هذا المثلث متساوي الأضلاع يجب أن يكون $CB = AB$ أي

$$\sqrt{25 + \alpha^2 + 6\alpha} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0}$$

وبالإصلاح نجد $\alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0$ ولهذه المعادلة حلان $\alpha = 1$ و $\alpha = -7$. إذن يمكن أن يكون المثلث متساوي الأضلاع عند قيمتين للعدد الحقيقي α.

18 نتأمّل النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-1,4,2)$.

① أوجد نقطةً متساوية البعد عن A و B.

② أوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B.

③ أثبت أنّ « $M(x,y,z)$ نقطةٌ من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ » إذا وفقط إذا تحقّق الشرط « $3x - 3y - 2z + 8 = 0$ ».

الحل

① خذ N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ أي $N\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$.

② انطلاقاً من $CB^2 = CA^2$ نجد $2^2 + 3^2 + (\lambda-2)^2 = 1^2 + 0 + \lambda^2$ أي $\lambda = 4$.

③ أي نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ تكون متساوية البعد عن طرفيها وبالعكس إذا كانت M متساوية البعد عن A و B فإنها تقع على المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ وبالتالي $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحقق $BM = AM$ أي $BM^2 = AM^2$ ومنه

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2$$

وبإصلاح المعادلة نجد

$$3x - 3y - 2z + 8 = 0.$$

19 بُعد نقطة عن مستقيم

نتأمّل النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $M(4,-1,2)$. نهدف إلى حساب بُعد M عن المستقيم (AB).

① أثبت أنَّ M لا تقع على المستقيم (AB).

② أثبت أنَّ لكلِّ نقطة K من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2,3,z)$.

③ احسب MK^2 بدلالة z.

④ عند أية قيمة للعدد z يكون MK أصغر ما يمكن؟ حدِّدْ إذن بُعد M عن (AB).

الحل

① لدينا $\overrightarrow{MB}(2,-4,-4)$ و $\overrightarrow{MA}=(2,-4,2)$ نلاحظ أن $\frac{-4}{2}\neq\frac{-4}{-4}=\frac{2}{2}$ فالشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ غير مرتبطان خطياً، ولا تقع النقاط A و M و B على استقامة واحدة ، أي لا تقع M على المستقيم (AB).

② K نقطة من المستقيم (AB)، إذا وفقط إذا كانت مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-t)$ و (B,t) حيث t عدد حقيقي ما. فإذا كانت (x,y,z) إحداثيات K كان

$$(x,y,z)=(1-t)(2,3,0)+t(2,3,6)=(2,3,6t)$$

أي إنّ إحداثيات K من الصيغة $(2,3,z)$.

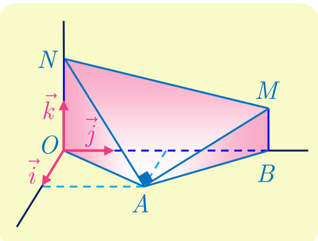
③ لدينا

$$MK^2=(4-2)^2+(-4)^2+(2-z)^2=(z-2)^2+20$$

④ أصغر قيمة للمسافة MK هي $2\sqrt{5}$ ويبلغها عندما $z=2$. وعليه بعد M عن المستقيم (AB) يساوي $d=2\sqrt{5}$.

20 المسافات وحجم هرم

m و n عددان حقيقيان موجبان يُحقّقان $0<m<n$. نتأمّل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و $N(0,0,n)$ في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن m و n ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجمُ المجسَّم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$.



الحل

لنحسب أطوال أضلاع المثلث NAM . لدينا

$$NA^2 = 3+9+n^2 \quad = n^2+12$$
$$MA^2 = 3+9+m^2 \quad = m^2+12$$
$$NM^2 = 0+36+(m-n)^2 = 36+(m-n)^2$$

يكون المثلث NAM قائماً في A ، إذا تحقق الشرط $NM^2 = NA^2 + MA^2$ وهذا يكافئ:

$$m \cdot n = 6 \qquad ①$$

ولما كان حجم الهرم يساوي $5\sqrt{3}$ فإنّ $V = \frac{1}{3} \cdot S(OBMN) \cdot h = 5\sqrt{3}$ ولكن

$$S(OBMN) = \frac{m+n}{2} \cdot 6 = 3(m+n)$$

ومنه $5\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 3(m+n) \cdot \sqrt{3}$ أي

$$m+n = 5 \qquad ②$$

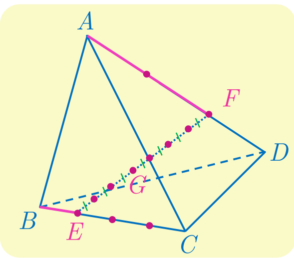
وبحل ① و ② حلاً مشتركاً نجد $m=2$ و $n=3$.

21 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$ ، ونقطتين E و F معرفتين وفق $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

أثبت أنَّ G ، مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ ، يقع على $[EF]$.

ثُمَّ عيِّن النقطة G على $[EF]$.

الحل



إنّ E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$ و $(C,1)$ لأنّ $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. و F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,2)$ لأنّ $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

إذن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,4)$ و $(F,3)$ ، ومنه G يقع على (EF) و $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$.

22 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. ونقطتين I و J معرفتين وفق $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$.

① أيمكن أن تنطبق إحدى النقطتين I و J على الأخرى؟

② أثبت أنه، أياً كانت النقطة M من الفراغ، كان :

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

③ جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

الحل

① لدينا $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ ومنه $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{IB}$ أي $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}$، وبطريقة مماثلة نجد أن $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{JD}$.
لو افترضنا أنّ $I=J$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{CD}$، وبالجمع نجد $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$، أو $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$ وأخيراً $2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}$. إذن تقع النقاط A و B و C و D في مستو واحد وهذا خُلفٌ. وعليه لا يمكن أن تتطبق النقطتان I و J.

② لما كانت B منتصف $[IA]$ كانت مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,1)$ و $(A,1)$ ومنه $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MB}$ إذن $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$، وكذلك D هي منتصف $[JC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1)$ و $(J,1)$ ومنه $\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$ إذن $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MC}$.

③ لدينا $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$ حيث G مركز ثقل المثلث BCD. إذن

$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{GA}$$

ومنه، الشرط

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

يكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{GA}\right\|$ أي $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{GA}\right\|$ ومنه تحقق M الشرط المعطى إذا وفقط إذا انتمت إلى الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $\left\|\overrightarrow{GA}\right\|$.

23 لدينا في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتان $A(2,-1,2)$ و $B(-2,1,-2)$. نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$، من الفراغ، المقدار $f(M)=MA^2+MB^2$.

① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z.

② أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $f(M)=18$ مؤلفة من نقطة واحدة.

③ أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $f(M)=30$ كرةٌ مركزها O. أوجد نصف قطرها.

④ أثبت أنّه، وفق شرط على العدد الحقيقي k، مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M)=k$ هي كرة مركزها O.

الحل

① لدينا $MA^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$ و $MB^2=(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$
ومنه $f(M)=MA^2+MB^2=2x^2+2y^2+2z^2+18$

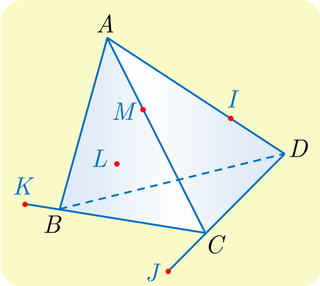
② $f(M)=18$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2=0$ أي $(x,y,z)=(0,0,0)$.

③ $f(M)=30$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2=6$ أي إذا وفقط إذا انتمت M إلى الكرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

④ $f(M)=k$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(k-18)$ ومنه عندما $k>18$ نجد أن مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M)=k$ هي كرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{\frac{1}{2}(k-18)}$.

24 نتأمّل رباعي الوجوه $ABCD$.

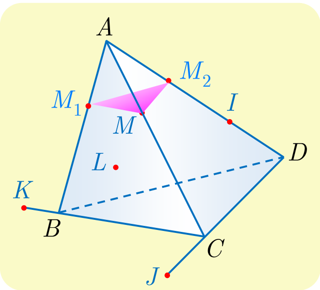
① M نقطةٌ من الحرف $[AC]$. جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD).



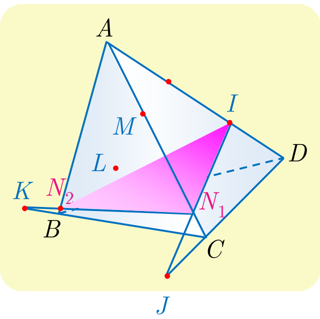
② I نقطةٌ من الحرف $[AD]$، و J نقطةٌ من المستقيم (CD)، و K نقطةٌ من المستقيم (BC). عيّن مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJK).

③ L نقطةٌ من المستوي (ABD). أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (KJL).

الحل



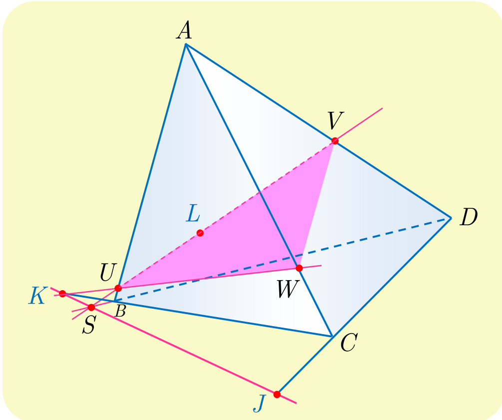
① ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD) فيكون الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و (ACD) موازياً للمستقيم (CD) وكذلك يكون الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و (ABC) موازياً للمستقيم (BC). ننشئ من M مستقيمين (MM_1) يوازي (BC) و (MM_2) يوازي (CD) فيكون $\mathcal{P}$ المستوي الذي يعينه المستقيمان المتقاطعان (MM_1) و (MM_2). والمقطع المطلوب هو المثلث MM_1M_2.



② ليكن $\mathcal{Q}$ المستوي (IJK). النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AD) المحتوى في المستوي (ACD)، والنقطة J تنتمي إلى المستقيم (CD) المحتوى في المستوي (ACD)، إذن المستقيم (IJ) محتوى في (ACD)، وهو، وضوحاً، محتوى في $\mathcal{Q}$. إذن (IJ) هو الفصل المشترك للمستويين (ACD) و $\mathcal{Q}$.

المستقيم (IJ) يقطع (AC) في N_1. ونجد بالمماثلة أنّ (KN_1) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $\mathcal{Q}$. وهذا الفصل المشترك يقطع (AB) في N_2. وهكذا يكون مقطع رباعي الوجوه مع $\mathcal{Q}$ هو المثلث (IN_1N_2).

③ ليكن $\mathcal{R}$ المستوي (LKJ).



- لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (BD) و (KJ) من المستوي (BCD).

النقطة S تنتمي إلى (JK) المحتوى في $\mathcal{R}$، و S تنتمي إلى (BD) المحتوى في (ABD) وكذلك تنتمي L إلى كل من $\mathcal{R}$ و (ABD). فالمستقيم (SL) هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{R}$ و (ABD).

- المستقيم (SL) يقطع (AB) و (AD) في U و V بالترتيب.
- المستقيم (KU) هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{R}$ و (ABC)، وهذا المستقيم يقطع (AC) في W.
- المثلث UVW هو مقطع $\mathcal{R}$ ورباعي الوجوه $ABCD$.

25 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$، والنقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب. والنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$.

① أثبت أنَّ M تنتمي إلى $[IJ]$ وعيِّن موضعها على هذه القطعة.

② أثبت أنَّ M تنتمي إلى $[KL]$ وعيِّن موضعها على هذه القطعة.

③ استنتج أنَّ I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد وعيِّن طبيعة الرباعي $ILJK$.

الحل

① M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$ ولأن I منتصف $[AE]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(E,1)$، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1)$ و $(G,1)$، فتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,2)$ و $(J,2)$ إذن M منتصف $[IJ]$.

② لأن K منتصف $[BG]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1)$ و $(G,1)$ ، و L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,1)$، ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2)$ و $(J,2)$ إذن M منتصف $\left[KL\right]$.

③ ومنه يتلاقى المستقيمان (IJ) و (KL) M فالنقاط I و J و K و L تقع في مستو واحد، والشكل $ILJK$ متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان.

2

الجداء السلمي في الفراغ

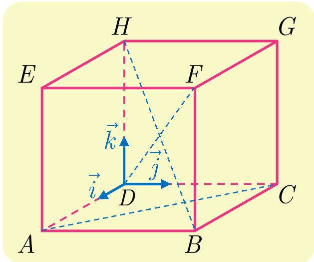
1. الجداء السلمي في المستوي (تذكرة)
2. الجداء السلمي في الفراغ
3. التعامد في الفراغ
4. المعادلة الديكارتية لمستوٍ

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف الجداء السلمي، وصيغه المختلفة، في المستوي وفي الفراغ.
- استعمال الجداء السلمي في إثبات التعامد.
- الشعاع الناظم على مستوٍ.
- المعادلة الديكارتية لمستوٍ.

انطلاقة نشطة

الحساب في المكعّب. نهدف إلى التعبير بصيغة تحليلية عن التعامد في الفراغ. لنتأمّل مكعباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه يساوي 3. ولنتأمّل المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المشار إليه في الشكل.



① اكتب إحداثيات جميع رؤوس المكعب.

② a. علّل تعامد المستقيمين (AB) و (FG).

b. عيّن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{FG}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$.

③ a. علّل تعامد المستقيمين (AC) و (BF).

b. عيّن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{AC}$ و (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{BF}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$.

④ a. ارسم الرباعي $DBFH$ بالأبعاد الحقيقية. أيكون المستقيمان (DF) و (HB) متعامدين؟

b. عيّن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{DF}$ و (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{HB}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$.

⑤ a. ليكن I مركز الوجه $EFGH$. ما إحداثيات I ؟

b. لتكن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{DF}$ المحسوبة سابقاً، احسب (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{BI}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$، ماذا تقترح ؟

⑥ a. وضّع I على الشكل المرسوم في ④ a.

b. لإثبات تعامد (DF) و (BI)، تؤول المسألة إلى مسألة في المستوي. باختيار معلم متجانس في المستوي (DBF)، أعط إحداثيات نقاط الشكل، واحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DF}$، ماذا تستنتج؟

الحل

① إحداثيات رؤوس المكعب :

$$D(0,0,0)\ ,\ A(3,0,0)\ ,\ B(3,3,0)\ ,\ C(0,3,0)$$
$$H(0,0,3)\ ,\ E(3,0,3)\ ,\ F(3,3,3)\ ,\ G(0,3,3)$$

② a. لأنّ المجسم مكعب، استنتجنا مباشرة أنّ الحرف FG عمودي على الوجه $(ABFE)$، ومنه $(FG)\perp(AB)$.

b. $\overrightarrow{FG}(-3,0,0)$ و $\overrightarrow{AB}(0,3,0)$.

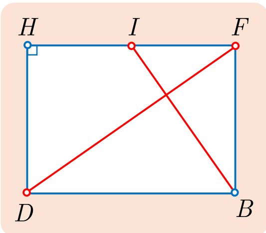
c. $xx'+yy'+zz'=(0)(-3)+(3)(0)+(0)(0)=0$

③ a. $\left.\begin{matrix} AB\perp BF \\ BC\perp BF \end{matrix}\right\}$ إذن $(BF)\perp(ABCD)$، ومن ثَمّ $(AC)\perp(BF)$.

b. $\overrightarrow{BF}(0,0,3)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,3,0)$.

c. $xx'+yy'+zz'=(-3)(0)+(3)(0)+(0)(3)=0$

④ a. الرباعي $DBFH$ مستطيل فقطراه $[BH]$ و $[DF]$ غير متعامدين.



b. $\overrightarrow{HB}(3,3,-3)$ و $\overrightarrow{DF}(3,3,3)$.

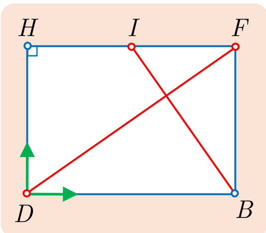
c. $xx'+yy'+zz'=(3)(3)+(3)(3)+(3)(-3)=9$

⑤ a. مركز الوجه $EFGH$ منتصف $[FH]$، وبالتالي $I(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$.

b. $\overrightarrow{DF}(3,3,3)$ و $\overrightarrow{BI}(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},3)$.

c. $xx'+yy'+zz'=(3)(-\dfrac{3}{2})+(3)(-\dfrac{3}{2})+(3)(3)=0$

⑥ a. الرسم مبين في الشكل المجاور.



b. لنختر المعلم المتجانس $\left(D,\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث

$\overrightarrow{DB}=3\sqrt{2}\,\vec{u}$ و $\overrightarrow{DH}=3\vec{v}$.

فتكون الإحداثيات النقاط المهمة في هذا المعلم هي :

$D(0,0),\ B(3\sqrt{2},0),\ I(\frac{3\sqrt{2}}{2},3),\ F(3\sqrt{2},3)$

إذن $\overrightarrow{DF}(3\sqrt{2},3)$ و $\overrightarrow{BI}(-\frac{3\sqrt{2}}{2},3)$ ومنه $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DF}=0$، فالشعاعان متعامدان.

تَدرَّبْ صفحة 50

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$ في الحالتين :

❶ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ و $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{w}=\frac{1}{3}\vec{i}-2\vec{j}$.

❷ $\vec{u}(2,-1)$ و $\vec{v}(-\frac{1}{2},3)$ و $\vec{w}(5,2)$.

الحل

❶ $\vec{w}\cdot\vec{u}=\dfrac{20}{3},\quad \vec{v}\cdot\vec{w}=-\dfrac{59}{6},\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=-14,$

❷ $\vec{w}\cdot\vec{u}=8\quad \vec{v}\cdot\vec{w}=\dfrac{7}{2},\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=-4,$

② أعطِ في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d :

❶ $A(5,3)$ و $d:2x+5y-5=0$. ❷ $A(-1,2)$ و $d:x-3y+2=0$.

الحل

❶ تنتمي $M(x,y)$ إلى d' إذا وفقط إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عمودياً على d أي مرتبطاً خطياً مع الشعاع $\vec{n}(2,5)$ الناظم على d، وهذا يكافئ الارتباط الخطي للشعاعين $\begin{bmatrix} x-5 \\ y-3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ أي

$$d':5x-2y-19=0$$

❷ بمثل ما سبق نجد $d':3x+y+1=0$.

③ أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوي أنّ:

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$$

الحل

نستفيد من الخاصة $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$. فنجد

$$AB^2-BC^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$$
$$CD^2-DA^2=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})$$

وبالجمع بعد ملاحظة أنّ $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}$ نجد

$$\begin{aligned}AB^2-BC^2+CD^2-DA^2&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD})=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

④ أعطِ في الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستقيم d :

❶ $A(-2,4)$ و $d : 2x + y - 5 = 0$.　　❷ $A(-\sqrt{2},2)$ و $d : \sqrt{2}x - 3y - 1 = 0$.

الحل

بتطبيق دستور بُعد نقطة عن مستقيم في المستوي نجد :

❶ $$\text{dist}(A,d) = \frac{|-4+4-5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

❷ $$\text{dist}(A,d) = \frac{|-2-6-1|}{\sqrt{2+9}} = \frac{9}{\sqrt{11}}$$

تَدرَّبْ صفحة 53

① نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$ في الحالتين :

❶ $\vec{u}(1+\sqrt{2},\sqrt{3},0)$ و $\vec{v}(1-\sqrt{2},0,-1)$ و $\vec{w}(0,-\sqrt{3},1)$.

❷ $\vec{u}(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{2})$ و $\vec{v}(\frac{1}{2},-2,\frac{2}{3})$ و $\vec{w}(1,0,1)$.

الحل

نطبق عبارة الجداء السلمي في الفراغ : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$:

❶ $$\left.\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= -1\\ \vec{v}\cdot\vec{w} &= -1\\ \vec{w}\cdot\vec{u} &= -3\end{aligned}\right\}$$

❷ $$\left.\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 1\\ \vec{v}\cdot\vec{w} &= \tfrac{7}{6}\\ \vec{w}\cdot\vec{u} &= \tfrac{7}{6}\end{aligned}\right\}$$

② إذا علمتَ أنّ نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأنّ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -4$ فاحسب المقادير الآتية:

❶ $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$　　❷ $\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

❸ $(2\vec{u})\cdot(\vec{v}-3\vec{u})$　　❹ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$

الحل

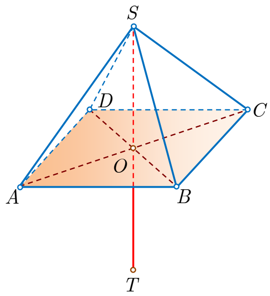
❶ $$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} = 25 - 4 = 21$$

❷ $$\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}^2 = -4 - 9 = -13$$

❸ $$2\vec{u}\cdot(\vec{v}-3\vec{u}) = 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 6\vec{u}^2 = 2(-4) - 6(25) = -158$$

❹ $$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v}) = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{v}^2 = 25 - 2(-4) - 3(9) = 6$$

③ نتأمّل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مربّع ورأسه S. وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a. احسب $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

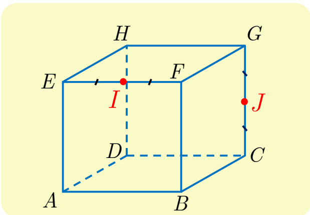


الحل

الهرم منتظم وأطوال جميع أحرفه وأحرف قاعدته a، نلاحظ أولاً أن SAB متساوي الأضلاع، وأنّ SAC قائم الزاوية في S ومتساوي الساقين لأنه طبوق على BAC إذن

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{SB}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}$$
$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{SC}\|\cdot\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC})=0$$
$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AC})=a\times\sqrt{2}a\times\cos\frac{3\pi}{4}=-a^2$$

④ $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a. فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$. احسب $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}$.



الحل

$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}=0,$$
$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IE}=-EI^2=-\frac{a^2}{4}$$
$$\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}=(\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH})\cdot(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$=-\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}+a^2=\frac{3}{4}a^2$$

تَدرَّبْ صفحة 56

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① بيّن فيما يأتي بيّن إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين أوعيّن الوسيط α ليكونا كذلك.

❶ $\vec{u}\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}\left(-\frac{2}{5},2,3\right)$,

❷ $\vec{u}\left(\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$ $\vec{v}\left(-\sqrt{2},1,1\right)$,

❸ $\vec{u}\left(2,-\frac{1}{2},5\right)$ $\vec{v}\left(-\frac{2}{5},3,\alpha\right)$,

❹ $\vec{u}\left(\sqrt{3},\frac{1}{3},2\right)$ $\vec{v}\left(\alpha,2\alpha,\frac{1}{2}\right)$,

الحل

❶ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\neq 0$، فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متعامدين.

❷ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$، فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

❸ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{23}{10}+5\alpha$ ، ويتعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = \dfrac{23}{50}$.

❹ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}\right)\alpha+1$ ، يتعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = \dfrac{-3}{3\sqrt{3}+2}$.

② نتأمّل النقطتين $A(2,-5,1)$ و $B(0,2,6)$. والمستقيم d المار بالنقطة $C(-2,3,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$. أثبت أنّ d عمودي على المستقيم (AB).

الحل

يتعامد المستقيم d مع المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$. في حالتنا $\overrightarrow{AB}(-2,7,5)$ و $\vec{u}(-4,1,-3)$ وبالتالي $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 8+7-15 = 0$ ، فالمستقيمان (AB) و d متعامدان.

③ أطوال الأشعّة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10. أيكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين؟

الحل

هنا $\vec{u}\perp\vec{v}$ لأنّ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}(100-36-64) = 0$$

④ نتأمّل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، ونفترض أنّ $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان. أثبت أنّ للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول نفسه.

الحل

من الفرض لدينا $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = 0$ ومنه $\vec{u}^2-\vec{v}^2 = 0$ أي $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

تَدرَّبْ صفحة 59

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً:

❶ $\vec{n}(1,-1,0),\quad A(1,0,5)$ ❷ $\vec{n}(2,-3,-1),\quad A(\sqrt{2},-2,5)$

❸ $\vec{n}(\frac{2}{3},4,-1),\quad A(\frac{1}{2},3,-1)$ ❹ $\vec{n}(\sqrt{3},2,0),\quad A(0,-3,0)$

الحل

إذا كان الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المار بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ ، فإن معادلة المستوي هي : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

❶ $x-y = 1$

❷ $2x-3y-z = 2\sqrt{2}+1$

❸ $2x+12y-3z = 40$

❹ $\sqrt{3}x+2y = -6$

② في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ المار بالنقطة A موازياً المستوي $\mathcal{P}$:

❶ $A(1,0,1)$ $\mathcal{P} : 2x - y + 3z = 4,$ ❷ $A(0,0,0)$ $\mathcal{P} : z = 2,$

❸ $A(0,3,0)$ $\mathcal{P} : x + y = 5,$ ❹ $A(-1,2,-3)$ $\mathcal{P} : 5x - 3y + 4z = 8,$

الحل

معادلة أي مستو $\mathcal{Q}$ يوازي $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ هي من الصيغة:

$$ax + by + cz + e = 0$$

فنعين e من شرط المرور بالنقطة A. وهكذا نجد:

❶ $\mathcal{Q} : 2x - y + 3z = 5,$ ❷ $\mathcal{Q} : z = 0,$

❸ $\mathcal{Q} : x + y = 3,$ ❹ $\mathcal{Q} : 5x - 3y + 4z = -23,$

③ ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$\mathcal{P} : 7x + 3y - z - 1 = 0$ و $\mathcal{Q} : 6x - 11y - 9z - 5 = 0$ و $\mathcal{R} : 2x - 3y + 5z + 4 = 0$

الحل

يتعامد مستويان إذا تعامد شعاع ناظم على الأول مع شعاع ناظم على الثاني: نعين أشعة ناظمة :

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}(7,3,-1), \quad \vec{n}_{\mathcal{Q}}(6,-11,-9), \quad n_{\mathcal{R}}(2,-3,5)$$

ونرى أنّ $\vec{n}_{\mathcal{Q}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{P}} = 18 \neq 0$ فالمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ غير متعامدين. و $\vec{n}_{\mathcal{Q}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}} = 0$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}} = 0$ إذن $\mathcal{Q} \perp \mathcal{R}$ و $\mathcal{P} \perp \mathcal{R}$.

④ في كل من الحالات الآتية بيّن إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين.

❶ $\mathcal{Q} : x - y + z - 3 = 0$ $\mathcal{P} : x - y + z = 0,$

❷ $\mathcal{Q} : 4x + 2y + z + 5 = 0$ $\mathcal{P} : 2x + y + 5 = 0,$

الحل

يتوازى مستويان إذا كان شعاع ناظم على أحدهما شعاعاً ناظماً على الآخر أيضاً، وفي غير هذه الحالة يكونان متقاطعين.

❶ هنا $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-1,1), \vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,-1,1)$ فالشعاعان الناظمان مرتبطان خطياً، والمستويان متوزيان وغير منطبقين لأن $\mathcal{P}$ يمر بالمبدأ ولا يفعل ذلك $\mathcal{Q}$.

❷ هنا $\vec{n}_{\mathcal{P}}(4,2,1), \vec{n}_{\mathcal{Q}}(2,1,0)$ فالشعاعان الناظمان غير مرتبطين خطياً، والمستويان متقاطعان.

⑤ احسب بُعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$. وكذلك احسب بعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي $\mathcal{Q} : y - z = 0$

الحل

هذا تطبيق مباشر لدستور المسافة:

$$\text{dist}(A,\mathcal{P}) = \frac{\left|2(5)-(3)+3(4)-5\right|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

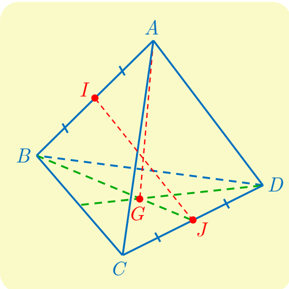
$$\text{dist}(B,\mathcal{Q}) = \frac{\left|2-5\right|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

أنشطة

نشاط 1 خواص رباعي الوجوه المنتظم

رباعي الوجوه المنتظم هو مجسّم له أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع. نسمّي حرفين متقابلين كل حرفين لا يشتركان برأس.

❶ خواص عامة



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $AB=a$.

① نهدف إلى إثبات أنّ كل حرفين متقابلين متعامدان، وأنّ المستقيم الواصل بين منتصفي حرفين متقابلين عمودي على كل منهما.

a. احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

b. أثبت تعامد المستقيمين (AB) و (CD).

c. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (AC) و (BD) والمستقيمين (AD) و (BC)؟

d. ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. تيقّن أنّ $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$، واستنتج أنّ المستقيم (IJ) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (CD).

② في رباعي الوجوه $ABCD$، الارتفاع النازل من A هو المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على المستوي (BCD).

a. ليكن G مركز ثقل المثلث BCD. احسب $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$، واستنتج أنّ (AG) هو الارتفاع النازل من A.

b. عيّن بقيّة الارتفاعات في رباعي الوجوه $ABCD$.

③ نسمي مركز رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسندنا إليها الأمثال ذاتها: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

a.أثبت أنّ النقاط A و O و G تقع على استقامة واحدة واحسب AG و AO.

b. أثبت أنّ O هو منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

c. احسب الأطوال OB و OI.

d. أثبت أنّ النقطة O متساوية البعد عن جميع رؤوس رباعي الوجوه.

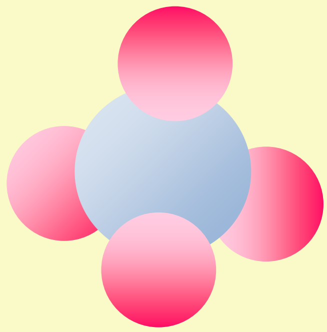
④ نهدف إلى حساب الزاوية الهندسية $\widehat{AOB}$.

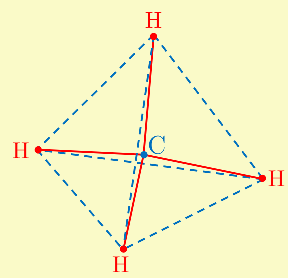
a. احسب $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ بأسلوبين أحدهما بكتابة $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})$.

b. استنتج قيمة تقريبية للزاوية $\widehat{AOB}$ بالدرجات. وبين أنّ $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\widehat{DOA}$.

❷ تطبيق في الكيمياء

نجد أدناه تمثيلاً لجزيئة الميثان. تقع نوى ذرات الهيدروجين الأربع H على رؤوس رباعي وجوه منتظم. تقع نواة ذرّة الكربون C داخل رباعي الوجوه على المسافة نفسها من كلّ واحدة من رؤوس رباعي الوجوه أي في مركزه. لتبسيط تمثيل جزيئة الميثان، نستعمل المخطّط المبين أدناه، حيث مثّلنا الروابط بخطوط متّصلة وحروف رباعي الوجوه بخطوط متقطّعة لنتذكّرها. هذا المخطّط هو الصيغة الستيريوكيميائية للميثان. أتاحت قياسات تحديد طول الروابط $\mathrm{C-H}$ بمقدار $1.09\times10^{-10}\ \mathrm{m}$.





① أعطِ تقريباً لقياس الزاوية بين رابطتين من النوع $\mathrm{C-H}$.

② عيّن طول حرف رباعي الوجوه أي المسافة بين ذرتي هيدروجين.

❶ خواص عامة

① a. ABC مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$. ونجد بالمثل

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$$

b. لنثبت أنّ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ نحسب الجداء السلمي فنجد:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$$

c. تؤدّي رؤوس رباعي الوجوه المنتظم دوراً متناظراً إذن نجد بالمثل أن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$.

d. في الحقيقة لدينا $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. فإذا استفدنا مما سبق وجدنا

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0$$

وكذلك $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ إذن (IJ) عمودي على كل من (AB) و (CD).

② a. لدينا :

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CD}=0+0=0$$
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BD}=0+0=0$$

إذن $\overrightarrow{AG}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{CD}$، فالمستقيم (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (CBD) إذن هو عمودي على (CBD)، وعليه (AG) هو الارتفاع النازل من A في الهرم.

b. نستنتج من التحليل السابق أن ارتفاعات رباعي الوجوه المنتظم هي المستقيمات التي تصل كل رأس بمركز ثقل الوجه المقابل لهذا الرأس.

③ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسند إليها الأمثال ذاتها :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

a. لأنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فإن النقطة O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(G,3)$ عملاً بالخاصة التجميعية، ويكون $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ ومنه النقاط A,O,G تقع على استقامة واحدة.

لمّا كان $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ لأنّ G مركز ثقل المثل BCD استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{AG}^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\\&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=a^2+a^2+a^2+2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{a^2}{2}=6a^2\end{aligned}$$

إذن $AG=\frac{\sqrt{6}}{3}a$، وعليه $AO=\frac{3}{4}AG=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

b. لما كانت I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$ وجدنا أن O مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$. فيكون O منتصف $[IJ]$.

c. رباعي الوجوه المنتظم متناظر بالنسبة إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذن $OB=OA$.

وجدنا أنّ $4\overrightarrow{IO}=2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ وعليه

$$\begin{aligned}16\overrightarrow{IO}^2&=(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=a^2+4a^2+a^2-4\times\frac{a^2}{2}+2\times0-4\times\frac{a^2}{2}=2a^2\end{aligned}$$

إذن $OI=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

d. لأنّ رباعي الوجوه المدروس منتظم، فإنّ رؤوسه تؤدي أدواراً متماثلة، وعليه فإنّ

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

④ a. إن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})\\ &= (\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{IA})\\ &= OI^2 - IA^2 = \frac{2a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = -\frac{2a^2}{16}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\cdot OB\cdot\cos\widehat{AOB} = \frac{6}{16}a^2\cos\widehat{AOB}$$

إذن $\cos\widehat{AOB} = \frac{-1}{3}$.

b. تكون القيمة التقريبية للزاوية $\angle AOB \approx 109.47°$. ومن تطابق المثلثات AOB, BOC, COD, AOD نستنتج أنّ

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD.$$

❷ تطبيق في الكيمياء

a. الزاوية المطلوبة تنطبق على الزاوية $\angle AOB \approx 109.47°$.

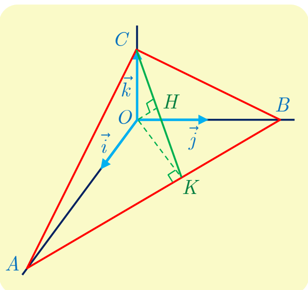
طول الرابطة $\mathrm{C-H}$ يساوي الطول $OA = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ الذي حسبناه آنفاً إذن

$$a = \frac{4}{\sqrt{6}}1.09\times10^{-10} \approx 1.78\times10^{-10}\ \mathrm{m}$$

وهذا يمثل المسافة بين ذرتي هيدروجين.

نشاط 2 استعمال معلم

❶ رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة



نتأمّل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O، أي إنّ المستقيمات (OA) و (OB) و (OC) متعامدة مثنى مثنى. لنفترض إضافة إلى ذلك أنّ $OC = 1$ و $OB = 2$ و $OA = 3$. نرمز بالرمز H إلى المسقط القائم للنقطة O على المستوى (ABC).

① نريد إثبات أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC. لنختر إذن معلماً متجانساً $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ بوضع $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OC}$.

a. احسب إحداثيات H.

b. احسب $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}$ واستنتج أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (OCH).

c. احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}$ واستنتج أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

②a. أثبت أنّ المسقط القائم لكل من النقطتين C و O على المستقيم (AB) هو النقطة K ذاتها، واحسب إحداثيات K.

b. أعط تقريباً لقياس الزاوية $\widehat{OKC}$.

الحل

① نريد إثبات أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات في المثلث ABC

a. حساب (x,y,z) إحداثيات H. استناداً إلى الفرض (OH) عمودي على جميع مستقيمات المستوي ABC. إذن $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HC}=0$ ومنه

$$3x=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})=\overrightarrow{OH}^2$$
$$2y=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB})=\overrightarrow{OH}^2$$
$$z=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{OH}^2$$

فإذا عرّفنا $k=\overrightarrow{OH}^2$ وهو عدد موجب تماماً كان لدينا

$$z=2y=3x=k$$

وكان

$$k=x^2+y^2+z^2=k^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1\right)$$

إذن $k=\frac{36}{49}$ و $(x,y,x)=\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$.

b. لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ و $\overrightarrow{OC}(0,0,1)$ فينتج أن $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ و $\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$ فينتج أن $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

إذن المستقيم (AB) عمودي على كل من (OC) و (OH) فهو عمودي على المستوي (OCH).

c. هنا $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ و $\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},-\frac{13}{49}\right)$ إذن $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

وكذلك $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$ و $\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49},\frac{-80}{49},\frac{36}{49}\right)$ إذن $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

نستنتج من ذلك أنّ $(AB)\perp(HC)$ و $(AC)\perp(BH)$ فالنقطة H هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث (ABC).

②a. رأينا أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (OCH) لتكن K نقطة تقاطعهما. عندئذ تكون K هي المسقط القائم لأي نقطة من نقاط المستوي (OCH) على المستقيم (AB) وعلى الخصوص K هي المسقط القائم لكل من النقطتين O و C على (AB).

تتعين النقطة K بالاستفادة من خاصتين :

- النقاط A, K, B تقع على استقامة واحدة. إذن يوجد ثابتٌ t يحقق $\overrightarrow{AK} = t\overrightarrow{AB}$.
- الشعاعان $\overrightarrow{OK}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان إذن $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

لذلك نكتب $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ ونحسب

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -OA^2 + tAB^2 = -9 + t(9+4) = 13t - 9 \end{aligned}$$

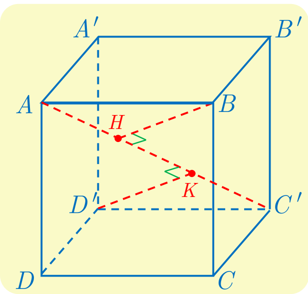
إذن $t = \dfrac{9}{13}$ و المساواة $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ تعطينا إحداثيات K

$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{9}{13}\begin{bmatrix} 0-3 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/13 \\ 18/13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو $K\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}, 0\right)$.

②b. ومنه نستنتج أنّ $OK = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2} = \left(\frac{6}{13}\right)\sqrt{4+9} = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$ ومن ثَمّ لأن المثلث KOC قائم في O نجد $\tan\widehat{OKC} = \dfrac{OC}{OK} = \dfrac{\sqrt{13}}{6}$، ونجد باستعمال الآلة الحاسبة $\widehat{OKC} \approx 31°$.

❷ بعض خواص المكعب



ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعّباً طول حرفه a. النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC'). نريد إثبات أنّ النقطة H هي أيضاً المسقط القائم لكلٍّ من A' و D على المستقيم (AC').

سنستعمل المعلم المتجانس $\left(D'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ حيث

$$\overrightarrow{D'A'} = a\vec{k} \text{ و } \overrightarrow{D'C'} = a\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{D'D} = a\vec{i}$$

① اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب.

② لحساب (x, y, z) إحداثيات النقطة H :

a. اكتب بدءاً من المساواة $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0$، علاقة بين x و y و z و a.

b. اكتب علاقة بين بين x و y و z و a و λ حيث λ معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AC'}$. واستنتج قيمة λ ثُمّ احداثيات H.

③ لإثبات أنّ المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها، يكفي أن نثبت أنّ $(A'H)$ عمودي على (AC'). أثبت تعامد الشعاعين $\overrightarrow{A'H}$ و $\overrightarrow{AC'}$.

④ أثبت أنّ المسقط القائم للنقطة D على (AC') هي النقطة H ذاتها.

⑤ لتكن K المسقط القائم للنقطة D' على (AC').

a. ماذا تقول عن الطول $C'K$ ؟

b. حدّد موقع K على المستقيم (AC').

c. ما هي النقاط الأخرى من المكعب التي مسقطها القائم على (AC') هي النقطة K ذاتها.

الحل

① المعلم المفترض $(D';\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس. إحداثيات رؤوس المكعب في هذا المعلم

$D'(0,0,0)$, $D(a,0,0)$, $C(a,a,0)$, $C'(0,a,0)$

$A'(0,0,a)$, $A(a,0,a)$, $B(a,a,a)$, $B'(0,a,a)$

②a. لدينا $\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$ و $\overrightarrow{BH}(x-a,y-a,z-a)$ والشرط $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$ يُكافئ :

$$x-y+z-a=0 \qquad (*)$$

②b. من الفرض لدينا $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AC'}$ ومنه $(x-a,y,z-a)=\lambda(-a,a,-a)$ أي

$$z=a-\lambda a,\quad y=\lambda a,\quad x=a-\lambda a$$

نعوض في العلاقة $(*)$ فنجد $-3a\lambda=-a$ ومنه $\lambda=\frac{1}{3}$، ينتج إحداثيات $H(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$.

③ لدينا $\overrightarrow{A'H}(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,-\frac{1}{3}a),\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$ إذن $\overrightarrow{A'H}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$ ومنه $\overrightarrow{A'H}\perp\overrightarrow{AC'}$، فالمستقيمان (AC') و $(A'H)$ متعامدان. إذن H هي المسقط القائم للنقطة A' على (AC')

④ لدينا $\overrightarrow{DH}(-\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a),\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$ إذن $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$ ومنه $\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC'}$، فالمستقيمان (AC') و (DH) متعامدان. إذن H هي المسقط القائم للنقطة D على (AC').

⑤ مركز المكعب O هو مركز تناظر للشكل، والتناظر المركزي S_O يحافظ على المسافات والتعامد. لمّا كان $S_O(B)=D'$ و $S_O(A)=C'$ كان $S_O(H)=K$. نستنتج أنّ $AH=KC'$، ولأنّ $O(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$ استنتجنا إحداثيات النقطة K من كون O منتصف KH : $K(\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a)$. بسبب التناظر نجد أنّ K هي أيضاً مسقط النقطتين B' و C على (AC').

تمرينات ومسائل

1 نُعطى معلماً متجانساً في المستوي.

① بيّن أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$\vec{u}(2,5)$ و $\vec{v}(-2,-5)$ و $\vec{w}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$ و $\vec{t}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$ و $\vec{s}\left(2,-\frac{4}{5}\right)$.

② في الحالتين الآتيتين اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$:

❶ $A(4,1) \qquad B(-1,2),$

❷ $A(-5,3) \qquad B(-2,\frac{1}{3}),$

③ نتأمّل النقاط $A(-5,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(-3,3)$ و $E\left(-\frac{9}{4},-1\right)$. أتكون النقطة E متساوية البُعد عن المستقيمات التي تؤلّفها أضلاع المثلث ABC؟

الحل

① نلاحظ أولاً أنّ $\vec{v} = -\vec{u}$ و $\vec{t} = -\vec{w} = \frac{1}{4}\vec{s}$، ولأنّ $\vec{t}\cdot\vec{v} = 0$، نرى أنّ أي شعاع من بين $\{\vec{u},\vec{v}\}$ عمودي على أي شعاع من بين $\{\vec{t},\vec{w},\vec{s}\}$ وهناك ستة أزواج.

② محور القطعة المستقيمة هو العمود المقام على القطعة من منتصفها، وهو أيضاً مجموعة النقاط المتساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة.

❶ هنا $\overrightarrow{AB}(-5,1)$ شعاع ناظم على المحور، والنقطة $N(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ هي منتصف $[AB]$ فتكون معادلة المحور : $-5x + y + 6 = 0$.

❷ إذا كانت $M(x,y)$ نقطة من محور $[AB]$ حيث $A(-5,3), B(-2,\frac{1}{3})$ كان $AM = BM$ ومنه:

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y-\tfrac{1}{3})^2$$

وبإصلاح المساواة نجد معادلة المحور $54x - 48y + 269 = 0$.

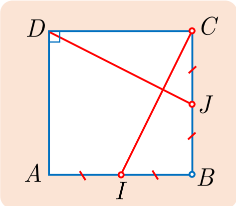
③ معادلة المستقيم (AB) : $m_{AB} = \dfrac{3}{-6} = -\dfrac{1}{2}$ وهو يمر بالنقطة B إذن $x + 2y + 1 = 0$، ومنه بُعد النقطة E عن المستقيم (AB) يساوي $L_1 = \dfrac{\left|-\frac{9}{4} - 2 + 1\right|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{13}{4\sqrt{5}}$

معادلة المستقيم (AC) : $m_{AC} = \dfrac{1}{2}$ وهو يمر بالنقطة C إذن $x - 2y + 9 = 0$، ومنه بُعد النقطة E عن المستقيم (AC) يساوي $L_2 = \dfrac{\left|-\frac{9}{4} + 2 + 9\right|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{35}{4\sqrt{5}}$

نلاحظ أن $L_1 \neq L_2$ فالنقطة E غير متساوية البعد عن المستقيمات المارة بأزواج من النقاط A,B,C.

2 $ABCD$ مرّبع. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$. أثبت أنّ المستقيمين (DJ) و (CI) متعامدان.

الحل



طريقة أولى. نأخذ معلماً متجانساً $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. فتكون إحداثيات النقاط في هذا المعلم :

$$I(\tfrac{1}{2},0), C(1,1), D(0,1), J(1,\tfrac{1}{2})$$
$$\overrightarrow{IC}(\tfrac{1}{2},1), \overrightarrow{DJ}(1,-\tfrac{1}{2})$$

وبحساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ نستنتج أن الشعاعين متعامدان.

طريقة ثانية.

$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$$
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CD}^2) = 0$$

3 نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ.

① بيّن في كل من الحالتين الآتيتين إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين:

❶ $\vec{u}(1,-2,5), \quad \vec{v}\left(2,-\frac{3}{2},1\right)$

❷ $\vec{u}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},0\right), \quad \vec{v}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},1\right)$

② نتأمّل النقاط $A(4,1,-2)$ و $B(-1,2,4)$ و $C(0,2,-5)$ و $D(1,-2,-\frac{7}{2})$. ونعرّف M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. احسب

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} \text{ و } \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$$

③ بيّن في كلّ من الحالات الآتية إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدين:

❶ $\mathcal{P} : x+2y-5z+7=0, \quad \mathcal{Q} : x+2y+z-3=0,$

❷ $\mathcal{P} : x-3y+2=0, \quad \mathcal{Q} : y-2z+3=0,$

④ احسب في كل من الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستوي $\mathcal{P}$:

❶ $A(0,\sqrt{2},1), \quad \mathcal{P} : x+y-2z+4=0,$

❷ $A(5,-2,0), \quad \mathcal{P} : 3x+y-\frac{z}{2}+7=0,$

الحل

① ❶ $\vec{u}\cdot\vec{v}=2+3-5=0$ ومنه $\vec{u}\perp\vec{v}$

❷ $\vec{u}\cdot\vec{v}=2+3+0\neq 0$ ومنه $\vec{u},\vec{v}$ غير متعامدين.

② $\overrightarrow{AC}(-4,1,-3)$ و $\overrightarrow{AB}(-5,1,6)$ ، إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20+1-18=3$

$\overrightarrow{CD}(1,-4,\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{AB}(-5,1,6)$ ، إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-5-4+9=0$

$\overrightarrow{AC}(-4,1,-3)$ و $\overrightarrow{DB}(-2,4,\frac{15}{2})$ ، إذن $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=8+4-\dfrac{45}{2}=-\dfrac{21}{2}$

إحداثيات النقطة M منتصف $[AB]$ هي $M(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1)$ إذن

$\overrightarrow{CD}(1,-4,\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{MB}(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},3)$ ، ومنه $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{-5}{2}-2+\dfrac{9}{2}=0$

③ يكون المستويان متعامدين إذا كان الجداء السلمي لناظميهما معدوماً.

❶ $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,2,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,2,-5)$ ومنه $\vec{n}_{\mathcal{P}}\cdot\vec{n}_{\mathcal{Q}}=0$ ، المستويان متعامدان.

❷ $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(0,1,-2)$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-3,0)$ ومنه $\vec{n}_{\mathcal{P}}\cdot\vec{n}_{\mathcal{Q}}=0-3\neq 0$ ، المستويان غير متعامدين.

④ ❶
$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{P})=\frac{\left|1(0)+1(\sqrt{2})-2(1)+4\right|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

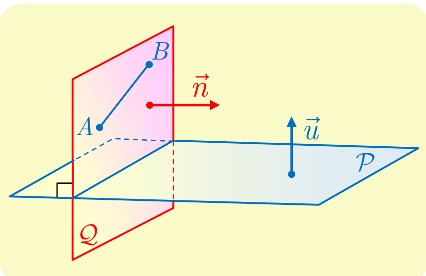
❷
$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{P})=\frac{\left|3(5)+1(-2)-\frac{1}{2}(0)+7\right|}{\sqrt{9+1+\frac{1}{4}}}=\frac{40}{\sqrt{41}}$$

لنتعلّم البحث معاً

4 مستويات متعامدة

نتأمّل، في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطتين الآتيتين: $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $x-y+3z-4=0$. جِد معادلةً للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

نحو الحلّ



☝ نريد تعيين معادلة لمستوٍ $\mathcal{Q}$ مار بنقطة (بل اثنتين). وإذا كنّا نعرف شعاعاً ناظماً $\vec{n}(a,b,c)$ على $\mathcal{Q}$ استطعنا تعيين المستوي. أتوجد فرضيات في المسألة تفيد في تعيين $\vec{n}$؟ المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان فرضاً إذن يكون كل شعاع ناظم $\vec{u}$ على $\mathcal{P}$ شعاعاً عمودياً على $\vec{n}$، كما إنّ المستقيم (AB) محتوى في $\mathcal{Q}$ فالشعاع $\overrightarrow{AB}$ عمودي أيضاً على $\vec{n}$.

1. أعطِ مركّبات شعاع ناظم $\vec{u}$ على $\mathcal{P}$.
2. علّل صحة المساواتين $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$.

✌ لدينا إذن جملة المعادلتين

$$\begin{cases} a-b+3c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases}$$

لا تكفي هاتان المعادلتان لتعيين قيم a و b و c، وهذا ليس مُفاجئاً لأننا نعلم أنّه يوجد عدد لانهائي من الأشعة الناظمة على مستو. ولأنه يكفي تعيين ثلاثية واحدة (a,b,c) تحقق الجملة، يمكننا مثلاً أن نختار قيمة إحدى المركّبات. فمثلاً لنضع $c=2$.

1. أثبت في هذه الحالة أنّ $a=-5$، $b=1$.
2. تحقّق أنّ $\vec{n}(-5,1,2)$ شعاع ناظم على $\mathcal{Q}$.
3. اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. يمكن أن نختار $\vec{u}(1,-1,3)$.

2. لما كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدين، كان $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$. ولما كان $\overrightarrow{AB}$ محتوى في المستوي $\mathcal{Q}$، كان $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$.

✌ من $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ نستنتج أنّ $a-b+3c=0$ ، ومن $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ نجد $a+b+2c=0$. إذن لدينا جملة المعادلتين : $\begin{cases} a-b+3c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases}$، لا تكفي هاتان المعادلتان لتعيين قيم a و b و c، لهذا نختار قيمة عددية لإحدى المركبات لتعيين أحد الأشعة الناظمة على المستوي $\mathcal{Q}$، فمثلاً في حالة $c=2$ تكون المعادلات الناتجة:

1. $\begin{cases} a-b=-6 \\ a+b=-4 \end{cases}$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد : $a=-5$ و $b=1$.

2. الشعاع $\vec{n}=(-5,1,2)$ شعاع ناظم على المستوي $\mathcal{Q}$، لأنه يحقق :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-5+1+4=0 \text{ و } \vec{u}\cdot\vec{n}=-5-1+6=0$$

3. معادلة المستوي $\mathcal{Q}$ هي $-5x+y+2z+2=0$.

5 بُعدُ نقطة عن مستقيم في الفراغ

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ ، والمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

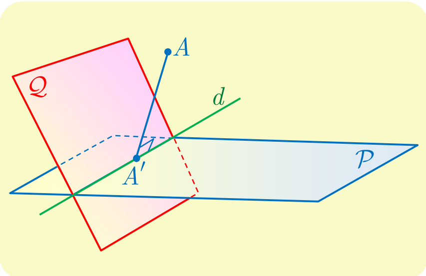
$$\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0$$
$$\mathcal{Q} : x + y + 2z - 5 = 0$$

أثبت تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، واحسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثّل فصلهما المشترك.

نحو الحلّ

للتحقّق من تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، نستعمل الأشعة الناظمة على كل منهما.

1. عيّن شعاعاً ناظماً $\vec{n}_1$ على $\mathcal{P}$، وشعاعاً ناظماً $\vec{n}_2$ على $\mathcal{Q}$.
2. استنتج أنّ $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان.



بُعد A عن d يساوي بُعد A عن A' حيث A' هي المسقط القائم للنقطة A على d. بالطبع إذا وقعت A على d كان $A = A'$ ومن ثَمّ $AA' = 0$. تيقّن أنّ A، في الحقيقة، لا تقع على أيّ من المستويين $\mathcal{P}$ أو $\mathcal{Q}$.

إحدى الطرائق لحساب AA' تتمثّل في تعيين إحداثيات A' . تنتمي هذه النقطة إلى كلٍّ من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ فإحداثياتها تحقّق معادلتيهما. بالإضافة إلى ما سبق المستقيم (AA') عمودي على d، فإذا كان $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً للمستقيم d فإنّ A' هي النقطة الوحيدة من d التي تُحقّق $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$. علينا إذن تعيين شعاع $\vec{u}$ يوجه المستقيم d، ولهذا نبحث عن نقطتين B و C من d.

1. تذكّر أن $M(x,y,z)$ تقع على d . إذا تحقّق الشرطان
$$x + y + 2z - 5 = 0 \text{ و } 2x - y + z - 4 = 0$$
2. مثلاً لتعيين نقطة $B(x,y,z)$ من d . نختار $x = 0$ ونعيّن y و z الموافقتين. ولتعيين $C(x,y,z)$ من d . نختار $x = 1$ ونعيّن y و z . وهذا يتيح لنا تعيين $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.
3. أثبت أنّ (a,b,c) إحداثيات A' تُحقّق جملة المعادلات
$$\begin{cases} 2a - b + c - 4 = 0 & (1) \\ a + b + 2c - 5 = 0 & (2) \\ a + b - c = 0 & (3) \end{cases}$$
4. استنتج من (2) و (3) أنّ $3c = 5$ ثُمّ احسب إحداثيات A' ، واستنتج المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغة سليمة.

الحل

✌ لإثبات أنّ المستويين متقاطعان نتحقق أن ناظميهما غير مرتبطين خطياً.

1. لدينا $\vec{n}_1 = (2,-1,1)$ و $\vec{n}_2 = (1,1,2)$ ، نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

2. لأنّ الناظمين غير مرتبطان خطياً، فالمستويان متقاطعان.

✌ بافتراض أن النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على d فيكون AA' هو البعد المطلوب.

إذا وقعت النقطة A على d ، فإن $A=A'$ ومن ثمّ $AA'=0$

في الحقيقة A لا تقع على A' لأن : A لا تحقق معادلة المستوي $\mathcal{P}$ لأن : $6+1+2-4=5\neq 0$

وأيضاً A لا تحقق معادلة المستوي $\mathcal{Q}$ لأن : $3-1+4-5=1\neq 0$

إحدى الطرائق لحساب AA' تتمثل في تعين إحداثيات النقطة A' .

لما كانت النقطة A' تنتمي إلى d ، فهي نقطة مشتركة بين المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ، فإحداثياتها تحقق معادلة كلٍ منهما. وبافتراض أن $A'(a,b,c)$ يكون :

$$2a-b+c-4=0 \qquad (1$$
$$a+b+2c-5=0 \qquad (2$$

ولدينا (AA') عمودي على d ، فإذا كان $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً للمستقيم d ، فإن A' هي النقطة الوحيدة من d التي تحقق $\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u}=0$. علينا تعيين شعاع $\vec{u}$ يوجه المستقيم d ، ولهذا نبحث عن نقطتين B و C من d .

1. بافتراض $M(x,y,z)$ تقع على d فهي تحقق معادلتي كل من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$2x-y+z-4=0 \quad \text{و} \quad x+y+2z-5=0$$

2. لتعيين نقطة $B(x,y,z)$ من d نختار قيمة لـ x ولتكن مثلاً $x=0$ فيصبح الشرطان المذكوران $-y+z-4=0$ و $y+2z-5=0$. وبالحل نجد $y=-1$ و $z=3$ إذن $B(0,-1,3)\in d$.

ولتعيين نقطة $C(x,y,z)$ من d نختار قيمة لـ x ولتكن مثلاً $x=1$ فيصبح الشرطان المذكوران: $-y+z-2=0$ و $y+2z-4=0$. وبالحل نجد $y=0$ و $z=2$ إذن $C(1,0,2)\in d$. ومنه نستنتج شعاعاً موجهاً للمستقيم d : $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(1,1,-1)$.

3. لدينا $\overrightarrow{AA'}=(a-3,b+1,c-2)$، ومن $\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u}=0$ نستنتج أن $a+b-c=0$. أصبحت إحداثيات A' تحقق المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} 2a-b+c=4 & (1) \\ a+b+2c=5 & (2) \\ a+b-c=0 & (3) \end{cases}$$

بطرح (3) من (2) نجد $3c=5$ ومنه $c=\frac{5}{3}$ وبالتعويض في المعادلات المذكورة والحل المشترك نجد $a=\frac{4}{3}$ و $b=\frac{1}{3}$. إذن $A'(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. ومنه بُعد النقطة A عن الفصل المشترك d يساوي:

$$AA'=\sqrt{\left(3-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

طريقة ثانية. نستنتج من المعادلتين 2) و 1) اللتين تعيّنان d من $A'(a,b,c)$ أنّ

$$2a+c=4+b \qquad (1$$
$$a+2c=5-b \qquad (2$$

إذن بالجمع نجد $a+c=3$ ومنه $a=1+b$ و $c=2-b$. وهكذا نرى أنّ $A'(1+b,b,2-b)$ حيث b عدد حقيقي، أمّا مربّع المسافة $\overline{AA'}^2$ فيحسب بدلالة b كما يأتي

$$\overline{AA'}^2=(2-b)^2+(1+b)^2+b^2=3b^2-2b+5=3\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}$$

إذن أقصر مسافة بين A ونقطة A' من d هي $\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$ وهي المسافة المطلوبة، أمّا النقطة A' الموافقة فنحصل عليها عندما $b=\frac{1}{3}$ وهي إذن $A'(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$.

6 تقاطع مستقيم ومستو

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$. أثبت أنّ المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ وعيّن إحداثيات C نقطة التقاطع.

نحو الحلّ

- لإثبات وجود النقطة C علينا إثبات أنّ المستقيم (AB) لا يوازي المستوي $\mathcal{P}$. أعط شعاعاً موجّهاً للمستقيم (AB) وشعاعاً ناظماً على $\mathcal{P}$. واستنتج وجود C .
- علينا إذن تعيين (a,b,c) إحداثيات النقطة C .

1. علّل وجود ثابت k يحقّق $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.
2. استنتج عبارات a و b و c بدلالة k .
3. عيّن k اعتماداً على وقوع C في $\mathcal{P}$. واستنتج إحداثيات C .

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝: لإثبات وجود النقطة C علينا إثبات أنّ المستقيم (AB) لا يوازي المستوي $\mathcal{P}$. ولكن $\vec{n}(2,-3,1)$، و $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ فنلاحظ : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-6-12+5=-13\neq 0$ إذن $\vec{n}$ ليس عمودياً على $\overrightarrow{AB}$.
وبالتالي (AB) لا يوازي المستوي $\mathcal{P}$، فهو قاطع له في نقطة C.

✌ : لنفترض إحداثيات النقطة C هي (a,b,c) عندئذٍ :

1. النقاط A و B و C على استقامة واحدة، فيوجد $k\in\mathbb{R}$ يحقق : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.
2. لدينا $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ فيكون $(a-2,b+1,c)=(-3k,4k,5k)$ ومنه :
$$a=-3k+2\ ,\ b=4k-1\ ,\ c=5k$$
3. لما كانت النقطة C تقع في المستوي P، فإحداثياتها تحقق معادلته أي : $a-3b+c-5=0$ ومنه $k=\frac{2}{13}$ وبالتالي $C\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$.

7 مستقيم عمودي على مستوٍ

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل نقطتين $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$، ومستوياً $\mathcal{P}$ يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجّهين. أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي $\mathcal{P}$.

نحو الحلّ

☝ يكفي لإثبات المطلوب أن نبرهن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي $\mathcal{P}$.

1. أعطِ شعاعاً $\vec{w}$ موجّهاً للمستقيم (AB). وتيقّن أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.
2. أثبت أنّ $\vec{w}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

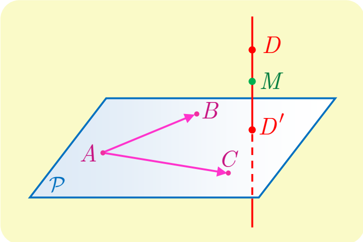
لإثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ، نبرهن تعامد المستقيم مع مستقيمين متقاطعين في المستوي. أي نبرهن تعامد $\overrightarrow{AB}$ مع شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي $\mathcal{P}$.

1. الشعاع $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=(-3,-5,-4)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)، ونلاحظ أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.
2. نحسب $\vec{w}\cdot\vec{u}=-3-5+8=0$ و $\vec{w}\cdot\vec{v}=-9+5+4=0$ فنجد $\vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$ ومن العلاقتين السابقتين نستنتج تعامد المستقيم (AB) مع المستوي $\mathcal{P}$.

8 المسقط القائم على مستوٍ

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$ و $C(1,5,5)$. يُطلب تعيين D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC).

نحو الحلّ



☝ لنرسم شكلاً مبسطاً. كيف نجد إحداثيات النقطة D'؟ نعلم أنّ المستقيم (DD') عمودي على المستوي (ABC)، فهو من ثَمّ عمودي على جميع مستقيمات هذا المستوي. الفكرة، إذن، تكمن في التعبير شعاعياً عن هذا التعامد.

1. اشرح لماذا $M(x,y,z)$ تنتمي إلى (DD') إذا وفقط إذا كان
$$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$
2. اكتب تحليلياً الشرطين السابقين.
3. استنتج أنّ (DD') هو مجموعة النقاط $M\left(x,\dfrac{62-5x}{13},\dfrac{3x-19}{13}\right)$ حيث x عددٌ حقيقي.

✌ علينا كتابة معادلة للمستوي (ABC) لأنّ D' هي النقطة M من (DD') التي تنتمي إلى هذا المستوي. ولكن أي شعاع موجّه للمستقيم (DD') هو شعاع ناظم على (ABC).

1. بإعطاء قيمتين مختلفتين للمتحوّل x أعطِ إحداثيات نقطتين مختلفتين من (DD').
2. استنتج مركّبات شعاعٍ موجّه للمستقيم (DD')، أي شعاعٍ ناظم على (ABC).
3. اكتب معادلة للمستوي (ABC).
4. عيّن قيمة x التي تجعل النقطة M من ☝.3 عنصراً من (ABC). استنتج إحداثيات D'.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝: علينا البحث عن إحداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC).

1. بافتراض $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (DD')، ولما كان (DD') عمودياً على المستوي (ABC)، كان $\overrightarrow{DD'}$ عمودياً على أي شعاع في المستوي (ABC). وبوجه خاص $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AC}$ وهذا يعني $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

2. لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$ و $\overrightarrow{DM}(x+11,y-9,z+4)$ إذن من $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ نستنتج
$$-x-2y+z+11=0 \qquad (1)$$
ولدينا $\overrightarrow{AC}(0,3,5)$ و $\overrightarrow{DM}(x+11,y-9,z+4)$ إذن من $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ نستنتج
$$3y+5z-7=0 \qquad (2)$$

3. نكتب العلاقتين (1) و (2)

$$\begin{aligned} -2y + \ z &= x - 11 \\ 3y + 5z &= 7 \end{aligned}$$

وبالحل نجد

$$\begin{aligned} z &= \ \tfrac{3}{13}x - \tfrac{19}{13} \\ y &= -\tfrac{5}{13}x + \tfrac{62}{13} \end{aligned}$$

إذن (DD') هو مجموعة النقاط $M\left(x, -\frac{5}{13}x + \frac{62}{13}, \frac{3}{13}x - \frac{19}{13}\right)$ حيث x عددٌ حقيقي.

✌ إن أي شعاع موجه للمستقيم (DD') هو شعاع ناظم على المستوي (ABC).

1. لتعيين نقطتين من (DD') بهدف تحديد شعاع موجه للمستقيم (DD'). نعلم أنّ $D(-11, 9, -4)$ تقع على هذا المستقيم، وباختيار $x = 2$ في صيغة M نستنتج أنّ $D_1(2, 4, -1)$ تقع على (DD') أيضاً. وعليه نستنتج شعاعاً موجّهاً للمستقيم (DD')، وفي الوقت نفسه ناظماً على المستوي (ABC)، هو

$$\vec{n} = \overrightarrow{DD_1}(13, -5, 3)$$

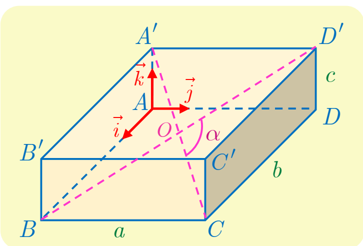
3. معادلة المستوي (ABC) هي إذن $13(x-1) - 5(y-2) + 3z = 0$ أو $13x - 5y + 3z = 3$.

4. لتعيين قيمة x التي تجعل النقطة M عنصراً من (ABC) أي التي تجعل M منطبقة على D'، يجب أن تحقق إحداثيات M معادلة المستوي (ABC) وبالتعويض نستنتج أنّ $x = 2$. إذن $(2, 4, -1)$ هي إحداثيات النقطة D'.

ملاحظة. يمكن أيضاً تعيين D' من الشرطين $D \neq D'$ و $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{DD'} = 0$.

قُدُماً إلى الأمام

9 $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في O. نضع $\alpha = \widehat{COD'}$، ونفترض أنّ $BC = a$ و $CD = b$ و $DD' = c$. نهدف في هذه المسألة إلى حساب $\cos\alpha$. نختار معلماً متجانساً $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{i}$ مرتبطين خطّياً، و $\overrightarrow{AD}$ و $\vec{j}$ مرتبطين خطّياً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{k}$ مرتبطين خطّياً.



① أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه O.

② أثبت أنّ $\cos\alpha = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. ادرس على وجه الخصوص حالة المكعّب.

الحل لنأخذ المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عندئذٍ :

① إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات :

$$A(0,0,0)\ ,\ B(b,0,0)\ ,\ C(b,a,0)\ ,\ D(0,a,0)$$
$$A'(0,0,c)\ ,\ B'(b,0,c)\ ,\ C'(b,a,c)\ ,\ D'(0,a,c)$$

النقطة O منتصف القطر $[A'C]$ فتكون إحداثياتها : $O(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2})$.

② لمّا كان $\overrightarrow{OC}=\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},-\frac{c}{2}\right)$، و $\overrightarrow{OD'}=\left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$ استنتجنا أنّ

$$\|\overrightarrow{OD'}\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|\overrightarrow{OC}\| \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'}=\frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)$$

ومنه

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\|\ \|\overrightarrow{OD'}\|} = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعباً، يصبح $a=b=c$ فيكون $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

10 في الحالتين الآتيتين، احسب بُعد A عن المستوي $\mathcal{P}$:

① $A(1,2,-3)$ و $\mathcal{P}: 2x-y+z+1=0$.

② $A(-1,1,1)$ و $\mathcal{P}$ هو المستوي المار بالنقاط $B(0,1,0)$ و $C(-1,1,0)$ و $D(-1,-2,-3)$.

الحل

① بعد A عن المستوي $\mathcal{P}$ هو : $\operatorname{dist}(A,\mathcal{P})=\dfrac{|2-2-3+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

② لنلاحظ أنّ $\overrightarrow{BA}=(-1,0,1)$ و $\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$ و $\overrightarrow{BD}=(-1,-3,-3)$. نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطياً، فهما يعرّفان مستوياً (BCD). كما إنّ $A\notin(BCD)$ لأنّه لا يوجد عددين α و β يحققان $\overrightarrow{BA}=\alpha\overrightarrow{BC}+\beta\overrightarrow{BD}$، (علل).

لتكن النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)، فيكون AA' هو البعد المطلوب.

بافتراض إحداثيات النقطة A' هي (a,b,c)، عندئذٍ $\overrightarrow{AA'}=(a+1,b-1,c-1)$، ولما كان $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AA'}$ كان $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$، ومنه $a=-1$. وبالمثل لما كان $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AA'}$ كان $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$، ومنه $-a-3b-3c+5=0$، وبالاستفادة من كون $a=-1$ نجد أنّ $c=2-b$.

إذن أثبتنا أنّ $A'(-1,b,2-b)$ و $\overrightarrow{AA'}=(0,b-1,1-b)$، (لاحظ أنّ $b\neq1$ وإلاّ كان $A=A'$).

وأخيراً $\overrightarrow{BA'}\perp\overrightarrow{AA'}$ لأنّ $A'\in(BCD)$ إذن $(1-b)(3-2b)=0$ ومنه $b=\frac{3}{2}$، إذن $A'(-1,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ و $\overrightarrow{AA'}=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. وخصوصاً $\operatorname{dist}(A,(BCD))=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

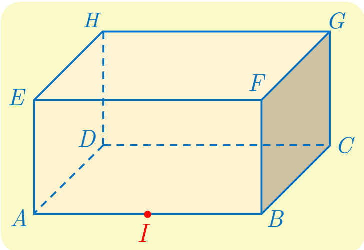
طريقة ثانية: بافتراض النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي عندئذٍ يوجد عددين حقيقيين a,b يحققان :

$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD}$ ومنه : $(x,y-1,z) = (-a-b,-3b,-3b)$ ومنه نحصل على المعادلات :

$\begin{cases} x = -a-b \\ y = -3b+1 \\ z = -3b \end{cases}$ وبالحل المشترك نحصل على معادلة المستوي (BCD) : $y-z-1=0$ ومنه بعد A

عن المستوي (BCD) يساوي : $\operatorname{dist}(A,(BCD)) = \dfrac{|1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

11 $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$. لتكن النقطة I منتصف $[AB]$.



① أعطِ معلماً متجانساً مبدؤه A ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة.

② اكتب معادلة للمستوي (IFH).

③ احسب بُعد G عن المستوي (IFH).

④ احسب بُعد G عن المستقيم (IH). أينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH) ؟

الحل

① لنأخذ المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \vec{k} = \overrightarrow{AE}$ فتكون عندئذ إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات في هذه الجملة بسيطة.

② معادلة المستوي (IFH): النقطة I هي منتصف $[AB]$ فيكون $I(1,0,0)$ ولدينا $F(2,0,1)$ و $H(0,1,1)$. المعادلة المطلوبة من الشكل $ax+by+cz=d$، وتحققها إحداثيات هذه النقاط الثلاث، إذن من I نستنتج $a=d$، ومن F نستنتج $2a+c=d$، وأخيراً من H نجد $b+c=d$.

إذن $a=d$ و $c=d-2a=-d$ و $b=d-c=2d$، فمعادلة المستوي المطلوبة هي

$$x+2y-z-1=0$$

③ ومنه بعد G عن المستوي (IFH) يساوي : $\operatorname{dist}(G,(IFH)) = \dfrac{|2+2-1-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

④ لتكن M نقطة من المستقيم (IH) فهي إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,1-t)$ و (H,t) حيث t عددٌ حقيقي. إذن $M(1-t,t,t)$، تنطبق M على المسقط القائم للنقطة G على (IH) إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{IH}$ أي $\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{IH} = 0$ ولكن $\overrightarrow{GM} = (-1-t,t-1,t-1)$

و $\overrightarrow{IH}=(-1,1,1)$ فشرط التعامد السابق يكافئ $3t-1=0$، ومنه تكون $M(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ هي المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (IH)، ومن ثَمّ

$$\mathrm{dist}(G,(IH))=GM=\sqrt{(2-\tfrac{2}{3})^2+(1-\tfrac{1}{3})^2+(1-\tfrac{1}{3})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

لاحظ أنّ $\mathrm{dist}(G,(IH))\neq\mathrm{dist}(G,(IFH))$، إذن المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) لا ينتمي إلى المستقيم (IH).

12 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}: x-y+z=0$$
$$\mathcal{Q}: 3x+z-1=0$$

احسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

الحل

لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، عندئذٍ إحداثياتها تحقق معادلة كلٍ منهما:

$$3a+c-1=0 \quad \text{و} \quad a-b+c=0$$

ومنه $c=1-3a$ و $b=c+a=1-2a$، إذن إحداثيات M هي $(a,1-2a,1-3a)$، وعليه يكون

$$\overline{MA}^2=(a-2)^2+(-1-2a)^2+(2-3a)^2=14a^2-12a+9$$
$$=14\left(a-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{45}{7}$$

وعليه أقصر مسافة بين A والمستقيم d هي $3\sqrt{\frac{5}{7}}$، وتحقّقها النقطة $(\frac{3}{7},\frac{1}{7},-\frac{2}{7})$ من d. إذن

$$\mathrm{dist}(A,d)=3\sqrt{\frac{5}{7}}$$

13 نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطة $A(2,1,2)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}: x+y-2z-1=0$$
$$\mathcal{Q}: x+y+z=0$$

① أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان.

② احسب بُعد A عن كلٍّ من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

③ استنتج بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

الحل

① المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان، لأنّ شعاعيهما الناظمين $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,-2)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,1,1)$ متعامدان كما يبين حساب جدائهما السلمي.

② $$\mathrm{dist}(A,\mathcal{P})=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{و} \quad \mathrm{dist}(A,\mathcal{Q})=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

③ لتكن $A_{\mathcal{P}}$ المسقط القائم للنقطة A على $\mathcal{P}$ وكذلك لتكن $A_{\mathcal{Q}}$ المسقط القائم للنقطة A على $\mathcal{Q}$، ولتكن A' المسقط القائم للنقطة A على الفصل المشترك d للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$. فيكون $(AA_{\mathcal{P}})$ عمودياً على $\mathcal{P}$ فهو إذن عمودي على $(A'A_{\mathcal{P}})$ (لأنّ الأخير محتوى في $\mathcal{P}$). لما كان $d \perp (AA')$ و $d \perp (AA_{\mathcal{P}})$ لأنّ d محتوى في $\mathcal{P}$ استنتجنا أنّ d عمودي على المستوي $(AA_{\mathcal{P}}A')$ وبوجه خاص $d \perp (A_{\mathcal{P}}A')$، ونبرهن بالمثل أنّ $d \perp (A_{\mathcal{Q}}A')$. نستنتج من ذلك أنّ النقاط A و $A_{\mathcal{P}}$ و A' و $A_{\mathcal{Q}}$ تقع في مستو واحد هو المستوي المار بالنقطة A والعمودي على d. لأنّ $\overrightarrow{AA_{\mathcal{P}}}$ عمودي على $\mathcal{P}$ فهو شعاع ناظم على $\mathcal{Q}$، وكذلك يكون $\overrightarrow{AA_{\mathcal{Q}}}$ شعاعاً ناظماً على $\mathcal{P}$، ولكنّ هذين المستويين متعامدان إذن $\overrightarrow{AA_{\mathcal{P}}} \perp \overrightarrow{AA_{\mathcal{Q}}}$ فالرباعي $AA_{\mathcal{P}}A'A_{\mathcal{Q}}$ مستطيل لأنّ فيه ثلاث زوايا قائمة. وعليه

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{AA_{\mathcal{P}}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AA_{\mathcal{Q}}}\right\|^2\\
&= \operatorname{dist}^2(A,\mathcal{P}) + \operatorname{dist}^2(A,\mathcal{Q})\\
&= \frac{25}{3} + \frac{2}{3} = 9
\end{aligned}$$

14 في كل من الحالات الآتية، نُعطى نقطتين A و B والمعادلة الديكارتية لمستوٍ $\mathcal{P}$. تيقّن في كل حالة أنّ المستقيم (AB) ليس عمودياً على $\mathcal{P}$. ثُمّ أعطِ معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B.

① $\mathcal{P} : x + y + z = 0 \qquad A(1,0,0), \quad B(0,1,1),$

② $\mathcal{P} : x + z = 0 \qquad A(1,2,0), \quad B(1,0,1),$

③ $\mathcal{P} : 2x + z - 4 = 0 \qquad A(2,3,-1), \quad B(1,1,1),$

الحل

لإثبات أن المستقيم (AB) لا يتعامد مع المستوي $\mathcal{P}$ يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ غير مرتبطين خطياً.

① $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ و $A(1,0,0)$، $B(0,1,1)$.

الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,1)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي $\mathcal{P}$.

للمستوي $\mathcal{Q}$ معادلة من الشكل $ax + by + cz = d$ حيث الأعداد (a,b,c,d) ليست جميعها معدومة. ولأن $\mathcal{Q}$ يمر بالنقطتين A و B فإنّ إحداثياتهما تحقق معادلته، ومنه $b + c = d$ و $a = d$، ومن تعامد الناظمين $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(a,b,c)$ نستنتج أيضاً أنّ $a + b + c = 0$. إذن $a = d = 0$ و $b + c = 0$. فمعادلة $\mathcal{Q}$ هي $b(y - z) = 0$. ولأنّ $b \neq 0$ نجد $\mathcal{Q} : y - z = 0$.

② في هذه الحالة نجد بأسلوب مماثل لما سبق $\mathcal{Q} : 2x - y - 2z = 0$.

③ في هذه الحالة نجد بأسلوب مماثل لما سبق $\mathcal{Q} : -2x + 5y + 4z - 7 = 0$.

15 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q}: x+y+z+1=0 \quad \text{و} \quad \mathcal{P}: x-2y+3z-5=0$$

① علّل كون المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين. نرمز بالرمز d إلى فصلهما المشترك.

② أثبت أنّ d هو مجموعة النقاط $M\left(1-\frac{5}{3}z,\frac{2}{3}z-2,z\right)$ عندما تتحوّل z في $\mathbb{R}$.

③ أعطِ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d.

④ اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ العمودي على كل من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$.

الحل لدينا $P: x-2y+3z-5=0$ و $Q: x+y+z+1=0$

① الناظمان $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-2,3)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,1,1)$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان.

② تنتمي $M(x,y,z)$ إلى المستقيم d، إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها معادلتي المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ أي:

$$\begin{cases} x-2y=5-3z & (1) \\ x+y=-1-z & (2) \end{cases}$$

وبالحل نجد $y=\frac{2}{3}z-2$ و $x=1-\frac{5}{3}z$. إذن إحداثيات d هي مجموعة النقاط $M\left(1-\frac{5}{3}z,\frac{2}{3}z-2,z\right)$ عندما تتحوّل z في $\mathbb{R}$.

③ نختار نقطتين من إعطاء قيمتين للعدد z. في حالة $z=0$ نجد $A(1,-2,0)$ من d، وفي حالة $z=3$ نجد $B(-4,0,3)$ من d. ومنه الشعاع الموجّه $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-5,2,3)$ للمستقيم d.

④ المستوي $\mathcal{R}$ عمودي على كل من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، إذن هو عمودي على فصلهما المشترك d ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً ناظماً. فمعادلته من الشكل $-5x+2y+3z=k$، وتتعين k بشرط مرور $\mathcal{R}$ بالنقطة $A(2,5,-2)$، فنجد أنّ $d=-26$، ومعادلة $\mathcal{R}$ هي $5x-2y-3z-6=0$.

16 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط:

$$A(2,1,3) \text{ و } B(1,0,-1) \text{ و } C(4,0,0) \text{ و } D(0,4,0) \text{ و } E(1,-1,1)$$

① أثبت أنّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

الحل

① نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CD} = (-4,4,0)$ و $\overrightarrow{CE} = (-3,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② لإثبات أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CED) نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-4)$ ونحسب

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-1)(-4) + (-1)(4) + 0 = 0$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = (-1)(-3) + (-1)(-1) + (-4)(1) = 0$$

أي $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE}$، فالمستقيم (AB) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (CED) وهو من ثَمّ عمودي على (CED).

17 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط:

$$A(2,4,3) \text{ و } B(4,-2,3) \text{ و } C(1,-1,1) \text{ و } D(3,3,-3)$$

① أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

② عيّن إحداثيات المسقط القائم D' للنقطة D على المستوي (ABC).

الحل

① نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB} = (2,-6,0)$ و $\overrightarrow{AC} = (-1,-5,-2)$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

② النقطة D' نقطة من المستوي (ABC) فيوجد عددان x و y يحقّقان $\overrightarrow{AD'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$، ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

لتعيين x و y نستفيد من كون $\overrightarrow{DD'}$ عمودياً على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فنعبر عن ذلك باستعمال الجداء السلمي:

$$0 = \overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$0 = \overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{cases} x\overrightarrow{AB}^2 + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ x\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

ولكن $\overrightarrow{AB} = (2,-6,0)$، و $\overrightarrow{AC} = (-1,-5,-2)$، و $\overrightarrow{AD} = (1,-1,-6)$ كما إنّ

$$\overrightarrow{AB}^2 = 40 \text{ و } \overrightarrow{AC}^2 = 30 \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28 \text{ و } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 \text{ و } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$$

فالجملة السابقة تكافئ

$$\begin{cases} 40x + 28y = 8 \\ 28x + 30y = 16 \end{cases}$$

فإذا طرحنا الثانية من ضعفي الأولى وجدنا $52x + 26y = 0$ ومنه $y = -2x$، وبالتعويض في الأولى مثلاً نجد $x = -\frac{1}{2}$ ومن ثَمّ $y = 1$. وأخيراً لأنّ $\overrightarrow{AD'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ نستنتج أنّ

$$\begin{bmatrix} x_{D'} - 2 \\ y_{D'} - 4 \\ z_{D'} - 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ومن ثَمّ $D'(0,2,1)$.

18 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $\Omega(2,-1,3)$ و $A(-1,0,1)$. نهدف إلى كتابة معادلة للكرة $\mathcal{S}$ التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

① احسب ΩA.

② لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ احسب ΩM^2 بدلالة x و y و z.

③ أثبت أنّ «$M(x,y,z)$ نقطةٌ من $\mathcal{S}$» إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط «$\Omega M^2 = \Omega A^2$» واستنتج معادلة للكرة $\mathcal{S}$ المطلوبة.

الحل

① $\Omega A = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$.

② لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ فيكون $\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$

③ نصف قطر الكرة المطلوبة هو $R = \Omega A = \sqrt{14}$. إذن $M \in \mathcal{S}$ إذا وفقط إذا $\Omega M = R$ وهذا يكافئ الشرط $\Omega A^2 = \Omega M^2$، ومنه معادلة $\mathcal{S}$ هي $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$.

19 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

① $\Omega(0,0,1)$ و $A(1,1,1)$.　② $\Omega(0,5,-1)$ و $A(1,-2,3)$.

الحل (التمرين السابق)

① : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

② : $x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 66$.

20 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r.

① $\Omega(1,2,3)$ و $r = 2$.　② $\Omega(0,5,-1)$ و $r = \sqrt{3}$.

الحل

① : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

② : $x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 3$.

21 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

① $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$ ② $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

③ $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$ ④ $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

الحل

نرد كل معادلة إلى الصيغة $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=\alpha$.

① تصبح المعادلة : $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$. فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها $\Omega=(1,-3,0)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$.

② تصبح المعادلة : $(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$. فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققها هي النقطة $\Omega=(5,0,-1)$.

③ تصبح المعادلة : $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$. فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها $\Omega=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

④ تصبح المعادلة : $(x-2)^2+y^2+z^2=-1$، فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق هذه المعادلة مجموعة خالية من النقاط .

22 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $\mathcal{P}: x+2y+3z=5$. اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

الحل

الكرة تمس المستوي $\mathcal{P}$ إذن بعد مركزها عن المستوي يساوي نصف قطر الكرة.

$$R=\operatorname{dist}(A,\mathcal{P})=\frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

ومعادلة الكرة المطلوبة هي $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$.

23 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$.

① أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

② ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

الحل

لدينا النقطتان $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$

① النقطة $M(x,y,z)$ تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ إذا وفقط إذا كان $\begin{bmatrix}2-x\\1-y\\2-z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2-x\\0-y\\2-z\end{bmatrix}=0$.

ومنه $x^2-4+y^2-y+(z-2)^2=0$.

② تكتب المعادلة السابقة بعد الإصلاح بالصيغة: $x^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$ ، وهي معادلة كرة مركزها $A(0,\frac{1}{2},2)$ ، ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

24 نتأمّل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. نضع $r=\dfrac{1}{2}AB$ ، ونعرّف I منتصف $[AB]$.

① أثبت أنّه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقّق المساواة : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$.

② أثبت أنّ مجموعة نقاط الفراغ التي تحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r ، وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

الحل

① لدينا I منتصف $[AB]$ و $r=\dfrac{1}{2}AB=IA$ ومنه

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$
$$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{MI}^2-r^2$$

② إذن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ تكافئ $MI^2=r^2$ وهذا يعني أنّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r ويكون من ثَمّ AB قطر فيها.

25 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$.

① أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $MA=2MB$.

② ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

③ أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{P}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $MA=MB$.

④ ما طبيعة المجموعة $\mathcal{P}$؟

الحل

① تحقق النقطة $M(x,y,z)$ الشرط $MA=2MB$ إذا وفقط إذا كان $MA^2=4MB^2$ وهذا يكافئ

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4\left(x^2+(y+1)^2+(z+1)^2\right)$$

الذي يكتب بعد الإصلاح بالصيغة $x^2+y^2+z^2+\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}y+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$.

② وهي تكافئ بعد الإتمام إلى مربعات كاملة $(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{5}{3})^2+(z+\frac{5}{3})^2=4$. إذن مجموعة النقاط M التي تحقق الشرط $MA=2MB$ هي الكرة التي مركزها $\Omega(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3})$ ونصف قطرها يساوي $R=2$.

③ تحقق النقطة $M(x,y,z)$ الشرط $MA=MB$ إذا وفقط إذا كان $MA^2=MB^2$ وهذا يكافئ

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=x^2+(y+1)^2+(z+1)^2$$

الذي يكتب بعد الإصلاح: $2x+4y+4z-1=0$.

④ المعادلة : $2x+4y+4z-1=0$ تمثل معادلة مستو . إذن مجموعة النقاط M التي تحقق الشرط $MA=MB$ هي مستو، وهو في الحقيقة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

26 نتأمّل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. وعدداً موجباً غير معدوم k . نعرّف $\mathcal{E}_k$ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقّق الشرط $AM=k\cdot BM$.

❶ حالة $k=1$.

① لتكن I منتصف $[AB]$ أثبت أنّ

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=\frac{MA^2-MB^2}{2}$$

② استنتج أنّ $\mathcal{E}_1$ هي المستوي $\mathcal{P}$ المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والعمودي على (AB) . (المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$).

❷ حالة $k\neq 1$.

① لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k)، ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$. أثبت أنّ

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{1-k^2}(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$$

② استنتج أنّ $\mathcal{E}_k$ هي الكرة S التي تقبل القطعة المستقيمة $[IJ]$ قطراً فيها.

الحل

❶ حالة $k=1$.

① لمّا كان I منتصف $[AB]$ كان $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$ وكان أيضاً $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ ومنه

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2\right)=\frac{MA^2-MB^2}{2}$$

وهو المطلوب .

② هنا $M\in\mathcal{E}_1$ يُكافئ الشرط $MA=MB$، وهذا يُكافئ استناداً إلى ما سبق $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=0$، أي إنّ M تنتمي إلى المستوي المار بالنقطة I والعمودي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$. فهو إذن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

❷ حالة $k\neq1$

① لأن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k) فإن : $\overrightarrow{IA}+k\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ إذن

$$\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=(1+k)\overrightarrow{MI} \qquad (1)$$

ولأن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$ فإن : $\overrightarrow{JA}-k\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ إذن

$$\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}=(1-k)\overrightarrow{MJ} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد $(1-k^2)\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=(\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-k\,\overrightarrow{MB})$ ومنه

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{1-k^2}(MA^2-k^2MB^2)=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$$

② نا $M\in\mathcal{E}_k$ يُكافئ الشرط $MA=kMB$ ، وهذا يُكافئ استناداً إلى ما سبق $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$ ، وهذا يعني أنّ M تنتمي إلى الكرة التي قطرها $[IJ]$ ، استناداً إلى ما أثبتناه في التمرين 24 .

27 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقاط

$A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$.

① أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$.

② أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_2$ للقطعة المستقيمة $[BC]$.

③ أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_3$ للقطعة المستقيمة $[CD]$.

④ علّل لماذا إذا تقاطعت المستويات $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ في نقطة واحدة Ω. كانت Ω مركزاً لكرة تمرّ بالنقاط A و B و C و D.

⑤ بحلِّ جملة من ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل أثبت أنّ المستويات $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ تتقاطع في نقطة واحدة Ω.

⑥ احسب نصف قطر الكرة S المارة بالنقاط A و B و C و D.

⑦ اكتب معادلة للكرة S المارة بروؤس رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل

لدينا النقاط : $A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$.

① إذا كانت M منتصف القطعة $[AB]$ كانت إحداثياتها $M(3,1,-\frac{1}{2})$. وكان $\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$ شعاعاً ناظماً على المستوي المحوري $\mathcal{P}_1$. فتكون معادلة المستوي $\mathcal{P}_1$ هي :

$$-2(x-3)+2(y-1)+5(z+\tfrac{1}{2})=0$$

أي $\mathcal{P}_1: -4x+4y+10z+13=0$.

② تنتمي $M(x,y,z)$ إلى $\mathcal{P}_2$ إذا وفقط إذا كان $MB^2=MC^2$ وهذا يكافئ

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2$$

وهذا يكافئ بعد الإصلاح $2x-10y-6z-7=0$ وهي معادلة $\mathcal{P}_2$.

③ نجد بمثل ما سبق معادلة $\mathcal{P}_3: -3x+3y-2z+5=0$.

④ إذا تقاطعت المستويات الثلاثة في نقطة Ω فهي تُحقّق $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ وهي إذن مركز الكرة المارة بالنقاط A و B و C و D.

⑤ علينا إذن حل جمل المعادلات

$$\begin{aligned} 4x - 4y - 10z &= 13 \\ 2x - 10y - 6z &= 7 \\ 3x - 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

من الأولى والأخيرة نجد $x - y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}z = \frac{13}{4} + \frac{5}{2}z$ ومنه $z = -\frac{1}{2}$ و $x - y = 2$. وبتعويض قيمة z و $x = y + 2$ في الثانية نجد $y = 0$ ومن ثَمّ $x = 2$. إذن $\Omega(2, 0, -\frac{1}{2})$.

⑥ نصف قطر الكرة يساوي مثلاً $R = \Omega D$ إذن $R = \sqrt{4 + 0 + (-3 + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{41}{4}}$.

⑦ إذن معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ هي : $(x-2)^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4}$.

3

المستقيمات والمستويات في الفراغ

1. المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة
2. التمثيلات الوسيطية
3. تقاطع مستقيمات ومستويات
4. تقاطع ثلاثة مستويات

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعيين المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة.
- التمثيل الوسيطي للمستقيم والمستوي.
- تقاطع المستقيمات والمستويات، وحل جمل المعادلات الخطية.

تَدرَّبْ صفحة 80

① النقطتان A و B نقطتان مختلفتان. في الحالات الآتية عيّن t التي تحقّق $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$.

❶ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-2)$ و $(B,1)$.

❷ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,3)$.

الحل

❶ $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$. ❷ $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

② أعطِ في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β).

❶ $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$ ❷ $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ❸ $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

الحل

❶ $\alpha=5,\beta=2$ ❷ $\alpha=3,\beta=-1$ ❸ $\alpha=4,\beta=-3$.

③ في الشكل الآتي التدريجات متساوية. عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.

❶ 

❷ 

الحل

❶ $\left.\begin{array}{r}5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\ 2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}\\ 2\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}=\vec{0}\end{array}\right\}$ ❷ $\left.\begin{array}{r}4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\ 6\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}=\vec{0}\\ 6\overrightarrow{CA}-4\overrightarrow{CB}=\vec{0}\end{array}\right\}$

④ نتأمّل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جِدْ عددين x و y بحيث $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

❶ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

❷ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$.

الحل

❶ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. ❷ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

⑤ نتأمّل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جِدْ الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ).

❶ $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ ❷ $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

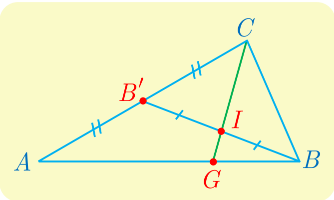
❸ $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$ ❹ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

الحل

❶ $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = -1$ ❷ $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

❸ $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -4$ ❹ $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$

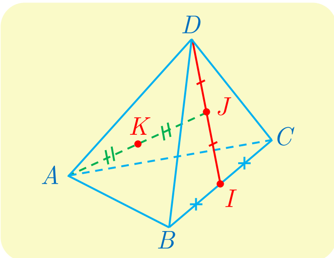
⑥ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ).
واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.



الحل

$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$ و $\lambda = 2$.

⑦ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ).



الحل

مثلاً في حالة نقطة كيفية M من الفراغ لدينا

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MK} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MJ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{MD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MI}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{MD} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right)\\
8\overrightarrow{MK} &= 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}
\end{aligned}$$

ومنه $\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 2$.

⑧ $ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

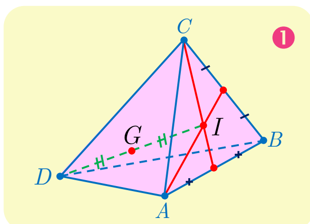
❶ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$.

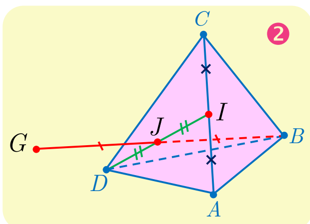
❷ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,-1)$ و $(D,-2)$.

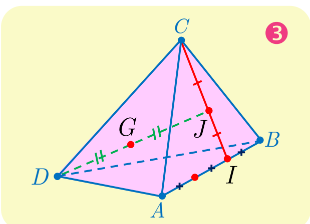
❷ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و $(D,6)$.

الحل

يبيّن الرسم الآتي حالات الإنشاء الثلاث:







.

تَدرَّبْ صفحة 84

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① أعط معادلة وسيطية للمستقيم d:

❶ المستقيم d يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ وموجه بالشعاع $\vec{u}(0,1,-1)$.

❷ $d=(AB)$ حيث $A(2,1,-1)$ و $B(3,-1,1)$.

الحل

❶ $\{(x,y,z)=(-1,2+t,-t),\ t\in\mathbb{R}$ ❷ $\{(x,y,z)=(2+t,1-2t,-1+2t),\ t\in\mathbb{R}$

② نتأمّل النقطتين $A(-2,1,0)$ و $B(2,3,1)$. أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من

❶ المستقيم (AB). ❷ القطعة المستقيمة $[AB]$.

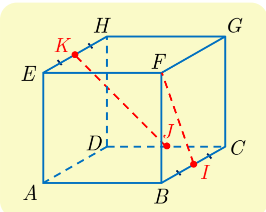
❸ نصف المستقيم $[AB)$. ❹ نصف المستقيم $[BA)$.

الحل

❶ $\begin{cases} x=-2+4t,\\ y=1+2t, \qquad t\in\mathbb{R}\\ z=t.\end{cases}$ ❷ $\begin{cases} x=-2+4t,\\ y=1+2t, \qquad t\in[0,1]\\ z=t.\end{cases}$

❸ $\begin{cases} x=-2+4t,\\ y=1+2t, \qquad t\geq 0\\ z=t.\end{cases}$ ❹ $\begin{cases} x=2+4t,\\ y=3+2t, \qquad t\leq 0\\ z=1+t.\end{cases}$

③ $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1. فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منصف $[EH]$. نتأمّل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



❶ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ).

❷ أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ)؟ هل تقع النقاط I و J و K و F في مستو واحد؟

الحل

❶ لمّا كان $I(1,\frac{1}{2},0)$ و $K(0,\frac{1}{2},1)$ كان $\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$، ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (IK):

$$(IK):\ \begin{cases} x=-t+1\\ y=1/2 \qquad , \quad t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

وبالمثل لمّا كان $J(\frac{1}{2},1,0)$ و $F(1,0,1)$ كان $\overrightarrow{FJ}(-\frac{1}{2},1,-1)$، ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (JF):

$$(JF):\ \begin{cases} x=-t/2+1\\ y=t \qquad , \quad t\in\mathbb{R}\\ z=-t+1\end{cases}$$

❷ يتقاطع المستقيمان (JF) و (IK) إذا وُجد s و t بحيث

$$\begin{aligned} -s/2+1 &= -t+1 \\ s &= 1/2 \\ -s+1 &= t \end{aligned}$$

من المعادلتين الثانية والثالثة نجد $s=t=\frac{1}{2}$، ولكنّ هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة الأولى، إذن المستقيمان (JF) و (IK) غير متقاطعين. وهما أيضاً غير متوازيين لأنّ الشعاعين $\overrightarrow{JF}$ و $\overrightarrow{IK}$ غير مرتبطين خطّياً فهما لا يقعان في مستو واحد. إذن لا تقع النقاط I و J و K و F في مستو واحد لأنّ المستقيمين (IK) و (FJ) غير متقاطعين وغير متوازيين.

تَدرَّبْ صفحة 87

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① في الحالات الآتية تحقّق من تقاطع المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ وأعطِ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

❶ $\mathcal{P}_1 : x+y=2$ و $\mathcal{P}_2 : x+z=1$.

❷ $\mathcal{P}_1 : -x+y+z=3$ و $\mathcal{P}_2 : 2x-y+2z=1$.

الحل

❶ المستويان متقاطعان لأنّ النقطة $M(1,1,0)$ (مثلاً) تنتمي إلى كلّ منهما. أمّا التمثيل الوسيطي للفصل المشترك فيمكن استنتاجه بحلّ جملة معادلتيّ المستويين بعد اختيار $x=t$ وسيطاً:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t+2, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-t+1 \end{cases}$$

❷ المستويان متقاطعان لأنّ النقطة $M(4,7,0)$ (مثلاً) تنتمي إلى كلّ منهما. أمّا التمثيل الوسيطي للفصل المشترك فيمكن استنتاجه بحلّ جملة معادلتيّ المستويين بعد اختيار $z=t$ وسيطاً:

$$\begin{cases} x=-3t+4 \\ y=-4t+7, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

② في الحالات الآتية، أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبيّن إذا كان $d \parallel d'$ أو كان d منطبقاً على d'.

❶ $d:\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases}$، $d':\begin{cases} 3x-y-2z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

❷ $d:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2 \\ z=t+1 \end{cases}$، $d':\begin{cases} x+y-2z=3 \\ x-y-2z=5 \end{cases}$

الحل

❶ $d':\begin{cases}x=t\\y=-t+1\\z=2t-1\end{cases}$ هنا لدينا $d \parallel d'$ ولكنّ المستقيمين غير منطبقين لأنه ليس هناك نقاط مشتركة.

❷ $d':\begin{cases}x=2t+4\\y=-1\\z=t\end{cases}$ هنا أيضاً لدينا $d \parallel d'$ ولكن المستقيمين غير منطبقين لأنه ليس هناك نقاط مشتركة.

③ في الحالات الآتية أثبت تقاطع المستقيم d مع المستوي $\mathcal{P}$ وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

❶ $d=(AB)$ حيث $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$ ، $\mathcal{P}: x+y+z=1$.

❷ d يمر بالنقطة $A(2,-1,0)$ ويوجهه الشعاع $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ و $\mathcal{P}: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{6}=1$.

الحل

❶ نجد تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم d

$$d:\begin{cases}x=2t-1\\y=2\\z=-4t+3\end{cases}$$

لإيجاد نقاط التقاطع نعوّض في معادلة المستوي فنجد نقطة واحدة هي $(2,2,-3)$.

❷ نجد تمثيلا وسيطيّاً للمستقيم d

$$d:\begin{cases}x=t+2\\y=-2t-1\\z=0\end{cases}$$

لإيجاد نقاط التقاطع نعوّض في معادلة المستوي فنجد نقطة واحدة هي $(0,3,0)$.

④ في الحالات الآتية، ادرس تقاطع المستقيم d والمستوي $\mathcal{P}$.

❶ $d:\begin{cases}x=2t-1\\y=t\\z=1-3t\end{cases}$ ، $\mathcal{P}: x-y+z=1,$

❷ $d:\begin{cases}x=s+1\\y=2s+1\\z=8s-3\end{cases}$ ، $\mathcal{P}: 2x+3y-z=0,$

الحل

❶ يتقاطع المستقيم والمستوي في نقطة واحدة هي $\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

❷ بتعويض قيم x و y و z في التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي نجد أنّ المستقيم والمستوي لايتقاطعان فهما متوازيان.

تَدرَّبْ صفحة 90

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. في كل من الحالات الآتية نعطي معادلات ثلاثة مستويات، حلّ الجملة الخطية الموافقة وبيّن إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط، أو في مستقيم مشترك، أو لا تشترك بأية نقطة:

❶
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 5x + y + z = -5 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x + 13y - 7z = -1 \\ \mathcal{P}_3 : & x - y + z = 1 \end{cases}$$

❷
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & x - 2y - 3z = 3 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x - y - 4z = 7 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$$

❸
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 0 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 0 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

❹
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

❺
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

❻
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & x + y + z = 1 \\ \mathcal{P}_2 : & x - 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

الحل

بحلّ الجملة الموافقة في كلّ مرّة نجد أنّه في الحالتين ❶ و ❷ تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة. وفي الحالتين ❸ و ❹ تتقاطع المستويات الثلاثة في مستقيم معطى بتمثيل وسيطي. وفي الحالتين الأخيرتين لا تتقاطع المستويات الثلاثة بأيّة نقطة وذلك وفق ما يأتي :

❶ $x = -8, y = 13, z = 22$

❷ $x = 2, y = 1, z = -1$

❸ $x = 7t, y = -t, z = -5t, t \in \mathbb{R}$

❹ $x = 7t, y = \frac{1}{7} - t, z = \frac{5}{7} - 5t, t \in \mathbb{R}$.

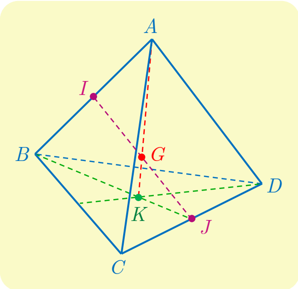
❺ $\{\ \}$

❻ $\{\ \}$

أنشطة

نشاط 1 مستقيمات متقاطعة في الفراغ

❶ خواص عامة خواص رباعي الوجوه



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما. ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوسه مزوّدة جميعها بالأمثال 1 ذاتها. وليكن K مركز ثقل المثلث BCD. وكذلك ليكن I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ بالترتيب.

① نسمي القطعة المستقيمة التي تصل الرأس بمركز ثقل الوجه المقابل **متوسطاً** في رباعي الوجوه. نهدف إلى إثبات تلاقي المتوسطات جميعها في نقطة واحدة هي النقطة G. ولهذا نسمّي G مركز ثقل رباعي الوجوه.

a. استعمل الخاصة التجميعية لتثبت أنّ G تقع على $[AK]$ وأنّ $AG=\frac{3}{4}AK$.

b. أثبت بالمثل أنّ G تقع على المتوسطات الثلاثة الأخرى.

② نهدف في هذا السؤال إلى إثبات أنّ القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات الأحرف المتقابلة في رباعي الوجوه تتلاقى أيضاً في G، وأنّ G تقع في منتصف كل منها.

a. أثبت أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I;2)$ و $(J;2)$. واستنتج أنّ G تقع في منتصف $[IJ]$.

b. أثبت صحة الخاصة المشار إليها في ②.

❷ مسألة مستقيمات متقاطعة

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما. ولنعرّف النقاط P و Q و R و S كما يأتي :

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

نريد إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و (RS).

①a. أثبت أنّ P هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B;4)$ و $(C;1)$. وأنّ Q هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A;1)$ و $(D;3)$.

b. ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;1)$ و $(D;3)$. بين أنّ G تقع على المستقيم (PQ).

② أثبت بأسلوب مماثل أنّ G تقع أيضاً على (RS)، فالمستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعان.

③ لتكن I منتصف $[AC]$. أثبت تلاقي المستقيمين (IG) و (BD)، وعيّن نقطة تقاطعهما.

الحل

❶ ①a. استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(K,3)$. إذن تنتمي G إلى القطعة المستقيمة $[AK]$ وتُحقّق $AG = \frac{3}{4}AK$.

①b. بسبب الدور المتناظر الذي تؤدّيه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أنّ G تقع على جميع متوسطات رباعي الوجوه وتقسم كلّاً منها بنسبة $1:3$.

②a. لمّا كان I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$، و J أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$، استنتجنا استناداً إلى الخاصة التجميعية أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$، أي إنّ G هي منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

②b. بسبب الدور المتناظر الذي تؤدّيه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أنّ G تقع أيضاً في منتصف جميع القطع المستقيمة التي يصل كل منها بين منتصفي ضلعين متقابلين في رباعي الوجوه.

❷ ①a. لمّا كان

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{PC} + \frac{4}{5}\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}) - \overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \vec{0}$$
$$\frac{3}{4}\overrightarrow{QD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{QA} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD}) - \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$$

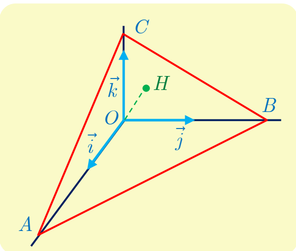
استنتجنا أنّ P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و $(C,1)$، و Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,3)$.

①b. استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,5)$ و $(Q,4)$، وعلى الخصوص G تقع على المستقيم (PQ).

② نبرهن بأسلوب مماثل لِما سبق أنّ R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و $(A,1)$، و S هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,3)$. إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,5)$ و $(S,4)$، وعلى الخصوص G تقع على المستقيم (RS).

③ لتكن T مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و $(D,3)$. لمّا كانت I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(A,1)$، إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(T,7)$ و $(I,2)$، وعلى الخصوص المستقيم (GI) يتقاطع مع (BD) في T وهي النتيجة المطلوبة.

نشاط 2 بعد نقطة عن مستوٍ



نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(a,0,0)$ و $B(0,b,0)$ و $C(0,0,c)$ حيث a و b و c أعدادٌ موجبةٌ تماماً. نهدف إلى إثبات علاقة بين بُعد O عن المستوي (ABC) والمسافات OA و OB و OC.

①a. أثبت أنّ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ معادلة للمستوي (ABC).

b. استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC).

② لتكن H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC).

a. احسب إحداثيات H بدلالة a و b و c.

b. تحقّق أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

c. نضع $h=OH$ أثبت أنّ $\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{h^2}$.

الحل

①a. هذا تحقّقٌ مباشر إذ يكفي أن نتيقّن أنّ إحداثيات النقاط A و B و C تحقّق المعادلة المعطاة. وليس هناك إلّا مستو واحد يمر بهذه النقاط الثلاث لأنها ليست على استقامة واحدة.

b. الناظم $\vec{n}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ على المستوي (ABC) هو شعاع توجيه للمستقيم Δ المار بالنقطة $O(0,0,0)$ عمودياً على المستوي (ABC). إذن يقبل Δ التمثيل الوسيطي: $t\in\mathbb{R}$;$(x,y,z)=\left(\frac{1}{a}t,\frac{1}{b}t,\frac{1}{c}t\right)$.

②a. إحداثيات H من الشكل $\left(\frac{1}{a}t,\frac{1}{b}t,\frac{1}{c}t\right)$ حيث تتعين t بشرط انتماء H إلى المستوي (ABC) أي بشرط تحقيق معادلته. ومنه $\frac{t}{c^2}+\frac{t}{b^2}+\frac{t}{a^2}=1$ ومنه $t=t_0=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ ومن ثَمّ

$$H\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$$

②b.نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{t_0}{a}-a,\frac{t_0}{b},\frac{t_0}{c}\right)$ و $\overrightarrow{BC}=(0,-b,c)$. إذن $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ فالمستقيم (AH) عمودي على (BC) وهو من ثَمّ ارتفاع في المثلث ABC. ونبرهن بالمثل أنّ كلّاً من (BH) و (CH) هو أيضاً ارتفاع في المثلث ABC. فالنقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

②c. حساب $h^2=OH^2$:

$$OH^2=t_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=t_0$$

ومنه

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{t_0}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

تمرينات ومسائل

1 ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن α عدداً حقيقيّاً، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

① تحقّق أنّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)، وكذلك أنّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α).

②a. أثبت أنّ H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α).

b. استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

الحل

① لمّا كان

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{ED}+(1-\alpha)\overrightarrow{EA}&=\alpha(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})-\overrightarrow{AE}\\&=\alpha\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\vec{0}\\\alpha\overrightarrow{FC}+(1-\alpha)\overrightarrow{FB}&=\alpha(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})-\overrightarrow{BF}\\&=\alpha\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BF}=\vec{0}\end{aligned}$$

استنتجنا أنّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)، و F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α).

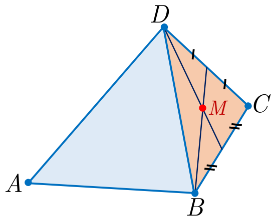
②a. لتكن H' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α). استناداً إلى ما سبق وإلى الخاصة التجميعية تكون H' مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,1)$ و $(F,1)$ فهي إذن منتصف $[EF]$ ومنه $H'=H$، والنقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α).

②b. استناداً إلى الخاصة التجميعية نفسها، H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2\alpha)$، و $(J,2\alpha)$. إذن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

2 $ABCD$ رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أنّ النقاط M و B و C و D تقع في مستوٍ واحد، ثُمّ وضّع النقطة M.

① $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$.

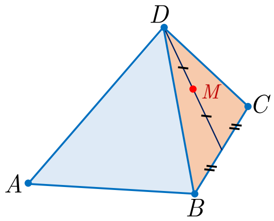
② $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$.



الحل

الفكرة هي حذف النقطة A من الصيغة المعطاة.

① الصيغة المعطاة تكافئ $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$ وهذا يعني أنّ M هي مركز ثقل المثلث BCD وهي تقع في مستويه.



② الصيغة المعطاة تكافئ $2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$ أي إنّ M تقع في منتصف المتوسط المرسوم من الرأس D في المثلث BCD وهي من ثَمّ تقع في مستويه.

3 نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نُعطى النقطتين $A(1,0,0)$ و $B(4,3,-3)$.

① أتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحوّل α في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ؟

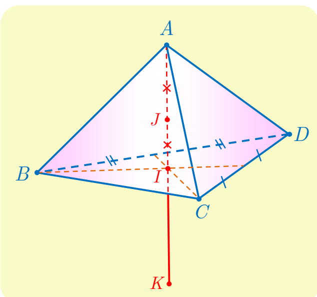
② أتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما تتحوّل x و y في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه؟

الحل

① نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}=3(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ إذن المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ هو نفسه المستقيم (AB) وهو من ثَمّ مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحوّل α في $\mathbb{R}$. الجواب إذن هو نعم.

② استناداً إلى الملاحظة السابقة، المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه، هو نفسه المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه. هو إذن المستوي (OAB) وهو من ثَمّ مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما تتحوّل x و y في $\mathbb{R}$. الجواب إذن هو نعم.

4 ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن I مركز ثقل المثلث BCD، و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I. عبِّر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.



الحل

فرضاً لدينا

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

وهذه تكتب $3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$ بالاستفادة من علاقة شال. إذن J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$. وبالمثل لدينا

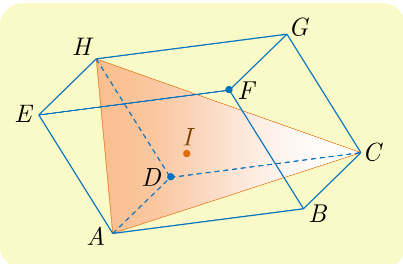
$$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

وهذه تكتب $-3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KD} = \vec{0}$ بالاستفادة من علاقة شال. إذن K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

لنتعلّم البحث معاً

5 الوقوع على استقامة واحدة

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح، وليكن I مركز ثقل المثلث AHC. أثبت أنّ النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة. وعيّن موقع I على $[DF]$.



نحو الحلّ

- الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي محاولة إيجاد ثابت k يحقق $\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DF}$، يبدو هذا صعباً للوهلة الأولى، ومنه تأتي الفكرة المعتادة القائمة على تحليل أحد هذه الأشعة أو جميعها والاستفادة من علاقة شال. أثبت انطلاقاً من تعريف I أنّ

$$3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}.$$

- ولكنّ $ABCDEFGH$ متوازي سطوح. استفد من ذلك لتبرهن أنّ

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF}$$

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

طريقة ثانية :

☝ يمكننا أيضاً التفكير بطريقة تحليلية. لإثبات الوقوع على استقامة واحدة لا نحتاج إلى معلم متجانس. لذلك نتأمّل المعلم $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

1. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DF).
2. احسب إحداثيات النقطة I.
3. تحقّق أنّ I تقع على المستقيم (DF) وعيّن قيمة t التي تحقق $\overrightarrow{DI}=t\overrightarrow{DF}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ النقطة I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$ إذن مهما كانت النقطة M في الفراغ كان $3\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MH}$، وبوجه خاص في حالة $M=D$ نجد

$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$$

إذ استفدنا من كون $ABCDEFGH$ متوازي سطوح لنستنتج أنّ $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BF}$، وهذا يبرهن أنّ النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة، وأنّ I نقطة من القطعة المستقيمة $[DF]$ تحقّق $DI=\frac{1}{3}DF$.

طريقة ثانية :

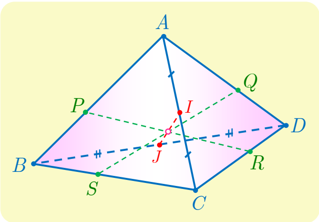
في المعلم المعطى لدينا $A(1,0,0)$ و $C(0,1,0)$ و $H(0,0,1)$ و $F(1,1,1)$. أمّا التمثيل الوسيطي للمستقيم (DF) فهو $(x,y,z)=(t,t,t), t\in\mathbb{R}$. ومن جهة أخرى إحداثيات النقطة I مركز ثقل المثلث (ACH) هي $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. فهي إذن النقطة من المستقيم (DF) الموافقة للوسيط $t=\frac{1}{3}$، والنقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة، ونجد مجدداً $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.

6 تعيين نقطة تلاقي مستقيمات

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $]0,1[$، ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تحقق

$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$. أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة.



نحو الحلّ

نعرف فعالية الخاصة التجميعية في حل مسائل التلاقي، وفرضيات مثل $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$ تعني أنّ P هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A و B.

1. بيّن أنّ P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-x)$ و (B,x).
2. عبّر بالمثل عن النقاط Q و R و S.

تأمّل إذن النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x)$ و $(C,1-x)$ و (B,x) و (D,x).

1. أثبت استناداً إلى الخاصة التجميعية أنّ G تقع على كل من القطع المستقيمة $[PR]$ و $[QS]$ و $[IJ]$.
2. ماذا تستنتج؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

في الحقيقة

$$x\overrightarrow{PB}+(1-x)\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}+x(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})=-\overrightarrow{AP}+x\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$$

- إذن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و $(A,1-x)$.
- ونجد بالمثل أنّ Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(A,1-x)$.
- و R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(C,1-x)$.
- وأخيراً S هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و $(C,1-x)$.

يلخّص الشكل المجاور هذه النتائج.

$$\begin{array}{ccccc} (A,1-x) & - & Q & - & (D,x) \\ P\,| & & G & & |\,R \\ (B,x) & - & S & - & (C,1-x) \end{array}$$

استناداً إلى الخاصة التجميعية، G هي مركز الأبعاد المتناسبة لكل من $(P,1)$ و $(R,1)$، أي هي منتصف $[PR]$.

ومن جهة أخرى G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$ و $(S,1)$ فهي أيضاً تقع في منتصف $[SQ]$. وأخيراً لأنّ I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-x)$ و $(C,1-x)$، وكذلك J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و (D,x)، استنتجنا أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2x)$ و $(J,2x)$. فالنقطة G تنتمي أيضاً إلى القطعة المستقيمة $[IJ]$.

نستنتج مما سبق أنّ G نقطة تلاقي القطع المستقيمة $[IJ]$ و $[PR]$ و $[SQ]$، فالمستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) تتلاقى في نقطة واحدة.

قُدماً إلى الأمام

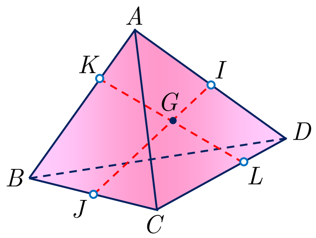
7 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تحقّق $AK = \frac{1}{3}AB$، و L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $CL = \frac{2}{3}CD$. وأخيراً I هي منتصف $[AD]$، و J هي منتصف $[BC]$. نعرّف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$.

① a. أثبت أنّ النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

b. أثبت أنّ النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

② استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

الحل



① I منتصف $[AD]$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,2)$. وكذلك J منتصف $[BC]$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$. إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4)$ و $(J,2)$. فالنقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

وبالمثل K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$. وكذلك L هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$ و $(C,1)$. إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(L,3)$. فالنقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

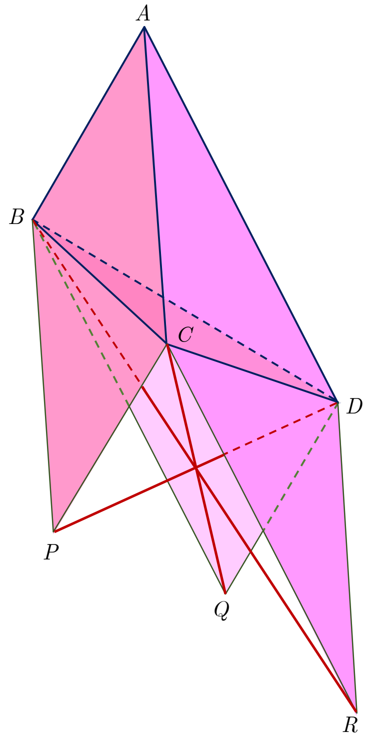
② المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في G فهما يعينان مستوياً واحداً، ومن ثَمّ تقع النقاط I و K و J و L في مستوٍ واحدٍ.

8 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. والنقاط P و Q و R هي نقاط تجعل $ABPC$ و $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات أضلاع. نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR).

① a. أثبت أنّ النقطة P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

b. عبّر بالمثل عن Q بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و D. وكذلك، عبّر عن R بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و C و D.

② بالاستفادة من نقطة I، وهي مركز أبعاد متناسبة مُختارة للنقاط A و B و C و D، ومن الخاصة التجميعية، أثبت تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR)، وعيّن موقع I على هذه المستقيمات.



الحل

① $ABPC$ متوازي الأضلاع $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$، وهذه تكتب $(1+1-1)\overrightarrow{AP}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}-1\overrightarrow{AA}$ إذن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(A,-1)$.

ونجد بالمثل أنّ Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(B,1)$ و $(D,1)$ و $(A,-1)$. وأنّ R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(C,1)$ و $(D,1)$ و $(A,-1)$.

② لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ و $(A,-1)$. نستنتج استناداً إلى الخاصة التجميعية أنّ

- I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,1)$ و $(D,1)$ أي منتصف $[PD]$.
- وكذلك I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$ و $(C,1)$ أي منتصف $[QC]$.
- وأخيراً I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,1)$ و $(B,1)$ أي منتصف $[RB]$.

والمستقيمات (DP) و (CQ) و (BR) تتلاقى في نقطة واحدة هي النقطة I التي تقع في منتصف كل من القطع المستقيمة $[PD]$ و $[QC]$ و $[RB]$.

9 نتأمّل ثلاث نقاط A و B و C من الفراغ، وعدداً حقيقياً k من المجال $[-1,1]$. نرمز إلى G_k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A;k^2+1)$ و $(B;k)$ و $(C;-k)$.

① مثّل النقاط A و B و C و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، وأنشئ النقطتين G_1 و G_{-1}.

② .a أثبت أنّه مهما كان العدد k من $[-1,1]$ كان $\overrightarrow{AG_k}=-\dfrac{k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$.

.b ادرس تغيرات التابع f المعرّف على المجال $[-1,1]$ بالصيغة $f(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$.

.c استنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحوّل k في المجال $[-1,1]$.

③ عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

④ عيّن المجموعة $\mathcal{F}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

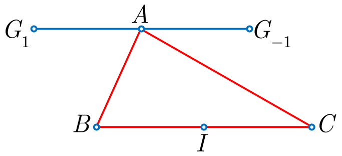
⑤ نزوّد الفضاء بمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ونفترض أنّ النقاط A و B و C معطاة كما يأتي:

$A(0,0,2)$ و $B(-1,2,1)$ و $C(-1,2,5)$، وأنّ G_k و $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ معرّفة كما في السابق.

.a احسب إحداثيات النقطتين G_1 و G_{-1}، وأثبت أنّ المجموعتين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ متقاطعتان.

.b احسب نصف قطر الدائرة Γ الناتجة من تقاطع المجموعتين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$.

الحل



① لأنّ $2\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$ ومنه $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$

وبالمثل $\overrightarrow{AG_{-1}}=-\overrightarrow{CI}$، الشكل المجاور يوضّح توضّع هذه النقاط.

② .a استناداً إلى تعريف G_k لدينا

$$(1+k^2)\overrightarrow{AG_k}=(1+k^2)\overrightarrow{AA}+k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}=-k(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-k\overrightarrow{BC}$$

ومنه العلاقة المطلوبة.

② .b التابع f مستمرّ واشتقاقي على المجال $[-1,1]$ ومشتقه $f'(x)=-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ سالبٌ على مجال الدراسة فللتابع f جدول التغيرات المبيّن جانباً.

x	-1		$+1$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

② .c نستنتج من الدراسة السابقة أنّه عندما ترسم k المجال $[-1,1]$ يرسم $f(k)$ المجال $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ والنقطة G_k ترسم القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$.

③ استناداً إلى تعريف G_1 و G_{-1} لدينا

$$2\overrightarrow{MG_{-1}}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$
$$2\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$

إذن تنتمي M إلى $\mathcal{E}$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $MG_1=MG_{-1}$ أي إذا وفقط إذا انتمت M إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$. ومنه $\mathcal{E}$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$.

④ استناداً إلى تعريف G_1 لدينا $2\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$، ومن جهة أخرى لدينا

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$$

إذن تنتمي M إلى $\mathcal{F}$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $MG_1=IA$ أي إذا وفقط إذا انتمت M إلى الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها يساوي IA. ومنه $\mathcal{F}$ هي الكرة التي مركزها G_1 وتمر بالنقطة B. لأنّ $\overrightarrow{BG_1}=\overrightarrow{IA}$.

⑤ G_1 هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,-1)$ ومنه

$$\begin{bmatrix} x_{G_1} \\ y_{G_1} \\ z_{G_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن $G_1(0,0,0)$، وبالمثل نجد $G_{-1}(0,0,4)$.

ونحسب $G_1B = \sqrt{6}$ و $G_1A = 2$. لمّا كانت A تقع في منتصف القطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$ استنتجنا أنّها تنتمي إلى $\mathcal{E}$ ولأنّ $G_1A < G_1B$ استنتجنا أنّ A تقع داخل الكرة $\mathcal{F}$، إذن المستوي $\mathcal{E}$ والكرة $\mathcal{F}$ يتقاطعان.

معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$ هي $z = 2$ وهو يبعد عن مركز الكرة $\mathcal{F}$ مسافة تساوي 2، ولمّا كان نصف قطر الكرة يساوي $\sqrt{6}$ استنتجنا استناداً إلى مبرهنة مبرهنة فيثاغورث أنّ نصف قطر الدائرة التي تمثّل $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ يساوي $\sqrt{2} = \sqrt{6-2^2}$.

10 نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$. ليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

① احسب إحداثيات G، وتحقّق أنّ (OG) عمودي على (ABC).

② تعرّف النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ المستوي $(A'B'C')$.

a. اكتب معادلة للمستوي $(A'B'C')$.

b. أثبت أنّ $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وُجد عدد k بحيث $\begin{cases} x = 1-k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$.

c. احسب إحداثيات النقطة K المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوي $(A'B'C')$.

③ *a*. احسب إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوي $(A'B'C')$.

b. أثبت توازي المستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL).

④ عيّن تقاطع المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ بدلالة النقاط المعرّفة سابقاً.

الحل

① لأنّ $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ استنتجنا أنّ $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. ونحسب

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

إذن $\overrightarrow{OG}$ عمودي على شعاعين موجّهين للمستوي (ABC) فالمستقيم (OG) عمودي على المستوي (ABC).

② a. معادلة المستوي $(A'B'C')$ من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$،
فإحداثيات النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ تحقّق هذه المعادلة ومنه نجد $2a+d=0$
و $2b+d=0$ و $3c+d=0$. إذن $d\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z+1\right)=0$، ولكن $d=0$ يقتضي أنّ
يكون $(a,b,c)=(0,0,0)$ وهذا خُلفٌ، فلابد أن يكون $d\neq 0$ ويمكننا الاختصار عليه لنجد معادلة
المستوي $(A'B'C')$ كما يأتي: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1$.

② b. لما كان $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ شعاعاً موجهاً للمستقيم (AC) الذي يمر بالنقطة $A(1,0,0)$ استنتجنا
كون $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$ أنّ

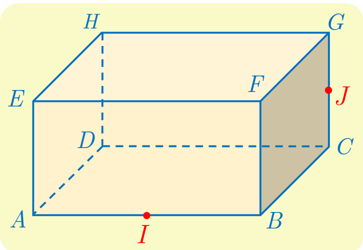
$$\begin{cases} x=1-k \\ y=0 \qquad ; \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$$

② c. تنتمي $K(1-k,0,k)$ من المستقيم (AC) إلى المستوي $(A'B'C')$ إذا حققت إحداثياتها
معادلته، أي إذا كان $k=-3$. فإحداثيات K هي $(4,0,-3)$.

③ a. نحسب L بأسلوب مماثل لحساب K فنجد $L(0,4,-3)$

③ b. نجد $\overrightarrow{KL}=(-4,4,0)=4\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{A'B'}$ فالمستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL) متوازية.

④ لدينا $K\in(AC)\subset(ABC)$ و $K\in(A'B'C')$ إذن K تقع على الفصل المشترك للمستويين
(ABC) و $(A'B'C')$. وكذلك لدينا $L\in(BC)\subset(ABC)$ و $L\in(A'B'C')$ إذن L تقع على
الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$. فالمستقيم (KL) هو الفصل المشترك للمستويين
(ABC) و $(A'B'C')$.



11 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$
و $BC=GC=1$. النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي
منتصف $[CG]$.

نتأمّل المعلم المتجانس $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

① احسب المسافتين DJ و IJ.

② أثبت أنّ المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان. واحسب $\cos\widehat{IJD}$.

③ a. أعط معادلة للمستوي (DIJ).

b. احسب بُعد H عن المستوي (DIJ).

④ احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.

⑤ a. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI).

b. احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI).

c. جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI).

الحل

① هنا $I(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $J(2,1,\frac{1}{2})$ إذن $IJ=\frac{3}{2}$ و $DJ=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

② من الواضح أنّ $DI=\sqrt{2}$ ومنه $DI^2+IJ^2=DJ^2$ فالمثلث DIJ قائم في I، والمستقيمان (DI) و (IJ) متعامدان. ونحسب $\cos\widehat{IJD}=\dfrac{IJ}{JD}=\dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

③ a. تنتمي $M(x,y,z)$ إلى المستوي (DIJ) إذا وفقط إذا وجد عددان s و t بحيث

$$\overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{ID}+s\overrightarrow{IJ}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{bmatrix}x-1\\y\\z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\1\\1/2\end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}x-1=-t+s\\ y=t+s\\ z=\frac{1}{2}s\end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية وتعويض قيمة s من الثالثة نجد $x+y-4z-1=0$ وهي معادلة المستوي (DIJ).

ويمكن بطريقة ثانية، أن نقول إنّ معادلة المستوي المنشود هي من الشكل $ax+by+cz+d=0$، حيث الأعداد $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ ولأنّه يمر بالنقاط I و D و J فإحداثياها تحقّق معادلته ومنه

$$a+d=0 \text{ و } b+d=0 \text{ و } 2a+b+\tfrac{1}{2}c+d=0$$

ومنه $a=b=-d$ و $c=4d$.

إذن $x+y-4z-1=0$ لأنّ $d\neq 0$ (وإلا كان $(a,b,c)=(0,0,0)$).

③ b. إحداثيات H هي $(0,1,1)$ إذن

$$\operatorname{dist}(H,(DIJ))=\frac{|0+1-4\times 1-1=0|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

④ حجم رباعي الوجوه $HDIJ$ يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته DIJ أي $\frac{1}{2}DI\cdot IJ$ (لأنّ المثلث قائم) بارتفاعه الذي يساوي $\operatorname{dist}(H,(DIJ))$. إذن

$$\mathcal{V}(HDIJ)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$$

⑤ a. لنبحث عن شعاع توجيه (α,β,γ) للمستقيم d المنشود. هذا الشعاع عمودي على كل من $\overrightarrow{DH}=(0,0,1)$ و $\overrightarrow{DI}=(1,-1,0)$. إذن $\gamma=0$ و $\alpha-\beta=1$. فيمكن مثلاً أن نأخذ $(1,1,0)$ شعاعاً موجهاً للمستقيم العمودي على المستوي (HDI)، ولأنّ d يمر بالنقطة J استنتجنا أنّ التمثيل الوسيطي المنشود هو

$$d:\ \begin{cases}x=2+t\\ y=1+t\,; \quad t\in\mathbb{R}\\ z=1/2\end{cases}$$

⑤ .b معادلة المستوي (HDI) هي $x+y=1$ لأنّ إحداثيات النقاط $I(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $H(0,0,1)$ غير الواقعة على استقامة واحدة تحقّق وضوحاً هذه المعادلة. وعليه إذا كانت إحداثيات J' هي (x,y,z) استنتجنا أنّ $(x=2+t, y=1+t, z=\frac{1}{2})$ حيث تتعين J' بشرط الانتماء إلى (HDI) أي يجب أن يكون $1=x+y=3+2t$ أو $t=-1$، ومنه $J'(1,0,\frac{1}{2})$.

⑤ .c الطريقة الأولى: $\operatorname{dist}(J,(HDI)) = JJ' = \sqrt{2}$.

الطريقة الثانية: لمّا كانت معادلة المستوي (HDI) هي $x+y=1$ و $J(2,1,\frac{1}{2})$ كان

$$\operatorname{dist}(J,(HDI)) = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}.$$

الطريقة الثالثة: مساحة المثلث القائم HDI تساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن حجم الهرم $HDIJ$ يساوي

$$\frac{1}{3} = \mathcal{V}(HDIJ) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(HDI) \times \operatorname{dist}(J,(HDI))$$

فنجد مجدداً أنّ $\operatorname{dist}(J,(HDI)) = \sqrt{2}$.

12 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل الهرم $S\text{-}OABC$ حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OS}=\vec{k}$. وليكن t عدداً يحقّق $0<t<1$. نهدف إلى تعيين مقطع الهرم بالمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $x+y=t$، وتعيين قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

① .a يقطع المستوي $\mathcal{P}$ المستقيمات (OA) و (OC) و (SC) و (SB) و (SA) في D و E و F و G و H بالترتيب. ارسم شكلاً وبيّن طبيعة هذا المقطع.

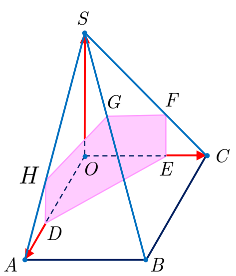
.b أثبت أنّ الرباعي $DEFH$ مستطيل، وعبّر عن مساحته بدلالة t.

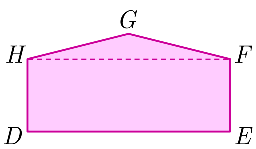
.c احسب إحداثيات النقطة G، ثُمّ مساحة المثلث FGH بدلالة t.

.d استنتج عبارة $\mathcal{A}(t)$ مساحة المقطع المنشود بدلالة t.

② ادرس اطراد $\mathcal{A}$ على المجال $]0,1[$، واستنتج قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

③ استنتج أنّ المستوي المار بمركز ثقل المثلث OAC ويقبل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.





الحل

① .a المقطع شكل خماسي مبيّن في الشكل المجاور:

.b من السهل تعيين إحداثيات D و E إذ نجد $D(t,0,0)$ و $E(0,t,0)$، ولأنّ المستوي $\mathcal{P}$ يوازي (Oz)، فإنّ كل من (EF) و (DH) يوازي (Oz) وكل من المثلثين ECF و DAH قائم ومتساوي الساقين.

إذن $\overrightarrow{DH} = (1-t)\vec{k} = \overrightarrow{EF}$، ولدينا وضوحاً $\overrightarrow{DE} \perp \vec{k}$ إذن $DEFH$ مستطيل. ولمّا كان $DE = \sqrt{2}\,t$ استنتجنا أنّ مساحة المستطيل $DEFH$ تساوي $\sqrt{2}\,t(1-t)$.

$c.$ يقبل المستقيم (SB) الشعاع $\overrightarrow{SB} = (1,1,-1)$ شعاعاً موجّهاً، ومن ثَمّ يوجد عدد حقيقي α يحقّق $\overrightarrow{SG} = \alpha\overrightarrow{SB}$ أي $G(\alpha,\alpha,1-\alpha)$، ولكنّ النقطة G تنتمي أيضاً إلى $\mathcal{P}$، فهي تحقّق معادلة $\mathcal{P}$، أي $2\alpha = t$ ومنه $G\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},1-\frac{t}{2}\right)$، ولدينا $F(0,t,1-t)$ و $H(t,0,1-t)$. فالمثلّث HFG مثلث متساوي الساقين طول قاعدته $\sqrt{2}\,t$ وارتفاعه $\frac{t}{2}$. إذن مساحة EGH تساوي $\frac{\sqrt{2}}{4}t^2$.

$d.$ نستنتج أنّ مساحة المقطع $DEFGH$ تعطى بالصيغة

$$\mathcal{A}(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + \sqrt{2}\,t(1-t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(4t - 3t^2\right)$$

② نجد بسهولة أنّ للتابع $\mathcal{A}$ جدول الاطراد الآتي على $]0,1[$:

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$\mathcal{A}'(t)$		$+$		$-$	
$\mathcal{A}(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	

فمساحة المقطع $DEFGH$ تبلغ قيمة عظمى عند $t = \frac{2}{3}$ وهي تساوي $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

③ ليكن $\mathcal{Q}$ المستوي الذي يقبل الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه، ويمر بمركز ثقل المثلث OAC أي النقطة $M(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$.

الشعاع $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{CA} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\overrightarrow{OS} = \vec{k}$. إذن $\overrightarrow{OB}$ شعاع ناظم على المستوي $\mathcal{Q}$. فمعادلة هذا المستوي من الشكل $x + y = d$، ويتعيّن d من شرط مرور هذا المستوي بالنقطة M إذن $d = \frac{2}{3}$. إذن معادلة $\mathcal{Q}$ هي $x + y = \frac{2}{3}$ فهو تحديداً المستوي $\mathcal{P}$ الموافق لقيمة $t = \frac{2}{3}$ التي تجعل مساحة المقطع أعظمية، وهي النتيجة المطلوب إثباتها.

4

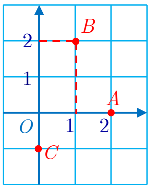
الأعداد العقدية

1. مجموعة الأعداد العقدية
2. مرافق عدد عقدي
3. الشكل المثلثي لعدد عقدي
4. خواص طويلة عدد عقدي وزاويته
5. الشكل الأسي لعدد عقدي
6. المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف الأعداد العقدية، والعمليات عليها.
- مرافق عدد عقدي وزاويته وطويلته.
- الأشكال الجبرية والمثلثية والأسية للأعداد العقدية، والانتقال من شكل إلى آخر.
- الجذور التربيعية للأعداد العقدية.
- حلّ المعادلات من الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد العقدية.

تَدرَّبْ صفحة 105



① ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة M في المستوي. وليكن $z_1 = 2 + xi$ و $z_2 = 3 + x + 4i$. اكتب z_1 و z_2 بالشكل الجبري في حالة $M = A$ أو $M = B$ أو $M = C$، حيث A و B و C مبينة في الشكل المجاور.

- عندما $M = A$ يكون $x = 2$ ومنه $z_1 = 2 + 2i$ و $z_2 = 5 + 4i$.
- عندما $M = B$ يكون $x = 1 + 2i$ ومنه $z_1 = i$ و $z_2 = 4 + 6i$.
- عندما $M = C$ يكون $x = -i$ ومنه $z_1 = 3$ و $z_2 = 3 + 3i$.

② في حالة عدد عقدي z نضع $P(z) = z^3 - (1-i)z^2 - (4-5i)z + (4+6i)$. احسب كلاً من $P(i)$ و $P(-2)$ و $P(3-2i)$.

الحل

هنا الحساب يعطينا $P(i) = 0$ و $P(-2) = 0$، ويمكن للطالب حساب $P(3-2i)$ بالتعويض مباشرة وسيجد أنّ $P(3-2i) = 0$ ولكنّ الحساب طويل. الفكرة المفيدة هي أن نتذكّر أنّ $P(i) = 0$ تعني أنّ كثير الحدود يقبل القسمة الإقليدية على $(z-i)$ وكذلك فإنّ $P(-2) = 0$ تعني أنّه يقبل القسمة على $(z+2)$، ولأنّ P من الدرجة الثالثة، استنتجنا وجود عددين λ و μ بحيث

$$P(z) = (z-i)(z+2)(\lambda z + \mu)$$

بمقارنة أمثال z^3 في الطرفين نجد $\lambda = 1$، والحدين الثابتين (الخاليين من z) نجد $-2i\mu = 4 + 6i$ ومنه $\mu = -3 + 2i$ إذن $P(z) = (z-i)(z+2)(z-3+2i)$، وعليه $P(3-2i) = 0$.

مثال: ليكن $Q(z) = 2z^3 - (5-4i)z^2 + (1-7i)z + (2+3i)$. احسب كلاً من $Q(1)$ و $Q(-i)$ و $Q(2-i)$.

③ بسّط العبارتين:

❶ $$z = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$$

❷ $w = (1+i)^8$.

الحل

❶ $z = \dfrac{2}{3}$

❷ ولأنّ $(1+i)^2 = 2i$ استنتجنا أنّ $w = 16$.

④ أعط الشكل الجبري للأعداد العقدية الآتية:

❶ $z_1 = (2+i)(3-2i)$ ❷ $z_2 = (1+i)^2$

❸ $z_3 = (1-i)^2$ ❹ $z_4 = (1+2i)(1-2i)$

❺ $z_5 = (3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})$ ❻ $z_6 = (4-3i)^2$

❼ $z_7 = \dfrac{4-6i}{3+2i}$ ❽ $z_8 = \dfrac{1}{2-i}$

❾ $z_9 = \dfrac{3-6i}{3+i} + \dfrac{4}{3-i}$ ❿ $z_{10} = \left(\dfrac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\dfrac{1+3i}{3+2i}\right)$

الحل

لكتابة عدد عقدي $z = \dfrac{a+ib}{c+id}$ بالشكل الجبري نضرب البسط والمقام بالعدد $c-di$

$$z = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

❶ $z_1 = 8-i$ ❷ $z_2 = 2i$

❸ $z_3 = -2i$ ❹ $z_4 = 5$

❺ $z_5 = 14$ ❻ $z_6 = 7-24i$

❼ $z_7 = -2i$ ❽ $z_8 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

❾ $z_9 = \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i$ ❿ $z_{10} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$

تدرّب صفحة 107

① اكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافق كل من الأعداد العقدية Z الآتية:

❶ $Z = (z-1)(z+i)$ ❷ $Z = \dfrac{3z^2 - 2iz + 4}{2z - 3i}$

❸ $Z = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i$ ❹ $Z = (1+2iz)^3$

الحل

❶ $\overline{Z} = (\overline{z}-1)(\overline{z}-i)$ ❷ $\overline{Z} = \dfrac{3\overline{z}^2 + 2i\overline{z} + 4}{2\overline{z} + 3i}$

❸ $\overline{Z} = \overline{z}^3 - 2i\overline{z}^2 + 1 + 3i$ ❹ $\overline{Z} = (1-2i\overline{z})^3$

② حلّ كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول z:

❶ $z - 2\overline{z} = 2$ ❷ $2iz + \overline{z} = 3+3i$

❸ $2\overline{z} = i-1$ ❹ $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = i$

الحل

❶ بأخذ مرافق طرفي المساواة $z-2\bar{z}=2$ نجد $\bar{z}-2z=2$، ثُم بتعويض $\bar{z}$ من الأخيرة في الأولى نجد $z-2(2z+2)=2$ ومنه $z=-2$.

❷ بأسلوب مماثل للحالة السابقة نجد $z=1-i$.

❸ خذ مرافق الطرفين لتجد $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

❹ احسب $\bar{z}$ ثُم استنتج أنّ $z=-i$.

تَدرَّبْ صفحة 110

① مثّل الأعداد الآتية في المستوي العقدي، ثُمّ أعط زاوية لكل منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ودون إجراء حسابات.

$$1+i, -1-i, 5, -3, 3i, 4-4i, -5i, 3+3i$$

الحل

z	$1+i$	$-1-i$	5	-3	$3i$	$4-4i$	$-5i$	$3+3i$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

② اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

❶ $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ❷ $z_2=2+2i\sqrt{3}$

❸ $z_3=4-4i$ ❹ $z_4=-2i$

❺ $z_5=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{i\sqrt{3}}{4}$ ❻ $z_6=\dfrac{4}{1-i}$

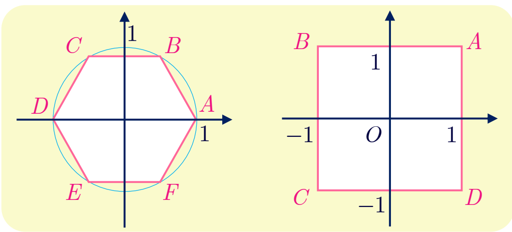
الحل

❶ $z_1=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ❷ $z_2=4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

❸ $z_3=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ ❹ $z_4=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

❺ $z_5=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ❻ $z_6=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

③ في الشكل المجاور مثّلنا في معلم متجانس مربّعاً $ABCD$ ومسدّساً $ABCDEF$. أعط الأعداد العقدية التي تمثّل كلّاً من رؤوس كلّ منهما.



الحل

في المربّع : $z_A = 1+i, z_B = -1+i, z_C = -1-i, z_D = 1-i$.

في المسدّس:

$z_A = 1, z_B = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_C = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_D = -1, z_E = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_F = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

④ في كل من الحالات الآتية، عيّن مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المعطى:

❶ $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$ ❷ $\arg z = -\dfrac{2\pi}{3}$

❸ $\arg z = \pi$ ❹ $|z| = 3$

❺ $\mathrm{Re}(z) = -2$ ❻ $\mathrm{Im}(z) = 1$

الحل

❶ نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل.

❷ نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية قدرها $-\frac{2\pi}{3}$ مع محور الفواصل.

❸ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

❹ دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 3 .

❺ مستقيم يوازي محور التراتيب ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(-2,0)$.

❻ مستقيم يوازي محور الفواصل ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(0,1)$.

تَدرَّبْ صفحة 113

I. ① اكتب بالشكل المثلثي كلّاً من الأعداد الآتية:

❶ $z = (1-i)^2$ ❷ $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ ❸ $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

الحل

❶ $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

❷ $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

❸ $z = 32\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

② نعطى العددين العقديين $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$.

❶ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$.

❷ اكتب بالشكل الجبري $\dfrac{z_1}{z_2}$.

❸ استنتج أنّ $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

الحل

❶ الحساب مباشر:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right)$$

❷ $\dfrac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

❸ من ❶ و ❷ نجد $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

③ اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $1 + i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$، وأخيراً احسب العددين:

❶ $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$ ❷ $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$

الحل

$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ و $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

❶ $z_1 = 2^5(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}) + 2^5(\cos\dfrac{5\pi}{3} - i\sin\dfrac{5\pi}{3}) = 32$

❷ $z_2 = 2^5(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}) - 2^5(\cos\dfrac{5\pi}{3} - i\sin\dfrac{5\pi}{3}) = -32\sqrt{3}\,i$.

④ اكتب بالشكل المثلثي كلّاً من الأعداد العقدية الآتية:

❶ $z = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$ ❷ $z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$

❸ $z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ ❹ $z = (1+i)^{2016}$

الحل

❶ $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ ❷ $z = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

❸ $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{36} + i\sin\frac{13\pi}{36}\right)$ ❹ $z = 2^{1008}\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

تدرَّبْ صفحة 116

① نضع $z_1 = e^{i\pi/3}$ و $z_2 = 3e^{-i\pi/4}$ و $z_3 = \sqrt{2}\,e^{2i\pi/3}$. جِد الشكل الأسي للأعداد الآتية:

$$z_1 z_2,\quad \frac{z_1}{z_2},\quad z_1^3,\quad z_1 z_2 z_3,\quad z_3^4,\quad \frac{z_2}{z_3}$$

الحل

$z_1 z_2$	$\frac{z_1}{z_2}$	z_1^3	$z_1 z_2 z_3$	z_3^4	$\frac{z_2}{z_3}$
$3e^{i\frac{\pi}{12}}$	$\frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$	$e^{i\pi}$	$3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

② اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

❶ $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ ❷ $z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\pi/3}$

❸ $z_3 = (1-\sqrt{2})e^{i\pi/4}$ ❹ $z_4 = (1+i\sqrt{3})^4$

❺ $z_5 = \dfrac{6}{1+i}$ ❻ $z_6 = (1+i\sqrt{3})^4 e^{4i\pi/3}$

❼ $z_7 = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ ❽ $z_8 = \dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$

❾ $z_9 = -12e^{i\pi/4}$ ❿ $z_{10} = 3ie^{i\pi/3}$

الحل

❶ $z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\pi/3}$ ❷ $z_2 = \sqrt{6}e^{i7\pi/12}$

❸ $z_3 = (\sqrt{2}-1)e^{i5\pi/4}$ ❹ $z_4 = 16e^{4i\pi/3}$

❺ $z_5 = 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ ❻ $z_6 = 16e^{2i\pi/3}$

❼ $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{8}\,e^{i5\pi/12}$ ❽ $z_8 = 256e^{-i\pi/6}$

❾ $z_9 = 12e^{i5\pi/4}$ ❿ $z_{10} = 3e^{i5\pi/6}$

③ نضع $Z = \dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\pi/3}$ بيّن أي الخواص الآتية صحيحة:

❶ $|Z| = 1$ ❷ $Z = -(1-i)e^{i\pi/3}$

❸ $\arg Z = -\dfrac{\pi}{12}$ ❹ $Z = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

الحل

الخواص الصحيحة هي ❶ و ❹.

تدرَّبْ صفحة 118

① حلّ في $\mathbb{C}$ كلاً من جمل المعادلات الآتية بالمجهولين z و z':

❶ $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

❷ $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

❸ $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$

الحل

❶ $z = -i, \quad z' = 2 - 2i$

❷ $z = 1 + i, \quad z' = 2 - i$

❸ $z = -1, \quad z' = 4i$

② حلّ في $\mathbb{C}$ كلاً من المعادلات الآتية:

❶ $2z^2 - 6z + 5 = 0$

❷ $z^2 - 5z + 9 = 0$

❸ $z^2 + z + 1 = 0$

❹ $z^2 - 2z + 3 = 0$

❺ $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

❻ $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0, \quad (\theta \in \mathbb{R})$

الحل

❶ $\left\{\frac{1}{2}(3 + i), \frac{1}{2}(3 - i)\right\}$

❷ $\left\{\frac{1}{2}(5 + i\sqrt{11}), \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{11})\right\}$

❸ $\left\{\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})\right\}$

❹ $\left\{1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}\right\}$

❺ $\left\{1 + \sqrt{2} + i, 1 + \sqrt{2} - i\right\}$

❻ $\left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$

مثلاً لحلّ المعادلة الأخيرة نكتب:

$$\begin{aligned} z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 &= z^2 - 2(\cos\theta)z + \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= (z - \cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2 \\ &= (z - \cos\theta - i\sin\theta)(z - \cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

③ جد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2+pz+q=0$ العددين $1+2i$ و $3-5i$ جذرين لها.

الحل

- **طريقة أولى:** إذا كان $1+2i$ و $3-5i$ جذرين للمعادلة $z^2+pz+q=0$ كان

$$\begin{aligned} -p &= (1+2i)+(3-5i) &= 4-3i \\ q &= (1+2i)(3-5i) &= 13+i \end{aligned}$$

ومنه $p=-4+3i, q=13+i$.

- **طريقة ثانية:** إذا كان $1+2i$ و $3-5i$ جذرين للمعادلة $z^2+pz+q=0$ حقّقاها، ومنه

$$(1+2i)^2+p(1+2i)+q=0$$
$$(3-5i)^2+p(3-5i)+q=0$$

وبالحلّ المشترك لجملة هاتين المعادلتين بعد إصلاحهما نجد $p=-4+3i, q=13+i$.

④ احسب جداء الضرب $(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$ ثُمّ حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$$

الحل

نلاحظ أنّ $z^4+4z^3+6z^2+4z-15 = (z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$.

$$\begin{aligned} z^4+4z^3+6z^2+4z-15 &= ((z+1)^2-4)((z+1)^2+4) \\ &= (z+3)(z-1)(z+1+2i)(z+1-2i) \end{aligned}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$ هي $\{-3,1,-1+2i,-1-2i\}$.

أنشطة

نشاط 1 كثيرات الحدود

نعمّم مفهوم التابع الكثير الحدود ليصبح أي تابع P معرّف على $\mathbb{C}$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{C}$ من الشكل:

$$z \mapsto a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ هي أعداد عقدية، وإذا كانت $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ حقيقية قلنا إنّ P ذو أمثال حقيقية. وإذا كان $a_n \neq 0$ قلنا إنّ درجة P تساوي n. نقبل صحة الخواص الآتية:

- إذا كان z_0 جذراً لكثير حدود P درجته n (أي $P(z_0)=0$) وُجِد كثير حدود Q درجته $n-1$ بحيث $P(z)=(z-z_0)Q(z)$.
- لكل كثير حدود P درجته n، عدداً من الجذور يساوي n في $\mathbb{C}$ على أن نكرر كل جذر بقدر درجة مضاعفته.

❶ مثال على كثير حدود من الدرجة الثالثة

نهدف إلى حل المعادلة $z^3-3z^2+3z+7=0$ (1)

① علّل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق: $z^3-3z^2+3z+7=(z+1)Q(z)$.

② عيّن Q ثُمّ حل المعادلة $Q(z)=0$.

③ لتكن A و B و C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (1) أثبت أنّ ABC مثلث متساوي الأضلاع.

❷ مثال على كثير حدود من الدرجة الرابعة

نهدف إلى حل المعادلة $z^4-6z^3+24z^2-18z+63=0$ (2)

① أثبت بوجه عام أنّه إذا كانت **أمثال P حقيقية**، وكان z_0 جذراً للمعادلة $P(z)=0$ كان $\overline{z}_0$ أيضاً جذراً للمعادلة $P(z)=0$.

② تحقق أنّ $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة (2). ماذا تستنتج بالاستفادة من ①؟

③ استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يجعل المعادلة (2) تكتب $(z^2+3)Q(z)=0$.

④ حلّ المعادلة (2). لتكن A و B و C و D نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (2) أثبت أنّ هذه النقاط تقع على دائرة واحدة. عيّن مركزها ونصف قطرها.

الحل

❶ نضع $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$.

① نلاحظ أنّ $P(-1)=0$، إذن يقبل P القسمة على $(z+1)$ فيوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق: $P(z)=(z+1)Q(z)$.

② بإجراء قسمة إقليدية لكثير الحدود $P(z)$ على $(z+1)$ نجد $Q(z)=z^2-4z+7$. وحلول المعادلة $Q(z)=0$ هي $\left\{2+i\sqrt{3},2-i\sqrt{3}\right\}$.

③ لنضع $z_A=-1$ و $z_B=2-i\sqrt{3}$ و $z_C=2+i\sqrt{3}$. لنحسب أطوال أضلاع المثلث

$$AB=\left|z_B-z_A\right|,AC=\left|z_C-z_A\right|,BC=\left|z_C-z_B\right|$$

فنجد مباشرة أنّ أطوال الأضلاع الثلاثة متساوية وتساوي $2\sqrt{3}$، فالمثلث متساوي الأضلاع.

❷ ① ليكن كثير الحدود ذو الأمثال الحقيقيّة $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$.

إذا كان وكان z_0 جذراً للمعادلة $P(z)=0$ كان

$$a_nz_0{}^n+\cdots+a_1z_0+a_0=0$$

فإذا أخذنا مرافق طرفي المساواة السابقة، بعد ملاحظة أنّ الأمثال حقيقيّة، وجدنا

$$a_n\overline{z}_0{}^n+\cdots+a_1\overline{z}_0+a_0=0$$

ومنه $P(\overline{z}_0)=0$، إذن $\overline{z}_0$ هو أيضاً جذر للمعادلة $P(z)=0$.

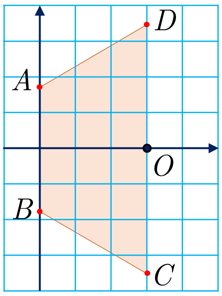
② نضع $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$. يُمكن التحقّق بسهولة أنّ $P(i\sqrt{3})=0$.
وبالاستفادة من ① نستنتج أنّ $P(-i\sqrt{3})=0$.

③ نستنتج من ② أنّ P يقبل القسمة على كلٍّ من $(z-i\sqrt{3})$ و $(z+i\sqrt{3})$ فهو يقبل القسمة على جداء ضربهما أي z^2+3 ، إذن يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقّق $P(z)=(z^2+3)Q(z)$ فالمعادلة (2) تكتب $(z^2+3)Q(z)=0$. وبإجراء قسمة إقليدية لكثير الحدود $P(z)$ على z^2+3 أو بإخراج هذا المقدار عاملاً مشتركاً كما يأتي:

$$\begin{aligned}P(z)&=z^4-6z^3+24z^2-18z+63\\&=(z^2+3)z^2-6z(z^2+3)+21z^2+63\\&=(z^2+3)(z^2-6z+21)\end{aligned}$$

فنجد $Q(z)=z^2-6z+21=(z-3)^2+12$.

④ نستنتج من الصيغة $(z^2+3)\left((z-3)^2+12\right)=0$ للمعادلة (2) أنّ حلولها هي
$z_A=i\sqrt{3}$ و $z_B=-i\sqrt{3}$ و $z_C=3-2i\sqrt{3}$ و $z_D=3+2i\sqrt{3}$.



لمّا كانت النقطتان B و C نظيرتا A و D بالترتيب بالنسبة إلى المحور الحقيقي، أو محور الفواصل، استنتجنا أنّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين. فهو إذن رباعي دائري.

وإذا كان O مركز الدائرة المارة برؤوسه، وجب أن ينتمي O إلى محور التناظر، فالعدد العقدي x الذي تمثّله النقطة O هو عدد حقيقي. ولأنّ O يبعد المسافة نفسها عن كل من D و A استنتجنا أنّ $\left|x-z_A\right|=\left|x-z_D\right|$ أي

$$\left|x-i\sqrt{3}\right|^2=\left|x-3-2i\sqrt{3}\right|^2$$

ومنه نجد $x=3$. إذن مركز الدائرة O هو النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z_O=3$ أمّا نصف قطر الدائرة فيساوي مثلاً $OA=2\sqrt{3}$.

ملاحظة: نجد من الحساب السابق أنّ O يقع في منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ أي إنّ $[CD]$ هو قطر الدائرة المارة برؤوس الرباعي $ABCD$. وبوجه خاص: المثلث CAD قائم في A وهذا ما يمكن أن نتحقّق من صحته مباشرة بحساب أطوال الأضلاع، وتطبيق عكس مبرهنة فيثاغورث. فنجد طريقة أخرى لحل السؤال.

نشاط 2 الجذور التربيعية لعدد عقدي

نُعطى عدداً عقدياً غير الصفر $w=a+ib$ ونهدف إلى حل المعادلة $z^2-w=0$ (∗). هناك أسلوبان ممكنان:

- يمكن أن نكتب $w = Re^{i\varphi}$ ثمّ نبحث عن $z = re^{i\theta}$ تحقّق $(*)$. تيقّن عندئذ أنّ $r = \sqrt{R}$ وأنّ $\theta = \frac{\varphi}{2}\ (2\pi)$ أو $\theta = \frac{\varphi}{2} + \pi\ (2\pi)$، إذن $z \in \{z_0, -z_0\}$ حيث $z_0 = \sqrt{R}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$.
- ويمكن أن نبحث عن $z = x + iy$ تحقّق $(*)$. وهنا علينا حل جملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

هنا يمكننا أيضاً أن نستفيد من المعادلة المُساعدة $|z|^2 = |w|$ التي تنتج مباشرة من $(*)$ وتعطي المعادلة (3) الآتية: $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. وهكذا نحل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين (1) و (3) ثُمّ نختار من مجموعة الحلول الناتجة تلك التي تحقّق المعادلة (2).

❶ تعيين الجذور التربيعية للعدد i

① اكتب i بالشكل الأسي.　　　② حل المعادلة $z^2 = i$.

❷ تعيين الجذور التربيعية للعدد $1 + i$

① أثبت أنّ حل المعادلة $(x + iy)^2 = 1 + i$ في $\mathbb{R}$. يؤول إلى تعيين x و y تحقّقان

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

② حل المعادلة $z^2 = 1 + i$.

③ حل المعادلة $z^2 = 1 + i$ بأسلوب ثان، واستنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{8}$.

الحل

❶ ① $i = e^{i\pi/2}$.

② هنا $R = 1, \varphi = \pi/2$. هناك إذن حلّان للمعادلة هما $z_0 = e^{i\pi/4}$ و $z_1 = -z_0 = -e^{i\pi/4}$.

❷ ① حلُّ المعادلة $(x + iy)^2 = 1 + i$ يكافئ حلّ المعادلة $(x^2 - y^2) + 2ixy = 1 + i$، وهذا يكافئ حلّ جملة المعادلتين الحقيقيّتين

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

وبحساب طويلة الطرفين في المعادلة العقديّة نجد $x^2 + y^2 = 1$. إذن، إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة $(x + iy)^2 = 1 + i$ كان (x, y) حلّاً لجملة المعادلات :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

وبالعكس يُمكن التحقق بسهولة أنّه إذا كان (x, y) حلاً للجملة $(*)$ كان $(x + iy)^2 = 1 + i$.

② من المعادلتين الأولى والثانية نجد $x^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ومن ثَمّ

$$x \in \left\{\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}\right\}$$

وبالاستفادة من المعادلة الثالثة نحسب $y = 1/2x$ لنجد قيمة y الموافقة لكل x :

$$(x,y) \in \left\{\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)\right\}$$

أو

$$(x,y) \in \left\{\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\right)\right\}$$

③ بملاحظة أنّ $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ يمكننا حل $z^2 = 1+i$ باستخدام الطويلة والزاوية لنجد أنّ للمعادلة حلّان هما $z_0 = z\sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8}$ و $z_1 = -z_0 = -\sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8}$.

بالمقارنة بين الحلول في ② و ③ نجد: $\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2} = \sqrt[4]{2}\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sqrt[4]{2}\sin\dfrac{\pi}{8}$

ومنه نجد:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

نشاط 3 الأعداد العقدية والتوابع المثلثية

عندما يكون z و z' عددين عقديين طويلة كل منهما تساوي الواحد وزاويتاهما a و b بالترتيب، تكون طويلة zz' مساوية الواحد وزاويته $a+b$. بكتابة zz' بطريقتين أثبت أنّ

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ و $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
- ما العلاقات التي تستنتجها عند استبدال $-b$ بالمقدار b ؟ استنتج أن

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big),\quad \sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$
$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big),\quad \cos a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big)$$

- ما العلاقات التي تستنتجها عند تعويض $a+b=p$ و $a-b=q$؟
- استفد مما سبق لتحل في $\mathbb{R}$ المعادلة المثلثية : $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$.

الحل

- لدينا $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ ، وبالعودة إلى الكتابة المثلّثيّة نجد:

$$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

أو بشكل آخر:

$$(\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

ونحصل على العلاقتين المطلوبتين بمقارنة الجزأين الحقيقي والتخيلي.

أي

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad (1)$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad (2)$$

- عند استبدال $-b$ بالمقدار b نجد:

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad (1')$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \qquad (2')$$

وبجمع المساواتين (1) و $(1')$ طرفاً مع طرف، ثُمّ القسمة على 2 نجد:

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$$

وبطرحهما والقسمة على 2 نجد:

$$\sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

وبجمع المعادلتين (2) و $(2')$، ثمَّ القسمة على 2 نجد:

$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$$

وبطرحهما والقسمة على 2 نجد

$$\cos a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big)$$

- لدينا $a=\dfrac{p+q}{2}, b=\dfrac{p-q}{2}$. وبالتعويض في المتطابقات السابقة نجد:

$$\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

- بالاستفادة من العلاقات السابقة تُكتب المعادلة المعطاة بالشكل

$$-2\sin\frac{3x+5x}{2}\sin\frac{3x-5x}{2} = 2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2}$$

أو $\sin 4x\sin x = \sin 4x\cos 2x$ أو $\sin 4x\big(\sin x-\cos 2x\big)=0$.

إمّا $\sin 4x = 0$ وهذا يكافئ $x=\frac{1}{4}k\pi$ حيث k عدد صحيح.

أو $\sin x = \cos 2x$ وهذه تكافئ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 2x$ فإمّا $x=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi k$ حيث k عدد صحيح، أو $x=-\frac{1}{2}\pi+2\pi k$ حيث k عدد صحيح.

والخلاصة: مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي

$$\left\{\tfrac{1}{4}\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

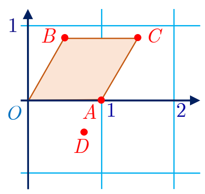
تمرينات ومسائل

1 لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثّل بالترتيب الأعداد العقدية $a=1$ و $b=e^{i\pi/3}$ و $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}$.

① اكتب c بالشكل الأسي، واكتب d بالشكل الجبري.

② .a وضّع النقاط A و B و C و D في مستو مزوّد بمعلم متجانس.

.b أثبت أنّ الرباعي $OACB$ معيّن.



الحل

① $c=\sqrt{3}e^{i\pi/6}$ ، $d=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

② .a التوضّع التقريبي للنقاط A و B و C و D :

.b مثلاً: بحساب أطوال أضلاع الرباعي نجد أنّ $OA=AC=CB=BO=1$، فالرباعي $OACB$ معيّن.

2 ① اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة :

$$(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0 \qquad (1)$$

② أثبت أنّ النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

الحل

① مثلاً بالإتمام إلى مربع كامل نجد

$$\begin{aligned}(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)&=\Big((z+\tfrac{3}{2}\sqrt{3})^2+\tfrac{9}{4}\Big)\Big((z-\tfrac{3}{2}\sqrt{3})^2+\tfrac{9}{4}\Big)\\&=\Big(z+\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}i\Big)\Big(z+\tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{2}i\Big)\Big(z-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}i\Big)\Big(z-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{2}i\Big)\\&=\Big(z-3e^{-5i\pi/6}\Big)\Big(z-3e^{5i\pi/6}\Big)\Big(z-3e^{-i\pi/6}\Big)\Big(z-3e^{i\pi/6}\Big)\end{aligned}$$

فحلول المعادلة (1) مكتوبة بالشكل الأسي هي :

$$\left\{a=3e^{-i\pi/6}, b=3e^{i\pi/6}, c=3e^{5i\pi/6}, d=3e^{-5i\pi/6}\right\}.$$

② نلاحظ أنّ $b=\overline{a}$ و $c=-a$ وأخيراً $d=\overline{c}=-b$.

من المساواتين $c=-a$ و $d=-b$ نستنتج أنّ قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي الأضلاع، ومن المساواتين $d=\overline{c}$ و $b=\overline{a}$ نستنتج أنّ القطر $[BD]$ هو نظير $[AC]$ بالنسبة إلى التناظر المحوري الذي محوره هو المحور الحقيقي (محور الفواصل) فلهما الطول نفسه. إذن قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان ومتساويان فهو مستطيل.

3 بسّط كتابة العدد العقدي : $Z=\dfrac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$، موضّحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الحل

نلاحظ أنّ طويلة المقام تساوي $(1+\cos x)^2+\sin^2 x=2(1+\cos x)$ فهو ينعدم فقط في حالة كون x من الشكل $\pi+2\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. إذن يكون Z معرّفاً في حالة $x\notin\{\pi(1+2k):k\in\mathbb{Z}\}$ وعندئذ

$$Z=\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}=\frac{e^{-ix}(e^{ix}+1)}{1+e^{ix}}=e^{-ix}$$

ملاحظة: يمكن أيضاً اعتماد طريقة الضرب بمرافق المقام كما يأتي:

$$\begin{aligned}
Z&=\frac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}=\frac{(1+\cos x-i\sin x)^2}{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}\\
&=\frac{(1+\cos x)^2-\sin^2 x-2i(1+\cos x)\sin x}{2(1+\cos x)}\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\cos x-\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-2i\sin x\right)\quad:\ \sin^2 x=1-\cos^2 x\\
&=\frac{1}{2}\big(1+\cos x-(1-\cos x)-2i\sin x\big)=\cos x-i\sin x=e^{-ix}
\end{aligned}$$

ويمكن أيضاً التعبير عن كل من $1+\cos x$ و $\sin x$ بدلالة النسب المثلثية لنصف x.

4 ① ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أنّ $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي.

② نفترض أنّ $u\neq 1$ وأنّ $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي أثبت أنّه إمّا أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u|=1$.

الحل

① لأنّ طويلة u تساوي الواحد استنتجنا أنّ $u\bar{u}=|u|^2=1$ إذن $\bar{u}=\dfrac{1}{u}$. الآن لنضع $w=\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عندئذ نحسب مباشرة

$$\bar{w}=\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}=\frac{\bar{z}-\dfrac{z}{u}}{1-\dfrac{1}{u}}=\frac{u\bar{z}-z}{u-1}=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}=w$$

وينتج من كون $\bar{w}=w$ أنّ العدد w عددٌ حقيقي.

② كما في الحالة السابقة نضع $w=\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ ، ولنحسب الفرق $w-\overline{w}$:

$$\begin{aligned} w-\overline{w} &= \frac{z-u\overline{z}}{1-u}-\frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} = \frac{(z-u\overline{z})(1-\overline{u})-(\overline{z}-\overline{u}z)(1-u)}{(1-u)(1-\overline{u})} \\ &= \frac{z-\overline{u}z-u\overline{z}+|u|^2\overline{z}-\overline{z}+u\overline{z}+\overline{u}z-|u|^2 z}{|1-u|^2} \\ &= \frac{z(1-|u|^2)-\overline{z}(1-|u|^2)}{|1-u|^2} = (z-\overline{z})\cdot\frac{1-|u|^2}{|1-u|^2} \end{aligned}$$

وعليه إذا كان w عدداً حقيقياً كان $w=\overline{w}$ ومن ثَمّ $(z-\overline{z})\cdot(1-|u|^2)=0$. فإمّا أن يكون z عدداً حقيقياً، أو أن تكون طويلة u مساوية 1.

5 اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين:

$$z_1=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x} \quad \text{و} \quad z_2=(3+i)^4$$

الحل

$$z_1=\cos 2x+i\sin 2x \quad \text{و} \quad z_2=28+96i$$

6 ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أنّ:

$$\left|z+z'\right|^2+\left|z-z'\right|^2=2\left|z\right|^2+2\left|z'\right|^2$$

الحل

$$\begin{aligned} \left|z+z'\right|^2+\left|z-z'\right|^2 &= \left(z+z'\right)\overline{\left(z+z'\right)}+\left(z-z'\right)\overline{\left(z-z'\right)} \\ &= \left(z+z'\right)\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)+\left(z-z'\right)\left(\overline{z}-\overline{z'}\right) \\ &= 2\left|z\right|^2+2\left|z'\right|^2 \end{aligned}$$

7 ليكن المثلث ABC . أثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

① المثلث متساوي الساقين ورأسه A .

② $\sin\widehat{A}=2\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}$.

الحل

المثلث متساوي الساقين ورأسه A يكافئ $\hat{B}=\hat{C}$ وهذا يكافئ $\sin(\hat{B}-\hat{C})=0$ وهذا بدوره يكافئ $\sin(\hat{B}+\hat{C})=\sin(\hat{B}+\hat{C})+\sin(\hat{B}-\hat{C})$ أو $\sin\hat{A}=2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$. لأنّ $\hat{A}=\pi-\hat{B}-\hat{C}$.

لنتعلّم البحث معاً

8 تعيين مجموعة

ليكن a عدداً عقدياً معطى. لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقّق :

$$z^2 - a^2 = \overline{z}^2 - \overline{a}^2$$

عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ ومثّلها في مستو مزوّد بمعلم.

نحو الحلّ

☝ الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي بوضع $z = x + iy$ و $a = \alpha + i\beta$ حيث x و y و α و β هي أعداد حقيقية، ثُمّ نسعى إلى إيجاد معادلة ديكارتية للمجموعة $\mathcal{E}$.

① أثبت بهذا الأسلوب أنّ $M(x,y)$ تنتمي إلى $\mathcal{E}$ إذا وفقط إذا كان $xy = \alpha\beta$.

② ناقش الحالتين $\alpha\beta = 0$ و $\alpha\beta \neq 0$ ثُمّ عيّن $\mathcal{E}$ في هاتين الحالتين.

✌ هناك أسلوب آخر، نلاحظ أنّ مرافق $z^2 - a^2$ هو $\overline{z}^2 - \overline{a}^2$ أثبت تكافؤ الخواص

- z تنتمي إلى $\mathcal{E}$.
- $z^2 - a^2$ حقيقي.
- الجزء التخيلي للمقدار $z^2 - a^2$ يساوي 0 أو $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(a^2)$.

استنتج مجدداً المجموعة $\mathcal{E}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ ① هذه عملية تعويض وحساب بسيطة.

② إذا كان $\alpha\beta = 0$ كانت المجموعة $\mathcal{E}$ مساوية لاجتماع المحورين الإحداثيين. وإذا كان $\alpha\beta \neq 0$ مثّلت المجموعة $\mathcal{E}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto \dfrac{\alpha\beta}{x}$.

✌ الخطوات واضحة ولا تحتاج إلى إضافات.

قُدُماً إلى الأمام

9 نتأمّل عددين عقديين z و w يحققان $|z| = 1$ و $|w| = 1$ و $zw \neq -1$ أثبت أنّ العدد العقدي $Z = \dfrac{z + w}{1 + zw}$ عددٌ حقيقي.

الحل

الفكرة الأساسية هنا هي أنّه في حالة عدد عقدي طويلته تساوي الواحد، المرافق يساوي المقلوب إذن

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z} + \overline{w}}{1 + \overline{z}\,\overline{w}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{w}}{1 + \frac{1}{zw}} = \frac{z + w}{1 + zw} = Z$$

إذن Z عددٌ حقيقي لأنه يساوي مرافقه.

10 نتأمّل كثير الحدود $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$.

① عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$.

② حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

الحل

① بافتراض المساواة

$$z^4 - 19z^2 + 52z - 40 = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

محقّقة تكون $a + 4$ هي أمثال z^3 وهي يجب أن تساوي الصفر، إذن $a = -4$. وبمقارنة الحدّ الثابت في الطرفين نجد $-40 = 2ab = -8b$ إذن $b = 5$. وبالعكس، نتحقّق مباشرة بإجراء عملية الضرب أنّ $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$.

② بعد تفريق كثير الحدود P أصبح تعيين جذوره يسيراً ونجد مجموعة حلول المعادلة:

$$\left\{2 + i, 2 - i, 2\left(-1 - \sqrt{3}\right), 2\left(-1 + \sqrt{3}\right)\right\}.$$

11 حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$ إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل

لنفترض أنّ w هو الحلّ التخيلي البحت أي الذي يحقّق $\overline{w} = -w$. إذن لدينا

$$w^3 - (3 + 4i)w^2 - 6(3 - 2i)w + 72i = 0 \qquad (1)$$

وبأخذ مرافق الطرفين والاستفادة من نجد أيضاً

$$-w^3 - (3 - 4i)w^2 + 6(3 + 2i)w - 72i = 0 \qquad (2)$$

فإذا جمعنا (1) و (2) استنتجنا أنّ $w(w - 4i) = 0$، ولكنّ $w = 0$ ليس حلاً للمعادلة (1) فلا بُد أن يكون الحل التخيلي البحت المنشود هو $4i$.

إذن يقبل كثير الحدود $P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i$ القسمة على $z - 4i$ فإذا أجرينا قسمة إقليدية وجدنا أنّ $P(z) = (z - 4i)(z^2 - 3z - 18) = (z - 4i)(z - 6)(z + 3)$. إذن حلول المعادلة هي $\{4i, -3, 6\}$.

12 ليكن $\alpha = e^{2i\pi/5}$. نضع $A = \alpha + \alpha^4$ و $B = \alpha^2 + \alpha^3$.

① أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = 0$ واستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية: $x^2 + x - 1 = 0 \quad (1)$.

② عبّر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

③ حلّ المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل

① هذا مجموع متتالية هندسية حدها الأوّل 1 وأساسها α إذن

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-\alpha} = 0$$

لنحسب مستفيدين من كون $\alpha^5 = 1$:

$$\begin{aligned} A+B &= (\alpha+\alpha^4)+(\alpha^2+\alpha^3) \\ &= \alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = -1 \\ A\cdot B &= (\alpha+\alpha^4)\cdot(\alpha^2+\alpha^3) \\ &= \alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7 \\ &= \alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = -1 \end{aligned}$$

فنستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة $x^2+x-1=0 \quad (1)$.

② بملاحظة أنّ $\alpha^4 = \bar{\alpha}$ نجد $A = 2\,\mathrm{Re}(\alpha) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$.

③ بحساب جذور المعادلة (1) نجد الجذرين

$$\left\{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right\}$$

وبملاحظة أنّ كلاً من $2\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ هو الجذر الموجب للمعادلة (1) نجد $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

13 ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi,\pi[$. نعرّف $t = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$.

① احسب المقادير $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ و $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ.

② أثبت صحة العلاقات:

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

الحل

① نلاحظ أنّ

$$1+t^2=\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2+(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}=\frac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$

$$1-t^2=\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2-(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}=\frac{4}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$

إذن

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2}&=2\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}\\&=\frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\\&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta}=i\tan\theta\\\frac{2t}{1-t^2}&=2\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{4}\\&=\frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{2}\\&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=i\sin\theta\\\frac{1+t^2}{1-t^2}&=\frac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{4}\\&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta\end{aligned}$$

② نلاحظ أنّ

$$t=\frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}=i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بالتعويض في العلاقات الواردة في ① نجد المطلوب.

14 ① حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلات $z^2=w$ في الحالات الآتية

❶ $w=-3+4i$ ، ❷ $w=-21-20i$ ، ❸ $w=-7+24i$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:

❶ $z^2+(1+4i)z-5-i=0$

❷ $2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

❸ $z^2+(1+8i)z-17+i=0$

الحل

① ❶ $\{1+2i, -1-2i\}$ ❷ $\{2-5i, -2+5i\}$ ❸ $\{3+4i, -3-4i\}$

② ❶ $\left\{-2-3i, 1-i\right\}$ ❷ $\left\{-3+i, \frac{1}{2}(i-1)\right\}$ ❸ $\left\{-2-5i, 1-3i\right\}$

15 في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نضع $Z = \dfrac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$ ونفترض أنّ $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ حيث x و y و X و Y هي أعداد حقيقية.

① احسب X و Y بدلالة العددين x و y.

② أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.

③ أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل

① بضرب البسط والمقام بمرافق المقام في عبارة Z نجد

$$X + iY = \frac{2+x-iy}{1+x-iy} = \frac{(1+x)(2+x)+y^2+iy}{(1+x)^2+y^2}$$ ،

ومنه

$$X = \frac{(1+x)(2+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2}$$

$$Y = \frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

② يكون Z حقيقياً إذا وفقط إذا كان $z \neq -1$ و $y = 0$ ، وهذا يمثّل محور الفواصل محذوفاً منه النقطة التي تقابل العدد العقدي -1 أي $(-1,0)$.

③ يكون Z تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $z \neq -1$ وكان $(1+x)(2+x)+y^2 = 0$ أو $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ وهذا يمثّل الدائرة التي مركزها النقطة $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ محذوفاً منها النقطة التي تقابل العدد العقدي -1.

16 عيّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى:

① المقدار $(z+1)(\overline{z}-2)$ حقيقي.

② العدد z مختلف عن $4i$ و $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي.

الحل

① يكون المقدار $(z+1)(\overline{z}-2)$ حقيقياً إذا وفقط إذا كان $(z+1)(\overline{z}-2) = (\overline{z}+1)(z-2)$، وهذا يكافئ $z = \overline{z}$. والمعادلة الأخيرة تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

② يكون المقدار $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ حقيقياً إذا وفقط إذا كان $z \neq 4i$ وكان $\dfrac{z+2i}{z-4i} = \dfrac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i}$، وهذا يكافئ $z = -\overline{z}$. فمجموعة الأعداد المحققة للشرط السابق هي مجموعة الأعداد التخيّليّة البحتة عدا $4i$.

5

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

1. تمثيل الأشعة بأعداد عقدية
2. استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع
3. الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

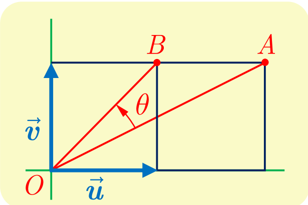
- التمثيل الهندسي للأعداد العقدية.
- حساب زاوية شعاعين انطلاقاً من التمثيل العقدي.
- التعبير عن التعامد والتوازي باستعمال الأعداد العقدية.
- التمثيل العقدي للتحويلات الهندسية : الانسحاب – الدوران – التحاكي التناظر المركزي.
- استعمال الأعداد العقدية في حل بعض مسائل الهندسة المستوية.

5

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

انطلاقة نشطة

نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي.



❶ يبيّن الشكل المجاور مربّعين طول ضلع كل منهما يساوي الواحد.

يُطلب حساب النسبة $r = \dfrac{OB}{OA}$ وتعيين قياس للزاوية $\theta = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

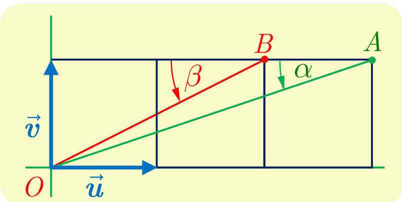
بالطبع يمكن استعمال الطرائق التقليدية، ولكننا هنا سنسعى إلى استعمال الأعداد العقدية.

① أعط z_A و z_B العددان العقديان اللذان يمثلان A و B.

② اشرح العلاقة بين $Z = \dfrac{z_B}{z_A}$ والعددين المطلوبين r و θ.

③ احسب Z واستنتج قيم r و $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

الحل هنا $z_A = 2+i$ و $z_B = 1+i$. $Z = z_B/z_A = re^{i\theta} = \frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$. ومنه $r=\sqrt{\frac{2}{5}}$ و θ من $[0,\frac{\pi}{2}]$ تحقق $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$. أي $\theta \approx 18^\circ\ 26'\ 6''$.



❷ يبيّن الشكل المجاور ثلاثة مربعات طول ضلع كل منهما يساوي الواحد. يُطلب حساب $\alpha+\beta$ مجموع قياسي الزاويتين المبينتين في الشكل.

① أعط z_A و z_B العددين العقديين اللذين يمثلان A و B.

② اشرح العلاقة بين كل من α و β وزاويتي العددين العقديين z_A و z_B.

③ بيّن أنّ المطلوب هو حساب زاوية العدد العقدي $Z = z_A\cdot z_B$.

④ احسب Z واستنتج قيمة $\alpha+\beta$.

الحل $z_A = 3+i = \sqrt{10}\,e^{i\alpha}$ و $z_B = 2+i = \sqrt{5}\,e^{i\beta}$.

$$Z = z_A z_B = 5\sqrt{2}\,e^{i(\alpha+\beta)} = 5(1+i)$$

ولكن α و β زاويتان حادتان، إذن $\alpha+\beta\in[0,\pi]$ وتحققان $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. أي $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

تَدرَّبْ صفحة 132

① لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

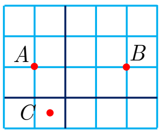
$$z_C=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \text{ و } z_B=2+i \text{ و } z_A=-1+i$$

❶ وضّع النقاط A و B و C في شكل.

❷ احسب الأعداد العقدية التي تمثّل الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

❸ احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وبيّن إذا كان مثلثاً قائماً في C.

الحل



لدينا $\overrightarrow{AB}=3, \overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i, \overrightarrow{BC}=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$، ومن ثَمّ $AB=3$ و $AC=\frac{\sqrt{10}}{2}$ و $BC=\frac{\sqrt{34}}{2}$. نلاحظ أنّ $AC^2+BC^2-AB^2=\frac{34+10}{4}-9=2\neq 0$ فالمثلث ABC ليس قائم الزاوية في C.

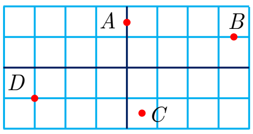
② لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_D=-3-i \text{ و } z_C=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \text{ و } z_B=\frac{7}{2}+i \text{ و } z_A=\frac{3}{2}i$$

❶ وضّع النقاط A و B و C و D في شكل.

❷ ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

الحل لدينا



$$\overrightarrow{AB}=z_B-z_A=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i,$$
$$\overrightarrow{DC}=z_C-z_D=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$$

ومن ثَمّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ والرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

③ لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : $z_A=2(1+i\sqrt{3})$ و $z_B=2(1-i\sqrt{3})$.

❶ أثبت أنّ A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

❷ جد العدد العقدي المُمثّل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC.

❸ ما طبيعة المثلث ABC ؟

الحل لدينا $|z_A|^2=4(1+3)=16$ إذن $|z_A|=4$، وكذلك $|z_B|=4$ إذن $OA=OB=4$، والنقطتان A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

استناداً إلى تعريف C لدينا $z_C+z_A+z_B=3z_O=0$ ومنه $z_C=-z_A-z_B=4$. إذن C تنتمي أيضاً إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4. فمركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC (نقطة تقاطع محاوره) هي نفسها نقطة تلاقي متوسطاته. فهو إذن متساوي الأضلاع. ويمكننا التحقق مباشرة من ذلك بحساب أطوال أضلاعه لنجدها متساوية.

④ نتأمّل شعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ يمثلهما العددان العقديان u و v بالترتيب. نفترض أنّ $v = iu$ ونضع $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{V}$. أثبت أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

الحل المساواة $v = iu$ تقتضي أنّ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{v}{u}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ وأنّ $|v| = |u|$ أي $AB = AC$. فالمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

⑤ المثلثان ABC و $A'B'C'$ معرّفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$$c = 2 + i, \quad b = 2 + 3i, \quad a = 1 - i,$$
$$c' = 4 + i, \quad b' = 3 - i, \quad a' = -2 + 3i,$$

❶ احسب العدد الممثِّل للشعاع $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

❷ جد العدد العقدي المُمثّل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

❸ أثبت أنّ G هي مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.

الحل

❶ ليكن Z العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$، عندئذ

$$Z = a' - a + b' - b + c' - c = 0$$

ومن ثَمّ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

❷ $z_G = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{5}{3} + i$.

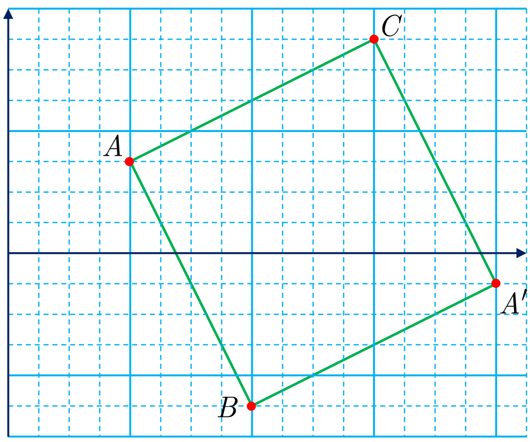
❸ $\frac{1}{3}(a' + b' + c') = \frac{1}{3}(a + b + c)$ لأنّ $Z = 0$.

⑥ لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية: $a = 1 + \frac{3}{4}i$ و $b = 2 - \frac{5}{4}i$ و $c = 3 + \frac{7}{4}i$

❶ وضّع النقاط A و B و C في شكل. ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية المُمثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$؟

❷ استنتج أنّ ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

❸ احسب العدد العقدي الممثل للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ مربعاً.



الحل

❶ ليكن u و v العددين العقديين الممثلين للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بالترتيب. عندئذ $u = b - a = 1 - 2i$ و $v = c - a = 2 + i$، وإذن $v = iu$.

❷ فالمثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين رأسه A، مثلما فعلنا في التمرين ④ أعلاه.

❸ لما كان $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ استنتجنا أنّ $z_{A'} = a + u + v = 4 - \frac{1}{4}i$.

⑦ لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a = 2 - 2i \text{ و } b = -1 + 7i \text{ و } c = 4 + 2i \text{ و } d = -4 - 2i$$

❶ لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1 + 2i$. أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.

❷ ليكن e العدد المُمثّل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e وبرهن أنّ $\frac{c-e}{a-e} = \frac{a-e}{d-e}$.

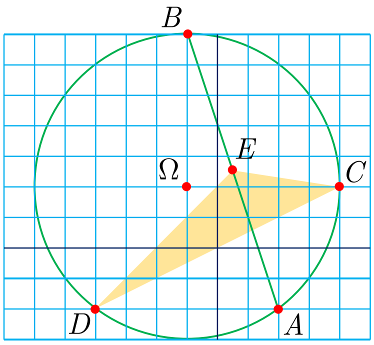
❸ ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC؟

الحل

❶ علينا أن نحسب الأطوال ΩA و ΩB و ΩC و ΩD. فنجد مثلاً

$$\Omega A = |a - \omega| = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

وكذلك نجد بحساب مماثل أنّ $\Omega B = \Omega C = \Omega D = 5$. فهذه النقاط تقع جميعاً على الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.



❷ لما كان $e = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ استنتجنا أنّ

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\frac{c-e}{a-e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

إذن $\frac{c-e}{a-e} = \frac{a-e}{d-e}$.

❸ نستنتج مما سبق أنّ $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA})$ فالمستقيم (EA) منصف للزاوية DEC، ومن ثَمّ هو منصف للزاوية E في المثلث DEC.

⑧ لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : 1 و $3 + 2i$ بالترتيب. مثّل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق:

❶ $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$،

❷ $|z - 3 - 2i| = 1$.

الحل

❶ هذا هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث A هي النقطة الموافقة للعدد العقدي 1، و B هي النقطة الموافقة للعدد العقدي $3 + 2i$.

❷ هذه هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها يساوي 1.

تَدرَّبْ صفحة 136

① لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z = 1 + i$. جد العدد العقدي z' المُمثّل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:

❶ $\mathcal{T}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$. ❷ $\mathcal{H}$ التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3 .

❸ $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$. ❹ $\mathcal{S}$ التناظر الذي مركزه $A(1-3i)$.

❺ $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. ❻ $\mathcal{S}$ التناظر المحوري الذي محوره (Ox) .

الحل

❶ $z' = z + (-2+3i) = -1+4i$. ❷ $z' = 3z = 3+3i$.

❸ $z' = e^{i\pi/4}z = \sqrt{2}\,i$. ❹ $z' = 1-3i-(z-1+3i) = 1-7i$.

❺ $z' = 2-i+e^{2\pi i/3}(z-2+i) = \frac{5}{2}-\sqrt{3}-\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$. ❻ $z' = \overline{z} = 1-i$.

② فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة. عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A :

❶ $b = a - 1 + 3i$ ❷ $b = -ia$

❸ $b = \overline{a}$ ❹ $b = 2a$

❺ $b - 1 = -(a-1)$ ❻ $b - i = e^{i\pi/3}(a-i)$

❼ $b = a + 4 - 3i$ ❽ $b + 1 - i = e^{i\pi/4}(a+1-i)$

الحل

❶ B صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$.

❷ B صورة A وفق الدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

❸ B صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره (Ox) .

❹ B صورة A وفق التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2 .

❺ B صورة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه النقطة التي يمثلها العدد 1 .

❻ B صورة A وفق الدوران الذي مركزه $A(i)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

❼ B صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$.

❽ B صورة A وفق الدوران الذي مركزه $A(i-1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

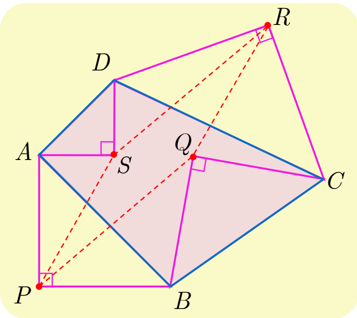
③ لتكن النقطتان $G(3-i\sqrt{3})$ و $H(3+i\sqrt{3})$. وليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه O ويحقّق $H = \mathcal{R}(G)$. احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ ، واستنتج الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}$.

الحل

$z' = e^{i\pi/3}z$.

أنشطة

نشاط 1 متوازي الأضلاع وربع الدورة



نتأمّل في مستو مزوّد بمعلم متجانس رباعياً محدباً $ABCD$.
ونُنشئ عليه مثلثات قائمة ومتساوية الساقين PAB و QBC و RCD و SDA بحيث

$$(\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QC})=\frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})=-\frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SA})=\frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{RC},\overrightarrow{RD})=-\frac{\pi}{2} \text{ و}$$

نهدف إلى استعمال الأعداد العقدية في إثبات أنّ $PQRS$ متوازي الأضلاع.
لنفترض أنّ الشكل مرسوم في المستوي الموجّه، وقد زوّدناه **بمعلم متجانس مباشر**. ولنرمز a و b و c و d إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A و B و C و D، وكذلك لنرمز p و q و r و s إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط P و Q و R و S.

① الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ينقل A إلى B. استعمل الصيغة العقدية لتثبت أنّ

$$p=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+b(1-i)\big)$$

② عبّر بالمثل عن q و r و s بدلالة a و b و c و d.

③ تيقّن أنّ $p+r=q+s$، ثُمّ استنتج المطلوب.

الحل

① إذا كانت $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$، كان

$$z'=p+e^{-i\pi/2}(z-p)=p-i(z-p)$$

ولأنّ B هي صورة A وفق هذا الدوران استنتجنا أنّ $b=p-i(a-p)$ أو $b+ia=(1+i)p$.
وبضرب الطرفين بالعدد $(1-i)$ نستنتج أنّ $p=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+b(1-i)\big)$ $(*)$.

② لاحظ أنّ B هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه Q وزاويته $-\frac{\pi}{2}$، مثلما هي B صورة A وفق الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. إذن لنحصل على صيغة q يكفي أن نستبدل $c \leftarrow a$ و $q \leftarrow p$ في العلاقة $(*)$ لنجد $q=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+b(1-i)\big)$. وبالمثل، يفيد التبديل $c \leftarrow a, d \leftarrow b, r \leftarrow p$ في $(*)$ في حساب r : $r=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+d(1-i)\big)$، وأخيراً التبديل $d \leftarrow b, s \leftarrow p$ في $(*)$ يتيح حساب s : $s=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+d(1-i)\big)$.

③ نلاحظ إذن أنّ

$$p=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+b(1-i)\big),\qquad r=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+d(1-i)\big)$$
$$q=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+b(1-i)\big),\qquad s=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+d(1-i)\big)$$

ومن ثَمّ

$$p+r=\frac{a+c}{2}(1+i)+\frac{b+d}{2}(1-i)$$
$$q+s=\frac{a+c}{2}(1+i)+\frac{b+d}{2}(1-i)$$

أي $p+r=q+s$ أو $\frac{p+r}{2}=\frac{q+s}{2}$ وهذه الأخيرة تعني أنّ قطرا الرباعي $PQRS$ متناصفان، فهو إذن متوازي الأضلاع.

نشاط 2 الجذور التكعيبية للواحد. المثلث المتساوي الأضلاع

نهدف في هذه الفقرة إلى تعيين حلول المعادلة $z^3=1$ في $\mathbb{C}$، ثُمّ استعمال ذلك لإعطاء خاصة مميِّزة للمثلث متساوي الأضلاع.

❶ في حالة $z\neq 0$ نرمز بالرمز r إلى طويلة z وبالرمز θ إلى زاويته من المجال $[0,2\pi[$.

① تيقن أنّ الشرط $z^3=1$ يقتضي أن يكون $r=1$ و $3\theta=2\pi k$ حيث k عدد صحيح.

② تحقّق أنّ الشرط $\theta\in[0,2\pi[$ يقتضي في الحقيقة أنّ $k\in\{0,1,2\}$.

③ استنتج أنّ مجموعة حلول المعادلة $z^3=1$ محتواة في $\mathbb{U}_3=\left\{1,e^{2i\pi/3},e^{4i\pi/3}\right\}$.

④ وبالعكس تحقّق أنّ كل عنصر من $\mathbb{U}_3=\left\{1,e^{2i\pi/3},e^{4i\pi/3}\right\}$ هو حل للمعادلة $z^3=1$.

⑤ مثِّل النقاط $M_0(1)$ و $M_1(e^{2\pi i/3})$ و $M_2(e^{4\pi i/3})$ في المستوي، وتيقّن أنّها تؤلّف رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

نسمّي حلول المعادلة $z^3=1$ الجذور التكعيبية للواحد ونرمز إلى مجموعتها بالرمز $\mathbb{U}_3$. وكذلك نرمز إلى $e^{2i\pi/3}$ بالرمز j. لاحظ أنّ $\mathbb{U}_3=\{1,j,j^2\}$.

⑥ تحقّق أنّ $1+j+j^2=0$، و $\bar{j}=j^2=e^{-2i\pi/3}$.

❷ نزوّد المستوي بمعلم **متجانس مباشر** $(O;\vec{u},\vec{v})$. ونتأمّل ثلاث نقاط متباينة A و B و C تمثلها الأعداد العقدية a و b و c. نقول إنّ ABC مثلث متساوي الأضلاع **مباشر** إذا كنا عند قراءة رؤوسه بهذا الترتيب: $A\to B\to C\to A$ ندور في الاتجاه الموجب. وهذا يُكافئ القول إنّ A هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

استعمل نتائج الفقرة السابقة لتثبت أنّ ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان

$$a + bj + cj^2 = 0$$

❸ نقرن بكل عدد $z \neq 1$، النقاط $R(1)$ و $M(z)$ و $M'(\overline{z})$.

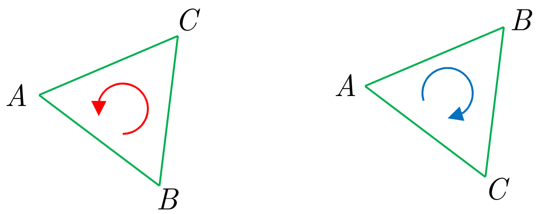
① ما هي قيم z التي تجعل M و M' مختلفتين ؟

② نفترض تحقّق الشرط السابق. أثبت أنّ Δ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل المثلث RMM' مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً، هي مستقيم محذوفةٌ منه نقطة.

الحل

❶ بسيط ومتروك للقارئ.

❷ نوعان من المثلثات المتساوية الأضلاع.



مثلث متساوي الأضلاع غير مباشر

مثلث متساوي الأضلاع مباشر

إذا كانت $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$، كان

$$z' = a + e^{i\pi/3}(z - a) = a - j^2(z - a)$$

حيث استفدنا من كون $e^{i\pi/3} = -j^2$. الآن يكون ABC مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً إذا كانت C صورة B وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$، أي $c = a - j^2(b - a)$ وهذه تُكتب بالصيغة المُكافئة $c + j^2b - (1 + j^2)a = 0$، ولكن $1 + j + j^2 = 0$ إذن $c + j^2b + ja = 0$. يكفي أن نضرب طرفي هذه المساواة بالمقدار j^2 لنجد $a + bj + cj^2 = 0$.

❸ ① $M \neq M'$ إذا وفقط إذا كان $z \neq \overline{z}$ إي إذا وفقط إذا لم يكن z عدداً حقيقياً صرفاً.

② نفترض أنّ $z \neq \overline{z}$ عندئذ RMM' مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان $1 + jz + j^2\overline{z} = 0$، أو $1 + 2\,\mathrm{Re}(jz) = 0$.

فإذا افترضنا $z = x + iy$ كتبنا الشرطين السابقين كما يأتي

$$1 + \mathrm{Re}\Big((-1 + \sqrt{3}i)(x + iy)\Big) = 0 \text{ و } y \neq 0$$

أي $1 - x - \sqrt{3}y = 0$ و $y \neq 0$. فالمجموعة Δ هي المستقيم الذي معادلته $\sqrt{3}y + x = 1$ باستثناء النقطة $(1,0)$.

تمرينات ومسائل

1 نتأمّل النقاط A و B و C التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية $a=8$ و $b=-4+4i$ و $c=-4i$.

① a. تحقّق أنّ $b-c=i(a-c)$.

b. استنتج أنّ المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

② نقرن بكل نقطة $M(z)$ النقطة M' الموافقة للعدد العقدي $z'=e^{i\pi/3}z$.

a. ما التحويل الهندسي الموافق؟

b. احسب الأعداد العقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق هذا التحويل.

③ لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$، ولتكن p و q و r الأعداد العقدية التي توافقها.

a. احسب p و q و r.

b. تحقّق أنّ $r-p=e^{i\pi/3}(q-p)$.

c. استنتج أنّ المثلث PQR متساوي الأضلاع.

الحل

① نحسب

$$b-c-i(a-c)=-4+4i+4i-i(8+4i)=8i-4-8i+4=0$$

فنستنتج أنّ $b-c=i(a-c)$. هذا يعني أنّ B هي صورة A وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول C. فالمثلث ABC مثلث قائم في C ومتساوي الساقين.

② $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ وفق الدوران بزاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ حول O. ولأنّ $e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ وجدنا

$$a'=4+4\sqrt{3}i \text{ و } b'=-2-2\sqrt{3}+(2-2\sqrt{3})i \text{ و } c'=2\sqrt{3}-2i$$

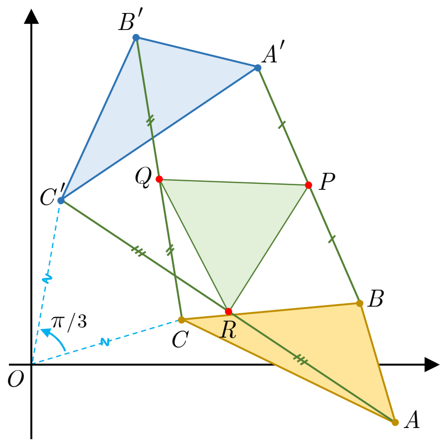
③

$$p=\frac{a'+b}{2}=\frac{4+4\sqrt{3}i+(-4+4i)}{2}=2(1+\sqrt{3})i$$
$$q=\frac{b'+c}{2}=\frac{-2-2\sqrt{3}+(2-2\sqrt{3})i+(-4i)}{2}=-1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i$$
$$r=\frac{c'+a}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2i+8}{2}=4+\sqrt{3}-i$$

ونجد
$$r-p=4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i$$
$$q-p=-1-\sqrt{3}-3(1+\sqrt{3})i$$
$$e^{i\pi/3}(q-p)=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}(-1-\sqrt{3}-3(1+\sqrt{3})i)=4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i$$
إذن $r-p=e^{i\pi/3}(q-p)$، والنقطة R هي صورة Q وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{3}$، فالمثلث PQR مثلث متساوي الأضلاع.

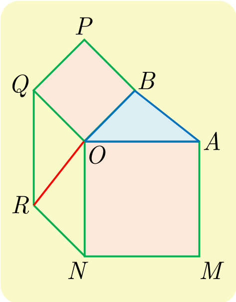
ملاحظة. ربما كان من الأيسر الحل رمزياً دون تعويض قيم a و b و c. لنضع $\omega=e^{i\pi/3}$ عندئذ
$$r=\frac{\omega c+a}{2}, q=\frac{\omega b+c}{2}, p=\frac{\omega a+b}{2}$$
ومن ثَمّ
$$q-p=\frac{1}{2}\big(-\omega a+(\omega-1)b+c\big),\quad r-p=\frac{1}{2}\big((1-\omega)a-b+\omega c\big)$$
إذن $\omega(q-p)=\frac{1}{2}\big(-\omega^2a+\omega(\omega-1)b+\omega c\big)$، ومنه
$$r-p-\omega(q-p)=\frac{1}{2}(1-\omega+\omega^2)(a-b)$$
بقي أن نحسب المقدار $1-\omega+\omega^2$. وهنا نلاحظ أنّ
$$\omega^2=e^{2i\pi/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{و} \quad \omega=e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
إذن $1-\omega+\omega^2=0$. ومن ثَمّ $r-p=\omega(q-p)$، والمثلث PQR مثلث متساوي الأضلاع.

في الشكل الآتي الذي يوضح الخاصة الهندسية التي أثبتناها في هذا التمرين، المثلث ABC هو مثلث كيفي في المستوي.



2 نتأمّل مثلّثاً OAB فيه $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\alpha$ حيث $\alpha\in]0,\pi[$. نُنشئ خارج هذا المثلث المربعين $OAMN$ و $OBPQ$ ومتوازي الأضلاع $NOQR$. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أنّ المستقيمين (OR) و (AB) متعامدان وأنّ $OR=AB$، وذلك باستعمال الأعداد العقدية.

لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(O,\vec{u},\vec{v})$. وليكن a و b العددين العقديين اللذين يمثلان A و B.



① a. ما هي صور النقطتين N و B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول O؟

b. نرمز n إلى العدد العقدي الممثل للنقطة N، و q للعدد العقدي الموافق للنقطة Q. أثبت أنّ $n=-ia$ و $q=ib$.

② a. عبّر عن $\overrightarrow{OR}$ بدلالة $\overrightarrow{ON}$ و $\overrightarrow{OQ}$.

b. استنتج العدد العقدي r الذي يمثّل النقطة R بدلالة a و b.

c. ما العدد العقدي المُمثّل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

d. أثبت إذن أنّ $OR=AB$ وأنّ $(\vec{u},\overrightarrow{OR})=\dfrac{\pi}{2}+(\vec{u},\overrightarrow{AB})$. واستنتج تعامد (OR) و (AB).

الحل

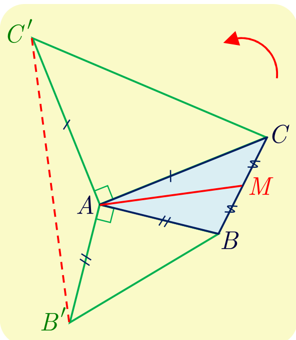
① إذا كان $\mathcal{R}$ هو الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول O كان $\mathcal{R}(N)=A$ و $\mathcal{R}(B)=Q$. فإذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق $\mathcal{R}$ كان $z'=e^{i\pi/2}z=iz$. ومنه نرى أنّ $a=in$ و $q=ib$. ومنه العلاقتان المطلوبتان.

② لمّا كان $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$ استنتجنا أنّ $r=-ia+ib=i(b-a)$. ومن جهة أخرى $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ فالعدد العقدي w الممثل للشعاع $\overrightarrow{W}=\overrightarrow{AB}$ هو $w=b-a$. نستنتج إذن أنّ $r=iw$، ومنه $|r|=|w|$ أي $OR=AB$ و $\arg(r)=\dfrac{\pi}{2}+\arg(w)$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{OR})=\dfrac{\pi}{2}+(\vec{u},\overrightarrow{AB})$. ومن استناداً إلى علاقة شال للزوايا الموجهة : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OR})=(\vec{u},\overrightarrow{OR})-(\vec{u},\overrightarrow{AB})=\dfrac{\pi}{2}$، فالمستقيمان (OR) و (AB) متعامدان.

لنتعلّم البحث معاً

3 دراسة شكل

نتأمّل في المستوي ABC مثلّثاً مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[AC]$، وليكن $AB'B$ و ACC' مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين. أثبت أنّ المتوسط (AM) في المثلث ABC، هو ارتفاع في المثلث $AB'C'$ وأنّ $B'C'=2AM$.



نحو الحلّ

نبدأ باختيار معلم مباشر مناسب. تؤدي النقطة A دوراً أساسياً، لذلك نعتبرها مبدأ لهذا المعلم. ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C. احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية b' و c' و m المُمثِّلة للنقاط B' و C' و M بالترتيب.

نهدف إلى إثبات أنّ $\overrightarrow{B'C'}$ عمودي على $\overrightarrow{AM}$، الذي يؤول إلى إثبات أنّ

$$\frac{B'C'}{AM} = 2 \quad \text{وأنّ} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = +\frac{\pi}{2}$$

ومنه تأتي فكرة حساب النسبة $\frac{c'-b'}{m-a}$، التي تعطي مباشرة جميع المعلومات المطلوبة. احسب هذه النسبة واستنتج الخاصة المطلوبة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

فإذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق $\mathcal{R}$، الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول A، كان $z' = e^{i\pi/2}z = iz$، ولأنّ $C' = \mathcal{R}(C)$ و $B = \mathcal{R}(B')$ استنتجنا أنّ $c' = ic$ و $b' = -ib$. وأخيراً لأنّ M منتصف $[BC]$ استنتجنا أنّ $m = \frac{1}{2}(b+c)$.

لنحسب العدد العقدي $w = \frac{c'-b'}{m-a}$. إذ لدينا

$$|w| = \frac{B'C'}{AM} \quad \text{و} \quad \arg w = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'})$$

وهما المقداران المطلوب تعيينهما. في الحقيقة لدينا $a = 0$ و من ثَمّ

$$w = \frac{c'-b'}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{1}{2}(b+c)} = 2i$$

وهذا يبرهن أنّ $|w| = 2$ و $\arg w = \frac{\pi}{2}$، ومن ثَمّ $B'C' = 2AM$، و (AM) عمودي على $(B'C')$ كما هو مطلوب.

4 البحث عن مجموعة

نزوّد المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نقرن كل نقطة $M(z)$ حيث $z \neq i$ بالنقطة $M(z')$ حيث $z' = \frac{z+2}{z-i}$.

- عيّن Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقيّاً.
- عيّن Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً تخيليّاً بحتاً.

نحو الحلّ

التفسير الهندسي: الشرط z' عددٌ حقيقي يُكافئ القول $\mathrm{Im}(z')=0$ أو $\overline{z'}=z'$، أو $\arg z'\in\{0,\pi\}$ (في حالة $z'\neq 0$). ولأنّ z' من الشكل $\dfrac{z-a}{z-b}$ وجدنا من المناسب استعمال الخاصة الأخيرة.

لنرمز a و b و z إلى الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط A و B و M. ما الزاوية بين شعاعين التي يقيسها المقدار $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ ؟

لوضع z' بالشكل $\dfrac{z-a}{z-b}$، نكتب $z'=\dfrac{z-(-2)}{z-i}$، ونعرّف النقطتين $A(i)$ و $B(-2)$.

① وضّع هاتين النقطتين.

② تحقّق أنّ z' حقيقي إذا وفقط إذا كان $M=B$ أو $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\in\{0,\pi\}$.

③ مثّل المجموعة Δ وعيّن طبيعتها الهندسية. (لا تنس أنّ $z\neq i$ ومن ثَمّ $M\neq A$).

④ عيّن بالمثل المجموعة Γ ومثّلها هندسياً.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

باتباع الخطوات المشار إليها. نعرّف النقطتين $A(i)$ و $B(-2)$. عندئذ تنتمي $M(z)$ إلى Δ إذا وفقط إذا كان $z=z_B$ أو $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=0\ (\pi)$ وهذا يكافئ القول إنّ $M=B$ أو إنّ الزاوية الموجهة للشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ تساوي 0 أو π: $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})\in\{0,\pi\}$. هذا يعني أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطان خطياً، أو أنّ النقطة M تقع على المستقيم (AB) ومختلفة عن A. إذن $\Delta=(AB)\backslash\{A\}$.

بالمثل، تنتمي $M(z)$ إلى Γ إذا وفقط إذا كان $z=z_B$ أو $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ وهذا يكافئ القول إنّ $M=B$ أو إنّ الزاوية الموجهة للشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ تساوي $\pm\dfrac{\pi}{2}$، أي إنهما متعامدان. فالنقطة M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي تُرى منها القطعة المستقيمة $[AB]$ تحت زاوية قائمة باستثناء النقطة A . هي إذن الدائرة التي قطرها $[AB]$ محذوفاً منها النقطة A. وعليه Γ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ محذوفاً منها النقطة A. ونترك مهمة رسم Δ و Γ للقارئ.

5 خاصّة مميّزة لمتوازي الأضلاع

تمثّل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D. أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $a+c=b+d$.

الحل

يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا تناصف قطراه. ولكن العدد العقدي الذي يمثل منتصف $[AC]$ هو $\frac{a+c}{2}$، والعدد العقدي الذي يمثل منتصف $[BD]$ هو $\frac{b+d}{2}$ وينطبق المنتصفان إذا وفقط إذا كان $a+c=b+d$.

6 حساب النسب المثلثية للزاوية $\frac{3\pi}{8}$.

نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a=2$ و $b=2e^{3i\pi/4}$. وليكن I منتصف $[AB]$.

① a. ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث OAB.

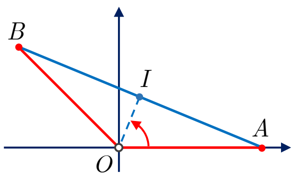
b. استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

② a. احسب العدد العقدي z_I المُمَثّل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b. استنتج كلّاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

الحل

① المثلث OAB مثلث متساوي الساقين رأسه O. المستقيم (OI) متوسط في هذا المثلث فهو منصف زاوية رأسه، ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{3\pi}{8}$.



② هنا $z_I=\frac{1}{2}(a+b)=1+e^{3\pi i/4}$ إذن من جهة أولى لدينا

$$z_I=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

ومن جهة ثانية $z_I=|z_I|\cdot e^{3\pi i/8}=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{3\pi i/8}$. وهكذا نجد أنّ

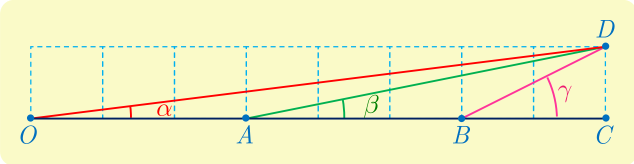
$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

أو

$$\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\frac{i}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

ومنه بمقارنة الجزأين الحقيقيين والتخيليّين نجد $\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$.

7 تأمّل الشكل واحسب المجموع $\alpha+\beta+\gamma$، حيث α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$، و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب.



الحل

لاحظ أوّلاً أنّ كلاً من الزوايا α و β و γ أصغر من $\frac{\pi}{4}$. فمجموعها $\theta=\alpha+\beta+\gamma$ ينتمي إلى المجال $]0,\pi[$.

- الشعاع $\overrightarrow{OD}$ يمثله العدد العقدي $8+i=\sqrt{65}\,e^{i\alpha}$.
- الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يمثله العدد العقدي $5+i=\sqrt{26}\,e^{i\beta}$.
- الشعاع $\overrightarrow{BD}$ يمثله العدد العقدي $2+i=\sqrt{5}\,e^{i\gamma}$.

نستنتج إذن أنّ

$$\sqrt{65}\sqrt{26}\sqrt{5}\,e^{i\theta}=(2+i)(5+i)(8+i)$$

أو

$$65\sqrt{2}\,e^{i\theta}=i^3+15i^2+66i+80=65(1+i)$$

وأخيراً $e^{i\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$. إذن $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ولكن θ زاوية من $]0,\pi[$، فلا بد أن يكون $\theta=\frac{\pi}{4}$.

8 نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوي حيث $z\neq-\frac{1}{2}i$ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي $z'=\dfrac{z+2i}{1-2iz}$. لتكن Γ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1. أثبت أنّه إذا انتمت M إلى Γ انتمت M' إلى Γ أيضاً. أيكون العكس صحيحاً؟

الحل

تنتمي نقطة إلى الدائرة Γ إذا وفقط إذا كانت طويلتها تساوي الواحد لذلك سنسعى إلى مقارنة طويلة z' بالواحد، وهذا يُكافئ مقارنة مربّع طويلة z' بالواحد. التعامل مع مربّع طويلة عدد عقدي أمر يسير لأنه يساوي جداء ضرب هذا العدد بمرافقه.

لنحسب إذن المقدار $|z'|^2-1$ في حالة $z'=\dfrac{z+2i}{1-2iz}$.

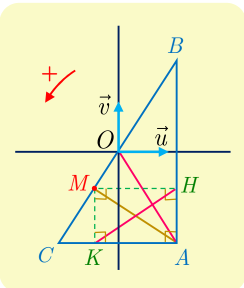
$$\begin{aligned}|z'|^2-1&=\frac{|z+2i|^2}{|1-2iz|^2}-1=\frac{|z+2i|^2-|1-2iz|^2}{|1-2iz|^2}\\&=\frac{(z+2i)(\overline{z}-2i)-(1-2iz)(1+2i\overline{z})}{|1-2iz|^2}\end{aligned}$$

إذن

$$|z'|^2-1=\frac{|z|^2+4+2i\overline{z}-2iz-1-4|z|^2+2iz-2i\overline{z}}{|1-2iz|^2}=\frac{3(1-|z|^2)}{|1-2iz|^2}$$

من هذه المساواة نرى أنّه يوجد تكافؤ بين الخاصتين $|z|^2-1=0$ و $|z'|^2-1=0$، فإذا تحققت الأولى تحققت الثانية وبالعكس. وعليه تنتمي $M(z)$ إلى Γ (أي $|z|=1$) إذا وفقط إذا انتمت النقطة $M'(z')$ إلى Γ (أي $|z'|=1$).

9 مسألة تعامد



نتأمّل في المستوي الموجّه، مثلّثاً مباشراً ABC قائماً في A. النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) بالترتيب، و H و K هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) وعلى (AC) بالترتيب.

نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK).

نختار معلماً متجانساً ومباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ بحيث تقع O في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) و $\vec{v}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم (AB). ونرمز a,b,c,h,k,m إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A,B,C,H,K,M.

① علّل ما يأتي : $a=\overline{b}$ و $a-m=\overline{h-k}$.

② a. أثبت أنّ $\arg\left(\dfrac{a-m}{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\dfrac{a-m}{b}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

b. استنتج أنّ $\arg\left(\dfrac{h-k}{a}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\dfrac{h-k}{a}\right)=\dfrac{\pi}{2}$، ثمّ أثبت المطلوب.

الحل

① لأنّ B نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل استنتجنا أنّ $a=\overline{b}$. الرباعي $AHMK$ مستطيل.

فيكون لدينا من جهة أولى $\overrightarrow{MA}=\mathrm{Re}(a-m)\vec{u}+\mathrm{Im}(a-m)\vec{v}$ إذن

$$\overrightarrow{MH}=\mathrm{Re}(a-m)\vec{u} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{HA}=\mathrm{Im}(a-m)\vec{v}$$

ومن جهة ثانية $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}=\mathrm{Re}(a-m)\vec{u}-\mathrm{Im}(a-m)\vec{v}$ ، إذن

$\mathrm{Im}(h-k)=-\mathrm{Im}(a-m)$ و $\mathrm{Re}(h-k)=\mathrm{Re}(a-m)$

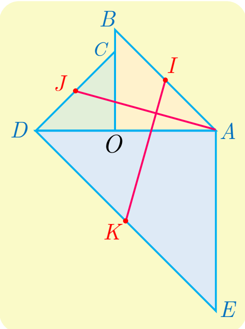
وهذا يكافئ $a-m=\overline{h-k}$.

② الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان، أي $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MA})=\pm\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ أو $\arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$.

أي $\arg\left(\overline{\left(\frac{h-k}{a}\right)}\right)=\pm\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ ومن ثَمّ $\arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\mp\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ أي $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH})=\mp\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$

فالمستقيمان (OA) و (HK) متعامدان.

10 نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور. المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (AJ) و (IK) وأنّ $IK=AJ$. نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O . ونرمز a و c إلى العددين العقديين المُمثّلين للنقطتين A و C .



①a. عبّر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط B و D و E .

b. استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثّل النقاط I و J و K .

② أثبت أنّ $z_K-z_I=i(z_J-a)$. ثُمّ استنتج الخواص المطلوبة.

الحل

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول O، الذي نرمّزه $\mathcal{R}$، كان

$$z'=e^{i\pi/2}z=iz$$

لما كان $B=\mathcal{R}(A)$، و $D=\mathcal{R}(C)$، كان $b=ia$ و $d=ic$. ولأنّ E هي صورة d وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول a كان $e-a=i(d-a)$ ومنه

$$e=a+i(ic-a)=(1-i)a-c$$

إذن

$$z_I=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1+i}{2}a$$
$$z_J=\frac{1}{2}(c+d)=\frac{1+i}{2}c$$
$$z_K=\frac{1}{2}(e+d)=\frac{1-i}{2}(a-c)$$

ومنه

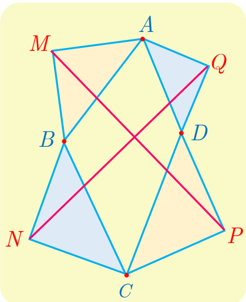
$$z_K - z_I - i(z_J - a) = \frac{1-i}{2}(a-c) - \frac{1+i}{2}a - i\left(\frac{1+i}{2}c - a\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1-i-1-i+2i)a + \frac{1}{2}(-1+i-i+1)c = 0$$

إذن $z_K - z_I = i(z_J - a)$. وعليه

$$\arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } |z_K - z_I| = |z_J - a|$$

أي $IK = AJ$ و $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{2}$، فالمستقيمان (AJ) و (IK) متعامدان.

11 نتأمّل في المستوي الموجّه رباعياً محدباً مباشراً $ABCD$. نُنشئ خارجه النقاط M و N و P و Q التي تجعل المثلثات MBA و NCB و PDC و DQA قائمة في M و N و P و Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.



أثبت باستعمال الأعداد العقدية أنّ $MP = NQ$ وأنّ المستقيمين (MP) و (NQ) متعامدان.

الحل

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول نقطة $\Omega(\omega)$، كان

$$z' - \omega = e^{i\pi/2}(z - \omega) = iz - i\omega$$

ومن ثَمّ تتعيّن ω من z و z' بالعلاقة :

$$\omega = \frac{1}{2}(1+i)z' + \frac{1}{2}(1-i)z.$$

- A هي صورة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول M، إذن $m = \frac{1}{2}(1+i)a + \frac{1}{2}(1-i)b$.
- B هي صورة C وفق دوران ربع دورة مباشرة حول N، إذن $n = \frac{1}{2}(1+i)b + \frac{1}{2}(1-i)c$.
- C هي صورة D وفق دوران ربع دورة مباشرة حول P، إذن $p = \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d$.
- D هي صورة A وفق دوران ربع دورة مباشرة حول Q، إذن $q = \frac{1}{2}(1+i)d + \frac{1}{2}(1-i)a$.

وعليه نرى أنّ

$$\begin{aligned} p-m &= -\frac{1}{2}(1+i)a-\frac{1}{2}(1-i)b+\frac{1}{2}(1+i)c+\frac{1}{2}(1-i)d \\ q-n &= +\frac{1}{2}(1-i)a-\frac{1}{2}(1+i)b-\frac{1}{2}(1-i)c+\frac{1}{2}(1+i)d \\ i(p-m) &= +\frac{1}{2}(1-i)a-\frac{1}{2}(1+i)b-\frac{1}{2}(1-i)c+\frac{1}{2}(1+i)d \end{aligned}$$

إذن $q-n=i(p-m)$. وهذه تعني أنّ

$$|q-n|=|p-m| \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{q-n}{p-m}\right)=\frac{\pi}{2}$$

إذن $MP=NQ$ والمستقيمان (MP) و (NQ) متعامدان.

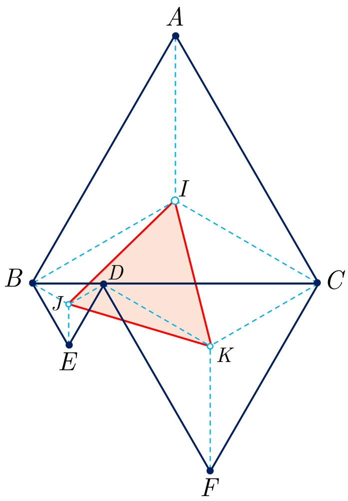
12 نتأمّل في المستوي الموجّه مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً ABC مركزه النقطة I . D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$. نُنشئ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين BED و DFC . ونعرّف J و K مركزي المثلثين BED و DFC . نهدف إلى إثبات أنّ المثلث IJK متساوي الأضلاع. نختار معلماً متجانساً مباشراً $(B,\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{BC}=a\vec{u}$ حيث $a=BC$.

① احسب، بدلالة a، العددين العقديين z_A و z_I اللذين يمثلان A و I بالترتيب.

② نفترض أنّ $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$ حيث $t\in]0,1[$. احسب بدلالة a و t، العددين العقديين z_J و z_K اللذين يمثلان J و K بالترتيب.

③ تحقّق أنّ $z_K-z_I=e^{i\pi/3}(z_J-z_I)$ ، واستنتج الخاصة المرجوّة.

الحل



① A هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$، فإذا وضعنا تسهيلاً للكتابة $\omega=e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، كان $z_A=\omega a$.

وكان $z_I=\frac{1}{3}\left(z_B+z_C+z_A\right)=\frac{1+\omega}{3}a$.

② من $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$ نستنتج أنّ $z_D=ta$ لأنّ $z_B=0$ و $z_C=a$. والنقطة E هي صورة D وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$، إذن $z_E=\overline{\omega}z_D=t\overline{\omega}a$ ومنه

$$z_J=\frac{1}{3}\left(z_B+z_D+z_E\right)=\frac{1+\overline{\omega}}{3}ta$$

النقطة F هي صورة D وفق الدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$، إذن $z_F - z_C = \omega(z_D - z_C)$

ومنه $z_F = (1-\omega)a + \omega t a$. نستنتج إذن أنّ

$$z_K = \frac{1}{3}\left(z_C + z_D + z_F\right) = \frac{1}{3}\left((2-\omega)a + (1+\omega)ta\right)$$

ومنه

$$\begin{aligned}
z_K - z_I &= \frac{1}{3}\left((1-2\omega)a + (1+\omega)ta\right)\\
z_J - z_I &= \frac{1}{3}\left((1+\overline{\omega})ta - (1+\omega)a\right)\\
\omega(z_J - z_I) &= \frac{1}{3}\left((\omega+1)ta - (\omega+\omega^2)a\right)\\
z_K - z_I - \omega(z_J - z_I) &= \frac{1}{3}(1-\omega+\omega^2)a
\end{aligned}$$

ولكن $\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $\omega^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ إذن $1-\omega+\omega^2 = 0$. فنكون قد أثبتنا أنّ $z_K - z_I = \omega(z_J - z_I)$ أي إنّ K هي صورة J وفق الدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

فالمثلث IJK مثلث متساوي الأضلاع.

تتمة. بيّن أنّ مركز المثلث IJK يقع على القطعة المستقيمة $[BC]$.

13 نزوّد المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقاط A و A' و B و B' هي النقاط الموافقة للأعداد العقدية 1 و -1 و i و $-i$ بالترتيب.

نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و A' و B و B' النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثان BMM_1 و AMM_2 قائمين ومتساويي الساقين بحيث

$$(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

① ارسم شكلاً مناسباً.

② a. علّل صحة المساواتين $z - z_1 = i(i - z_1)$ و $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

b. عبّر عن z_1 و z_2 بدلالة z.

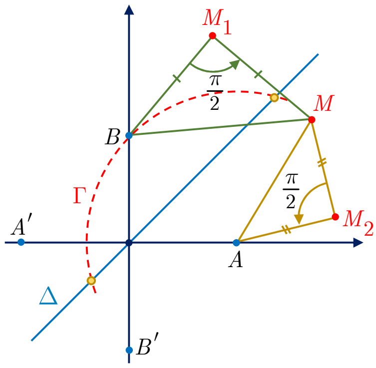
③ نهدف إلى تعيين النقاط M التي تجعل المثلث OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع.

a. أثبت أنّ الشرط $OM_1 = OM_2$ يُكافئ $|z+1| = |z+i|$ واستنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$، وارسم Δ على الشكل نفسه.

b. أثبت أنّ الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يُكافئ $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

c. استنتج Γ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$، وارسم Γ على الشكل نفسه.

d. استنتج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع. وحدّدها على الشكل.



الحل

② إنّ M هي صورة B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول M_1 إذن $z - z_1 = e^{i\pi/2}(i - z_1)$، أو $z - z_1 = i(i - z_1)$. وبالمثل إذن A هي صورة M وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول M_2 إذن $1 - z_2 = i(z - z_2)$. نستنتج إذن أنّ

$$z_2 = \frac{1}{2}(1+i)(1-iz) \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1}{2}(1+i)(z+1)$$

③ *a*.الشرط $OM_1 = OM_2$ يُكافئ $|z_1| = |z_2|$ وهذا بدوره يُكافئ

$$|z+1| = |1-iz| = |(-i)(i+z)| = |-i||i+z| = |i+z|$$

أو $|z - z_{B'}| = |z - z_{A'}|$. إذن Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$، هي مجموعة النقاط المتساوية البعد عن A' و B'، فهي إذن محور القطعة $[A'B']$، أي منصف الربع الأوّل.

b. نلاحظ أنّ $z_2 - z_1 = -\frac{(1+i)^2}{2}z = -iz$ إذن $M_1M_2 = |z|$، و $OM_1 = |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}|1+z|$
إذن الشرط يُكافئ $|1+z|^2 = 2|z|^2$.

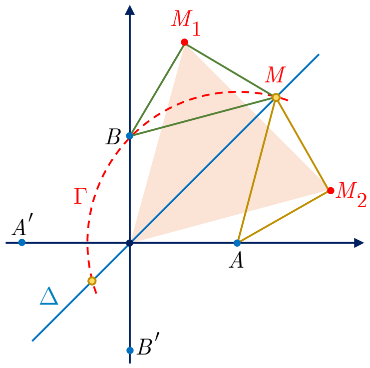
c. تنتمي $M(z)$ إلى Γ مجموعة النقاط التي تحقق $M_1M_2 = OM_1$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط $|1+z|^2 = 2|z|^2$، ولكن نعلم من متطابقة متوازي الأضلاع أنّ $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 2|z|^2 + 2$، فالشرط $|1+z|^2 = 2|z|^2$ يُكافئ إذن أنّ $|z-1|^2 = 2$ أو $|z-1| = \sqrt{2}$. فالمجموعة Γ هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$، أي الدائرة التي مركزها A وتمر بالنقطة B.

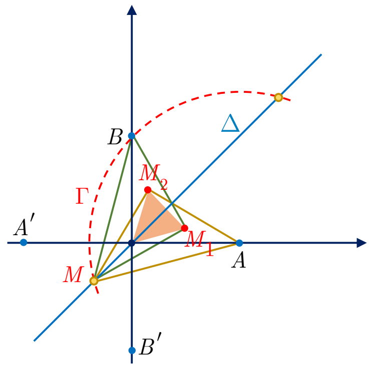
d. إذن يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع، إذا وفقط إذا انتمت M إلى تقاطع المجموعتين Γ و Δ. تنتمي z إلى Δ إذا كانت $z = t(1+i)$ حيث t عدد حقيقي نعيّنه بشرط انتماء M إلى Γ أي $|1+t(1+i)|^2 = 2|t(1+i)|^2$، وهذه تُكافئ $(1+t)^2 + t^2 = 4t^2$ أو $2t^2 - 2t - 1 = 0$، ومنه

$$t \in \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$$

وعلى هذا يكون OM_1M_2 متساوي الأضلاع، إذا وفقط إذا كان العدد العقدي الممثل للنقطة M واحداً من بين: $\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i), \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)\right\}$.

يبيّن الشكل الآتي الأوضاع التي يكون عندها المثلث المدروس متساوي الأضلاع





6

التحليل التوافقي

1. إنشاء قوائم من عناصر مجموعة
2. التوافيق
3. خواص عدد التوافيق $\binom{n}{r}$، ومنشور ذي الحدّين

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- إنشاء قوائم من عناصر مجموعة: التراتيب، التباديل والتوافيق.
- المبدأ الأساسي في العدّ.
- عدد التراتيب، عددالتوافيق، العاملي وخواص هذه الأعداد
- منشور ذي الحدين،
- تطبيقات منشور ذي الحدين في تحويل بعض العبارات المثلثية.

تَدرَّبْ صفحة 152

① اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة:

❶ $\frac{21!}{20!}$ ❷ $\frac{17!}{15!}$ ❸ $\frac{6!-5!}{5!}$ ❹ $\frac{6\times 4!}{5!}$ ❺ $\frac{7!\times 5!}{10!}$

❻ $\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!}$ ❼ $\frac{6!}{(3!)^2}$ ❽ $\frac{9!}{5!\times 4!}$ ❾ $\frac{9!}{6!\times 3!}$ ❿ $\frac{6!+7!}{2!3!4!}$

الحل

❶ 21 ❷ 272 ❸ 5 ❹ $\frac{6}{5}$ ❺ $\frac{1}{6}$

❻ 0 ❼ 20 ❽ 126 ❾ 84 ❿ 20

② اختزل المقادير الآتية:

❶ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ ❷ $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ ❸ $\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$

❹ $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$ ❺ $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ ❻ $\frac{(2n)!}{1\times 3\times 5\cdots\times(2n-1)}$

الحل

❶ $n(n+1)$ ❷ $2n(2n+1)$ ❸ $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}=P^{n}_{2n-1}$

❹ $\frac{1}{n(n+1)}$ ❺ $\frac{1}{(n+1)\cdot(n-1)!}=\frac{n}{(n+1)!}$ ❻ $2^n n!$

③ اكتب جميع تباديل المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$

الحل

عدد تباديل هذه المجموعة يساوي $24=4!$. وهذه التباديل مبينة في الجدول الآتي:

$abcd$	$bacd$	$cabc$	$dabc$
$abdc$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$
$adbc$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$

④ لتكن المجموعة $S=\{1,2,5,8,9\}$.

❶ كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S؟

❷ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S؟

❸ كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S؟

الحل

❶ هناك خمسة خيارات للآحاد وخمسة خيارات للعشرات، إذن هناك $25 = 5 \times 5$ عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S.

❷ هناك خمسة خيارات للآحاد وفقط أربعة خيارات للعشرات؛ إذ لا يمكن اختيار العدد الموافق للآحاد مجدداً، إذن هناك $20 = 5 \times 4$ عدداً مختلف الأرقام مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S.

❸ هناك خياران فقط للآحاد؛ إذ يجب أن يكون الرقم زوجياً، وخمسة خيارات للعشرات، إذن هناك $10 = 5 \times 2$ أعداد زوجية مؤلفة من منزلتين يمكن تشكيلها من عناصر المجموعة S.

⑤ في أحد مراكز الهاتف مهندسان، وأربعة عمال، كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز؟

الحل

هناك خياران للمهندس وأربعة خيارات للعامل، إذن يمكن تأليف $8 = 4 \times 2$ لجنة مختلفة لمتابعة أعمال الصيانة.

⑥ يتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس، ونائب للرئيس، وأمين سرٍ للنادي؟

الحل

هناك سبعة خيارات للرئيس، فتبقى ستة خيارات لنائبه، وبعدها يبقى لدينا خمسة خيارات لأمين السر. إذن هناك $210 = 5 \times 6 \times 7$ خياراً مختلفاً للفريق المكوّن من رئيس مجلس إدارة النادي ونائبه، وأمين سره.

⑦ اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات، يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟ (لا توجد حالات تساوٍ).

الحل

هناك 100 خي ار ممكن للحصول على الميدالية الذهبية، فيبقى بعدها 99 خياراً ممكناً للحصول على الميدالية الفضية، وبعد توزيع الأخيرة يبقى 98 خياراً ممكناً للحصول على الميدالية البرونزية. إذن هناك $970200 = 98 \times 99 \times 100$ توزيعاً ممكناً للميداليات الثلاث على المتسابقين.

تَدرَّبْ صفحة 155

① اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة أو كسور غير قابلة للاختزال :

❶ $\binom{6}{2}$ ❷ $\binom{12}{8}$ ❸ $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}}$ ❹ $\dfrac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}$ ❺ $\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}$ ❻ $\dfrac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}}$

الحل

❶ 15 ❷ 495 ❸ $\dfrac{1}{4}$ ❹ $\dfrac{25}{14}$ ❺ $\dfrac{2}{3}$ ❻ $\dfrac{1}{10}$

② أثبت صحة المساواة $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$ في حالة $n \geq 2$ و $1 \leq r \leq n$.

الحل

$$n\binom{n-1}{r-1} = n\frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot((n-1)-(r-1))!} = \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}$$
$$= \frac{r}{r}\cdot\frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r)!} = r\cdot\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = r\binom{n}{r}$$

③ عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقّق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

❶ $\binom{n}{2} = 36$ ❷ $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ ❸ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

الحل

❶ $\binom{n}{2} = 36$ تعني $\frac{n(n-1)}{2} = 36$ أي $n(n-1) = 72$ أو $(n-9)(n+8) = 0$، ولكن n عددٌ طبيعي، إذن $n+8 > 0$ ولا بُدّ أن يكون $n-9=0$ أو $n=9$.

❷ إذا كان n عدداً يحقّق $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ لوجب أن يكون عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 4 ولوجب أيضاً أن تتحقّق المساواة

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 14\frac{n(n-1)}{2}$$

وهذه تكافئ $n(n-1)\big((n-2)(n-3)-56\big) = 0$ أو $n(n-1)(n+5)(n-10) = 0$، ولأنّ n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 4 استنتجنا مما سبق أنّ n يجب أن يساوي 10. ونتحقّق مباشرة أنّ $n = 10$ هو حلٌّ للمعادلة المعطاة.

❸ أيُّ حلّ للمعادلة $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$ هو عدد طبيعي n يحقّق $0 \leq 3n \leq 10$ أي هو أحد الأعداد $\{0,1,2,3\}$. وهذه حالة بسيطة جداً إذ يكفي أن نحسب الطرفين عند هذه القيم، فنجد المساواة غير محقّقة في حالة $n \in \{0,3\}$ ونجدها محقّقة في حالة $n \in \{1,2\}$، إذن مجموعة الحلول هي $\{1,2\}$.

④ نريد تأليف لجنة مكوّنة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً وأربع عشرة امرأة.

❶ كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها؟

❷ كم لجنة مختلفة مكوّنة من رجلين وامرأتين يمكننا تأليفها؟

الحل

❶ لدينا 29 شخصاً ونريد اختيار مجموعة جزئيّة (لجنة) من بينهم عدد عناصرها أربعة. هناك إذن هناك

$$\binom{29}{4} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 23\,751$$

خياراً ممكناً.

❷ لدينا 15 رجلاً ونريد اختيار مجموعة جزئيّة من بينهم مكونة من عنصرين، ولدينا $\binom{15}{2}$ خياراً ممكناً، ولدينا أيضاً 14 امرأة ونريد اختيار مجموعة جزئيّة من بينهن مكونة من عنصرين، إذن لدينا $\binom{14}{2}$ خياراً ممكناً،. هناك إذن هناك

$$\binom{14}{2} \times \binom{15}{2} = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} \cdot \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 9\,555$$

خياراً ممكناً.

تَدرَّبْ صفحة 159

① انشر كلاً من العبارات الآتية:

❶ $(2+x)^4$ ❷ $(1-x)^5$ ❸ $(2x+1)^6$

❹ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ ❺ $(1+2i)^3$ ❻ $(2-i)^4$

الحل

❶ $(2+x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

❷ $(1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

❸ $(2x+1)^6 = 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1$

❹ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

❺ $(1+2i)^3 = -11 - 2i$

❻ $(2-i)^4 = -7 - 24i$

② عيّن في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحدّ الذي يحوي x^2 والحدّ الثابت المستقل عن x.

الحل

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين هي $T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ وفي حالتنا

$$T_r = \binom{10}{r}x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r}x^{10-2r}$$

فالحدّ الذي يحوي x^2 هو الحد ذو الدليل r حيث $10-2r=2$ أي $r=4$. وهذا الحدّ يساوي $210x^2$.

وبطريقة مماثلة نجد أنّ الحد الثابت هو الحد ذو الدليل r حيث $10-2r=0$ أي $r=5$. وهذا الحدّ يساوي 252.

③ ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حدّ ثابت مستقل عن x.

الحل

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في هذا المنشور هي

$$T_r = \binom{n}{r}x^{2(n-r)}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{n}{r}x^{2n-3r}$$

وجود حد ثابت في المنشور يكافئ وجود قيمة للدليل r تحقّق الشرط $2n-3r=0$ فلا بدّ أن يكون n من مضاعفات العدد 3.

وبالعكس، إذا كان n من مضاعفات العدد 3 فإنّ $r=\frac{2n}{3}$ تحقّق الشرط المطلوب ويحتوي المنشور على حدّ ثابت هو الحد ذي الدليل $r=2n/3$.

④ اختزل منشور المقدار $(1+x)^6+(1-x)^6$.

الحل

$$\begin{aligned}(1+x)^6+(1-x)^6 &= 2+30x^2+30x^4+2x^6\\ &= 2(1+x^2)(1+14x^2+x^4)\end{aligned}.$$

أنشطة

نشاط 1 أنواع السحب المختلفة

نتأمّل صندوقاً يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 و 7 و 8 و 9.

❶ السحب مع الإعادة

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاث كرات **على التتالي مع الإعادة**، أي إننا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة.
- نُدوّن **بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

إذن نتيجة التجربة هي ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6,7,8,9\}$. فمثلاً الثلاثية $(9,7,7)$ تمثّل سحب الكرة التي تحمل الرقم 9 في السحب الأوّل والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثاني والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثالث.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية :

a. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

b. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

c. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

d الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

❷ السحب دون إعادة

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاث كرات **على التتالي دون إعادة**، أي إننا لا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة.
- نُدوّن **بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا أيضاً تكون نتيجة التجربة ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6,7,8,9\}$، ولكن في هذه المرة يجب أن تكون بنود القائمة مختلفة مثنى مثنى. فهي إذن **ترتيب** لثلاثة عناصر مأخوذة من E.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② أجب عن فقرات السؤال ② من الفقرة السابقة، ولكن لهذا النوع من التجارب.

❸ السحب في آن معاً

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب **في آن معاً** ثلاث كرات من الصندوق.
- نُدوّن أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا يمكن تمثيل نتيجة التجربة بمجموعة جزئية مكوّنة من ثلاثة عناصر مأخوذة من $E = \{6,7,8,9\}$.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 ؟

③ كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 8 و 9 ؟

الحل

❶ ① $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

② $a.$ 1. ② $b.$ 4. ② $c.$ 4. ② $d.$ $4^2 = 16$.

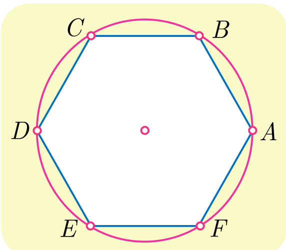
❷ ① $P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

② $a.$ 1. ② $b.$ 2. ② $c.$ 2. ② $d.$ $3 \times 2 = 6$.

❸ ① $\binom{4}{3} = 4$. ② $\binom{3}{2} = 3$. ③ $\binom{2}{1} = 2$.

نشاط 2 مثلثات في مسدّس

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم.



نُجري التجربة الآتية: نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلّث.

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

② ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

③ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل

① كلّ مثلث يتعيّن بثلاث نقاط من النقاط الست المعطاة، وأي مجموعة جزئية مؤلفة من ثلاث نقاط تعين مثلثاً. إذن عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب يساوي $\binom{6}{3} = 20$ مثلثاً.

② كل قطر يمر بمركز الدائرة في المسدس وترٌ لأربعة مثلثات قائمة رؤوسها هي رؤوس المسدس عدا طرفيّ القطر المختار ولدينا ثلاثة أقطار، فعدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها $4\times3=12$.

③ هناك مثلث واحدٌ منفرج الزاوية في A مثلاً. إذن عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن الحصول عليها بهذا الأسلوب يساوي عدد رؤوس المسدس أي 6.

نشاط 3 منعاً من السرقة

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمّاز (كود) مكون من عدد ذي أربع خانات يمكن لأيّ منها أن يأخذ أياً من القيم $0,1,\ldots,9$.

① a. ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجرِ إدخال أي خانة صحيحة في مكانها. ما عدد الرمازات التي تُسبب انطلاق الإنذار.

b. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل والمكوّنة من خانات مختلفة مثنى مثنى؟

② عند فصل التغذية الكهربائية عن المذياع، يجب على مالك السيارة أن يعيد إدخال الرماز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع. يتذكر المالك أنّ الرماز الصحيح مكوّن من الأرقام 1 و 5 و 9 و 9 ولكنه نسي ترتيبها.

كم رمّازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكوّن من هذه الأرقام؟

الحل

① a. $10\times10\times10\times10=10000$. واحدٌ منها فقط صحيحٌ ولا يسبب انطلاق الإنذار أمّا البقية وعددها 9999 فأي منها يُطلق الإنذار.

① b. $10\times9\times8\times7=5040$.

② هناك أربعة خيارات لموقع الرقم 1، وتبقى ثلاثة لموقع الرقم 5، وبعدها يملأ الخانتين المتبقيتين بالرقم 9 إذن هناك 3×4 رمازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكونه من هذه الأرقام.

نشاط 4 تحويل العبارات المثلثية

❶ ما هي المهمة المنشودة ؟

نهدف إلى التعبير عن مقادير مثل $\cos^n x$ أو $\sin^n x$، أو حتى $\cos^n x\sin^m x$ بصيغة مجموع حدود من الصيغة $b\cos(qx)$ أو $c\sin(qx)$ حيث b و c أعداد حقيقية و n و m و q أعداد طبيعية. فمثلاً رأينا في دراستنا السابقة أن : $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$ و $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

تظهر أهمية هذه التحويلات خصوصاً عند حساب التوابع الأصلية، فإذا تمكّنّا من كتابة التابع $x\mapsto\cos^n x\sin^m x$ بصيغة عبارة خطية لتوابع من النمط $x\mapsto\cos(qx)$ أو $x\mapsto\sin(qx)$، صار بإمكاننا حساب تابع أصلي لهذا التابع.

❷ شرح الطريقة في مثال

لنسعَ إلى تحويل عبارة $\sin^4 x$ إلى مجموع حدود من الصيغة $a\cos(qx)$.

- نستعمل علاقتي أويلر : $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ أو $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$:

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

- ثُمّ ننشر $(e^{ix} - e^{-ix})^4$ باستعمال **منشور ذي الحدّين**:

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$$

- نختزل هذه الصيغة باستعمال $e^{ikx}e^{-ik'x} = e^{i(k-k')x}$ ثُمّ نجمّع كل حدّين e^{ipx} و e^{-ipx} معاً لنجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left((e^{4ix} + e^{-4ix}) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right)$$

- نستعمل علاقتي أويلر بالشكل $e^{ipx} + e^{-ipx} = 2\cos px$ أو $e^{ipx} - e^{-ipx} = 2i\sin px$ لنجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6\right) = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

- فمثلاً لحساب $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$ نكتب

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx = \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

(تتطلب هذا الفقرة دراية ببحث التكامل).

❸ تطبيق

حوّل كلّ عبارة مما يأتي إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات x :

① $\cos^4 x$ ② $\cos^2 x\sin^2 x$ ③ $\sin^5 x$.

الحل

①
$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) + 4\left(e^{-2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right) = \frac{1}{8}\left(\cos 4x + 4\cos 2x + 3\right)$$

②
$$\cos^2 x\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 2\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

③
$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)$$

تمرينات ومسائل

1 أثبت صحة العلاقتين

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r} \quad \text{و} \quad \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

الحل

لدينا

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{r!\cdot(n+1-r)!} \times \frac{r!\cdot(n-r)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

وكذلك

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n-r)!} \times \frac{r!\cdot(n-r)!}{n!} = \frac{n+1}{r+1}$$

2 احسب قيمة كل من n و r إذا علمت:

$$3\cdot\binom{n}{r} = 8\cdot\binom{n}{r-1} \quad \text{و} \quad 2\cdot\binom{n+1}{r+1} = 5\cdot\binom{n+1}{r}$$

الحل

من $3\cdot\binom{n}{r} = 8\cdot\binom{n}{r-1}$ نستنتج أنّ

$$\frac{8}{3} = \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} \times \frac{(r-1)!\cdot(n-r+1)!}{n!} = \frac{n-r+1}{r}$$

أو $3n+3 = 11r$. ومن $2\cdot\binom{n+1}{r+1} = 5\cdot\binom{n+1}{r}$

نستنتج أنّ

$$\frac{5}{2} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n+1}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n-r)!} \times \frac{r!\cdot(n-r+1)!}{(n+1)!} = \frac{n-r+1}{r+1}$$

أو $2n = 7r+3$. وبالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 11r - 3n = 3 \\ 7r - 2n = -3 \end{cases}$$

نجد $(n,r) = (54,15)$.

3 عيّن n في كل من الحالات الآتية:

① $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$ ② $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$

③ $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$ ④ $P_n^6 = 12P_{n-1}^5$

⑤ $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$ ⑥ $P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$

⑦ $P_{n+2}^3 = 4P_{n+1}^2$ ⑧ $P_n^2 = 5P_{n-1}^1$

الحل

① إذا كان n حلاً للمعادلة $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$ كان $(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14n(n-1)(n-2)$ ومنه $n(n-1)(n-5)(n-6) = 0$. القيمتان $n = 0$ و $n = 1$ مرفوضتان لأنّ P_n^3 معرّف فقط في حالة $n \geq 3$. ونتحقّق بسهولة أنّ $n = 5$ و $n = 6$ هما حلان للمعادلة المعطاة. إذن مجموعة الحلول هي $\{5,6\}$.

② إذا كان n حلاً للمعادلة $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$ كان

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

ومنه $(n-2)(n-3)(n-4)(n-9)(n-10) = 0$. القيم $\{2,3,4\}$ مرفوضة لأنّ P_n^5 معرّف فقط في حالة $n \geq 5$. ونتحقّق بسهولة أنّ $n = 9$ و $n = 10$ هما حلّا المعادلة المعطاة.

③ إذا كان n حلاً للمعادلة $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$ كان

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$$

ومنه $(n-1)(n-2)(n-3)(n-10) = 0$. القيم $\{1,2,3\}$ مرفوضة لأنّ P_n^4 معرّف فقط في حالة $n \geq 4$. ونتحقّق بسهولة أنّ $n = 10$ هو حل للمعادلة المعطاة. إذن مجموعة الحلول هي $\{10\}$.

④ إذا كان n حلاً للمعادلة $P_n^6 = 12P_{n-1}^5$ كان $n \geq 6$ وعندها

$$12 = \frac{P_n^6}{P_{n-1}^5} = \frac{n!}{(n-6)!} \times \frac{(n-6)!}{(n-1)!} = n$$

إذن مجموعة الحلول هي $\{12\}$.

⑤ إذا كان n حلاً للمعادلة $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$ كان $n \geq 2$ وتكافئ المعادلة المعطاة ما يأتي

$$2 = \frac{P_{n+1}^3}{P_{n+2}^2} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \times \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n(n-1)}{n+2}$$

ومنه $(n-4)(n+1) = 0$. إذن مجموعة الحلول هي $\{4\}$.

⑥ الجواب $n = 2$.

⑦ الجواب $n = 2$.

⑧ الجواب $n = 5$.

4 يلتقي عشرة أصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط ، فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟ عمّم النتيجة السابقة إلى حالة n صديقاً.

الحل

كلما التقى شخصان تصافحا مرة واحدة، إذن عدد المصافحات يساوي عد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين. لدينا عشرة أشخاص فعدد المصافحات يساوي $\binom{10}{2} = 45$. وبوجه عام، في حالة حفل يضم n شخصاً يكون عدد المصافحات $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

5 في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة.

① بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

② بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية ؟

الحل

① $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$.

② $\binom{6}{3} = 20$.

6 أراد صف فيه إثنا عشر طالباً وثماني طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة أشخاص. بكم لجنة مختلفة يمكن تأليفها في كل من الحالات الآتية:

① اللجنة مؤلّفة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

② في اللجنة طالبتان على الأكثر.

③ في اللجنة طالبتان على الأقل.

الحل

① $\binom{12}{3}\binom{8}{2} = 6160$.

② عدد اللجان التي تحوي k طالبة حيث $0 \leq k \leq 5$ يساوي $\binom{12}{5-k}\binom{8}{k}$، إذن عدد اللجان التي تضم طالبتين على الأكثر يساوي

$$\binom{12}{5-0}\binom{8}{0} + \binom{12}{5-1}\binom{8}{1} + \binom{12}{5-2}\binom{8}{2} = 10912$$

③ عدد اللجان التي تضم طالبتين على الأقل يساوي

$$\binom{12}{5-5}\binom{8}{5} + \binom{12}{5-4}\binom{8}{4} + \binom{12}{5-3}\binom{8}{3} + \binom{12}{5-2}\binom{8}{2} = 10752.$$

7 احسب أمثال x^3 في منشور $(2+3x)^{15}$.

الحل

الحد ذو الدليل r في هذا المنشور هو : $T_r = \binom{15}{r}2^{15-r}(3x)^r = \binom{15}{r}2^{15-r}3^r x^r$ إذن أمثال x^3 هي $\binom{15}{3}2^{12}3^3 = 2^{12}\times 3^3\times 5\times 7\times 13 = 50\ 319\ 360$.

8 ما آحاد وعشرات العدد 11^{11} ؟

الحل

الحد ذو الدليل r في منشور $11^{11} = (1+10)^{11}$ هو : $T_r = \binom{11}{r}1^{11-r}(10)^r = \binom{11}{r}(10)^r$ إذن جميع الحدود $T_2, T_3, \ldots, T_{11}$ هي من مضاعفات المئة وإضافتها لا تؤثر في آحاد وعشرات العدد $T_0 + T_1 = 111$. إذن كل من آحاد وعشرات العدد 11^{11} يساوي 1.

9 ما الحد الثابت (الذي لا يتعلق بالمتحول x) في منشور $(x+\dfrac{1}{x^3})^{12}$ ؟

الحل

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في هذا المنشور هي

$$T_r = \binom{12}{r}x^{12-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r = \binom{12}{r}x^{12-4r}$$

وجود حد ثابت في المنشور يكافئ وجود قيمة للدليل r تحقّق الشرط $12-4r=0$ فلا بدّ أن يكون $r=3$ والحد المطلوب هو $T_3 = 220$.

لنتعلّم البحث معاً

10 عدد أقطار مضلّع محدّب

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n\geq 4$، يعطى بالعلاقة $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

نحو الحلّ

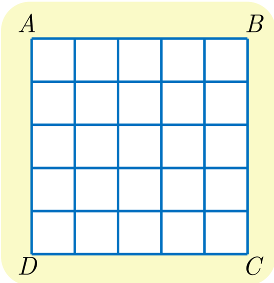
- نعلم أن القطر في المضلّع هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متجاورين. فكم قطعة مستقيمة تصل بين رأسين مختلفين من رؤوس المضلع يمكن أن نرسم؟ ومن بين هذه القطع كم ضلعاً للمضلع تجد؟
- اشرح لماذا يمثل المقدار $\binom{n}{2}-n$ عدد الأقطار المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لتكن V مجموعة رؤوس المضلع وعدد عناصرها n. أيّة مجموعة جزئية مكوّنة من عنصرين من V تعرّف إمّا قطراً في المضلع أو ضلعاً فيه. إذن $\binom{n}{2}$ يساوي عدد الأقطار المطلوب مضافاً إليه عدد الأضلاع وهو n. نستنتج أنّ عدد الأقطار يساوي $\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$.

11 التعداد على شبكة



في الشكل المجاور نتأمّل شبكة منتظمة مرسومة في مربّع $ABCD$. ونرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل. علماً أن المربع مستطيل خاصٌّ.

نحو الحلّ

- غالباً ما يكون مفيداً، عند حلّ مسائل التعداد، إيجاد أسلوب عملي يتيح الحصول على الأشياء التي نريد تعدادها، وهذا واحد من هذه الأساليب: تحقّق أنه عندما يتقاطع مستقيمان شاقوليان مع مستقيمين أفقيين نحصل على مستطيل.
- يجب أن نتيقّن من تعداد جميع الأشياء المطلوبة دون استثناء ودون تكرار. لنرمز إذن إلى المستقيمات الشاقولية $(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ بحيث ينطبق (AD) على v_0 و (BC) على v_5. ولنرمز أيضاً إلى المستقيمات الأفقية $(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)$ بحيث ينطبق (AB) على h_0 و (DC) على h_5.

وعلى هذا يمكن تمثيل كل مستطيل بالشكل $\left(\{h_i,h_j\},\{v_k,v_\ell\}\right)$ مع $(k\neq\ell$ و $i\neq j)$. لاحظ أنّ الترتيب غير مهم أي إنّ المستطيل الموافق لـ $\left(\{h_i,h_j\},\{v_k,v_\ell\}\right)$ هو نفسه المستطيل الموافق لـ$\left(\{h_j,h_i\},\{v_k,v_\ell\}\right)$ أو $\left(\{h_j,h_i\},\{v_\ell,v_k\}\right)$... . استنتج أنّ عدد المستطيلات المنشود يساوي عدد أساليب اختيار مستقيمين شاقوليّين، ومستقيمين أفقيين.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

عملاً بالمناقشة الموضّحة في نصّ الحلّ نجد أنّ عدد المستطيلات المطلوب يساوي $\binom{6}{2}\binom{6}{2}=225$.

12 من خواص عدد التوافيق

في حالة عدد طبيعي n. ادرس كيف تتغيّر الحدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\leq r\leq n}$، واستنتج أنّ المساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تُكافئ $p=q$ أو $p+q=n$.

نحو الحلّ

☝ لننظر إلى الحدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$ عند بعض القيم الصغيرة للعدد n. في حالة $n=4$ نجد $(1,4,6,4,1)$ وفي حالة $n=5$ نجد $(1,5,10,10,5,1)$. في الحالتين: تتزايد الحدود في البداية ثُم تتناقص.

✌ لمقارنة حدّين متتاليين نحسب نسبتهما ونقارن هذه النسبة مع الواحد.

① أثبت أنّ $\dfrac{n-r}{r+1}=\dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}$.

② .a نفترض أنّ $n=2m$. أثبت أنّ

$\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$ في حالة $m>r$ و $\binom{n}{r+1}<\binom{n}{r}$ في حالة $m\le r$.

استنتج أنّ $\binom{2m}{m}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

.b نفترض أنّ $n=2m+1$. أثبت أنّ

$\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$ في حالة $m>r$ و $\binom{n}{r+1}<\binom{n}{r}$ في حالة $m<r$.

استنتج أنّ $\binom{2m+1}{m+1}=\binom{2m+1}{m}$ هما أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m+1}{r}\right)_{0\le r\le 2m+1}$.

👌 لاحظ أنّ المساواة $\binom{n}{q}=\binom{n}{p}$ تقتضي أن يكون $\binom{n}{n-q}=\binom{n}{n-p}=\binom{n}{q}=\binom{n}{p}$، وأنّه في هذه الحالة يكون اثنان من الأعداد $p,q,n-p,n-q$ أصغر من $\dfrac{n}{2}$ أو يساويانه. ويكونان من ثَمّ متساويين استناداً إلى الفقرة السابقة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة

الحل

✌ ① نلاحظ أنّ : $\dfrac{n-r}{r+1}=\dfrac{r!\cdot(n-r)!}{n!}\times\dfrac{n!}{(r+1)!\cdot(n-r-1)!}=\dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}$.

② .a في حالة $n=2m$ لدينا

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}<1\Leftrightarrow\frac{2m-r}{r+1}<1\Leftrightarrow 2m-r<r+1\Leftrightarrow 2m<2r+1\Leftrightarrow m\le r$$

ونجد بالمثل أنّ $\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$ يكافئ $m>r$. إذن نجد جدول التغيرات الآتي في هذه الحالة

r	0		m		$2m$
$\binom{2m}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m}{m}$	$\searrow$	1

وهذا يبرهن أنّ $\binom{2m}{m}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

② b. في حالة $n = 2m+1$ لدينا

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m+1-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow 2m < 2r \Leftrightarrow m < r$$

ونجد بالمثل أنّ $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$ يكافئ $m > r$. إذن نجد جدول التغيرات الآتي في هذه الحالة

r	0		m	$m+1$		$2m+1$
$\binom{2m+1}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	$\searrow$	1

ولكن

وهذا يبرهن أنّ $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m+1}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

نتيجة مهمة. نستنتج مما سبق أنّ $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n/2}$ متزايدة تماماً فإذا وقعت المساواة $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ وكان p و q أصغر من $n/2$ استنتجنا أنّ $p = q$. وإذا كان أحدهما أكبر من $n/2$ (وليكن q) أكبر تماماً من $n/2$ والآخر أصغر منه استنتجنا من $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q}$ أنّ $p = n-q$، أمّا إذا كان كلا العددين p و q أكبر من $n/2$ استنتجنا من $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{n-q}$ أنّ $n-p = n-q$، أو $p = q$.
والخلاصة المساواة $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ تقتضي أنّ $p = q$ أو $p + q = n$.

قُدُماً إلى الأمام

13 ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a و b عددان طبيعيان، فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62، فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$ ؟

الحل

ملاحظة مهمّة. في حالة أي كثير الحدود $x \mapsto P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ أمثال x هي $P'(0)$.
في حالتنا، نجد بحساب بسيط أنّ $F'(0) = 5a + 4b$. إذن لدينا بحسب الفرض $5a + 4b = 62$ ولكن a و b موجبان إذن $4(a+b) \le 5a+4b \le 5(a+b)$ وهذا يكافئ $\frac{62}{5} \le a+b \le \frac{62}{4}$ أو

$$12.4 \le a+b \le 15.5$$

ولكن $a+b$ عددٌ طبيعي فرضاً إذن $a+b \in \{13,14,15\}$، وتبين الأمثلة

$$(a,b) = (2,13) \text{ و } (a,b) = (6,8) \text{ و } (a,b) = (10,3)$$

أنّ قيم في المجموعة $\{13,14,15\}$ هي حالات ممكنة للمجموع $a+b$.

14 يريد معلّم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل. ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟

الحل

يزيد عدد الجوائز على عدد التلاميذ بمقدار واحد. إذن هناك تلميذ واحد فقط سينال جائزتين في حين ينال كل واحد من باقي التلاميذ جائزة واحدة فقط.

سنجري توزيع الجوائز في مرحلتين :

- الأولى: اختيار الجائزتين اللتين ستوزّعان معاً. وهذا يؤول إلى اختيار مجموعة مؤلفة من جائزتين من مجموعة جميع الجوائز التي عدد عناصرها $n+1$ ولدينا $\binom{n+1}{2}$ خياراً متاحاً.
- الثانية: ننظر إلى الجائزتين المُختارتين بصفتهما جائزة واحدة، ثُمّ نوزّع الجوائز التي أصبح عددها n جائزة على التلاميذ لكل واحد منهم جائزة. وبالطبع عدد الخيارات الممكنة $P_n^n = n!$.

نستنتج، استناداً إلى المبدأ الأساسي في العد أنّ العدد الكلي للنتائج المختلفة لعملية توزيع الجوائز هذه هو

$$\binom{n+1}{2} \cdot n! = \frac{n \cdot (n+1)!}{2}$$

15 لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ ولدينا مجموعة H من الأعداد التي تتميَّز بالخصائص التالية: أرقامها مختلفة ومأخوذة من S، لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات العدد 5، كل عدد منها أكبر من 20000 . فما هو عدد عناصر H ؟

الحل

- عدد خانات أي عدد من H أصغر أو يساوي 5 لأنّه إذا كان يُكتب بست خانات أو أكثر لوجب أن يكون في كتابته رقمان متماثلان وهذا يناقض التعريف.
- عدد خانات أي عدد من H يساوي 5 لأنّه إذا كان العدد يكتب بأربع خانات أو أقل لكان هذا العدد أصغر من 9999 وهذا أيضاً يناقض تعريف H.
- نستنتج إذن أنّ H هي مجموعة الأعداد من الشكل $abcde$ حيث (a,b,c,d,e) هو تبديل على المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ (لأن الأرقام مختلفة) وتحقّق الشرطين $e \neq 5$ (لأنّ العدد ليس من مضاعفات 5) و $a \geq 2$ (لأنّ العدد أكبر من 20000).
- فإذا عرّفنا Ω مجموعة الأعداد من الشكل $abcde$ حيث (a,b,c,d,e) هو تبديل على المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$. وعددها يساوي $5! = 120$، لوجدنا أنّه من الأسهل التعامل مع متمّمة H أي $H' = \Omega \backslash H$.

- ينتمي العدد x إلى H' في حالتين: إمّا أن يبدأ بالعدد 5 أو أن ينتهي بالعدد 1. فإذا رمزنا بالرمز A إلى مجموعة أعداد Ω من الشكل $abcd5$ حيث (a,b,c,d) هو تبديل على المجموعة $\{1,2,3,4\}$، وبالرمز B إلى مجموعة أعداد Ω من الشكل $1bcde$ حيث (b,c,d,e) هو تبديل على المجموعة $\{2,3,4,5\}$، كان $H' = A \cup B$ ومن ثَمّ

$$n(H') = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 24 + 24 - 6 = 42$$

إذن $n(H) = 120 - 42 = 78$ وهو عدد عناصر H.

16 صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟

③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟

④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟

⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟

⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل

هنا نفترض أنّ الكرات متمايزة (مرقّمة مثلاً).

① عدد النتائج المختلفة لهذا السحب يساوي $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

② عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأحمر $6 \times 6 \times 4 \times 3 = 432$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأبيض $3 \times 3 \times 7 \times 3 = 189$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأسود $1 \times 1 \times 9 \times 3 = 27$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هو $432 + 189 + 27 = 648$.

③ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة اللون $6 \times 3 \times 1 \times 3! = 108$.

④ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدد نتائج سحب ثلاث كرات من لون واحد أي $1000 - (6^3 + 3^3 + 1^3) = 756$.

⑤ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدا النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء أو سوداء فقط أي $10^3 - (1+3)^3 = 936$

⑥ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل يساوي جميع النتائج عدا النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء أو حمراء فقط أي $10^3 - (6+3)^3 = 271$.

17 صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟

③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟

④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟

⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟

⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل

① عدد النتائج المختلفة لهذا السحب يساوي $P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

② عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأحمر $(6 \times 5 \times 4) \times 3 = 360$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأبيض $(3 \times 2 \times 7) \times 3 = 126$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هو $360 + 126 = 486$.

③ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة اللون هو $(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 108$.

④ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدد نتائج سحب ثلاث كرات من لون واحد أي $720 - (P_6^3 + P_3^3) = 594$.

⑤ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل يساوي $720 - (P_4^3) = 696$.

⑥ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل يساوي $(1 \times 9 \times 8) \times 3 = 216$.

18 لتكن $S = \{1,2,3,\ldots,29,30\}$. كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل

لنجزّئ المجموعة S إلى ثلاثة مجموعات جزئية وذلك تبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 كما يأتي

$$A_0 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$$
$$A_1 = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$$
$$A_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$$

إذن باقي قسمة أي عنصر من عناصر A_k على 3 يساوي k حيث $k = 0,1,2$.

لنتأمّل مجموعة جزئية $\{a,b,c\}$ مكونة من ثلاثة عناصر S وبحيث يكون $a+b+c$ مضاعفاً للعدد 3.

- إذا انتمى عنصران من عناصر $\{a,b,c\}$ إلى المجموعة A_k نفسها وجب أن ينتمي الثالث إلى ذات المجموعة. (مثلاً إذا كان a و b من A_1 وجب أن ينتمي c إلى A_1، لأنّ مجموع بواقي القسمة يجب

أن يساوي 3 في هذه الحالة، وهكذا...) إذن تصبح $\{a,b,c\}$ مجموعة جزئية مكونة من ثلاثة عناصر من إحدى المجموعات A_0 أو A_1 أو A_2. وعدد مثل هذه المجموعات يساوي $\binom{10}{3}\times 3 = 360$

- إذا لم ينتمِ أي اثنين من عناصر المجموعة $\{a,b,c\}$ إلى المجموعة A_k نفسها، في هذه الحالة يكون الشرط: " $a+b+c$ مضاعفٌ للعدد 3 " محققاً حكماً لأنّ بواقي قسمة عناصر $\{a,b,c\}$ على 3 هي 0 و 1 و 2، ومجموعها يساوي 3. إذن عدد مثل هذا النوع من المجموعات $\{a,b,c\}$ يساوي $10\times10\times10$ أي 1000.

وعليه، عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 يساوي $1360 = 1000 + 360$ مجموعة.

19 ليكن A_n العدد المعرّف بالصيغة : $A_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

① تحقّق أنّ A_3 و A_4 هما عددان طبيعيان.

② أثبت أنّ A_n عددٌ طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n.

الحل

① تسهيلاً للحسابات ضع $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2-\sqrt{3}$ ولاحظ أنّ $a+b=4$ و $ab=1$. ومنه نجد

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab &&= 16-2 &&= 14\\ a^3+b^3 &= (a+b)(a^2+b^2-ab) &&= 4(14-1) &&= 52\\ a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2(ab)^2 &&= 196-2 &&= 194 \end{aligned}$$

إذن

n	0	1	2	3	4
A_n	2	4	14	52	194

② لنرمز T_r إلى الحدّ ذي الدليل r في منشور ذي الحدين للمقدار $(2+\sqrt{3})^n$ فنجد أنّ

$$T_r = \binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r$$

ولنرمز بالمثل T'_r إلى الحدّ ذي الدليل r في منشور ذي الحدين للمقدار $(2-\sqrt{3})^n$ فنجد أنّ

$$T'_r = \binom{n}{r}2^{n-r}(-\sqrt{3})^r$$

نلاحظ إذن أنّ

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r + \binom{n}{r}2^{n-r}(-\sqrt{3})^r = (1+(-1)^r)\binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r$$

- فإذا كان r عدداً زوجياً أي $r=2k$ كان $T_r + T'_r = 2\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k$ وهذا عدد طبيعي،
- وإذا كان r عدداً فردياً أي $r=2k+1$ كان $1+(-1)^r=0$ ومن ثَمّ $T_r+T'_r=0$ وهذا عدد طبيعي أيضاً.

ولكنّ A_n يساوي مجموع جميع هذه الحدود، ولأنها أعداد طبيعية كان مجموعها عدداً طبيعياً أي $A_n \in \mathbb{N}$.

20 نتأمّل مضلّعاً محدّباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n > 4)$. نسمّي **قطراً** في المضلّع كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع. نفترض أننا في الحالة العامّة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة أحد رؤوس المضلع. احسب D_n عدد نقاط تقاطع أقطار المضلّع بدلالة n. يمكن البدء بتعيين D_4 و D_5.

مساعدة: الجواب $\binom{n}{4} + n$.

الحل

- يتقاطع قطرا أي رباعي محدّب في نقطة واحدة داخله، إذن $D_4 = 1$، الفكرة المهمّة هنا هي أنّ كل أربع نقاط تمثل رؤوس رباعي يوافقه نقطة تقاطع واحدة لقطري هذا الرباعي.
- في حالة مضلّع خماسي نجد أنّ الرؤوس هي أيضاً نقاط تقاطع للأقطار إذ ينبثق من كل رأس قطران للمضلع، ويضاف إلى ذلك نقاط التقاطع الواقعة داخل المضلع، وهنا يوافق كل أربعة رؤوس قطرين متقاطعين في نقطة تقاطع واحدة إذن $D_5 = 5 + 5 = 10$.
- في الحالة العامّة. عدد نقاط التقاطع داخل المضلع هي تلك التي تحددها الرباعيات التي رؤوسها من رؤوس المضلع وعددها $\binom{n}{4}$، ويضاف إليها في حالة $n \geq 5$ رؤوس المضلّع إذ ينبثق من كل رأس أكثر من قطر للمضلع وعدد هذه الرؤوس n. فالعدد الكلي لنقاط تقاطع الأقطار في حالة $n \geq 5$ يساوي $\binom{n}{4} + n$.

21 اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x، ثمّ أجب عن السؤال الموافق.

① $\cos^3 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$.

② $\sin^3 x$ ، واستنتج قيمة $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$.

③ $\sin^4 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$.

④ $\cos x \sin^4 x$، واحسب $F(x) = \int_0^x \cos t \sin^4 t \, dt$ بطريقتين.

الحل

① بتطبيق دستور أويلر $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ثمّ منشور ذي الحدين نجد

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)
\end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \; dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x \right) dx = \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

② بتطبيق دستور أويلر $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ثمّ منشور ذي الحدين نجد

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= -\frac{1}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right)\end{aligned}$$

ومنه

$$\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = -\frac{4\sin^3 x}{\tan^3 x} = -4\cos^3 x$$

إذن $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = -4$.

③بمثل ما سبق نجد

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4 \times \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3 \right) = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

④ بتطبيق دستوري أويلر $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ و $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ نجد

$$\begin{aligned}\cos x \sin^4 x &= \frac{1}{32}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{32}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} - 3\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 2\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x\right)\end{aligned}$$

ومنه : $F(x) = \frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$.

ولكن من الواضح أنّ $F(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x$. فنكون قد أثبتنا صحة المساواة:

$\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$.

7

الاحتمالات

1 الاحتمالات المشروطة (تذكرة)

2 المتحولات العشوائية

3 الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين

4 المتحولات العشوائية الحدانية

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة:

- استعمال المخطط الشجري عند دراسة تجارب احتمالية مركّبة.
- قانون متحول عشوائي يأخذ عدداً منتهياً من القيم وحساب توقعه وتباينه.
- قانون زوج من المتحولات العشوائية التي يأخذ كل منها عدداً منتهياً من القيم، واستقلالهما الاحتمالي.
- التجارب البرنوليّة، والمتحولات العشوائية الحدانية.

تَدرَّبْ صفحة 180

① يحتوي صندوق على عشرين كرة سبع منها بيضاوات اللون. نسحب منه ثلاث كرات دفعة واحدة. ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة بيضاوات؟

الحل

ليكن A الحدث "الكرات المسحوبة الثلاث بيضاوات" عندئذ عدد النتائج المواتية لهذا الحدث يساوي $n(A)=\binom{7}{3}$ وحجم فضاء العينة يساوي $n(\Omega)=\binom{20}{3}$ إذن

$$\mathbb{P}(A)=\frac{n_A}{n(\Omega)}=\frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}}=\frac{35}{1140}=\frac{7}{228}$$

② نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية $\square\square\square\square$ بأحد العددين $+1$ أو -1 احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر. وكذلك احتمال ألاّ يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين.

الحل

عدد الخانات 4 إذن عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega)=2^4=16$.

لنرمز A إلى الحدث "مجموع الخانات يساوي الصفر". عندئذ النتائج المؤاتية هي تلك التي تحتوي على إشارتين موجبتين والباقية سالبة. إذن عدد النتائج المؤاتية يساوي $n(A)=\binom{4}{2}=6$ واحتمال الحدث A يساوي $\mathbb{P}(A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

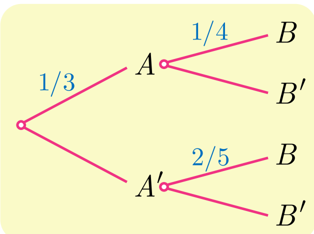
لنرمز B الحدث "لا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين" عندئذ تكون النتائج المؤاتية $\{+-+-,-+-+\}$ وعددها 2 إذن $\mathbb{P}(B)=\frac{2}{16}=\frac{1}{4}$.

③ استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور.

عيّن الاحتمالات $\mathbb{P}(A')$ و $\mathbb{P}(B'|A)$ و $\mathbb{P}(B'|A')$.

واستنتج قيمة كل من

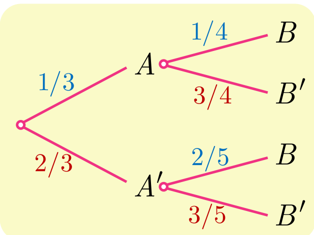
$\mathbb{P}(A\cap B)$ و $\mathbb{P}(A\cap B')$ و $\mathbb{P}(A'\cap B)$ و $\mathbb{P}(A'\cap B')$



الحل

نتمّم المخطط الشجري فنجد الشكل المجاور، ونقرأ منه:

$$\mathbb{P}(A')=\frac{2}{3} \text{ و } \mathbb{P}(B'|A)=\frac{3}{4} \text{ و } \mathbb{P}(B'|A')=\frac{3}{5}$$



وعليه نحسب

$$\mathbb{P}(A\cap B') = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$
$$\mathbb{P}(A'\cap B') = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(A'\cap B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

④ أجب عن الأسئلة الآتية:

- إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{10}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

الحل

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

- إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(A\cup B) = \frac{2}{3}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

الحل

نعلم أن $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B)$ وبالتعويض نجد $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \mathbb{P}(A\cap B)$

ومنه $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{6}$ وبالتالي

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

- إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(B|A') = \frac{4}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B)$.

الحل

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B\cap A) + \mathbb{P}(B\cap A')\\ &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B\mid A) + \mathbb{P}(A')\cdot\mathbb{P}(B\mid A')\\ &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B\mid A) + (1-\mathbb{P}(A))\cdot\mathbb{P}(B\mid A')\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{37}{60}\end{aligned}$$

- إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ و $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{2}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

واحسب أيضاً $\mathbb{P}(A'\cap B')$ واستنتج $\mathbb{P}(B'|A')$.

الحل

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A'\cap B') &= \mathbb{P}\big((A\cup B)'\big) = 1 - \mathbb{P}(A\cup B)\\ &= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)) = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}) = \frac{3}{20}\\ \mathbb{P}(B'|A') &= \frac{\mathbb{P}(A'\cap B')}{\mathbb{P}(A')} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

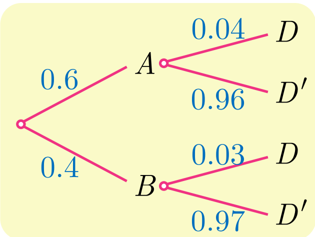
⑤ يضمّ مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية. عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح ، صنّعت الورشة A منها 1200 مصباحاً وصنّعت البقية الورشة B . هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة، في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة. نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب. نرمز بالرمز A إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة A» وبالرمز B إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة B» وبالرمز D إلى الحدث «المصباح معطوب».

❶ أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة.

❷ احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

❸ إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A .

الحل



❶ التمثيل الشجري للتجربة.

❷ احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

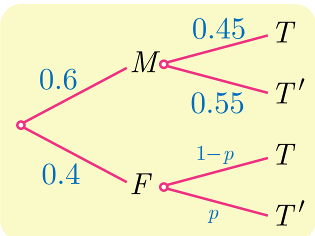
$$\mathbb{P}(D) = 0.6 \times 0.04 + 0.4 \times 0.03 = 0.036$$

❸ إذا كان المصباح معطوباً فإن احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A هو

$$\mathbb{P}(A \mid D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0.6 \times 0.04}{0.036} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

⑥ في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب. ونعلم أنّ مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور، وأنّ 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب. ما احتمال أن تكون طالبة مُختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارسن لعبة كرة المضرب؟

الحل



المطلوب هو احتمال ألا يكون الشخص المختار ممن يلعبون كرة المضرب علماً أنه أنثى. أي $\mathbb{P}(T'|F)$. أمّا المعطيات $\mathbb{P}(M) = 0.6$ و $\mathbb{P}(T) = 0.3$ و $\mathbb{P}(T'|M) = 0.55$. من التمثيل الشجري المجاور نستنتج أنّ

$0.4(1-p) + 0.60 \cdot 0.45 = 0.3$ بالحل نجد $p = 0.925$.

تدرَّبْ صفحة 184

① نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6. نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6، ونخسر درجتين في بقية الحالات. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X، واحسب كلاً من $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{V}(X)$.

الحل

مجموعة النتائج الممكنة هي $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$، وهذه النتائج متساوية في الاحتمال لأن النرد متوازن. المتحول العشوائي X معرف على Ω ويأخذ قيمه في $\{-2,1,6\}$ كما إنّ

$$\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X=-2) = \mathbb{P}(\{2,3,4,5\}) = \frac{4}{6}$$

فيكون قانونه الاحتمالي

x	1	-2	6
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathbb{E}(X) = 1\times\frac{1}{6} - 2\times\frac{4}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{-1}{6}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 1\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{4}{6} + 36\times\frac{1}{6} = \frac{53}{6}$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{53}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36}$$

② يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة. عيّن مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل

مجموعة القيم الممكنة للمتحول العشوائي X هي $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$ و $\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$ و $\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$

فيكون قانونه الاحتمالي

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = 0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 0\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{1}{10}=1$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

③ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي ودون إعادة.

الحل

مجموعة القيم الممكنة للمتحول العشوائي X هي $X(\Omega)=\{0,1,2\}$ ولدينا

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = \frac{P_3^2}{P_5^2}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$
$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=1) = \frac{P_2^1\cdot P_3^1\cdot 2}{P_5^2}=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$$
$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{P_2^2}{P_5^2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

وعليه نرى أنّ هذه التجربة مطابقة للتجربة السابقة وقانون X هو نفسه القانون السابق.

④ يحتوي صندوق على خمس كرات: اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين. عيّن مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل

مجموعة قيم X هي $\{2,3,4,5\}$ ، وقانونه الاحتمالي

x	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\mathbb{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{10}=\frac{18}{5}$$
$$\mathbb{V}(X)=4\times\frac{1}{10}+9\times\frac{4}{10}+16\times\frac{3}{10}+25\times\frac{2}{10}-\left(\frac{18}{5}\right)^2=\frac{21}{25}$$

⑤ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي ودون إعادة.

الحل

الحل مطابق للتمرين السابق. الهدف هو الوصول إلى فكرة أنّ السحب معاً يماثل السحب على التتالي دون إعادة.

⑥ نُلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري.

الحل

القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{36}(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6\\
&\qquad +8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12\times1)=7\\
\mathbb{V}(X) &= \frac{1}{36}(4\times1+9\times2+16\times3+25\times4+36\times5+49\times6\\
&\qquad +64\times5+81\times4+100\times3+121\times2+144\times1)-7^2\\
&= \frac{329}{6}-49=\frac{35}{6}\\
\sigma(X) &= \sqrt{\frac{35}{6}}\approx 2.42
\end{aligned}$$

تَدرَّبْ صفحة 187

① نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحولات العشوائية، أكمله وبيّن إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0,Y=0) &= \tfrac{1}{20}\\
\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) &= \tfrac{1}{10}
\end{aligned}$$

إذن X و Y غير مستقلين احتمالياً.

② أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y)، علماً أنّ المتحولين العشوائيين X و Y مستقلّان احتمالياً.

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

الحل

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	

③ نُلقي حجري نرد متوازنين. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، وليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين. اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)، واستنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y، واحسب توقع وتباين كل من X و Y. أيكون X و Y مستقلين احتمالياً؟

الحل

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	قانون Y
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{11}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{9}{36}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
قانون X	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

ونلاحظ أنّ

$$\mathbb{P}(X=2,Y=3)=0\neq\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=3)$$

إذن X و Y غير مستقلين احتمالياً. ونترك أمر حساب توقع وتباين كل من X و Y البسيط للقارئ.

تَدرَّبْ صفحة 192

① يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.

❶ نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

❷ نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة. ونعرّف X المتحوّل العشوائي الذي يدلّ على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث. ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X.

الحل

❶ ثلاثة أرباع عدد كرات الصندوق حمراء اللون إذن إذا كان R حدث سحب كرة حمراء اللون كان $\mathbb{P}(R)=\dfrac{3n}{4n}=\dfrac{3}{4}$.

❷ هذه تجربة برنولية، X يحصي عدد مرات الحصول على كرة حمراء عند تكرار التجربة ثلاث مرات $(n=3)$ علماً أنّ احتمال الحصول كرة حمراء في المرة الواحدة يساوي $p=\dfrac{3}{4}$.

إذن يتبع X قانوناً حدانياً $\mathcal{B}(3,\frac{3}{4})$.

$$\mathbb{P}(X=0)=\binom{3}{0}\left(\tfrac{3}{4}\right)^0\left(\tfrac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$
$$\mathbb{P}(X=1)=\binom{3}{1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^1\left(\tfrac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}$$
$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{3}{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\left(\tfrac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$$
$$\mathbb{P}(X=3)=\binom{3}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3\left(\tfrac{1}{4}\right)^0=\frac{27}{64}$$

فيكون قانونه الاحتمالي

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

② نُلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية. ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات؟

الحل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن X عدد مرات الحصول على العدد 6 عند تكرار التجربة ست مرات $(n=6)$ علماً أنّ احتمال الحصول العدد 6 في المرة الواحدة يساوي $p=\frac{1}{6}$. قانون X حدّاني $\mathcal{B}(6,\frac{1}{6})$ والمطلوب حساب $\mathbb{P}(X=3)$ أي $\mathbb{P}(X=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{625}{11664}$.

③ نُلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية. ليكن A الحدث: «الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل». ما احتمال A ؟

الحل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن X عدد مرات الحصول على عدد زوجي عند تكرار التجربة ثماني مرات $(n=8)$ علماً أنّ احتمال الحصول عدد زوجي في المرة الواحدة يساوي $p=\frac{1}{2}$. قانون X حدّاني $\mathcal{B}(8,\frac{1}{2})$ والمطلوب حساب $\mathbb{P}(X\geq 3)$ أي

هذا يتطلب حساب مجموع ست حدود والأسهل حساب $\mathbb{P}(X<3)$ لأنّه يتضمن حساب مجموع ثلاث حدود. فنكتب

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geq 3)&=1-\mathbb{P}(X<3)=1-\big(\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=0)\big)\\&=1-\left(\binom{8}{2}\cdot p^2\cdot q^6+\binom{8}{1}\cdot p^1\cdot q^7+\binom{8}{0}\cdot p^0\cdot q^8\right)\\&=1-\left(\binom{8}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)\\&=1-\frac{28+8+1}{256}=\frac{219}{256}\end{aligned}$$

④ يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار. يكسب A الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6. يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار. ما احتمال أن يربح B المباراة ؟

الحل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن X عدد الأدوار التي يكسبها A بعد تسعة أدوار $(n=9)$ علماً أنّ احتمال ربحه في الدور الواحد يساوي $p=0.6$. قانون X حدّاني $\mathcal{B}(9,0.6)$ والمطلوب حساب $\mathbb{P}(X\leq 4)$ أي

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\leq 4)&=\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)+\mathbb{P}(\mathrm{X}=1)+\mathbb{P}(\mathrm{X}=2)+\mathbb{P}(\mathrm{X}=3)+\mathbb{P}(\mathrm{X}=4)\\&=\binom{9}{0}0.6^0 0.4^9+\binom{9}{1}0.6^1 0.4^8+\binom{9}{2}0.6^2 0.4^7+\binom{9}{3}0.6^3 0.4^6+\binom{9}{4}0.6^4 0.4^5\\&\approx 0.2666\end{aligned}$$

أنشطة

نشاط 1 إنشاء واستعمال التمثيل الشجري

❶ السحب مع الإعادة وبدونها

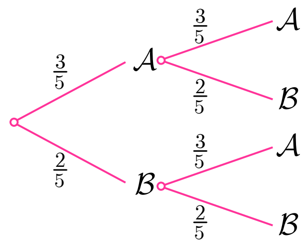
يحتوي صندوق على ثلاثة حروف $\mathcal{A}$ وحرفين اثنين $\mathcal{B}$.

التجربة الأولى. نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ونسجّل النتيجة ثُمّ نُعيده إلى الصندوق ونسحب حرفاً ثانياً ونسجّل النتيجة.

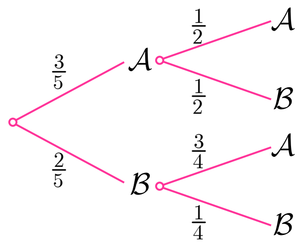
التجربة الثانية. نسحب عشوائياً وعلى التتالي حرفين من الصندوق واحداً إثر الآخر دون إعادة ونسجّل النتيجة بترتيب السحب.

اشرح التمثيلين الشجريين الآتيين:

التجربة الأولى



التجربة الثانية



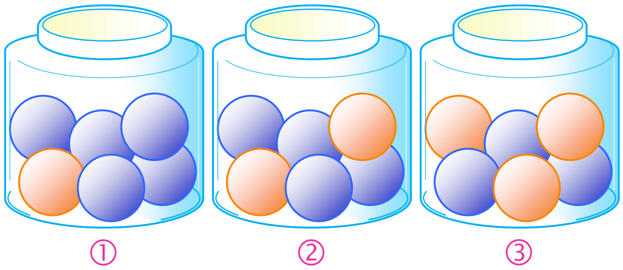
ما احتمال الحصول على $\mathcal{AA}$ في التجربة الأولى؟ وما احتمال هذا الحدث في التجربة الثانية؟

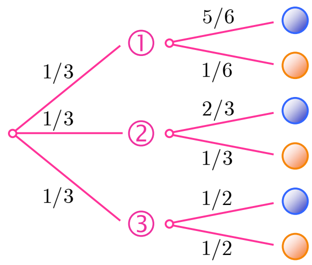
الحل

التجربة الأولى : $\mathbb{P}(\mathcal{AA}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$، التجربة الثانية : $\mathbb{P}(\mathcal{AA}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

❷ سحب صندوق ثُمّ سحب كرة

تتألّف التجربة من مرحلتين، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق الثلاثة المبينة في الشكل، ثُمّ نختار منه كرة. ولقد أنشأنا التمثيل الشجري الموافق لهذه التجربة. اشرح هذا الإنشاء ثُمّ أعطِ احتمال الحدث: «سحب كرة زرقاء اللون». وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق ② ؟





الحل

ليكن B حدث سحب كرة زرقاء عندئذ فإن $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

وليكن A حدث سحب كرة من الصندوق ② عندئذ يكون المطلوب

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

نشاط 2 فحص الأمراض

يُصيبُ مرضٌ نسبة 10% من السكان. يُتيح اختبارٌ اكتشاف إذا كان شخصٌ مصاباً بهذا المرض. يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية في حال كون الشخص مصاباً. ولكن احتمال أن تكون النتيجة إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض يساوي 0.008. أمّا احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية على الرغم من كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0.02.

لنرمز بالرمز M إلى الحدث «الشخص مصاب بالمرض»، وبالرمز T إلى الحدث «نتيجة الاختبار إيجابية». نختار شخصاً عشوائياً.

① أنشئ تمثيلاً شجرياً مُحدّداً عليه الاحتمالات المعطاة في النص.

② احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية.

③ احسب احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض.

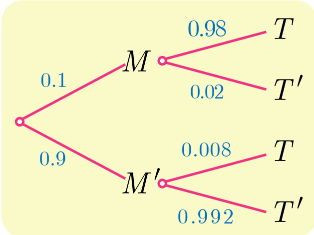
④ استنتج احتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً**، أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية في حالة شخص مصاب بالمرض ونتيجة سلبية في حالة شخص غير مصاب بالمرض.

⑤ أجب عن الأسئلة السابقة ذاتها بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان.

⑥ عمّم النتائج السابقة بافتراض أنّ احتمال الإصابة بالمرض يساوي p.

الحل

①



② أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية هو الحدث $M' \cap T$ عندئذ

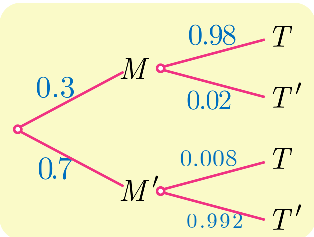
$$\mathbb{P}(M' \cap T) = 0.9 \times 0.008 = 0.0072$$

③ احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض هو

$$\mathbb{P}(M \cap T') = 0.1 \times 0.02 = 0.002$$

④ يكون الاختبار **موثوقاً** إن أعطى نتيجة صحيحة أي وقع $(M \cap T) \cup (M' \cap T')$، ومنه

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = 0.9 \times 0.992 + 0.1 \times 0.98 = 0.9908$$



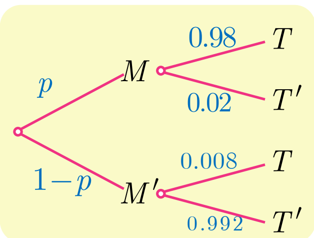
⑤ بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان.

عندئذ $\mathbb{P}(M' \cap T) = 0.7 \times 0.008 = 0.0056$.

و $\mathbb{P}(M \cap T') = 0.3 \times 0.02 = 0.006$.

واحتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً** هو

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = 0.7 \times 0.992 + 0.3 \times 0.98 = 0.9884 .$$



⑥ بافتراض أنّ احتمال الإصابة بالمرض يساوي p.

عندئذ $\mathbb{P}(M' \cap T) = (1-p) \times 0.008$

و $\mathbb{P}(M \cap T') = p \times 0.02 = 0.02p$

واحتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً** هو

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = (1-p) \times 0.992 + p \times 0.98 = 0.992 - 0.012p .$$

نشاط 3 متحولات عشوائية واحتمالات مشروطة

ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد زبائن محطّة لتوزيع الوقود في فترة خمس دقائق. نفترض أنّ عدد الزبائن هذا لا يتجاوز 2. أمّا القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X فهو كما يأتي:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0.1	0.5	0.4

يشتري كلُّ زبون إما البنزين أو المازوت. احتمال أن يشتري الزبون البنزين يساوي 0.4 واحتمال أن يشتري المازوت 0.6. إنّ ما يشتريه الزبون مستقل عما يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن.

لنرمز بالرمز C_k إلى الحدث $(X=k)$ تسهيلاً للكتابة، ولنرمز بالرمز E إلى الحدث «في خمس دقائق يشتري زبونٌ، وزبون واحد فقط، البنزين». استعن بتمثيل شجري أو بأي أسلوب آخر في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

① .a احسب $\mathbb{P}(C_1 \cap E)$.

.b علّل لماذا $\mathbb{P}(E|C_2)=0.48$، واستنتج $\mathbb{P}(C_2 \cap E)$.

.c استنتج مما سبق قيمة $\mathbb{P}(E)$.

② ليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد الزبائن الذين يشترون البنزين في خمس دقائق.

.a ما هي القيم التي يأخذها Y ؟

.b اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y.

.c اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

.d أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً ؟

الحل

① .a لمّا كان الحدثان C_1 و E مستقلين احتمالياً كان

$$\mathbb{P}(C_1 \cap E)=\mathbb{P}(C_1)\cdot\mathbb{P}(E)=0.5\times 0.4=0.2$$

.b إذا وقع C_2 فيوجد في المحطة زبونان. وعدد الذين يشترون البنزين من بينهم هو متحول حداني $\mathcal{B}(2,0.4)$، إذن $\mathbb{P}(E|C_2)=\binom{2}{1}0.4^1 0.6^1=0.48$. ومنه

$$\mathbb{P}(C_2 \cap E)=\mathbb{P}(C_2)\cdot\mathbb{P}(E \mid C_2)=0.4\times 0.48=0.192$$

.c $\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(E\cap C_0)+\mathbb{P}(E\cap C_1)+\mathbb{P}(E\cap C_2)=0+0.2+0.192=0.392$.

② a. القيم التي يأخذها Y هي $\{0,1,2\}$

b. لنرمز بالرمز E_k للدلالة إلى الحدث $(Y=k)$ عندئذ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_0) &= \mathbb{P}(E_0\cap C_0)+\mathbb{P}(E_0\cap C_1)+\mathbb{P}(E_0\cap C_2)\\ &= 0.1+0.5\times 0.6+0.4\times \tbinom{2}{0}\times(0.4)^0\times(0.6)^2 = 0.544\end{aligned}$$

و $\mathbb{P}(E_1)=\mathbb{P}(E)=0.392$ أما

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_2) &= \mathbb{P}(E_2\cap C_0)+\mathbb{P}(E_2\cap C_1)+\mathbb{P}(E_2\cap C_2)\\ &= 0+0+0.4\times \tbinom{2}{2}\times(0.4)^2\times(0.6)^0 = 0.064\end{aligned}$$

c. القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0.1	0	0	0.1
1	0.3	0.2	0	0.5
2	0.144	0.192	0.064	0.4
قانون Y	0.544	0.392	0.064	

d. من الواضح أن المتحولين العشوائيين X و Y غير مستقلين احتمالياً لأنّ

$$\mathbb{P}(X=0\cap Y=2)=0\neq \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=2)$$

نشاط 4 التوازن الصبغي

نتأمّل مورثة تحمل أليلَيْن A و a. نقول إن نبتة متماثلة الألائل عندما تحتوي على الأليلين ذاتهما على زوجين من الصبغيات المتوافقة، فتكون صيغتها الوراثية عندئذ AA أو aa، ونقول إنّ النبتة متخالفة الألائل عندما تكون صيغتها الوراثية Aa. تتكاثر بعض النباتات (الترمس مثلاً) بالإلقاح الذاتي، يحدث الأمر بالنسبة إلى الخَلَف وكأنّ الإلقاح جرى بين نبتتيْن من الصيغة الوراثية ذاتها حيث يجري اختيار الألائل عشوائياً. نهدف إلى دراسة خَلَف نبتة متخالفة الألائل بالإلقاح الذاتي.

❶ الجيل الأوّل

بالإلقاح الذاتي تُعطي نبتةٌ من الصيغة AA نبتةً من الصيغة ذاتها، وكذلك تعطي نبتةٌ من الصيغة aa نبتةً من الصيغة ذاتها.

اكتب احتمالات أن يكون الجيل الأوّل لنبتة صيغتها الوراثية Aa نبتةً صيغتها الوراثية AA أو aa أو Aa.

❷ أجيال متلاحقة

نبدأ من نبتةٍ متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0)، ونكوّن أجيالاً لاحقة بالتكاثر الذاتي.

سنستعمل الرموز الآتية:

- الحدث $(\mathrm{AA})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية AA».
- الحدث $(\mathrm{Aa})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية Aa».
- الحدث $(\mathrm{aa})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية aa».

ثُمّ لنرمز x_n و y_n و z_n إلى احتمالات الأحداث $(\mathrm{AA})_n$ و $(\mathrm{Aa})_n$ و $(\mathrm{aa})_n$ بالترتيب.

① ما قيمة كل من x_0 و y_0 و z_0 ؟

② احسب كلاً من x_1 و y_1 و z_1.

③ اكتب قيمة كل من $\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{AA})_n)$ و $\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)$ و $\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)$.

ثُمّ استعمل هذه النتائج لتثبت أنّه مهما كانت قيمة n كان

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$$

وأعطِ عبارة z_{n+1}.

❸ دراسة المتتاليات $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(z_n)_{n\geq 0}$

① احسب قيم x_n و y_n و z_n في حالة $0 \leq n \leq 10$، يمكن استعمال الآلة الحاسبة.

② ما طبيعة المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ ؟ عبّر عن y_n بدلالة n.

③ نعرّف $t_n = x_n + \frac{1}{2}y_n$، احسب t_{n+1} بدلالة t_n. ما طبيعة المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ ؟ ثُمّ استنتج قيمة x_n بدلالة n.

④ احسب نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(z_n)_{n\geq 0}$.

الحل

❶ $\mathbb{P}(\mathrm{aa}) = \frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(\mathrm{aA}) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(\mathrm{AA}) = \frac{1}{4}$.

❷

① لدينا نبتة متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0)، ومنه

$x_0 = \mathbb{P}((\mathrm{AA})_0) = 0$ و $y_0 = \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_0) = 1$ و $z_0 = \mathbb{P}((\mathrm{aa})_0) = 0$.

② لدينا $x_1 = \mathbb{P}((\mathrm{AA})_1) = \frac{1}{4}$ و $y_1 = \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_1) = \frac{1}{2}$ و $z_1 = \mathbb{P}((\mathrm{aa})_1) = \frac{1}{4}$.

③ في الإلقاح الذاتي تُعطي نبتةٌ من الصيغة AA نبتةً من الصيغة ذاتها، ومنه

$$\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{AA})_n) = 1$$

أمّا إذا كان لدينا نبتة متخالفة الألائل في الجيل رقم n فعندئذ

$$\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n) = \frac{1}{2}$$

وعليه

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}) &= \mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}\cap(\mathrm{AA})_n) + \mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}\cap(\mathrm{Aa})_n) + \underbrace{\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}\cap(\mathrm{aa})_n)}_{0}\\ &= \mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{AA})_n)\mathbb{P}((\mathrm{AA})_n) + \mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\\ &= \mathbb{P}((\mathrm{AA})_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\end{aligned}$$

ومنه $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$.

وكذلك

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}) &= \underbrace{\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}\cap(\mathrm{AA})_n)}_{0} + \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}\cap(\mathrm{Aa})_n) + \underbrace{\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}\cap(\mathrm{aa})_n)}_{0}\\ &= \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\end{aligned}$$

ومنه $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$. وأخيراً

$$z_n = 1 - x_n - y_n$$

الحل

① احسب قيم x_n و y_n و z_n في حالة $0 \le n \le 10$ ، يمكن استعمال الآلة الحاسبة. ماذا يمكنك القول بشأن المتتاليات الثلاث ؟

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
x_0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$
z_0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$

② المتتالية $(y_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية حدّها y_0 يساوي 1 وأساسها $\frac{1}{2}$ ومنه $y_n = \frac{1}{2^n}$.

③ نعرّف $t_n = x_n + \frac{1}{2}y_n$ ، ونحسب $t_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{2}y_{n+1}$

$$t_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y_n = x_n + \frac{1}{2}y_n = t_n$$

أي إنّ المتتالية $(t_n)_{n\ge 0}$ متتالية ثابتة تحقّق $t_n = t_0 = x_0 + \frac{1}{2}y_0 = \frac{1}{2}$. ومنه

$$z_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{و} \quad x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

④ وأخيراً

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2} \text{ و } \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} \text{ و } \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

تمرينات ومسائل

1 يحتوي صندوق على خمس كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق. يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والمأخوذة من بين خمسة عناصر.

① ما احتمال الحدث A : «للكرتين المسحوبتين اللون ذاته» ؟

② ما احتمال الحدث B : «مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3» ؟

③ ما احتمال الحدث B علماً أنّ A قد وقع ؟

الحل

① يقع الحدث A إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين أوكرتين سوداوين إذن

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$$

② يقع الحدث B إذا كانت نتيجة تضم كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 إذن

$$\mathbb{P}(B)=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$$

③ لدينا $\mathbb{P}(B\cap A)=\dfrac{2}{10}$ ومنه $\mathbb{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{1}{2}$.

2 نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة، ونتأمّل الحدث A : «العدد الظاهر زوجي» والحدث B : «العدد الظاهر أوّلي». أيكون هذان الحدثان مستقلَّين احتمالياً ؟

الحل

لما كان $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{2,3,5\}$ استنتجنا أنّ $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}$ ومنه

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\{2\})=\tfrac{1}{6}\neq\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

إذن الحدثان A و B غير مستقلان احتماليا.

3 تتألّف عائلة من أربعة أطفال. نقبل أنّه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى. ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً. نرمز A و B و C إلى الأحداث:

A : «للأطفال الأربعة الجنس نفسه»،

B : «هناك طفلان ذكران وطفلتان»،

C : «الطفل الثالث أنثى»،

① احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C.

② احسب $\mathbb{P}(A \cap C)$ ثُمّ $\mathbb{P}(C|A)$. أيكون الحدثان A و C مستقلين احتمالياً ؟

③ احسب $\mathbb{P}(B \cap C)$ ثُمّ $\mathbb{P}(C|B)$. أيكون الحدثان B و C مستقلين احتمالياً ؟

الحل

① يقع الحدث A إذا كانت الأطفال الأربعة ذكوراً أو كان الأطفال الأربعة إناثاً

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

يقع الحدث B إذا كانت الأطفال الأربعة اثنان ذكور و اثنتان إناث (الترتيب غير مهم وهناك $\binom{4}{2} = 6$ طريقة لترتيب هؤلاء الأطفال)

$$\mathbb{P}(B) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

يقع الحدث C إذا كان الطفل الثالث أنثى واحتمال هذا الحدث $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

② يقع الحدث $A \cap C$ إذا كان الطفل الثالث أنثى والأطفال الأربعة من جنس واحد أي الحدث $A \cap C$ هو الحدث الموافق لكون الأطفال الأربعة جميعها إناثاً. إذن

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(C \mid A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

ولما كان $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ كان هذان الحدثان مستقلين احتمالياً.

③ نصف النتائج الموافقة للحدث B تضم بنتاً بصفتها طفلاً ثالثاً ونصفها الآخر يضم صبياً بصفته طفلاً ثالثاً، إذن $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{16}$ و $\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{2}$.

ولمّا كان $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$ كان الحدثان B و C مستقلين احتمالياً.

4 يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

② احسب كلاً من $\mathbb{P}(X = 1)$ و $\mathbb{P}(X = 3)$.

③ استنتج قيمة $\mathbb{P}(X = 2)$.

④ احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

الحل

① مجموعة القيم التي يأخذها X هي $X(\Omega) = \{1,2,3\}$

② الحدث $\{X = 1\}$ هو الحدث الموافق لكون الكرات الثلاث المسحوبة من اللون نفسه

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$$

الحدث $\{X = 3\}$ هو الحدث الموافق لكون الكرات الثلاث المسحوبة واحدة من كل لون

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

③ الحدث $\{X = 2\}$ هو الحدث المتمم للحدث $\{X = 1\} \cup \{X = 3\}$ إذن

$$\mathbb{P}(X=2) = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56}$$

④

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

وعليه

$$\mathbb{E}(X) = 1\times\frac{5}{56} + 2\times\frac{39}{56} + 3\times\frac{12}{56} = \frac{17}{8} = 2.125$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1\times\frac{5}{56} + 2^2\times\frac{39}{56} + 3^2\times\frac{12}{56} = \frac{269}{56}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{269}{56} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{129}{448}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{129}{448}} \approx 0.537$$

لنتعلّم البحث معاً

5 احتمال مشروط

تبيّن دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين أنّه أثناء فترة المسابقة يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً 0.02. ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يؤثر في نتيجة الاختبار السابق. يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء. وبين هؤلاء يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05. ليكن M الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح»، وليكن D الحدث: «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية».

يجري اختيار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدثين:

- «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية»،
- «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنّه لا يستعمل دواء الرشح».

نحو الحلّ

لنبدأ بترجمة معطيات المسألة وأسئلتها إلى لغة الأحداث والاحتمالات. فضاء العيّنة هو جماعة الرياضيين والأحداث البسيطة (اختيار أحد الرياضيين) متساوية الاحتمال. نصّ المسألة يعطي $\mathbb{P}(D)$ و $\mathbb{P}(M)$ فما هما؟ يعطي النص أيضاً الاحتمال المشروط $\mathbb{P}(D|M)$ فما هي؟ أمّا الاحتمالان المطلوبان فهما $\mathbb{P}(M\cap D)$ و $\mathbb{P}(D|M')$.

نستطيع حساب $\mathbb{P}(M\cap D)$ بسهولة لأننا نعرف كلاً من $\mathbb{P}(D|M)$ و $\mathbb{P}(M)$، لنفعل ذلك.

لحساب $\mathbb{P}(D|M')$ نرجع إلى التعريف.

① احسب $\mathbb{P}(M'\cap D)$ انطلاقاً من $\mathbb{P}(M\cap D)$ و $\mathbb{P}(D)$.

② احسب $\mathbb{P}(M')$ واستنتج المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغة سليمة.

الحل

من نص المسألة نجد

$$\mathbb{P}(D|M)=0.05 \text{ و } \mathbb{P}(M)=0.25 \text{ و } \mathbb{P}(D)=0.02$$

هنا

$$\mathbb{P}(M\cap D)=\mathbb{P}(D|M)\cdot\mathbb{P}(M)=0.25\times 0.05=0.0125$$

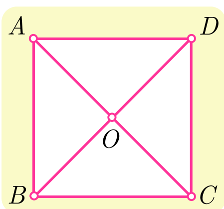
① لمّا كان $\mathbb{P}(D)=\mathbb{P}(D\cap M)+\mathbb{P}(D\cap M')$ استنتجنا أنّ

$$\mathbb{P}(D\cap M')=0.02-0.0125=0.0075$$

② لمّا كان $\mathbb{P}(M')=1-\mathbb{P}(M)=0.75$ استنتجنا أنّ

$$\mathbb{P}(D|M')=\frac{\mathbb{P}(M'\cap D)}{\mathbb{P}(M')}=\frac{0.0075}{0.75}=0.01$$

6 تجوال عشوائي



نتأمّل مربّعاً $ABCD$ مركزه O. تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية :

- إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى أحد الرأسين

المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$. (فمثلاً من A يمكنها أن تنتقل إلى B أو D أو O).

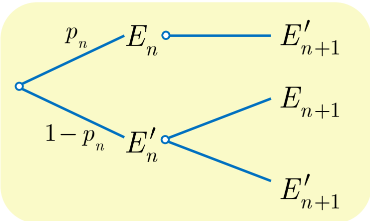
- وإذا كانت الجزيئة في O فإنها تقفز إلى أيٍّ من الرؤوس A، B، C، D باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$.

في البدء كانت الجزيئة في A. في حالة $n \geq 1$، نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «الجزيئة في O بعد القفزة رقم n»، وليكن $p_n = \mathbb{P}(E_n)$، (إذن $p_1 = \frac{1}{3}$). يطلب إيجاد علاقة تفيد في حساب p_{n+1} انطلاقاً من p_n، ثُمّ حساب p_n بدلالة n.

نحو الحلّ

الاحتمال p_{n+1} هو احتمال أن تقفز الجزيئة إلى O في القفزة رقم $n+1$. أَتوجد صلة بين الحدثين E_n و E_{n+1} ؟ إذا كانت الجزيئة في O بعد القفزة رقم n فهل يمكنها أن تقفز إلى O بعد القفزة رقم $n+1$؟

إذن وقوع E_{n+1} مشروط **بعدم** وقوع الحدث E_n، (أي بوقوع E'_n)، إذن يمكننا إنشاء التمثيل الشجري المبين جانباً :



① علّل الاحتمالات المكتوبة.

② لماذا لا يوجد إلا فرع واحد بعد E_n؟

③ ما الاحتمال الذي يجب كتابته على الفرع $E'_n \longrightarrow E_{n+1}$ ؟

④ أثبت أنّ $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n)$.

ليكن α حلّ المعادلة $x = \frac{1}{3}(1-x)$، نضع $t_n = p_n - \alpha$. أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية، عيّن أساسها وحدها الأوّل، ثُمّ استنتج p_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

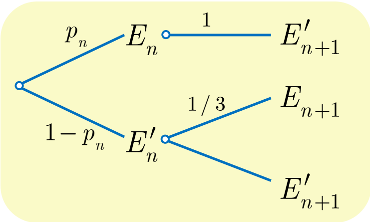
أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

① مجموع الاحتمالات عند كل عقدة يجب أن يساوي الواحد.

② وقوع الحدث E_n يعني أنّ الجزيئة في مركز المربع O بعد القفزة رقم n، وهي من ثَمّ ستقفز إلى أحد رؤوس المربع ولن تبقى في المركز بعد القفزة $n+1$. إذن وقوع E_n يقتضي وقوع E'_{n+1} حتماً.

③ وقوع الحدث E'_n يعني أن الجزيئة تحتل أحد رؤوس المربع بعد القفزة رقم n، ومن ثم يمكنها القفز إلى المركز O أو إلى أحد الرأسين المجاورين في القفزة $n+1$. وهي تقفز إلى المركز باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$. فنكتب على $E_{n+1} \longrightarrow E'_n$ الفرع الاحتمال $\frac{1}{3}$.



④ يصبح التمثيل الشجري كما في الشكل، ومن ثَمّ

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \tfrac{1}{3}\times(1-p_n)$$

العدد $\alpha = \frac{1}{4}$ هو حل المعادلة $x = \frac{1}{3}(1-x)$. أي

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \tfrac{1}{3}\times(1-p_n) \\ \tfrac{1}{4} &= \tfrac{1}{3}\times(1-\tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

وبالطرح نجد $p_{n+1}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\times(p_n-\frac{1}{4})$ أو $t_{n+1} = -\frac{1}{3}t_n$. فالمتتالية $(t_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $q = -\frac{1}{3}$ وحدها t_1 يساوي $t_1 = p_1-\alpha = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ومنه

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

إذن $p_n = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}$.

7 استعمال متحولين عشوائيين

يتطلّب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B قانونه الاحتمالي هو الآتي:

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E إلى الحدث: «يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل».

نحو الحلّ

يستغرق إنجاز المهمة زمناً عشوائياً يساوي $X_A + X_B$. والمطلوب هو حساب احتمال الحدث $E = (X_A + X_B \leq 3)$.

① اكتب الحدث E بصيغة اجتماع احداث منفصلة من النمط

$$(X_A = p)\cap(X_B = q)$$

② بيّن كيف يفيد الاستقلال الاحتمالي في حساب احتمال كل من الأحداث السابقة.

③ استنتج احتمال الحدث E.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

$$E=\{X_A=2,X_B=1\}\cup\{X_A=1,X_B=2\}\cup\{X_A=1,X_B=1\}$$

إذن

$$\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(2,1)\big)+\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(1,2)\big)+\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(1,1)\big)$$

ولأنّ المتحولين العشوائيّيْن X_A و X_B مستقلان احتمالياً فإنّ

$$\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(p,q)\big)=\mathbb{P}(X_A=p)\cdot\mathbb{P}(X_B=q)$$

إذن

$$\mathbb{P}(E)=0.04+0.06+0.1=0.2$$

قُدُماً إلى الأمام

8 يضم نادٍ رياضي 80 سبّاحاً، و 95 لاعب قوى، و 125 لاعب جمباز. يمارس كل رياضيّ لعبة واحدة فقط.

① نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة. احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين:

a. الحدث A : «يمارس اللاعبون الثلاثة ألعاب القوى».

b. الحدث B : «يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة ذاتها».

② نسبة الفتيات بين الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20%، وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز.

a. نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي. احسب p_1 : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى. احسب أيضاً p_2 : احتمال أن يكون فتاة.

b. نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي. احسب p_3 احتمال أن تكون لاعبة جمباز.

الحل

①

$$\mathbb{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{138415}{4455100}=\frac{27683}{891020}$$

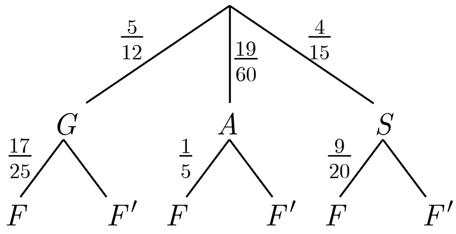
$$\mathbb{P}(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{\binom{95}{3}+\binom{125}{3}+\binom{80}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{21533}{178204}$$

② لنتامّل الأحداث

S : « اللاعب سبّاحٌ».　　　　A : « اللاعب لاعب قوى».

G : « اللاعب لاعب جمباز».　　　　F : « اللاعب أنثى».

لدينا التمثيل الشجري الآتي:



والمطلوب حساب $p_1 = \mathbb{P}(F \cap A)$ و $p_2 = \mathbb{P}(F)$. من التمثيل الشجري نجد

$$p_1 = \mathbb{P}(F \cap A) = \frac{1}{5} \times \frac{19}{60} = \frac{19}{300}$$

و

$$\begin{aligned} p_2 = \mathbb{P}(F) &= \frac{4}{15} \times \frac{9}{20} + \frac{19}{60} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{12} \times \frac{17}{25} \\ &= \frac{3}{25} + \frac{19}{300} + \frac{17}{60} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

وأخير نريد حساب

$$p_3 = \mathbb{P}(G|F) = \frac{\mathbb{P}(G \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{17}{25}}{\frac{7}{15}} = \frac{17}{28}$$

9 يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات. نتأمّل المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاث كرات حمراء (الحدث R_3)، ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2)، وأخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

① احسب $\mathbb{P}(R_3)$ و $\mathbb{P}(R_2)$.

② عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل

① $\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(R_3) = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{12}$ و $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(R_2) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{5}{12}$.

① قانون X :

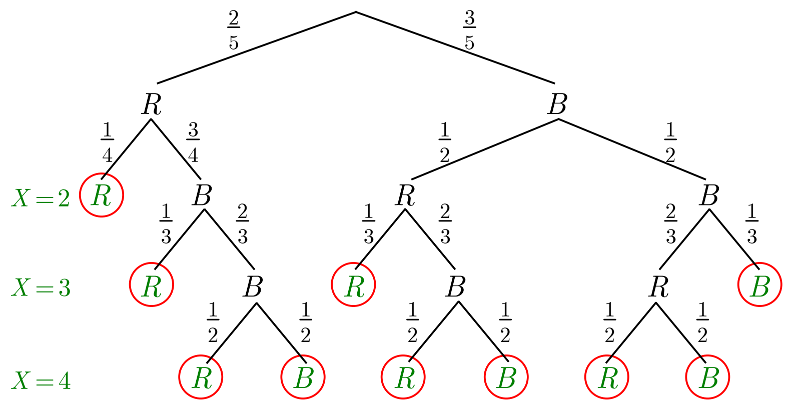
x	0	3	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع الرياضي والتباين. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{5}{3}$ و $\mathbb{V}(X) = \dfrac{55}{18}$.

10 لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء. نكرّر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتّى لا يتبقّى في الصندوق إلاّ كرات من اللون ذاته. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد مرّات السحب اللازمة. عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X، وعيّن قانون X، واحسب توقعه الرياضي.

الحل

لننشئ المخطط الشجري للتجربة



نرى أنّ $X(\Omega)=\{2,3,4\}$. وكذلك فإنّ

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$
$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$
$$\mathbb{P}(X=4)=1-\mathbb{P}(X=2)-\mathbb{P}(X=3)=\frac{3}{5}$$

إذن قانون X .

x	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X)=3.5$.

11 نُلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2، وليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 4 .

① عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .

② عيّن القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y .

③ عيّن القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) .

④ أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين عشوائياً؟

الحل

هنا $S(\Omega)=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. والقانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي S هو:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

إذن $X(\Omega)=\{0,1\}$، أما جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X فهو:

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و $Y(\Omega)=\{0,1,2,3\}$، أما جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y فهو:

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$

القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

X \ Y	0	1	2	3	قانون X
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	

المتحولان X و Y غير مستقلين احتمالياً لأنّ $\mathbb{P}(X=0,Y=0)\neq\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$.

12 طائرات ذات محركين وأخرى ذات أربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات. إنّ احتمال حدوث عطل في أحد هذه المحركات يساوي p وهو عددٌ موجب وأصغر تماماً من 1. نفترض أنّ الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلّة عن بعضها. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين، وليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات.

① عيّن القيم التي يأخذها X، وقانونه الاحتمالي.

② عيّن القيم التي يأخذها Y، وقانونه الاحتمالي.

③ يمكن لطائرة أن تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطّل. احسب p_2 احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرّك طيرانها، واحسب p_4 احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرّك طيرانها.

④ تحقّق أنّ $p_2-p_4=p^2(1-p)(3p-1)$، وبيّن تبعاً لقيم p أي نوع من الطائرات يعطي وثوقيّة أكبر.

الحل

① مجموعة قيم X هي $I=\{0,1,2\}$، و X متحوّل حدّاني $\mathcal{B}(2,p)$:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k};\quad k=0,1,2$$

② مجموعة قيم Y هي $J=\{0,1,2,3,4\}$، و Y متحوّل حدّاني $\mathcal{B}(4,p)$:

$$\mathbb{P}(Y=k)=\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k};\quad k=0,1,2,3,4$$

③ احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرّك طيرانها

$$p_2=\mathbb{P}(X\le 1)=1-\mathbb{P}(X=2)=1-p^2$$

احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرّك طيرانها

$$\begin{aligned}p_4&=\mathbb{P}(Y\le 2)=\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(Y=2)\\&=q^4+4pq^3+6p^2q^2=q^2(1-2p+p^2+4p-4p^2+6p^2)\\&=q^2(1+2p+3p^2)=(1-2p+p^2)(1+2p+3p^2)\\&=3p^4-4p^3+1\end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}p_2-p_4&=1-p^2-3p^4+4p^3-1=p^2(-3p^2+4p-1)\\&=p^2(1-p)(3p-1)\end{aligned}$$

إذن إشارة p_2-p_4 هي من إشارة $(3p-1)$،

- في حالة $0\le p<\frac{1}{3}$ لدينا $p_2\le p_4$ والطائرة ذات المحركات الأربعة أعلى وثوقيه.
- أما إذا كان $p=\frac{1}{3}$ كان للطائرتين نفس مستوى الوثوقية
- وعندما $\frac{1}{3}<p<1$ تكون الطائرة ذات المحركين أعلى وثوقيه من ذات الأربعة محركات.

13 متتاليات واحتمالات

① ليكن a عدداً حقيقياً. نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرّفة بشرط البدء $u_1=a$ والعلاقة التدريجية $u_{n+1}=\dfrac{4}{10}-\dfrac{3}{10}u_n$.

.a لتكن $(v_n)_{n\ge1}$ المتتالية المعرّفة بالصيغة $v_n=13u_n-4$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية، وعيّن أساسها، ثُمّ عبّر عن v_n بدلالة n.

.b استنتج صيغة u_n بدلالة n و a. ثُمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

② غالباً ما ينسى مدرّس الرياضيات مفتاح غرفة الصف. أياً كان العدد n، $(n\ge1)$، نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «نسي المدرّس مفتاح غرفة الصف في اليوم n».

لنضع

$$q_n=\mathbb{P}(E'_n)\quad \text{و}\quad p_n=\mathbb{P}(E_n)$$

نفترض أنّه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$، وإذا لم ينس المدرّس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$.

a. أثبت أنّه في حالة $n \geq 1$ لدينا $p_{n+1} = \dfrac{1}{10}p_n + \dfrac{4}{10}q_n$.

b. استنتج صيغة p_{n+1} بدلالة p_n، ثُمّ استفد من ① لتحسب p_n بدلالة n و p_1.
أتتعلّق نهاية المتتالية $(p_n)_{n\geq 1}$ بقيمة p_1؟

الحل

① a.

$$v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4 = 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 = \frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n$$
$$= -\frac{3}{10}(13u_n - 4) = -\frac{3}{10}v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية، أساسها $-\frac{3}{10}$ وفيها $v_1 = 13u_1 - 4$ وبالتالي

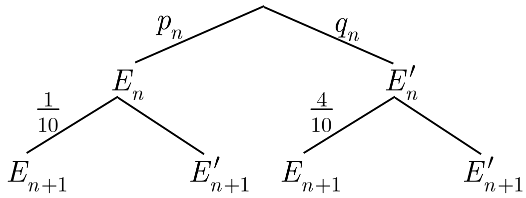
$$v_n = (13a - 4)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1}$$

b. بالتعويض في العلاقة $v_n = 13u_n - 4$ نجد

$$u_n = \tfrac{1}{13}\left((13a-4)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1} + 4\right) = \left(a - \tfrac{4}{13}\right)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1} + \tfrac{4}{13}$$

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{4}{13}$ لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$.

② a. إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$ أي $\mathbb{P}(E_{n+1} \mid E_n) = \frac{1}{10}$ وإذا لم ينس المدرّس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$، تعني $\mathbb{P}(E_{n+1} \mid E'_n) = \frac{4}{10}$، إذن لدينا المخطط الشجري الآتي:



إذن

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \tfrac{1}{10}p_n + \tfrac{4}{10}q_n$$

b. ولمّا كان $q_n = 1 - p_n$ وجدنا $p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n$. وبالاستفادة من ① نجد

$$p_n = \left(p_1 - \tfrac{4}{13}\right)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1} + \tfrac{4}{13}$$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{4}{13}$ والنهاية لا تتعلق بقيمة p_1.

14 نُكرّر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين، ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين. احسب احتمال كل من الحدثين A : «الحصول ثلاث مرات على وجهين H» و B : «الحصول على وجهين H مرّة على الأقل».

الحل

هذه تجربة برنولية، إذا كان X المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد مرات ظهور HH كان X حدّانياً $\mathcal{B}(10,\frac{1}{4})$. المطلوب هو $\mathbb{P}(X=3)$ و $\mathbb{P}(X\geq 1)$. ومنه

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(X=3)=\binom{10}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^3\left(\tfrac{3}{4}\right)^7=10\tfrac{3^8}{4^9}\approx 0.25$$

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\mathrm{X}\geq 1)=1-\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)=1-\binom{10}{0}\left(\tfrac{1}{4}\right)^0\left(\tfrac{3}{4}\right)^{10}=1-\left(\tfrac{3}{4}\right)^{10}\approx 0.94$$

15 نتأمّل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملوّنة بالأسود، ووجهان ملوّنان بالأحمر. نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي.

① ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أوّل مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد؟

② ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل؟

③ ما قانون المتحوّل العشوائي X الذي يعدّ عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها؟

الحل

① ليكن A_n الحدث الموافق لظهور وجه أحمر في المرة رقم n، وليكن A الحدث الموافق لظهور وجه أحمر أوّل مرة عند إلقاء الحجر في المرة الخامسة (الأخيرة) إذن

$$A=A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5$$

ولكن هذه الأحداث مستقلة احتمالياً إذن

$$\mathbb{P}(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}$$

② ليكن B الحدث الموافق لظهور وجه أحمر مرة واحدة على الأقل. فيكون B' الحدث الموافق لظهور اللون الأسود في المرات الخمس ومنه

$$\mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}(B')=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$$

③ احتمال الحصول على وجه أسود في المرة الواحدة هو $p=\frac{2}{3}$. نكرر التجربة خمس مرات، فيكون المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد الوجوه ذات اللون الأسود التي نحصل عليها متحولاً حدّانياً $\mathcal{B}(5,\frac{2}{3})$. ومنه

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}=\binom{5}{k}\frac{2^k}{3^5};\quad k=0,1,\ldots,5$$

16 نتأمّل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثُمّ نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب مجدداً كرة من الصندوق. لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون»، وليكن R_1 الحدث : «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

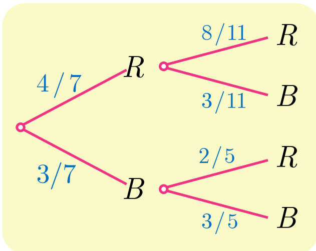
① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

② احسب احتمال الحدث R_2.

③ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون؟

الحل

① التمثيل الشجري المطلوب هو



②

$$\mathbb{P}(R_2) = \frac{4}{7}\times\frac{8}{11} + \frac{3}{7}\times\frac{2}{5} = \frac{226}{385}$$

③

$$\mathbb{P}(R_1' \mid R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_1' \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}}{\frac{226}{385}} = \frac{33}{113}$$

17 التجربة الأولى. نتأمّل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها Y؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y.

③ احسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي Y وتباينه.

التجربة الثانية. نتأمّل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثُمّ نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن X عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية. نرمز بالرمز R_1 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X.

③ احسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي X وتباينه.

الحل

التجربة الأولى. ① $Y(\Omega)=\{1,2,3\}$.

②

$$\mathbb{P}(Y=1)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{1\times 4}{20}=\frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{2\times 6}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

وإذا أردنا يمكن أن نكتب

y	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

ويكون لدينا

$$\mathbb{E}(Y)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$$

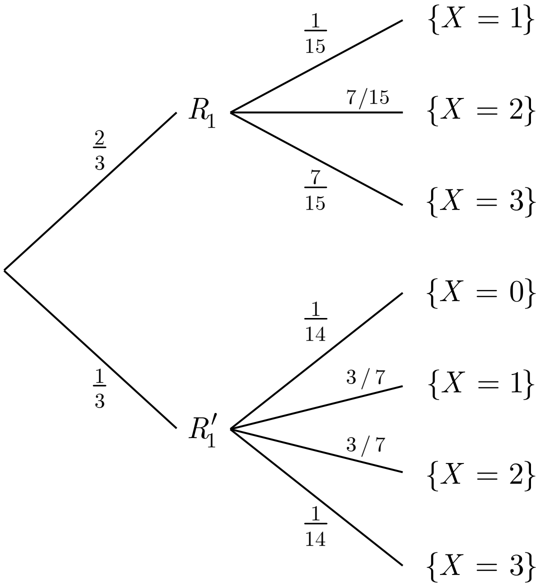
$$\mathbb{E}(Y^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{22}{5}$$

$$\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2=\frac{22}{5}-4=\frac{2}{5}$$

التجربة الثانية.

① $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$. واضحٌ أننا نسحب ثلاث كرات معاً من صندوق يحوي أكثر من ثلاث كرات حمراء. فعدد الكرات الحمراء المسحوبة يتراوح بين 0 و 3.

② لدينا $\mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3}$ و $\mathbb{P}(R_1') = \frac{1}{3}$. والتمثيل الشجري الآتي للتجربة:



إذ نلاحظ أنّه إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً سوداء أصبحت محتويات الصندوق 4 كرات سوداء و 4 كرات حمراء. أما إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً حمراء فعندها تصبح محتويات الصندوق كرتين سوداوين و 8 كرات حمراء.

يتيح لنا المخطط الشجري ملء جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X بيسر لنجد

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{59}{315}$	$\frac{143}{315}$	$\frac{211}{630}$

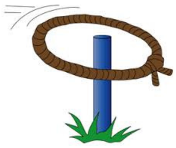
ويكون لدينا

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{59}{315} + 2 \times \frac{143}{315} + 3 \times \frac{211}{630} = \frac{21}{10}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{59}{315} + 2^2 \times \frac{143}{315} + 3^2 \times \frac{211}{630} = \frac{3161}{630}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$= \frac{3161}{630} - \left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{3827}{6300}$$



18 تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تُلقيها، تُكرّر سعاد التجربة عدداً من المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها.

نتأمّل، أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، الحدثين الآتيين:

A_n : « نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

B_n : « فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

ونعرّف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

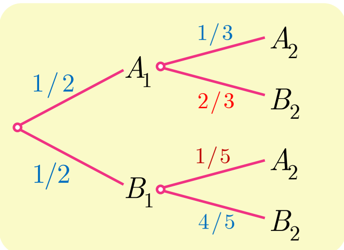
① عيّن p_1 وبرهن أنّ $p_2 = \frac{4}{15}$.

② أثبت أنّه أياً كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

③ نعرّف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية وعيّن حدها الأوّل u_1 وأساسها q.

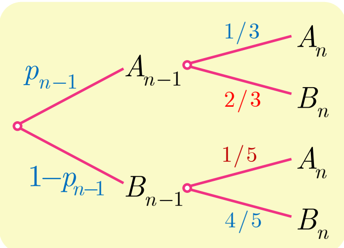
④ استنتج قيمة u_n ثمّ p_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim_{n\to\infty} p_n$.

الحل



① لأنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها فإن $p_1 = \frac{1}{2}$. ولدينا المخطط الشجري المجاور الذي يمثّل نتيجة إلقاء أوّل حلقتين. ومنه نستنتج أنّ

$$p_2 = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$



② في الحالة العامة لدينا المخطط الشجري المجاور: ومنه

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = p_{n-1}\cdot\frac{1}{3} + (1-p_{n-1})\cdot\frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}p_{n-1}$$

③ لدينا

$$u_n = p_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_{n-1} - \frac{2}{65} = \frac{2}{15}u_{n-1}$$

أي $u_n = \frac{2}{15}u_{n-1}$.

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{15}$ وحدها u_1 يساوي

$$u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

④ إذن $u_n = q^{n-1}u_1$ أي $u_n = \frac{7}{26}\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$ ومنه $p_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26}\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$.

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^{n} = 0$ لأن $\frac{2}{15} \in]-1,1[$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{13}$.