الدرس

3

3

3

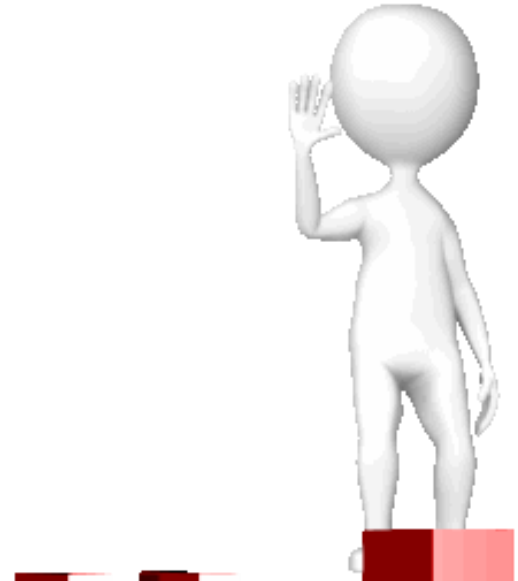
3

3

3

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

LOGSRITHMS AND LOGARITHMIC FUNCTION



Welcome

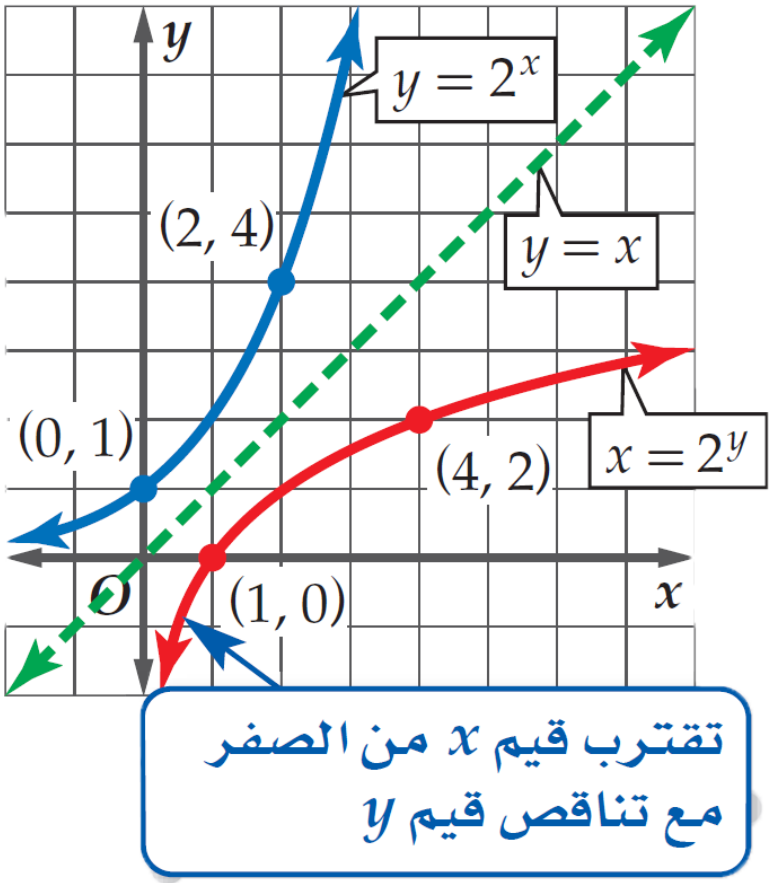
لماذا ؟

يُرجح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض، ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض، ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال بالمعادلة $PS = \log_{10} R$

حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم،
يمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال و العبارات اللوغارتيمية :

يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x)=2^x$ بيانيًا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة .



$y=2^x$	
x	y
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x=2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

يظهر من الجدول و التمثيل البياني أعلاه أن معكوس $y = 2^x$ هو $x = 2^y$

و بصورة عامة ، فإن معكوس $y = b^x$ هو $x = b^y$ يسمي المتغير **y** في المعادلة $x = b^y$ لوغاريتم **x** ، و يكتب عادة علي الصورة $y = \log_b x$ و يقرأ **y** تساوي $\log x$ للأساس **b** .

مفهوم أساسي

اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي :

إذا كان **x, b** عددين موجبين، حيث $b \neq 1$ يرمز للوغاريتم **x** للأساس **b** بالرمز ، $\log_b x$

ويُعرف على أنه الأس **y** الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة .

الرموز :

افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن : لكل $x > 0$ يوجد عدد **y** بحيث .

$\log_b x = y$ إذا وفقط إذا $b^y = x$

مثال : $\log_3 27 = y \rightarrow 3^y = 27$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسية.

التحويل من الصور اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

مثال 1

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

(a $\log_2 8 = 3$

$$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$$

(b $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$$

تحقق من فهمك

(1A $\log_4 16 = 2$ $16 = 4^2$

(1B $\log_3 729 = 6$ $729 = 3^6$

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة المعادلات الأسية على الصورة اللوغاريتمية.

التحويل من الصور الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

مثال 2

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

(a $15^3 = 3375$

$$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$$

(b $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

تحقق من فهمك

(2A $4^3 = 64$ $\log_4 64 = 3$

(2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية.

التحويل من الصور الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

مثال 3

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(a $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$	بفرض أن العبارة اللوغارتيمية تساوي y
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = 4^2$	$16 = 4^2$
$1 = 2y$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$\frac{1}{2} = y$	بقسمة كلا الطرفين علي 2

لذا ، فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

(b $\log_7 \frac{1}{49}$

بفرض أن العبارة اللوغارتيمية تساوي y $\log_7 \frac{1}{49} = y$

تعريف اللوغاريتم $\frac{1}{49} = 7^y$

$\frac{1}{49} = 7^{-2}$ $7^{-2} = 7^y$

خاصية المساواة للدوال الأسية $-2 = y$

لذا ، فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

تحقق من فهمك

(3A $\log_3 81$

4

(3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$

-8

الخصائص الأساسية للوغارتيمات :

من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي

اللوغاريتم للأساس b

إذا كان $b \neq 1, b > 0$ عدد حقيقي، فإن الخصائص الآتية صحيحة :

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

التحويل من الصور الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

مثال 4

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(a $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$

$= 3$

$5^3 = 125$

$\log_b b^x = x$

(b $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$

$= -3$

$0.001 = 10^{-3}$

$\log_{10} 10^x = x$

(c $12^{\log_{12} 47}$

$b^{\log_b x} = x$ $\qquad 12^{\log_{12} 47} = 4.7$

(d $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرف فبط عندما $x > 0$

فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرف في مجموعة الاعداد الحقيقية

تحقق من فهمك

(4A $\log_9 81$ 2

(4B $3^{\log_3 1}$ 1

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا:

تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ حيث $b \neq 1$ دالة لوغاريتمية ، و التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$

هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = \log_b x$

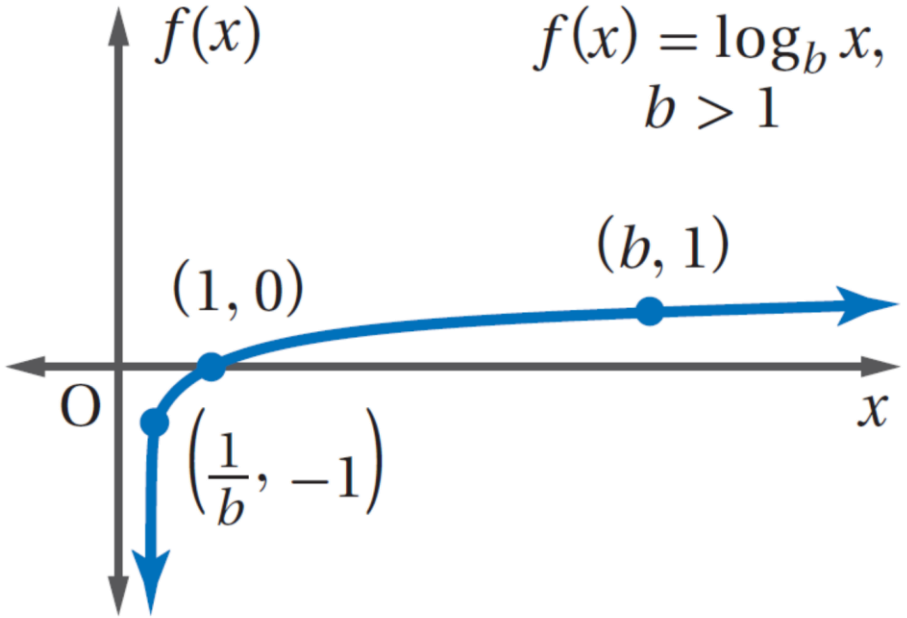
خصائص منحنى الدالة : متصل ، متباين ، متزايد

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية (R+)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

خط التقارب : المحور y

مقطع المحور x: ١



الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = \log_b x,\ 0 > b > 1$

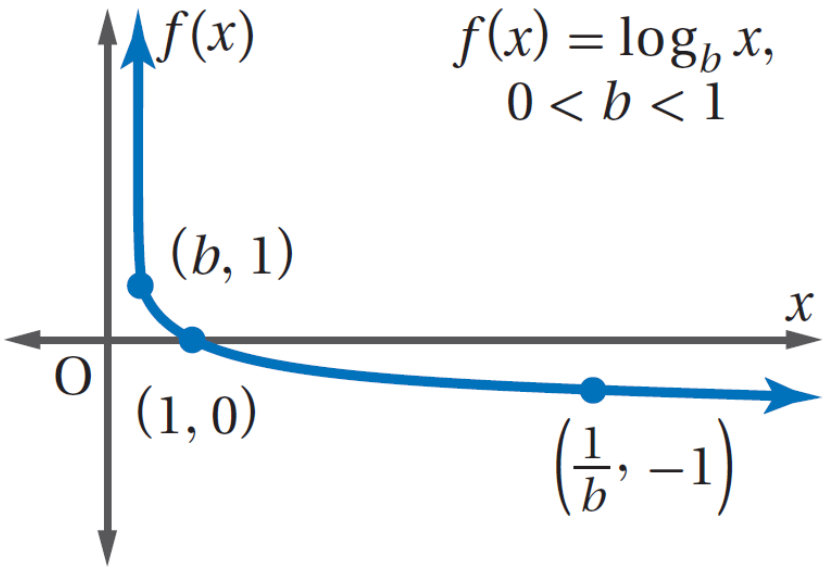
خصائص منحنى الدالة : متصل ، متباين ، متناقص

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

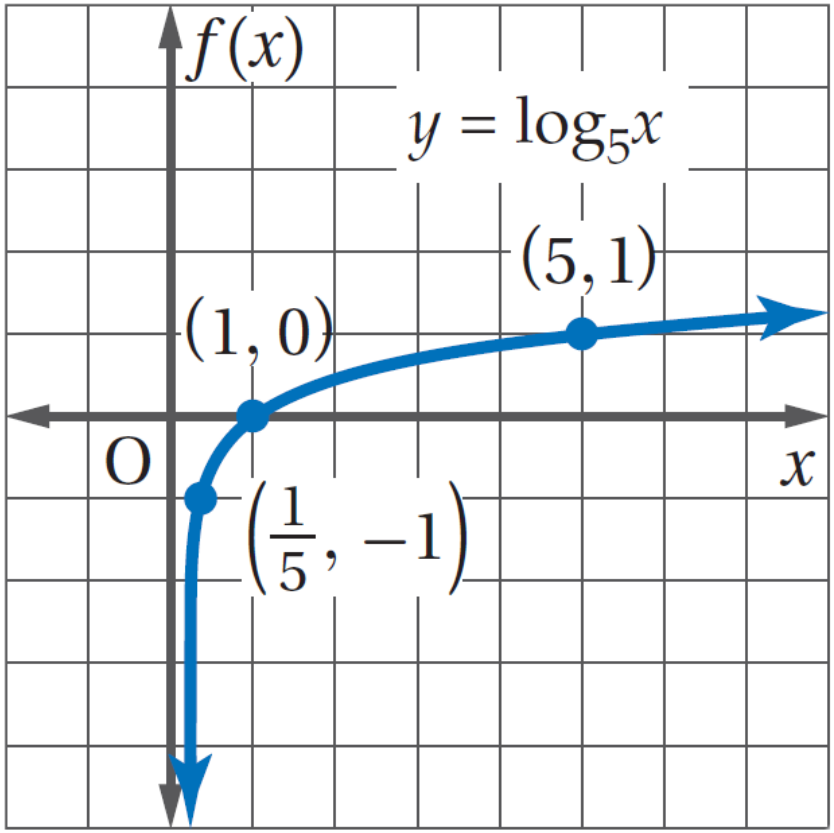
خط التقارب : النقطة (1,0)

مقطع المحور ×: ١



حل المعادلات الأسية

مثال 5



(a $f(x) = \log_5 x$

الخطوة 1 : حدد الأساس

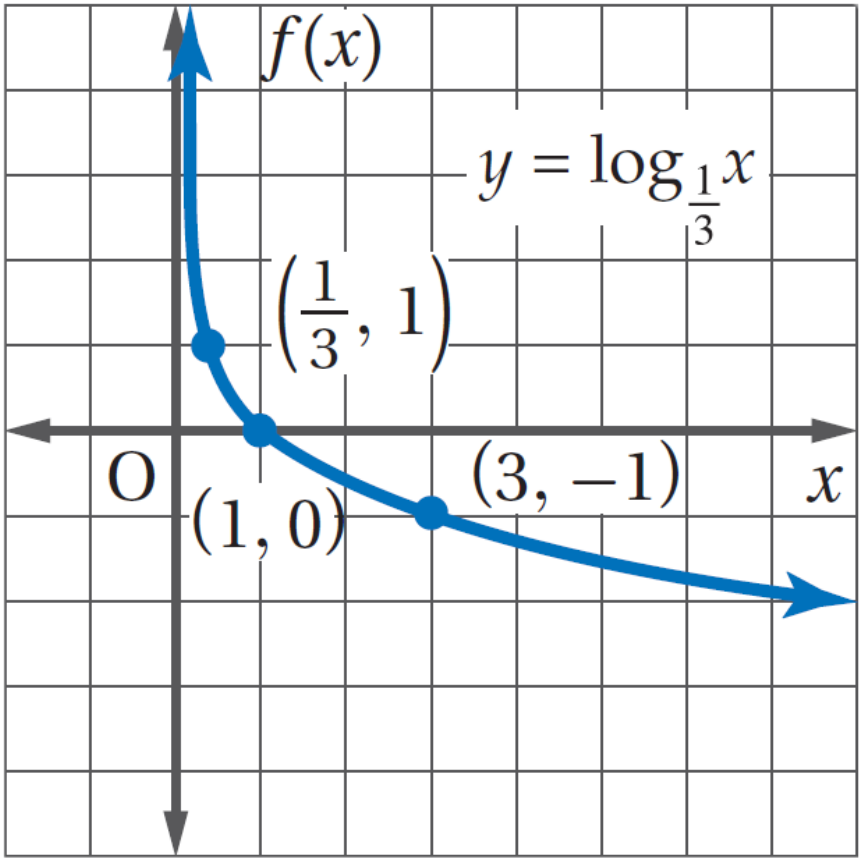
$b = 5$

الخطوة 2 : حدد نقاطاً علي التمثيل البياني بما أن 5 > 1 فاستعمل النقاط

$\left(-1, \frac{1}{b}\right), (0,1), (1, b)$

أي النقاط $\left(\frac{1}{5}, -1\right), (1,0), (5,1)$

الخطوة 3 : مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد



(b $\mathrm{f}\left(x\right)=\log_5 x$

الخطوة 1 : $b=\frac{1}{3}$

الخطوة 2 : $0<\frac{1}{3}<0$

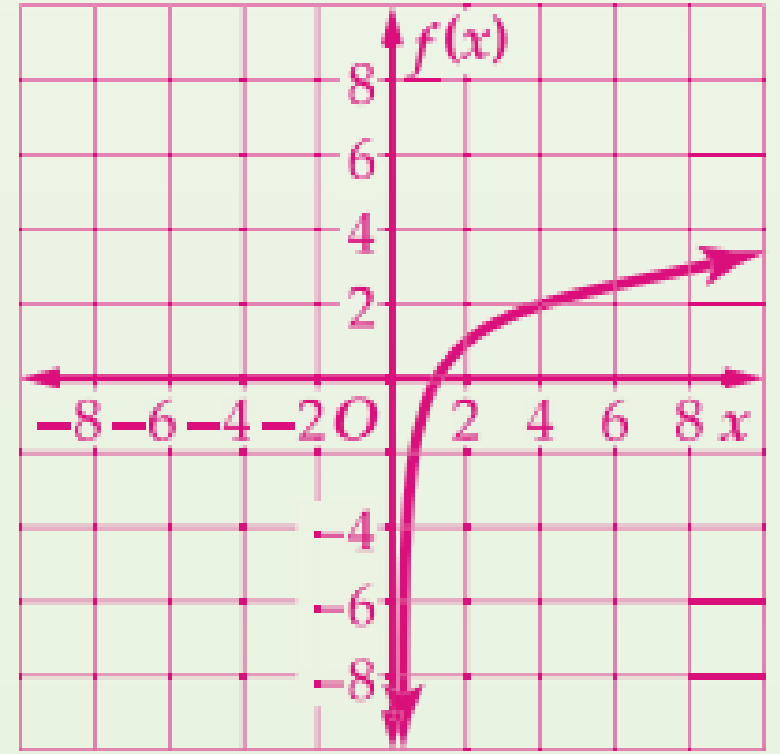
لذا استعمل النقاط $\left(\frac{1}{3},1\right),(1,0),(3,-1)$

الخطوة 3 : ارسم المنحنى،

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

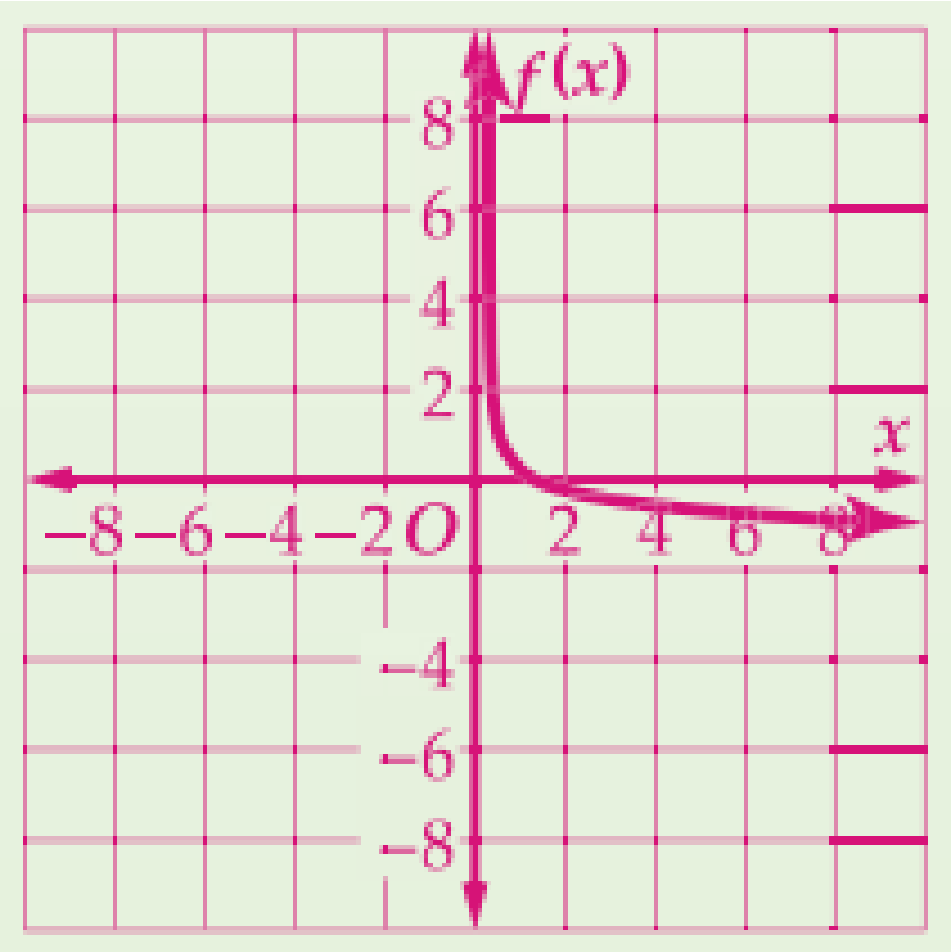
تحقق من فهمك

$f(x) = \log_2 x$ (5A



تحقق من فهمك

$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ (5B



وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا :

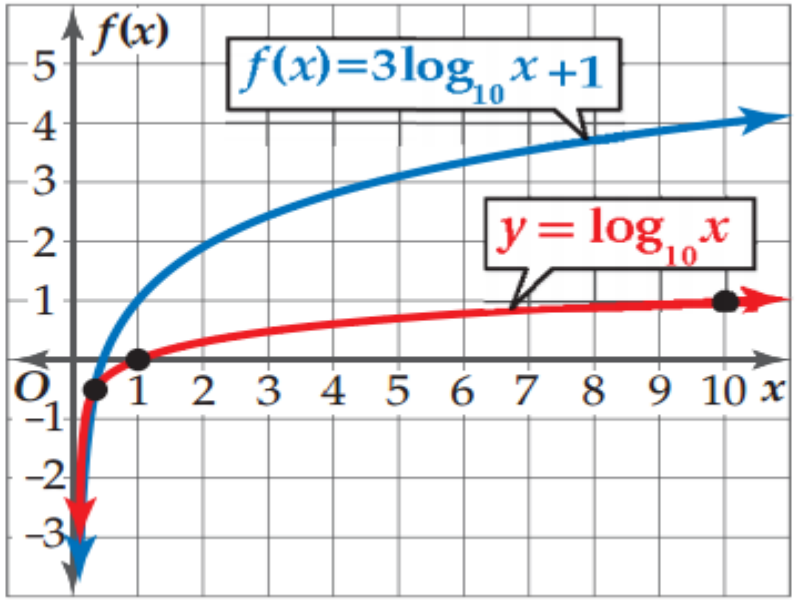
(a $f(x) = 3\log_{10} x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10>1$

فاستعمل النقاط $(b\ ,\ 1)$, $(1\ ,\ 0)$, $(\frac{1}{b}\ ,\ -1)$، أي النقاط $(10\ ,\ 1)$

$(1\ ,\ 0)$, $(\frac{1}{10}\ ,\ -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل

للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

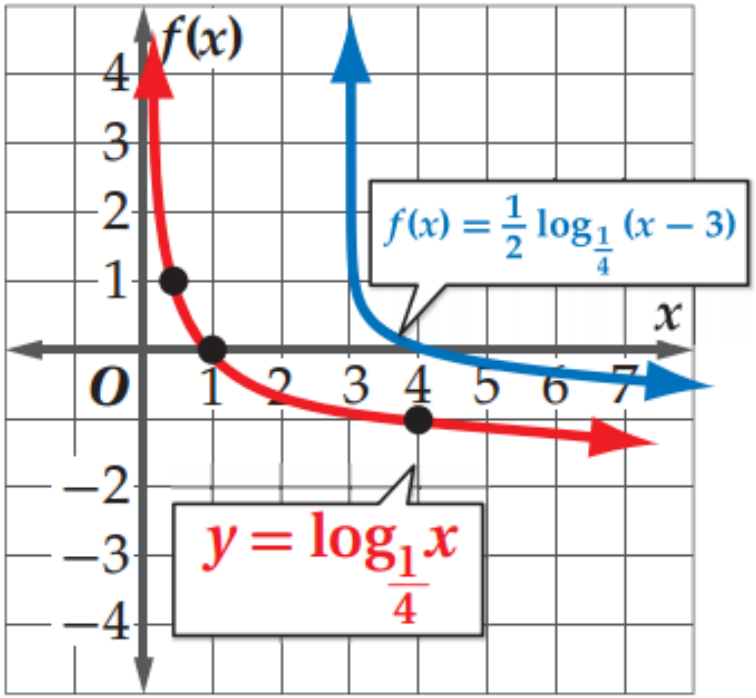


- $a = 3$: **يتسع التمثيل البياني رأسياً .**
- $h = 0$ **لا يوجد انسحاب أفقي**
- $k = 1$ **يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.**

(b $f(x)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

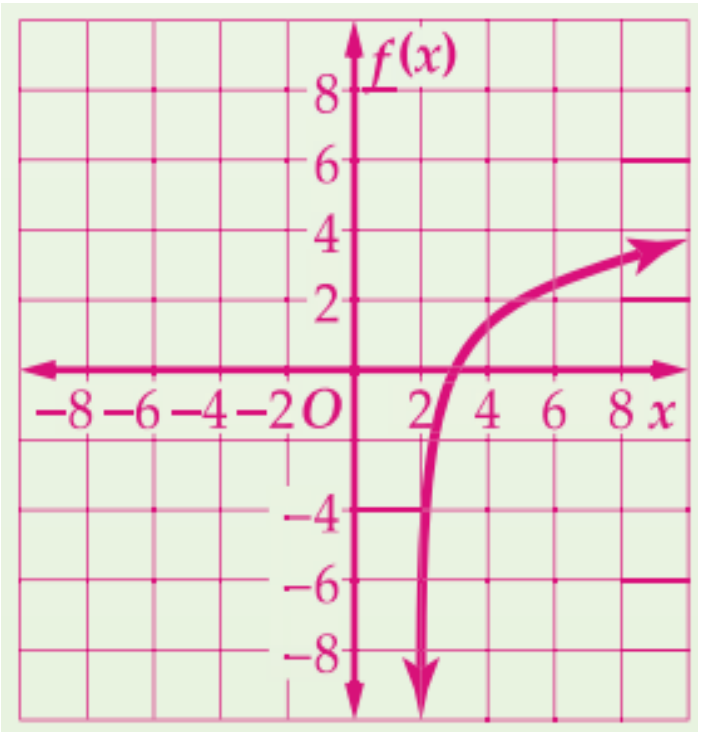
والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}x$

- $a=\frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسياً .
- $h=3$ يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلي اليمين .
- $k=0$ لا يوجد انسحاب رأسي .

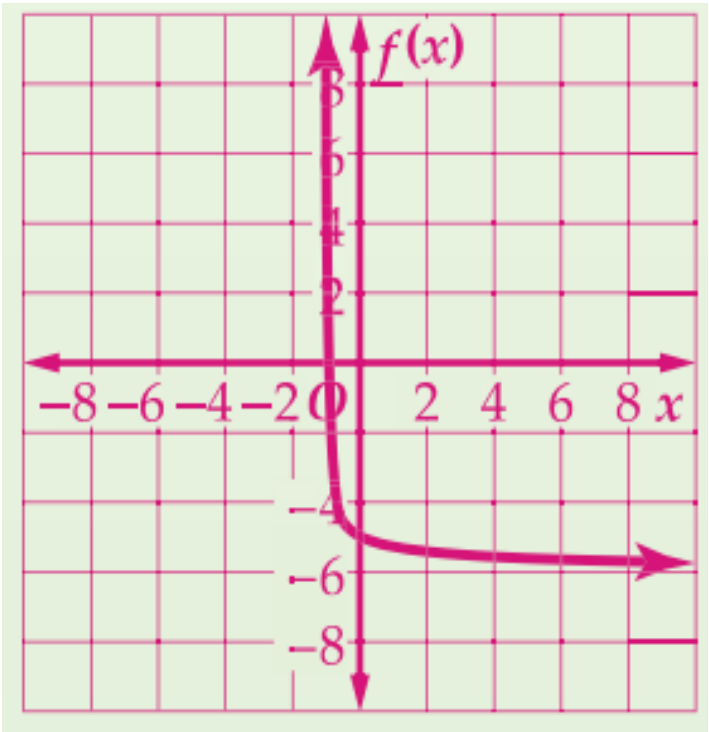


تحقق من فهمك

(6A $f(x) = 2\log_3 (x - 2)$



(6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$



إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

مثال 7 من واقع الحياة

هزات أرضية : يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أي أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$ ، حيث y الدرجة على مقياس ريختر .

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوة هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوّض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بالتبسيط
$= 158489319.2$	باستعمال الحاسبة

b) أوجد معادلة على الصورة $y = \log_{10} x + c$ لمعكوس الدالة .

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y و حل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	بإضافة العدد 1 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

7) أوجد معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^x$

$$y = \log_{0.5} x$$

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1) $\log_8 512 = 3$ $\quad 8^3 = 512$

2) $\log_5 625 = 4$ $\quad 5^4 = 625$

3) $\log_2 16 = 4$ $\quad 2^4 = 16$

4) $\log_7 343 = 3$ $\quad 7^3 = 343$

5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ $\quad 9^{-2} = \frac{1}{81}$

6) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ $\quad 3^{-3} = \frac{1}{27}$

7) $\log_{12} 144 = 2$ $\quad 12^2 = 144$

8) $\log_9 1 = 0$ $\quad 9^0 = 1$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

9) $11^3 = 1331$ $\log_{11} 1331 = 3$

10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$ $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

11) $9^{-1} = \frac{1}{9}$ $\log_9 \frac{1}{9} = -1$

12) $6^{-3} = \frac{1}{216}$ $\log_6 \frac{1}{216} = -3$

13) $2^8 = 256$ $\log_2 256 = 8$

14) $4^6 = 4096$ $\log_4 4096 = 6$

15) $27^{\frac{2}{3}} = 9$ $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

16) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (المثالان 3, 4)

(17 $\log_{13} 169$ 2

(18 $\log_2 \frac{1}{128}$ -7

(19 $\log_6 1$ 0

(20 $\log_4 1$ 0

(21 $\log_{10} 10$ 1

(22 $\log_{10} 0.01$ -2

(23 $\log_3 \frac{1}{9}$ -2

(24 $\log_4 \frac{1}{64}$ -3

(25 $\log_6 216$ 3

(26 $\log_{27} 3$ $\frac{1}{3}$

(27 $\log_{32} 2$ $\frac{1}{5}$

(28 $\log_{121} 11$ $\frac{1}{2}$

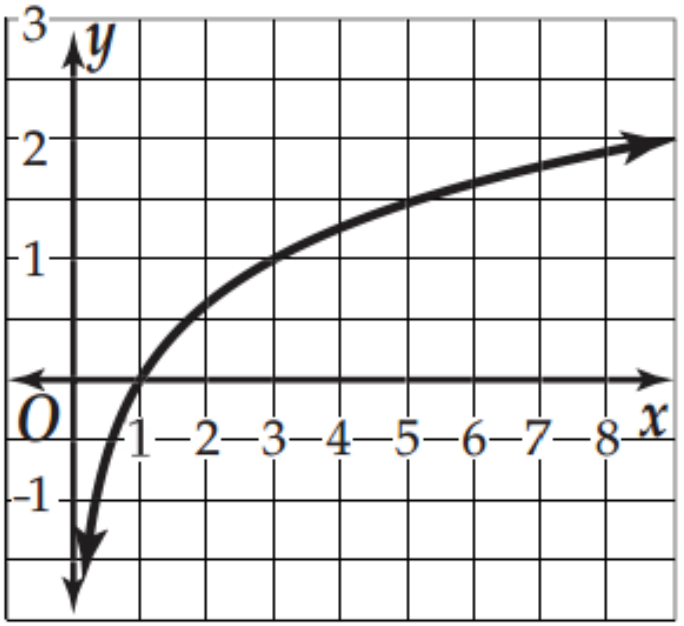
(29 $\log_{\frac{1}{5}} 3125$ -5

(30 $\log_{\frac{1}{8}} 512$ -3

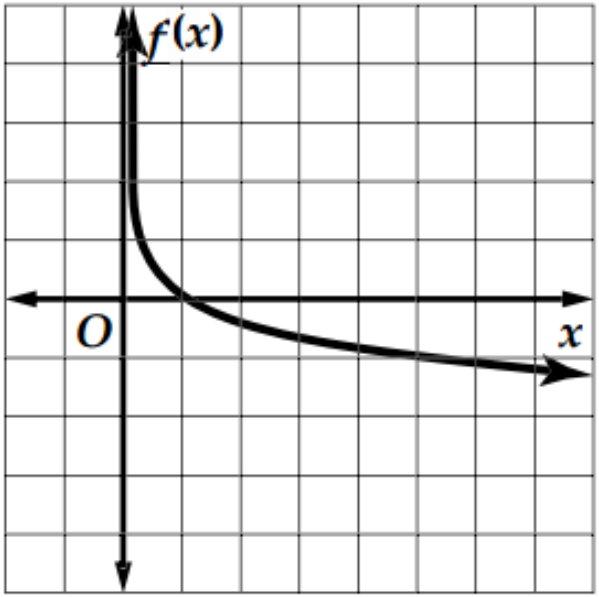
(31 $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ 3

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

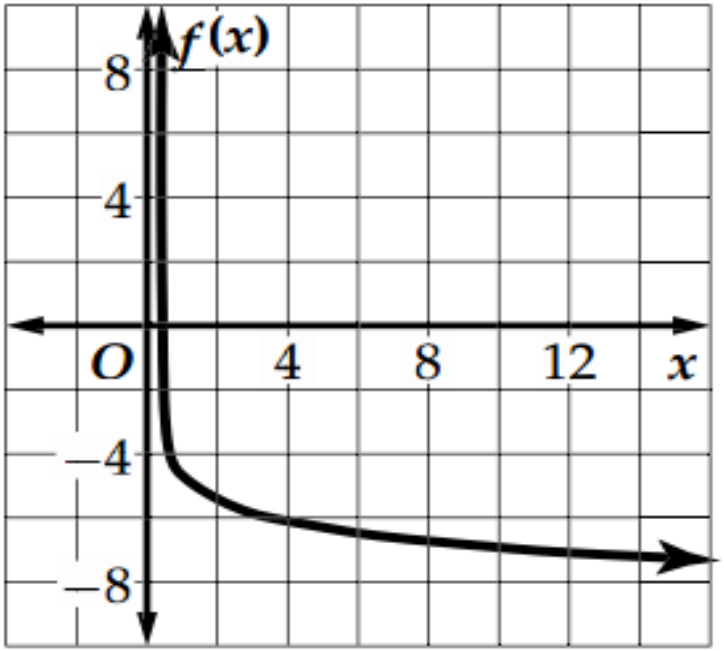
(32 $f(x) = \log_3 x$



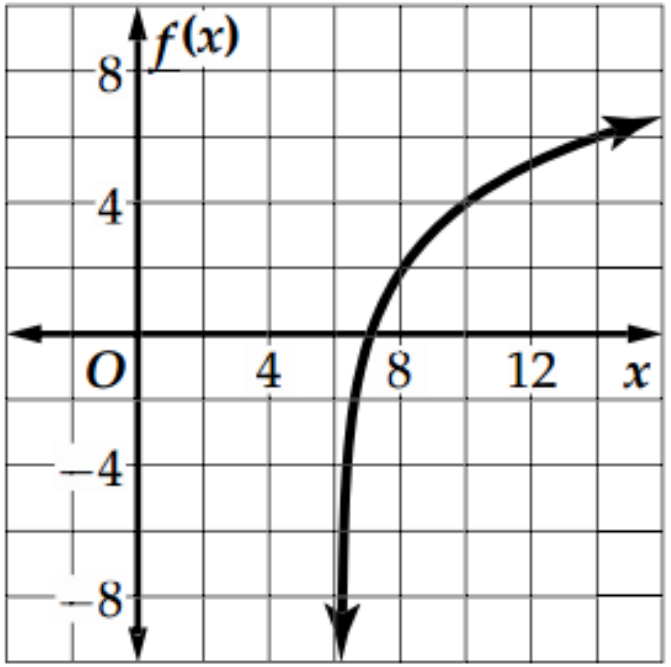
(33 $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$



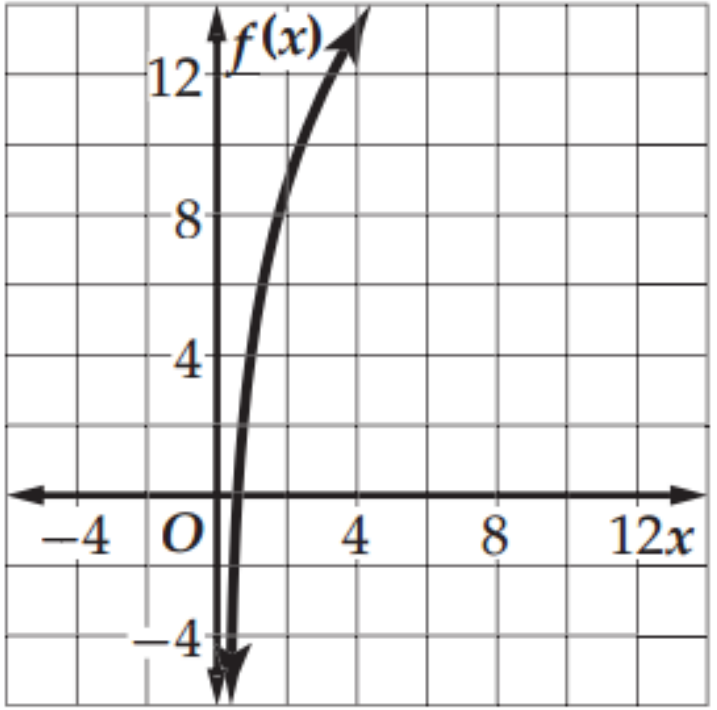
$f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$ **(35**



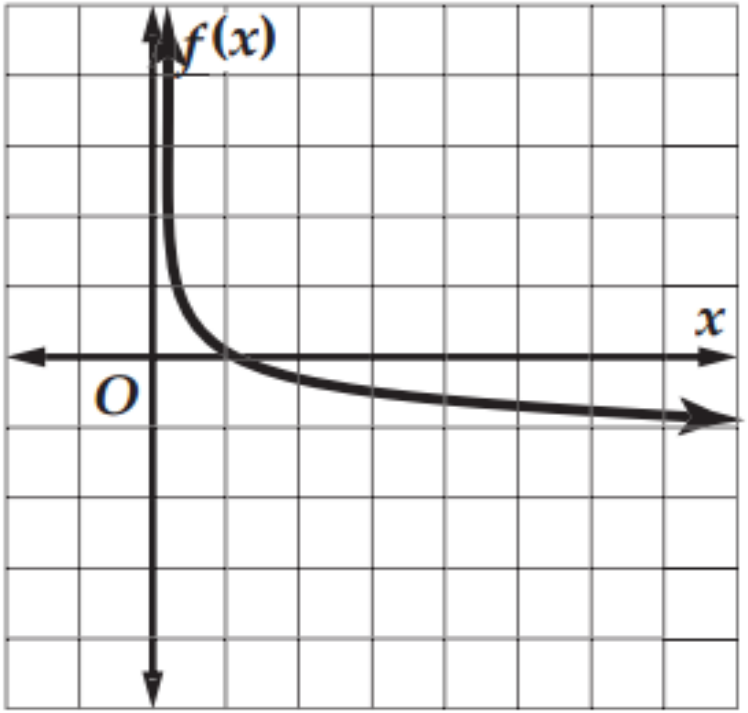
$f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$ **(34**



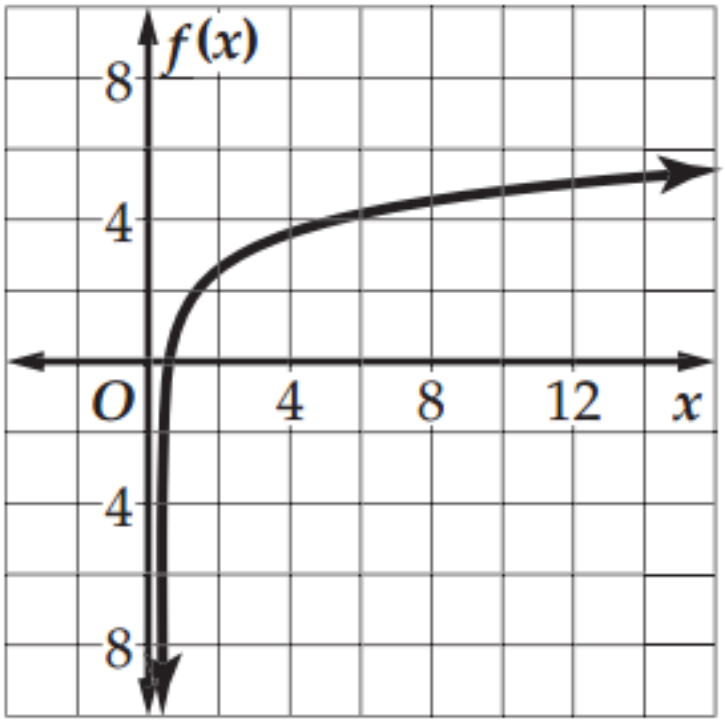
$f(x) = 4 \log_2 x + 6$ **(36**



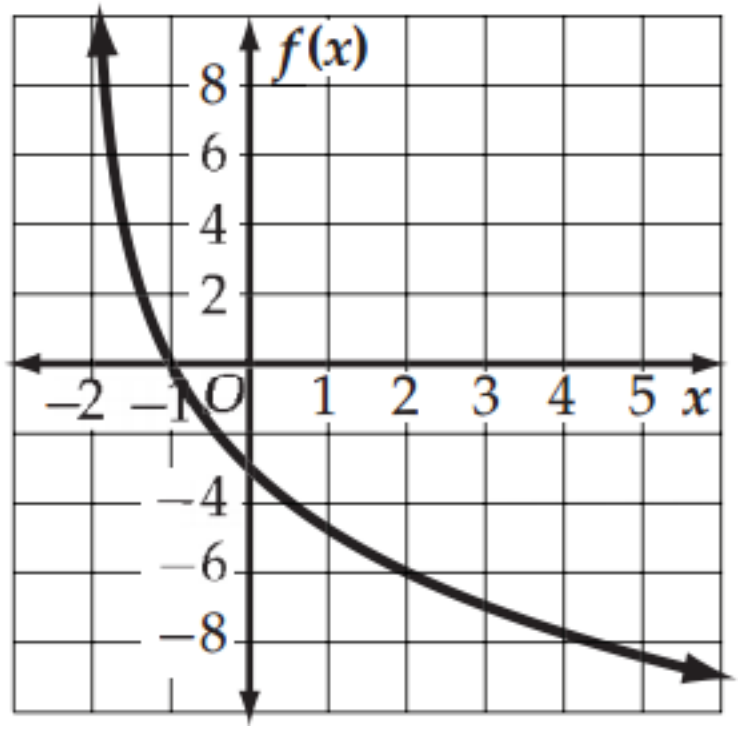
$f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$ **(37**



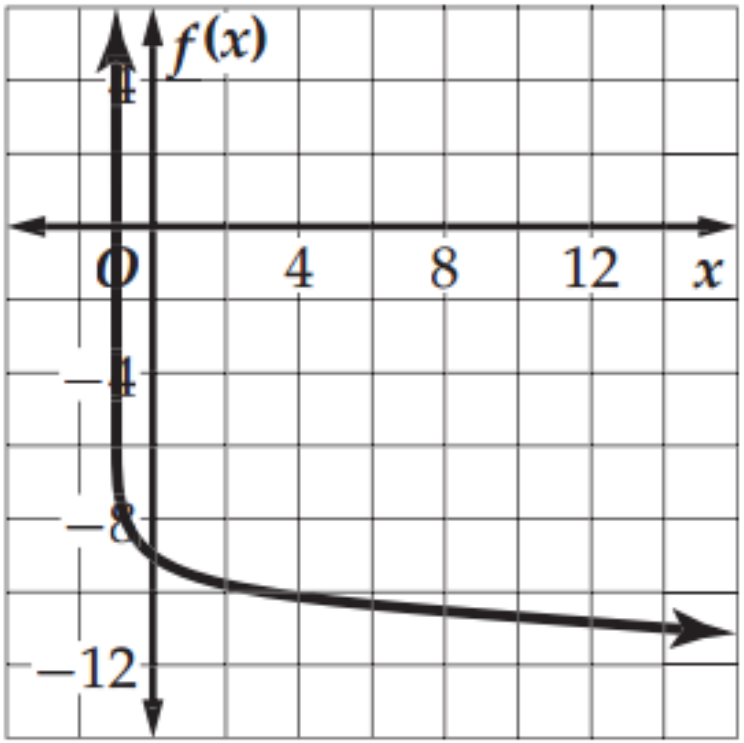
$f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$ **(38**



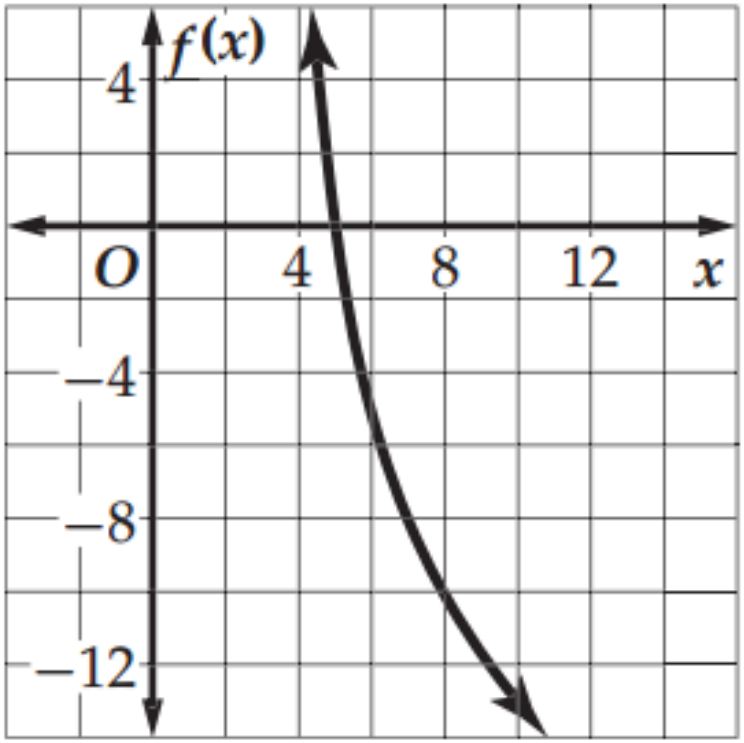
$f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$ **(39**



$f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x + 1) - 9$ **(41**



$f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$ **(40**



42) **علوم:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. أوجد معكوس الدالة اللوغاريتمية المعطاة. (مثال 7)

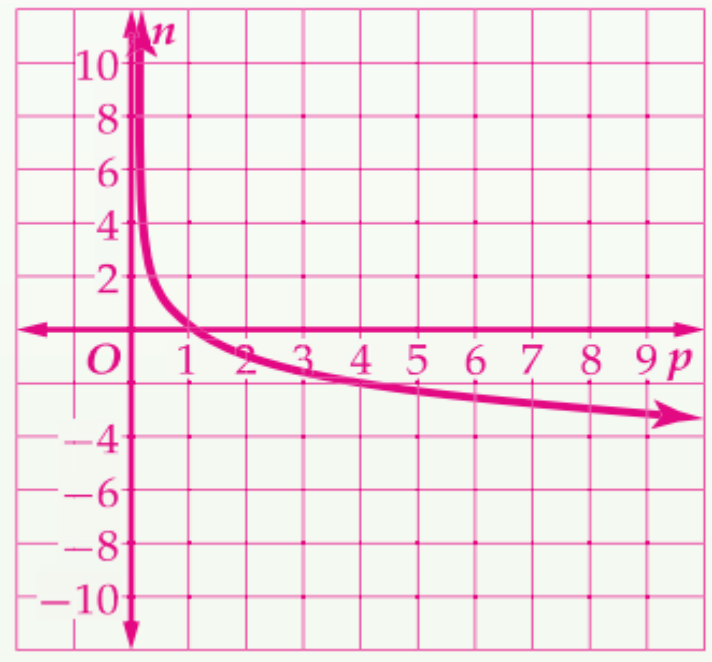
$$R = 10^{PS}$$

43) **تصوير:** تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أُعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟

2

b) مثّل الدالة بيانيًّا.



c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **b** لتقدير نسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات. هل يؤدي ذلك إلى زيادة الإضاءة أم نقصانها؟

$\frac{1}{8}$؛ نقصان الإضاءة

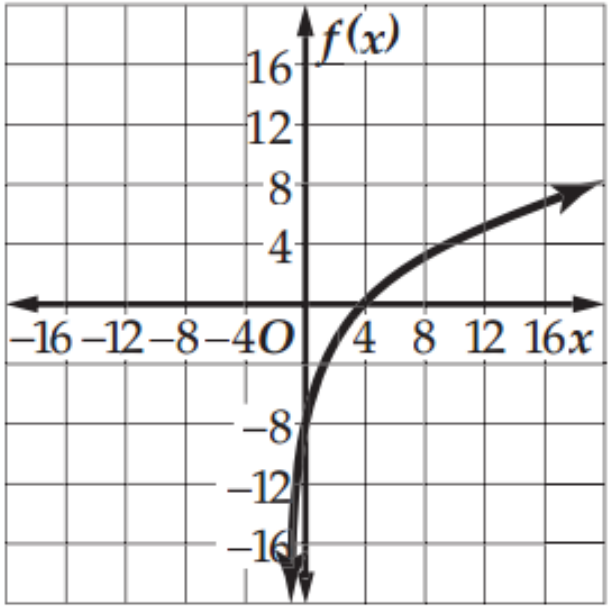
44) تربية : لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها، ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$ ، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$ ؟ 85

b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر ؟ 73

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟ 61

45) مثّل الدالة $f(x) = 15 \log_{14}(x + 1) - 9$ بيانيًّا.



46) **تحليليًّا:** اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى أعلى.

$y = \log_3 (x + 4) + 1$

47) إعلانات: تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الريالات بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20 \log_4(a + 1)$ ، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الريالات، $a \geq 0$.

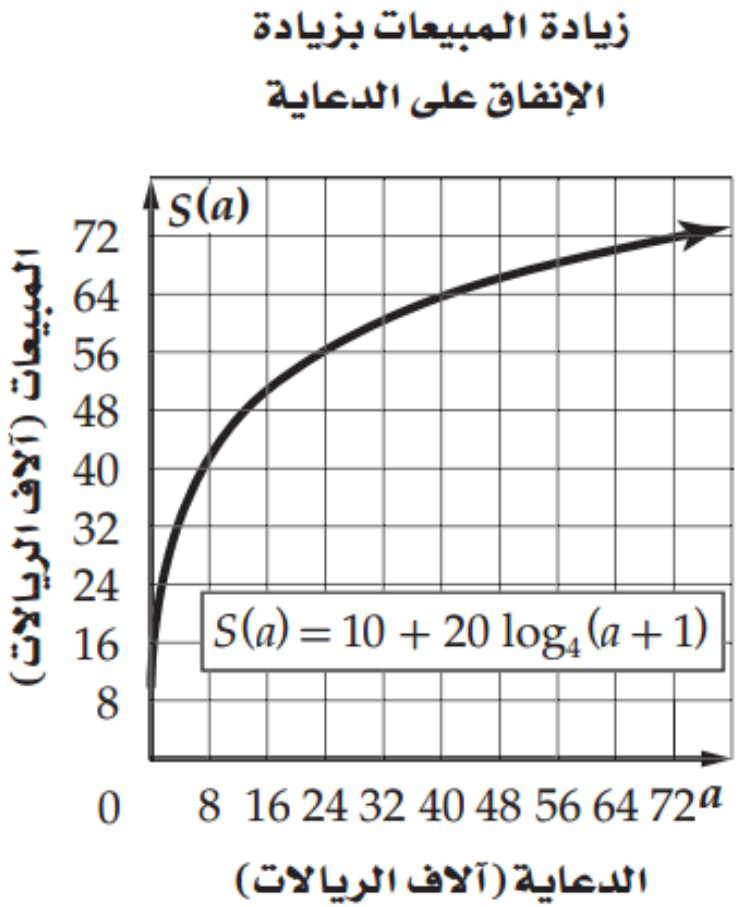
a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم يُنفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات 10000 ريال. أوجد كلًّا من: $S(3), S(15), S(63)$.

$S(3) = 30$، $S(15) = 50$، $S(63) = 70$

b) فسر معنى كل من القيم التي أوجدتها في الفرع **a**.

إذا أنفق 3000 ريال على الدعاية والإعلان، فستكون مبيعات الشركة 30000 ريال ، وإذا أنفق 15000 ريال، فستكون مبيعات الشركة 50000 ريال، وإذا أنفق 63000 ريال عليهما، فستكون مبيعات الشركة 70000 ريال.

c) مثّل الدالة بيانيًّا.



d) استعمل التمثيل البياني في الفرع **c** ، وإجابتك في الفرع **a** لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زاد المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان يقل انحناء المنحنى، ومن الفرع a، لاحظ أيضًا أن زيادة الانفاق على الدعاية من 3 آلاف ريال إلى 15 ألف ريال أدت إلى زيادة المبيعات بمقدار 20 ألف ريال، وأن زيادة الانفاق على الدعاية من 15 ألف ريال إلى 63 ألف ريال أدت إلى زيادة المبيعات بمقدار 20 ألف ريال أيضًا فقط، لذا فإن أثر الدعاية يتناقص عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها في هذه الشركة.

48) أحياء: زمن الجيل بالنسبة للخلايا البكتيرية هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليْ ما كان عليه. فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا يُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$، حيث t الفترة الزمنية، b عدد الخلايا البكتيرية عند بداية التجربة، f عدد الخلايا البكتيرية عند نهاية التجربة.

a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16 h، ما الزمن الذي تحتاج إليه 4 خلايا بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 1024 ؟ **264 h أو 11 يومًا**

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5 h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 160000 خلية؟ **66 h أو يومان و 18 h**

c) تتكاثر بكتيريا E.coli بسرعة، بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 خلال 4.4 h . احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli . **$\frac{1}{3}$ h أو 20 min**