مثال

## حلّ معادلات ومتراجحات لوغاريتمية

① حلّ المعادلة $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$ .

② حلّ المتراجحة $\ln(x^2-4) \leq \ln(-3x)$ .

**مثال** دراسة تابع لحل متراجحة

أثبت أنَّ $\ln x < 2\sqrt{x}$ أياً يكن $x > 0$ .

لعلَّ إحدى أهم الطّرائق لإثبات أنَّ $\ln x < 2\sqrt{x}$ أياً يكن $x > 0$ ، هي دراسة اطّراد التابع

المعرَّف على المجال $I = ]0,+\infty[$ وفق $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$ .

**الحل**

التابع $f$ اشتقاقي على $I$، ويعطى تابعه المشتقّ على $I$ بالعلاقة

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$$

ينعدم هذا المشتقّ عند $x = 1$ وإشارته تماثل إشارة $x - 1$ ، وهذا ما يفيدنا في وضع جدول الاط

الآتي للتابع $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | |

بالاستعانة بجدول الاطراد نستنتج أنّ $f(x) \geq 2 > 0$ أيّاً يكن $x > 0$ ، أي إنّ $\sqrt{x} - \ln x > 0$

. $\ln x < 2\sqrt{x}$

**تدرّب**

ليكن $C$ الخطّ البياني للتابع $f$ المعرّف على المجال $I = ]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x+1-\frac{\ln x}{x}$.

1. لماذا المستقيم $d$ الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للخطّ $C$؟
2. ادرس الوضع النسبي للخطّين $d$ و $C$.

أثبت أنّ التابع $f$ اشتقاقي على المجال $I$ ثم احسب $f'$.

ليكن $g$ التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ بوضع $g(0)=0$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$ في حالة $x>0$.

ليكن أيضاً $C$ الخطّ البياني المُمثّل للتابع $g$.

① تيقّن أنّ $g(x)$ معرّف في حالة $x>0$.

② .a أثبت أنّ $g$ مستمرّ عند الصفر.

.b ادرس قابليّة اشتقاق $g$ عند الصفر. وعيّن إن أمكن المماس للخطّ $C$ عند مبدأ الإحداثيّات.

③ .a ما نهاية $g$ عند $+\infty$؟

.b احسب $g'(x)$ في حالة $0<x$، ثُمّ ادرس $g$.

.c أعط معادلة للمماس $T$ للخطّ $C$ في النقطة التي فاصلتها 1.

دورة ٢٠٢٢

**5** لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$]0$

① جد نهاية هذه المتتالية.

② نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

$u_n = \ln\left(\frac{1+1}{k}\right) \ln\left(\frac{2}{1}\right)$

a. أثبت أنَّ $S_n = \ln(n+1)$.

$\ln(2) + \ln(3) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b. ما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$؟

**20** في معلمٍ متجانس، $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما على التوالي الخطّان البيانيان للتابعين $f$ و $g$ المعرّفين على المجال $I = ]-1,+\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

① أثبت أنَّ $g(x) \leq f(x)$ أياً يكن $x$ من $I$.

② أثبت أنَّ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

③ ادرس تغيّرات كلٍ من $f$ و $g$ وارسم الخطّين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ مستفيداً من رسم المماس المشترك.

ي ..

يكن $C$ الخطّ البياني للتابع $f$ المعرّف على المجال $I = ]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

ادرس تغيّرات $f$ ونظّم جدولاً بها.

أثبت أنَّ المستقيم $d$ الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخطّ $C$ في جوار $+\infty$.

ادرس الوضع النسبي للخطّ البياني $C$ ومقاربه $d$.

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد $\alpha$ ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

ارسم في معلمٍ واحد المستقيم $d$ ثم الخطّ البياني $C$.

يكن $C$ الخطّ البياني للتابع $f$ المعرّف على المجال $I = ]4,+\infty[$ وفق

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

① أثبت أنَّ المستقيم $d$ الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب للخطّ $C$.

② ادرس الوضع النسبي للخطّ $C$ ومقاربه $d$.

③ ادرس تغيرات $f$ ونظّم جدولاً بها. ثُمّ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم $d$ ثم الخط البياني $C$.

④ أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّاً وحيداً $\alpha$، واحصره في مجال طوله يساوي 1.

**18** ليكن $f$ التابع المعرّف على المجال $I = ]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ .

① أثبت أنَّ $f$ تابع فردي.

② $a$. أثبت أنَّ $f$ اشتقاقي على $I$ .

$b$. ادرس تغيّرات $f$ على المجال $[0,1[$ .

③ ارسم الخط البياني للتابع $f$ .

① ليكن $C$ الخطّ البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\exp\left(\frac{1}{2}-x^2\right)$ .

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ . استنتج معادلة كل مقارب للخط البياني $C$ .

❷ ادرس تغيّرات $f$ ونظم جدولاً بها. أشر إلى قيمة حدّيّة للتابع.

❸ اكتب معادلةً للمماس $d$ للخطّ $C$ في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$ .

❹ جد إحداثيات النقطتين اللتين ينعدم فيهما $f''(x)$ ، واكتب معادلتي المماسين $d_1$ و $d_2$

❺ ادرس وضع الخط البياني $C$ بالنسبة إلى كلٍ من $d$ و $d_1$ و $d_2$ .

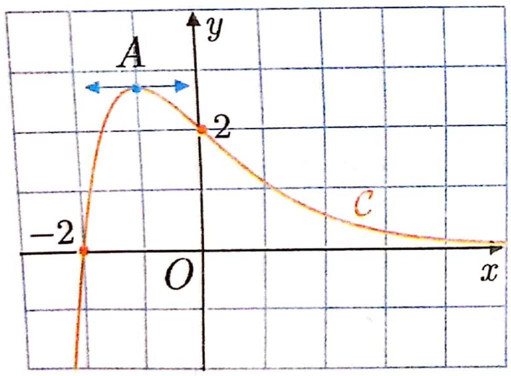
❻ ارسم $d$ و $d_1$ و $d_2$ ثم ارسم $C$ .

ي $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين:

$$3^x \times 3^y = 9 \qquad (1)$$

$$3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \qquad (2)$$

**2** $C$ هو الخط البياني لتابعٍ $f$ معرّفٍ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان. اعتماداً على ما تجد في الشكل:




① احسب قيمة كلٍ من $a$ و $b$.

② احسب $f'(x)$ ، واستنتج إحداثيّتي النقطة $A$ الموافقة للقيمة الكبرى للتابع $f$ .

③ أثبت أنّ محور الفواصل مقارب للخطّ $C$ في جوار $+\infty$ .

**3** ارسم الخطّ البياني $C$ للتابع الأسّي exp ثمّ استنتج رسم الخطّ البياني لكلٍ من التوابع الآتية:

مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يطلب تعيينهما.

**7** ليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{2e^{x}-3}{e^{x}+1}$.

① لماذا المستقيمان $d_1$ الذي معادلته $y=2$ و $d_2$ الذي معادلته $y=-3$ مقاربان للخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيّرات $f$ ونظّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخطّ البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

④ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$. ثُم ارسم في معلم متجانس $d_1$ و $d_2$ و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

**19** ليكن $f$ التابع المعرّف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$ .

① ادرس تغيّرات $g : x \mapsto e^x f'(x)$ .

② استنتج دراسة تغيّرات $f$ .

## 25 معادلة تفاضلية

① لتكن $(E)$ المعادلة التفاضليّة $2y' + 3y = 0$ . عيّن جميع حلول $(E)$

② لتكن $(E')$ المعادلة التفاضليّة $2y' + 3y = x^2 + 1$ .