

٢٠١٧ - ٢٠١٨ م

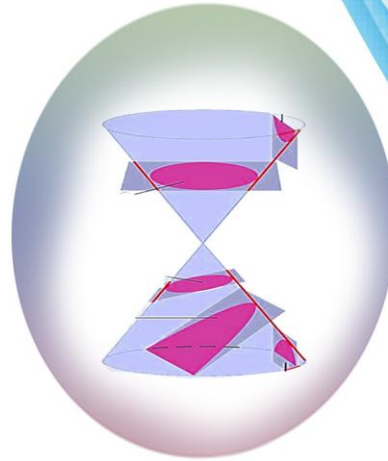
القطوع المخروطية

لطلاب الصف
الثالث الثانوي

إعداد :

أ/ خليك المعازمي

مدرس الرياضيات
بمدارس الرشيد الحديثة



مدارس الرشيد الحديثة
Ar-Rashid Modern Schools



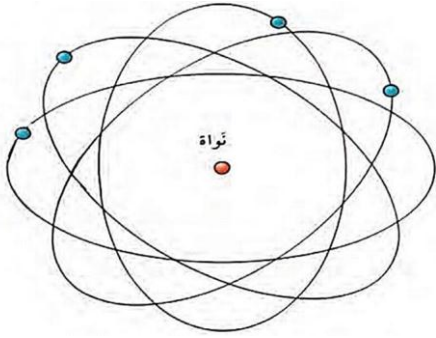
فهرس المحتويات

القطوع المخروطية وأهمية دراستها.....	٣
مراجعة عامة.....	٤
القطوع المخروطية.....	٦
أولاً / القطع المكافئ.....	٨
معادلة القطع المكافئ.....	٨
النماذج القياسية للقطع المكافئ.....	٩
تمارين على القطع المكافئ.....	١١
النوع الأول/ القطع في وضع قياسي.....	١١
معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع.....	١١
صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة.....	١٣
النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي.....	١٥
النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع مكافئ.....	١٩
نشاط (١).....	٢١
ثانياً / القطع الناقص.....	٢٢
معادلة القطع الناقص.....	٢٢
تمارين على القطع الناقص.....	٢٦
النوع الأول/ القطع في وضع قياسي.....	٢٦
معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع.....	٢٦
صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة.....	٢٨
النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي.....	٣٤
النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع ناقص.....	٣٥
نشاط (٢).....	٣٦
ثالثاً / القطع الزائد.....	٣٨
معادلة القطع الزائد.....	٣٩
تمارين على القطع الزائد.....	٤٢

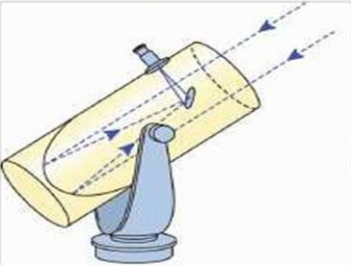
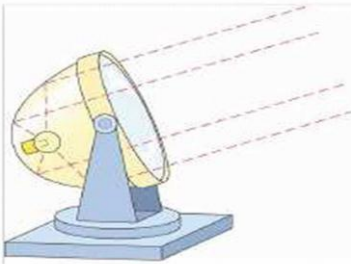
- النوع الأول/ القطع في وضع قياسي ٤٢
- معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع ٤٢
- صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة ٤٤
- النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي ٤٨
- النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع زائد ٤٩
- التعريف العام للقطع باستخدام التخالف المركزي ٥٠
- نشاط (٣) ٥٤

القطع
وع المخروطية

القطوع المخروطية وأهمية دراستها



في الكون والطبيعة من حولنا كثير من الصناعات والهندسة المعمارية تتخذ شكل قطوع مخروطية كما يمكن ملاحظة حركة الكواكب والنجوم حيث أنها تتحرك في مدارات تتخذ أحد أشكال القطوع ، وفي الذرة والإلكترون يلاحظ المختصون بأن الإلكترونات تدور حول النواة في مدارات تشبه قطع ناقص. ومن التطبيقات الأخرى للقطوع المخروطية استخدامها في انتشار الصوت حيث تصنع آلات تكبير الصوت الحديثة بشكل يتخذ أحد أشكال القطوع. وكذلك تستخدم في انتشار الضوء كما في كشافات السيارات، فهو مجسم لقطع مكافئ وضع في بؤرته مصباحاً وعندما يخرج الضوء من هذا المصباح ينعكس على السطح العاكس وبصورة تجعل الضوء منتشر أمام السيارة. وهناك الكثير من التطبيقات وفيما يلي صور لبعض تلك التطبيقات.



تبنى السدود والحواجز المائية على شكل قطوع مخروطية لتحمل قوة دفع الماء وتخفيف قوة الاحتكاك.



جسر مائي على شكل قطع مخروطي



تصنع بعض الآلات الطبية على شكل قطع مخروطي كما في الصورة.



أطباق استقبال الترددات تصنع على شكل قطوع مخروطية .



تبنى بعض الجسور على شكل قطع مخروطي لإعطاء الجسور المقاومة اللازمة لتحمل الحمولات عليه .

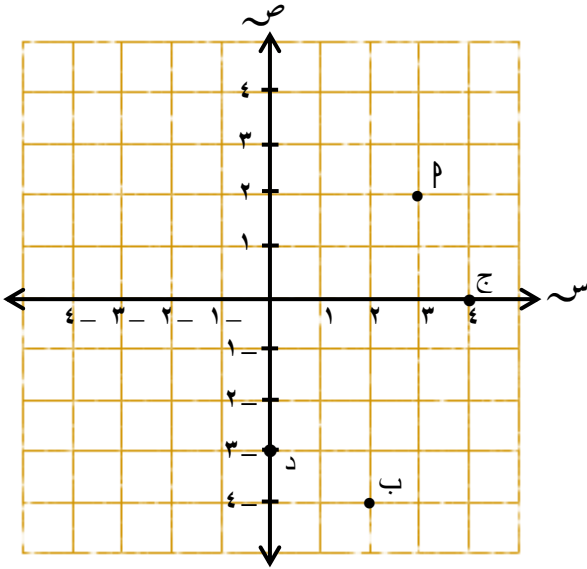


تبنى مداخن المصانع وصوامع الغلال على شكل قطع زائد كما هو ملاحظ.

مراجعة عامة Review

تعتبر هذه الوحدة جزء من موضوعات الهندسة التحليلية والتي تفصل وتصف أشكال نشاهدها من حولنا وتشرحها وتفسرها، وقبل دراسة مواضيع هذه الوحدة على الطالب الإلمام ببعض الأساسيات التي سنوضحها و نقدم أمثلة عليها في بداية شرح دروس الوحدة.

أولاً/ مفاهيم عامة :



❖ مستوى الإحداثيات المتعامدة (المستوى الإحداثي): عبارة عن تقاطع محورين يسمى المحور الأفقي بالمحور السيني والمحور الرأسي بالمحور الصادي ومن تسمياته "المستوى الديكارتي" والشكل المرسوم جانباً يبين ذلك.

ملاحظات على مستوى الإحداثيات المتعامدة :

(١) كل نقطة في المستوى لها إحداثيان سيني وصادي وتسمى بأحد الأحرف الهجائية مثل م ، ب ، ... وتكتب بالشكل: م(س ، ص) .

مثال/ في الشكل المرسوم جانباً إحداثي النقطة

م هو (٣ ، ٢) وتكتب النقطة م مع إحداثيها

بالشكل: م (٣ ، ٢) ، كذلك نلاحظ أن إحداثي ب هو (٢ ، -٤) .

(٢) المحوران الإحداثيان يقسمان المستوى إلى أربعة أرباع .

(٣) أي نقطة تقع على محور السينات إحداثيها الصادي صفر، وأي نقطة تقع على محور الصادات إحداثيها السيني صفر .

مثال/ إحداثي النقطة ج في الشكل المرسوم هو (٤ ، ٠) وإحداثي النقطة د هو (٠ ، -٣)

ثانياً/ قوانين هامة :

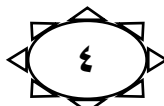
القوانين التالية مهمة و يجب التركيز عليها :

(١) قانون إحداثي منتصف القطعة المستقيمة م ب :

يرمز للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين م (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) بالرمز م ب و يعطى

إحداثي نقطة المنتصف بالقانون:

$$\text{إحداثي منتصف م ب} = \left(\frac{ص_١ + ٢ص_٢}{٢} , \frac{س_١ + ٢س_٢}{٢} \right)$$



(٢) قانون البُعد بين نقطتين :

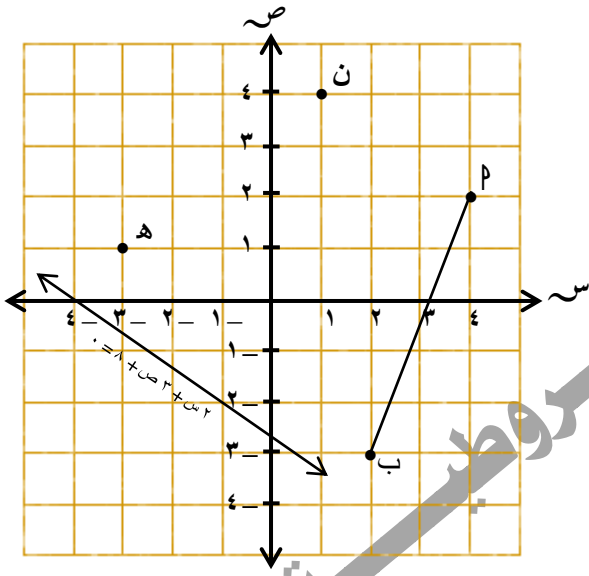
يرمز للبعد بين النقطتين P (س١، ص١) ، B (س٢، ص٢) بالرمز $|P|$ ويعطى بالقانون :

$$|P| = \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$$

(٣) قانون البُعد بين نقطة ومستقيم :

نرمز للبعد بين النقطة P (س١، ص١) والمستقيم l $س + ب ص + ج = ٠$ بالرمز f ، ويمكن إيجاد قيمة f بالقانون التالي :

$$f = \frac{|س١ ب + ص١ ج|}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$$



مثال/ من الشكل المرسوم أوجد ما يلي :

- (١) إحداثي النقطة هـ
- (٢) إحداثي منتصف P
- (٣) $|P|$
- (٤) بُعد النقطة ن عن المستقيم الذي معادلته $٥س + ٣ص - ١٢ = ٠$

الحل

(١) إحداثي هـ هو $(-٣, ١)$

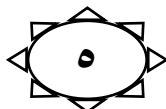
$$(٢) \text{ إحداثي منتصف } P = \left(\frac{٣ + ٢}{٢}, \frac{٢ + (-٣)}{٢} \right) = \left(\frac{٥}{٢}, -\frac{١}{٢} \right)$$

$$(٣) |P| = \sqrt{(٣ - ٢)^2 + (-٣ - ٢)^2} = \sqrt{١ + ٢٥} = \sqrt{٢٦}$$

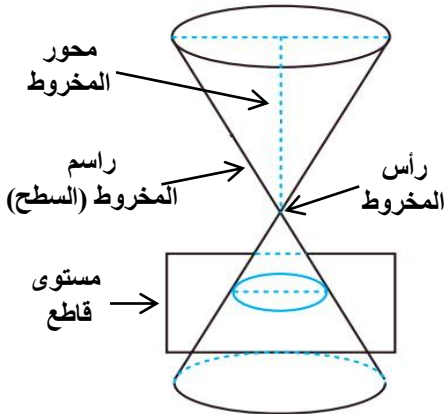
(٤) من معادلة المستقيم: $٥س + ٣ص - ١٢ = ٠$ ، $ب = ٣$ ، $ج = -١٢$

ومن إحداثي النقطة ن : $س = ١$ ، $ص = ٤$

$$\therefore f = \frac{|س١ ب + ص١ ج|}{\sqrt{ب^2 + ج^2}} = \frac{|١ \times ٣ + ٤ \times (-١٢)|}{\sqrt{٣^2 + (-١٢)^2}} = \frac{|٣ - ٤٨|}{\sqrt{٩ + ١٤٤}} = \frac{٤٥}{\sqrt{١٥٣}}$$



القطوع المخروطية Conic Section



مخروط دائري قائم مزدوج

تعريف:

القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس (مخروط دائري قائم مزدوج) والتقاطع يكون مع كليهما أو أحدهما.

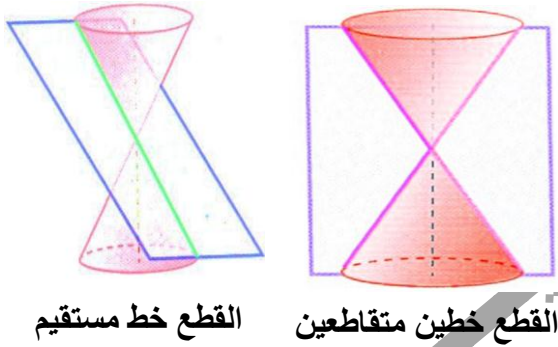
من التعريف يتبين أن سبب تسمية القطوع المخروطية بهذا الاسم وهو أنها ناتجة من تقاطع مستوى (قاطع) مع مخروط دائري قائم مزدوج .

حالات تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج:

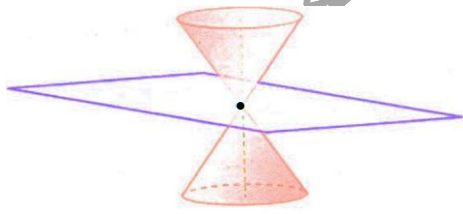
هناك حالتان ناتجتان من تقاطع مستوى مع مخروط مزدوج قائم وفق لموقع نقطة رأس المخروط حيث:

الحالة الأولى / نقطة رأس المخروط المزدوج تقع على المستوى القاطع:

وفي هذه الحالة يتكون لدينا ٤ أشكال (غير حقيقية) هي:

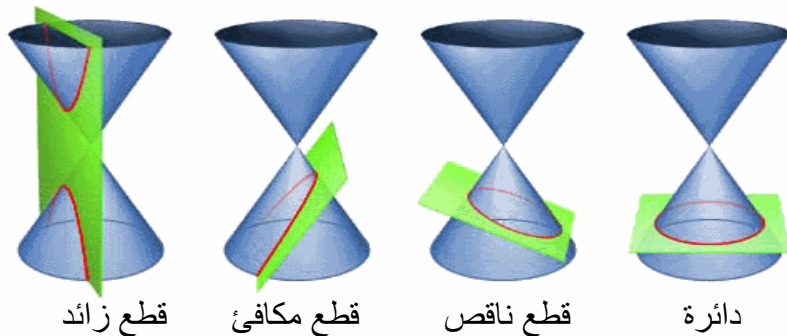


- ١ إذا كان المستوى القاطع يمس سطح المخروط (الراسم) فإن القطع الناتج عبارة عن خط مستقيم.
- ٢ إذا كان المستوى القاطع عمودي على القاعدتين ويمر بمحور المخروط فإن القطع الناتج عبارة عن خطين متقاطعين.



القطع نقطة

- ٣ إذا كان المستوى القاطع عمودي على محور المخروط من نقطة تقاطع الخطين الراسمين (منتصف المحور) فإن القطع الناتج عبارة عن نقطة .
- ٤ هناك حالة شاذة يكون القطع فيها عبارة عن خطين مستقيمين متوازيين. (يترك للطالب البحث في هذه الحالة)



قطع زائد

قطع مكافئ

قطع ناقص

دائرة

الحالة الثانية/ نقطة رأس المخروط

المزدوج ليست على المستوى القاطع:

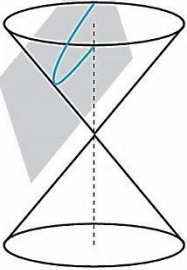
وفي هذه الحالة يتكون لدينا

٤ أشكال (حقيقية)

كما في الشكل المقابل

وفيما يلي توضيح لكل حالة :

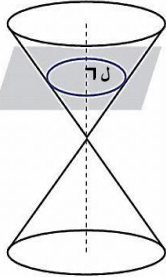
٢) منحنى التقاطع قطعاً مكافئاً:



إذا كان المستوى القاطع موازياً لأحد رواسم المخروط كما في الشكل المقابل

قطع مكافئ
المستوى القاطع موازٍ لأحد رواسم المخروط

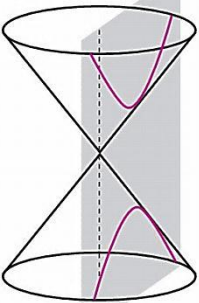
١) منحنى التقاطع دائرة:



إذا كان المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط أي أن قياس زاوية $\theta = 90^\circ$

دائرة
المستوى القاطع عمودي على محور المخروط

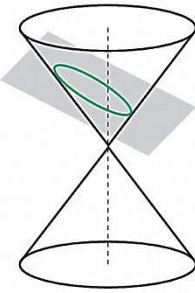
٤) منحنى التقاطع قطعاً زائداً:



عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط ويوضح ذلك الشكل المقابل

قطع زائد
المستوى القاطع موازٍ لمحور المخروط

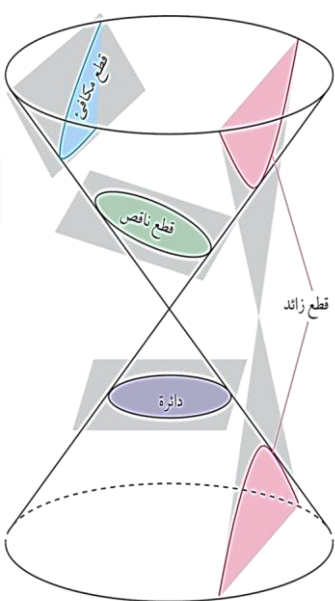
٣) منحنى التقاطع قطعاً ناقصاً:



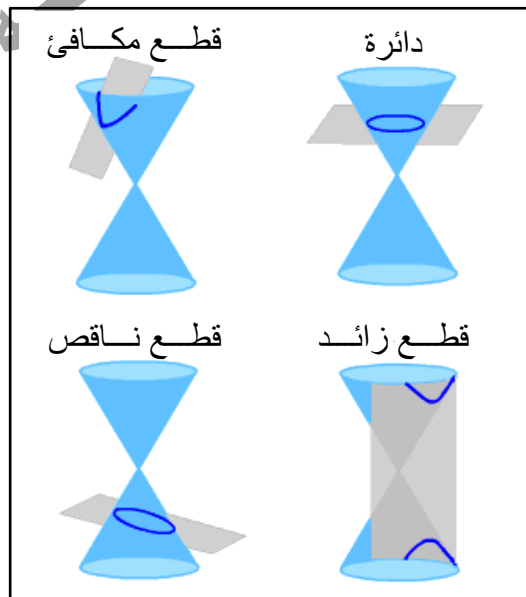
إذا كان المستوى القاطع مائلاً على محور المخروط و لا يوازي أي راسم من رواسم المخروط .

قطع ناقص
المستوى القاطع مائل على المحور وغير موازٍ لأي من رواسم المخروط

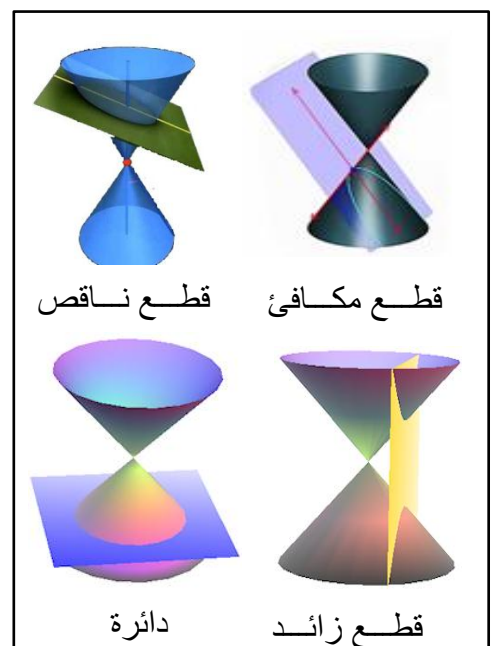
أشكال توضيحية إضافية:



شكل يوضح القطوع المخروطية الحقيقية



توضيح منحنيات القطوع المخروطية

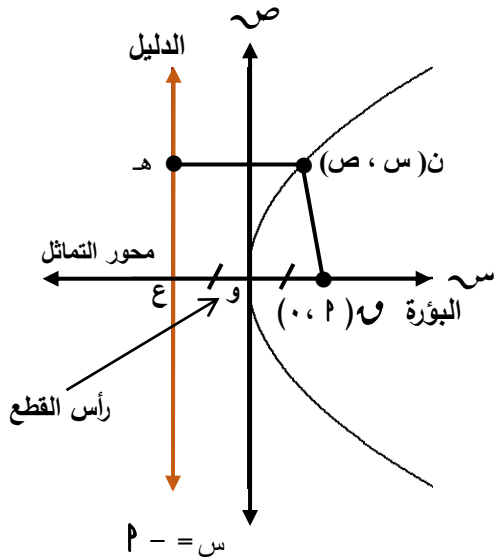


مجسم القطوع المخروطية

أولاً / القطع المكافئ Parabola

تعريف :

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي بُعدها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) يساوي بُعدها عن مستقيم ثابت (يسمى دليل القطع المكافئ).
الشكل المرسوم جانباً عبارة عن قطع مكافئ إحداثي بؤرته $(0, p)$ وواضح أن $|و ن| = |ن ه|$



شكل يوضح القطع المكافئ

ملاحظات :

(1) محور تماثل القطع (محور التناظر): هو المستقيم الذي يمر بالبؤرة وعمودي على الدليل واختصاراً يسمى محور القطع.

(1) رأس القطع (ذروته): هي نقطة تقاطع القطع مع محوره وهي تنصف (تقع في منتصف) المسافة بين البؤرة والدليل.

$$(2) |و ن| = |و ع| = p$$

(3) القطع المكافئ منحنى مفتوح من جهة واحدة بحيث تقع بؤرته داخل القطع ويقع الدليل خارج القطع (أمام الرأس).

معادلة القطع المكافئ:

باستخدام تعريف القطع المكافئ سنقوم باستنتاج معادلة القطع وبالإستعانة بالشكل المرسوم أعلاه يكون:
لتكن $N(s, v) \in$ القطع، و $(0, p)$ البؤرة، ومعادلة الدليل هي $v = -p$ $\iff v = -p + s$
∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $(0, p) =$ بعد النقطة ن عن الدليل $(v = -p + s)$

$$\sqrt{(s-0)^2 + (v-p)^2} = |v + p|$$

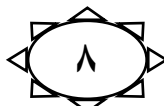
$$\iff \sqrt{s^2 + (v-p)^2} = |v + p|$$

$$s^2 + (v-p)^2 = (v+p)^2$$

$$\iff s^2 + v^2 - 2vp + p^2 = v^2 + 2vp + p^2$$

$$\iff s^2 = 4vp, \quad v < p$$

وتمثل المعادلة $v = \frac{s^2}{4p}$ الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ من النموذج الأول



مثال/ أثبت أن معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته و (0, p) ودليله ص = p ، 0 < p هي :

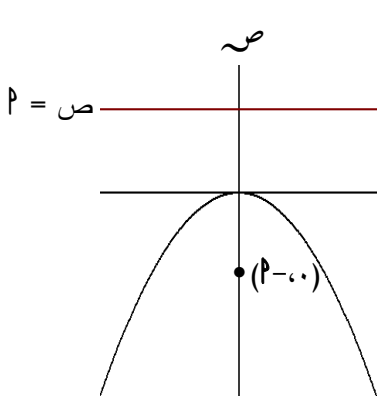
$$س^2 = -p(ص - p)$$

الحل

∴ معادلة الدليل هي ص = p ← ص - p = 0

نفرض أن ن (ص ، س) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة و (0, p) = بعد النقطة ن عن الدليل (ص - p = 0)



$$\frac{|ص - p|}{\sqrt{0 + 1}} = \sqrt{(ص + p)^2 + (0 - س)^2}$$

$$|ص - p| = \sqrt{ص^2 + 2صp + p^2 + س^2} \quad \text{بالتربيع} \quad س$$

$$ص^2 - 2صp + p^2 = ص^2 + 2صp + p^2 + س^2$$

$$ص^2 - 2صp + p^2 - 2صp - p^2 - س^2 = ص^2 + 2صp + p^2 + س^2 - 2صp - p^2 - س^2$$

$$س^2 = -2صp \quad \text{أو} \quad س^2 = -p(ص - p)$$

وتمثل المعادلة $س^2 = -p(ص - p)$ ، الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ من النموذج الرابع

ملاحظة : كل نقطة على القطع تحقق معادلة القطع ولهذا عند إيجاد المعادلة نحن نفترض أي نقطة على القطع .

النماذج القياسية للقطع المكافئ:

يكون القطع في وضع قياسي إذا تحققت إحدى الحالات التالية :

(1) إذا كانت معادلة القطع في وضع نموذجي أي تأخذ أحد الأشكال: $س^2 = p(ص - p)$ ، $س^2 = -p(ص - p)$

، $س^2 = p(ص + p)$ ، $س^2 = -p(ص + p)$

(2) رأس القطع نقطة الأصل وبؤرته على أحد المحورين (الرأس والبؤرة نموذجيان).

(3) رأسه نقطة الأصل ودليله مواز لأحد المحورين.

(4) إذا كانت البؤرة والدليل معاً نموذجيان أي إذا كانت البؤرة (0, p) فإن الدليل $ص = p$ وإذا كانت

البؤرة (0, -p) فإن الدليل $ص = -p$ وإذا كانت البؤرة (p, 0) فإن الدليل $ص = p$ وإذا كانت البؤرة

(-p, 0) فإن الدليل $ص = -p$

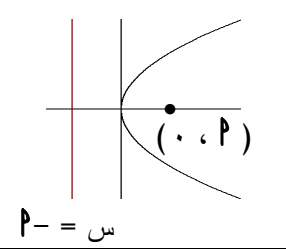
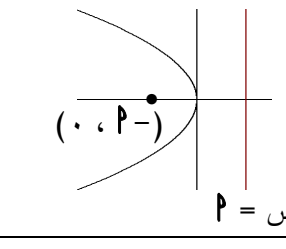
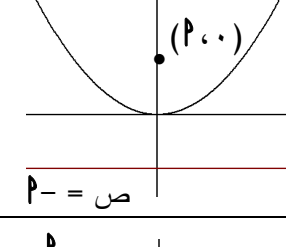
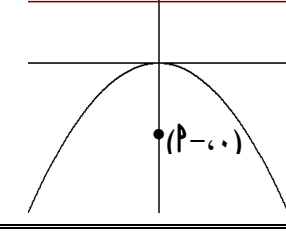
هناك أربعة نماذج قياسية للقطع المكافئ وسنبين فيما يلي صفات النماذج الأربعة ورسم منحنياتها .

صفات القطع المكافئ :

الصفات التي يتم البحث فيها للقطع المكافئ هي :

- (١) إحداثي الرأس (٢) اتجاه فتحة القطع
(٣) إحداثي البؤرة (٤) معادلة الدليل (٥) محور القطع (محور التماثل)

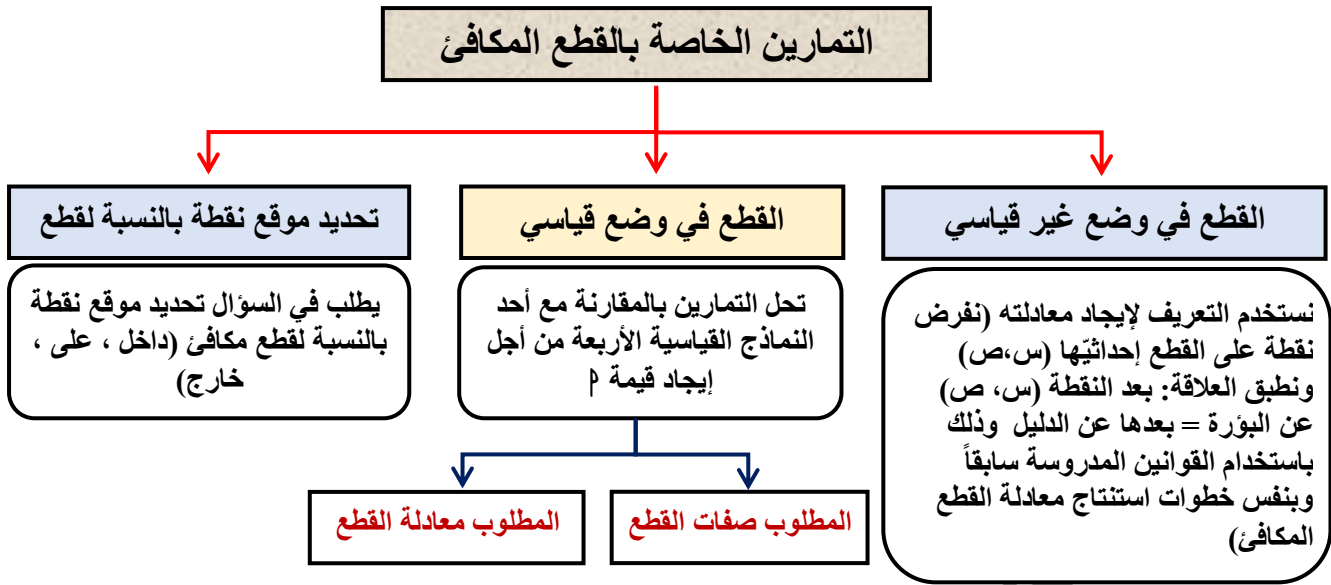
الجدول التالي يبين الصفات السابقة في النماذج الأربعة للقطوع المكافئة

النموذج	معادلة القطع	البؤرة	معادلة الدليل	محور القطع	اتجاه فتحة القطع	رسم القطع
الأول	$ص^2 = ٤پس$ ($٠ < پ$)	$(٠, پ)$	$س = -پ$	السينات الموجب $٠ = ص$	يمين	
الثاني	$ص^2 = -٤پس$ ($٠ < پ$)	$(٠, -پ)$	$س = پ$	السينات السالب $٠ = ص$	يسار	
الثالث	$س^2 = ٤پص$ ($٠ < پ$)	$(پ, ٠)$	$ص = -پ$	الصادات الموجب $٠ = س$	أعلى	
الرابع	$س^2 = -٤پص$ ($٠ < پ$)	$(پ, ٠)$	$ص = پ$	الصادات السالب $٠ = س$	أسفل	

ملاحظات :

- (١) التربيع دائماً يتبع معادلة محور القطع (إذا كان التربيع للمتغير س فإن معادلة محور القطع هي $س = ٠$ أي أن محور القطع هو محور الصادات، وإذا كان التربيع للمتغير ص فإن معادلة محور القطع هي $ص = ٠$ أي أن محور القطع هو محور السينات).
- (٢) في النماذج القياسية رأس القطع نقطة الأصل $(٠, ٠)$

تكون تمارين القطع المكافئ عادةً وفق المخطط التالي:



تذكر أن / في القطع المكافئ:

- ❖ البعد بين البؤرة والدليل = p_2
- ❖ البعد بين البؤرة والرأس = البعد بين الرأس والدليل = p
- ❖ نقطة تقاطع المحور مع القطع هي رأس القطع.

تمارين على القطع المكافئ

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

Ⓜ معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثال/ أوجد إحداثي البؤرة و معادلة الدليل ثم ارسم القطع في كل حالة مما يلي :

(١) إذا كانت معادلة القطع: $ص^2 = ١٢ س$

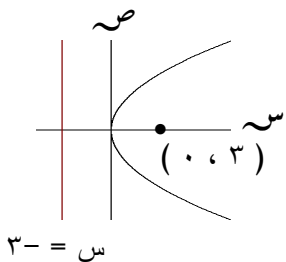
الحل

المعادلة تمثل قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الأول

بالمقارنة بالمعادلة: $ص^2 = ٤ س$ نجد أن: $١٢ = ٤ س$ $\Leftarrow ٣ = س$

صفات القطع: محور القطع السينات الموجب ومعادلته: $ص = ٠$

إحداثي الرأس (٠، ٠) ، إحداثي البؤرة (٠، ٣) ، و معادلة دليبه $ص = -٣$

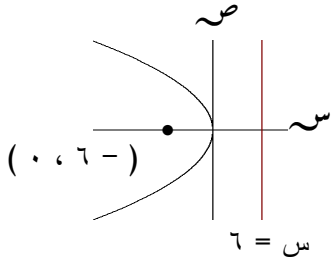


(٢) إذا كانت معادلة القطع: $ص^2 + ٢٤س = ٠$

الحل

$\therefore ص^2 + ٢٤س = ٠$ $\therefore ص^2 = -٢٤س$ \therefore قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الثاني

بالمقارنة بالمعادلة: $ص^2 = -٢٤س$ نجد أن: $٢٤ = ٤٢$ $\Leftarrow ٦ = ٢$



صفات القطع: محور القطع السينات السالب ومعادلته: $ص = ٠$

و رأسه النقطة $(٠, ٠)$ و إحداثيَّ البؤرة $(-٦, ٠)$

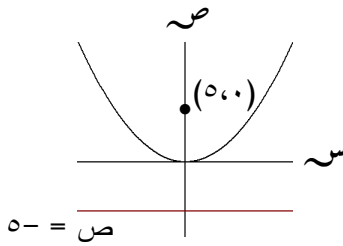
و معادلة دليله $٦ = س$

(٣) إذا كانت معادلة القطع: $ص^3 = ٦٠س$

الحل

$\therefore ص^3 = ٦٠س$ (بالقسمة على ٣) $\Leftarrow ص^2 = ٢٠س$ قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الثالث

بالمقارنة بالمعادلة: $ص^2 = ٢٠س$ نجد أن: $٢٠ = ٤٢$ $\Leftarrow ٥ = ٢$



صفات القطع: محور القطع الصادي الموجب ومعادلته: $س = ٠$

و رأسه النقطة $(٠, ٠)$ و إحداثيَّ البؤرة $(٥, ٠)$

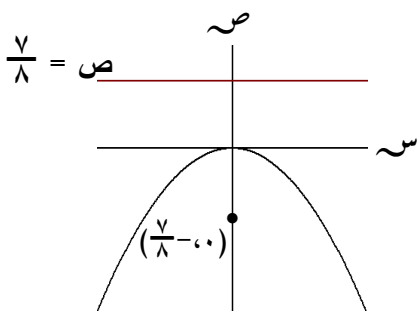
و معادلة دليله $٥ - = ص$

(٤) إذا كانت معادلة القطع: $ص = \frac{٢}{٧}س^2 -$

الحل

$\therefore ص = \frac{٢}{٧}س^2 -$ (بالضرب في $\frac{٧}{٧}$) $\Leftarrow ص = \frac{٢}{٧}س^2 -$ قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الرابع

بالمقارنة بالمعادلة: $ص = \frac{٢}{٧}س^2 -$ نجد أن: $\frac{٢}{٧} = ٤٢$ $\Leftarrow \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٧} = ٢$ $\Leftarrow \frac{١}{٨} = ٢$



صفات القطع: محور القطع الصادي السالب ومعادلته: $س = ٠$

و رأسه النقطة $(٠, ٠)$ و إحداثيَّ البؤرة $(\frac{١}{٨}, ٠)$

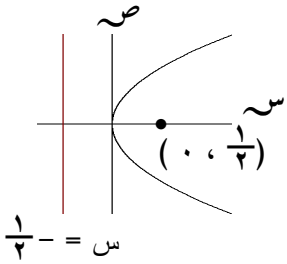
و معادلة دليله $\frac{١}{٨} = ص$

(٥) إذا كانت معادلة القطع: $\frac{س}{ص} = ٢$

الحل

∴ $\frac{س}{ص} = ٢ = ص$ (بضرب طرفين × وسطين) $\Leftarrow ص = ٢ = ٢ ص$ قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الأول

بالمقارنة بالمعادلة: $ص = ٢ = ٢ ص$ نجد أن: $٢ = ٢ = ٢$ $\Leftarrow ٢ = ٢ = ٢$



صفات القطع: محور القطع السينات الموجب ومعادلته: $ص = ٠$

إحداثي الرأس $(٠, ٠)$

إحداثي البؤرة $(٠, \frac{1}{4})$

و معادلة دليبه $س = \frac{1}{4} - ص$

ⓑ صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثال/ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق ما يلي:

(١) الرأس $(٠, ٠)$ والبؤرة $(٩, ٠)$

الحل

∴ الرأس والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على الصادات الموجب ∴ القطع قياسي (محوره الصادات

الموجب) من النموذج الثالث معادلته: $س = ٢ = ٢ ص$ ، بؤرته $(٢, ٠) = (٩, ٠)$ $\Leftarrow ٩ = ٢$

∴ معادلة القطع: $س = ٢ = ٢ ص$ $\Leftarrow ٩ \times ٤ = ٢ ص$ $\Leftarrow ٣٦ = ٢ ص$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

(٢) رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(٠, \frac{1}{4})$

الحل

∴ الرأس والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على السينات السالب ∴ القطع قياسي (محوره السينات

السالب) من النموذج الثاني معادلته: $ص = ٢ = -٢ ص$ ، بؤرته $(٠, -٢) = (٠, -\frac{1}{4})$ $\Leftarrow \frac{1}{4} = ٢$

∴ معادلة القطع: $ص = ٢ = -٢ ص$ $\Leftarrow ٤ \times \frac{1}{4} = -٢ ص$ $\Leftarrow -١ = -٢ ص$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

ملاحظة / من مسميات النقطة $(٠, ٠)$: نقطة الأصل ، مبدأ الإحداثيات ، نقطة تقاطع محور السينات

بمحور الصادات .

(٣) بؤرته $(٠, \frac{3}{4})$ ودليله : $٤س + ٣ = ٠$

الحل

الدليل: $٤س + ٣ = ٠ \iff ٤س = -٣ \iff ٣ - = ٤س$

∴ الدليل والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على السينات الموجب ∴ القطع قياسي (محوره السينات

الموجب) من النموذج الأول معادلته: $ص^٢ = ٤س$ ، بؤرته $(٠, ٤)$ ، $(٠, \frac{3}{4}) = (٠, ٤)$ ∴ $\frac{3}{4} = ٤$

∴ معادلة القطع: $ص^٢ = ٤س$ ∴ $ص^٢ = ٤ \times \frac{3}{4} = ٣$ ∴ $ص = \sqrt{٣}$

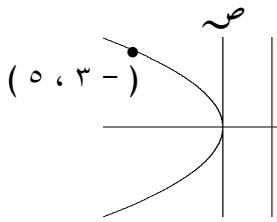
(٤) رأسه مبدأ الإحداثيات و محوره هو المحور السيني و القطع يمر بالنقطة $(-٣, ٥)$

الحل

∴ رأس القطع نقطة الأصل و محوره هو محور السينات ، ∴ النقطة $(-٣, ٥)$ تقع في الربع الثاني يتبين أن:

القطع في وضع قياسي (محوره السينات السالب) من النموذج الثاني معادلته: $ص^٢ = -٤س$

∴ القطع يمر بالنقطة $(-٣, ٥)$ ∴ النقطة تحقق معادلة القطع



نعوض في معادلة القطع عن $س = -٣$ ، $٥ = ٤س$ لإيجاد قيمة ٤ فيكون: $٥ = -٤س$

$$\frac{٢٥}{١٢} = ٤ \iff ١٢ \times ٤ = ٢٥ \iff -٣ \times ٤ = -٢٥$$

∴ بؤرته $(٠, \frac{٢٥}{١٢})$ ودليله $س = \frac{٢٥}{١٢}$ ، معادلته: $ص^٢ = -٤س$ ∴ $ص^٢ = -٤ \times \frac{٢٥}{١٢} = -\frac{٢٥}{٣}$

(٥) فتحة القطع باتجاه السينات الموجب و بؤرته $(٠, ٤)$ ودليله يبعد عن بؤرته بمقدار ٨ وحدات طولية

الحل

∴ البعد بين البؤرة والدليل $٢ = ٨$ ∴ $٢ = ٨$ ∴ $٤ = ٢$

∴ فتحة القطع باتجاه السينات الموجب ، ∴ البؤرة $(٠, ٤)$ ،

∴ القطع في وضع قياسي (محوره السينات الموجب) من النموذج الأول معادلته: $ص^٢ = ٤س$

∴ معادلة القطع: $ص^٢ = ٤س$ ∴ $ص^٢ = ٤ \times ٤ = ١٦$ ∴ $ص = ٤$

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق ما يلي:

$$(1) \text{ بؤرتة } (-1, 2) \text{ ودليله } س = 2 \text{ ص} - 3$$

الحل

∴ البؤرة والدليل غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

نفرض أن: ن(س، ص) ∈ القطع ∴ البؤرة (-1، 2) والدليل: س = 2ص - 3 = 0

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (-1، 2) = بعد النقطة ن عن الدليل (س = 2ص - 3 = 0)

$$\frac{|س - 2ص + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} = \sqrt{(ص + 1)^2 + (س - 2)^2}$$

$$\text{بالتربيع} \frac{|س - 2ص + 3|^2}{5} = \sqrt{ص^2 + 2ص + 1 + س^2 - 4س + 4}$$

$$س^2 + 2ص^2 + 4ص + 5 = \frac{1}{5}(س^2 + 4ص^2 + 9 - 4س + 6ص - 12ص)$$

بالضرب × 5 و تجميع الحدود المتشابهة تكون معادلة القطع بالشكل:

$$∴ \text{ معادلة القطع: } 4س^2 + 2ص^2 + 4س + 32ص + 16 = 0$$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

$$(2) \text{ بؤرتة } (3, 1) \text{ ودليله } س = 1$$

الحل

∴ البؤرة والدليل غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

∴ البؤرة (3، 1) والدليل: س = 1 وبفرض: ن(س، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (3، 1) = بعد النقطة ن عن الدليل (س = 1 = 0)

$$\frac{|س + 1|}{\sqrt{0^2 + 1}} = \sqrt{(ص + 1)^2 + (س - 3)^2}$$

$$\text{بالتربيع} |س + 1| = \sqrt{ص^2 + 2ص + 9 + س^2 - 6س + 9}$$

$$\cancel{س} + 1 = \sqrt{\cancel{ص}^2 + 2\cancel{ص} + 9 + \cancel{س}^2 - 6\cancel{س} + 9}$$

$$∴ \text{ معادلة القطع: } ص^2 + 2ص - 8س + 9 = 0$$

إيجاد إحداثي الرأس أو معادلة الدليل في الوضع غير القياسي :

إذا كان القطع المكافئ في وضع غير قياسي فإنه:

① لإيجاد إحداثي نقطة رأس القطع إذا لم تكن معلومة نتبع ما يلي:

نحدد البؤرة و نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع فيكون الرأس في منتصف المسافة ما بينهما (بين البؤرة والدليل) أي نستخدم قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة المذكور سابقاً في بداية الوحدة

② إذا كانت البؤرة معلومة وإحداثي الرأس معلوم والمطلوب نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع:

نفرض أن النقطة هي (م ، هـ) ثم نستخدم قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة لإيجاد قيمة م ، هـ .

③ إذا لم تكن معادلة الدليل معلومة:

✓ نوجد نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع بالطريقة الواردة في فقرة ٢ السابقة.

✓ نوجد ميل محور القطع حيث: $m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ وذلك بدلالة البؤرة ورأس القطع (نقطتين تقع على المحور)

✓ ميل الدليل = $\frac{1}{\text{ميل محور القطع}}$ (لأنهما متعامدين)

✓ تكون معادلة الدليل بالشكل: $\frac{1}{m} = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

حيث: م: ميل محور القطع ، (س_١ ، ص_١) هي نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع.

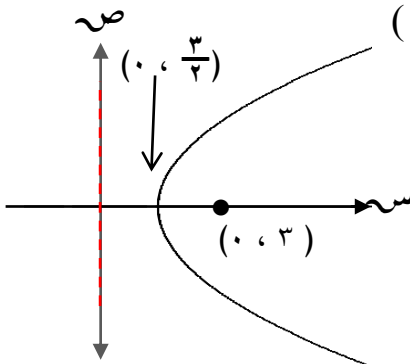
(٣) بؤرته (٠ ، ٣) ودليله س = ٠ ثم أوجد رأسه وارسمه .

الحل

∴ البؤرة والدليل غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

∴ البؤرة (٠ ، ٣) والدليل : س = ٠ وبفرض أن: ن (س ، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (٠ ، ٣) = بعد النقطة ن عن الدليل (س = ٠)



الدليل: س = ٠

$$\frac{|س|}{\sqrt{٠ + ١}} = \sqrt{(٠ - ص)^2 + (٣ - س)^2}$$

$$|س| = \sqrt{ص^2 + ٩ + س^2 - ٦س}$$

$$س^2 = ص^2 + ٩ + س^2 - ٦س$$

$$\text{∴ معادلة القطع : } ص^2 = ٦س - ٩$$

لإيجاد إحداثي رأس القطع: ∴ الدليل س = ٠ ∴ نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع هي (٠، ٠)
∴ الرأس يقع في منتصف المسافة بين البؤرة (٠، ٣) ونقطة تقاطع الدليل مع المحور (٠، ٠)

$$\therefore \text{إحداثي الرأس} = \left(\frac{٠+٠}{٢}, \frac{٠+٣}{٢} \right) = \left(٠, \frac{٣}{٢} \right)$$

حل آخر لإيجاد نقطة الرأس: ∴ محور القطع هو محور السينات ∴ نقطة تقاطع منحنى القطع مع محور السينات هي رأس القطع ولإيجاد نقطة تقاطع منحنى القطع مع محور السينات نضع ص = ٠ فيكون:

$$٦س - ٩ = ٠ \iff ٩ = ٦س \iff ٣ = ٣س \iff ١ = س \iff \frac{٣}{٣} = س \therefore \text{الرأس} \left(٠, \frac{٣}{٢} \right)$$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

(٤) رأسه (-٣، ٢) و بؤرته (-٣، ٤) وارسمه.

الحل

∴ الرأس والبؤرة غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

أولاً / نوجد معادلة الدليل: بفرض أن نقطة تقاطع محور القطع مع الدليل هي (م، هـ)

∴ الرأس نقطة المنتصف بين البؤرة ونقطة التقاطع المفروضة فإن:

$$\frac{٢-٤}{٢} = \frac{٣-٥}{٢} \iff ٢-٤ = ٣-٥ \iff ٢-٤ = ٣-٥ \iff ٢-٤ = ٣-٥$$

∴ النقطة (٣، ٠) تقع على الدليل ولإيجاد ميل محور القطع يكون:

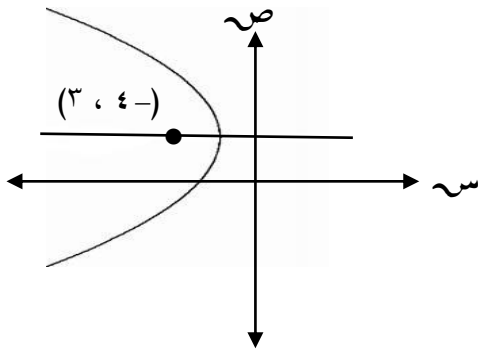
$$\text{ميل المحور} = \frac{٣-٣}{٤+٢} = ٠ \text{ (محور القطع موازي للسينات)}$$

∴ الدليل منطبق على محور الصادات (لأن محور القطع والدليل متعامدان) معادلة الدليل هي: س = ٠

ثانياً نستخدم التعريف

نفرض أن: ن (س، ص) ∈ القطع ∴ البؤرة (-٣، ٤) والدليل: س = ٠

∴ بُعد النقطة ن عن البؤرة (-٣، ٤) = بُعد النقطة ن عن الدليل (س = ٠)



$$\frac{|س|}{\sqrt{٠+٢١}} = \sqrt{(٣-ص)^٢ + (٤+س)^٢}$$

$$|س| = \sqrt{٩+ص٦-٢ص+١٦+س٨+٢س} \text{ بالتربيع}$$

$$س^٢ = ٩+ص٦-٢ص+١٦+س٨+٢س$$

$$\therefore \text{معادلة القطع: } ص^٢ - ٢ص + ٨س + ٢٥ = ٠$$

(٥) رأسه (١، ٢) وبؤرته (١، -١) وارسمه.

الحل

: الرأس والبؤرة غير نموذجيان .: القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

أولاً / نوجد معادلة الدليل: بفرض أن نقطة تقاطع محور القطع مع الدليل هي (م ، هـ)

، : الرأس نقطة المنتصف بين البؤرة ونقطة التقاطع المفروضة فإن :

$$٢ = \frac{م+١}{٢} \iff م = ٣ ، \quad ١ = \frac{هـ+١}{٢} \iff هـ = ٣$$

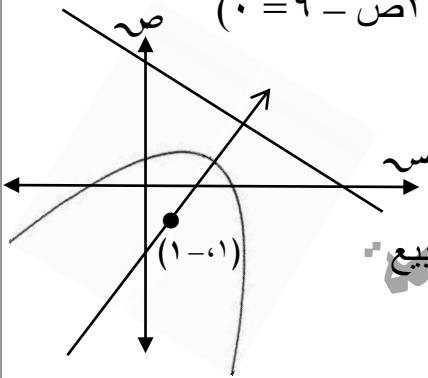
.: النقطة (٣، ٣) تقع على الدليل ولإيجاد ميل محور القطع يكون:

$$\text{ميل المحور} = \frac{٣-١}{٣-١} = ٢ \iff \text{ميل الدليل} = -\frac{١}{٢} \quad (\text{لأن محور القطع والدليل متعامدان})$$

: الدليل يمر بالنقطة (٣، ٣) وميله = $-\frac{١}{٢}$

$$\text{.: معادلة الدليل هي: } \frac{ص-٣}{٣-س} = -\frac{١}{٢} \iff ٢ص-٦ = ٣-س \iff ٣+س = ٢ص-٩ \iff ٠ = ٩-٢ص+س$$

ثانياً نستخدم التعريف

نفرض أن: ن (س، ص) \in القطع ، : البؤرة (١، -١) والدليل : $٠ = ٩ - ٢ص + س$: بعد النقطة ن عن البؤرة (١، -١) = بعد النقطة ن عن الدليل (س، ص) $(٠ = ٩ - ٢ص + س)$ 

$$\frac{|٩-٢ص+س|}{\sqrt{٢^٢+١^٢}} = \sqrt{(١-ص)^٢+(١-س)^٢}$$

$$\text{بالتربيع} \quad \frac{|٩-٢ص+س|^٢}{٥} = \sqrt{١+ص^٢+٢ص+١+س^٢-٢س}$$

$$\text{س}^٢ - ٢س + ٢ص + ٢ص^٢ + ٢ = \frac{(٩-٢ص+س)^٢}{٥} \quad \text{بالضرب } \times ٥ \text{ وفك القوس}$$

$$٥(س^٢ - ٢س + ٢ص + ٢ص^٢ + ٢) = (٩-٢ص+س)^٢ = ٨١ + ٤ص^٢ + ٤س^٢ + ٤صس - ٣٦ص - ١٨س$$

وبترتيب الحدود وجمع الحدود المتشابهة

$$\text{.: معادلة القطع : } ٤س^٢ + ٤ص^٢ - ٤صس + ٨س + ٤ص - ٧١ = ٠$$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

$$\text{قاعدة: } (س + ص + ع)^٢ = س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢صس + ٢صع + ٢صع$$

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع مكافئ

لإثبات وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع المكافئ أو داخله أو خارجه فإن:

- (١) إذا كان بعدها عن بؤرة القطع = بعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع على القطع المكافئ .
- (٢) إذا كان بعدها عن بؤرة القطع < بعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع خارج القطع المكافئ.
- (٣) إذا كان بعدها عن بؤرة القطع > بعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع داخل القطع المكافئ.

مثال/ أثبت أن النقطة (٢ ، ٢) تقع داخل القطع المكافئ الذي معادلته: ص^٢ = ١٢ س

الحل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الأول معادلته: ص^٢ = ٤ پ س
أولاً / نوجد البؤرة والدليل: ∴ المعادلة ص^٢ = ١٢ س بالمقارنة ١٢ = ٤ پ ← ٣ = پ

∴ البؤرة (٠، ٣) = (٠، پ) ، الدليل: س- = پ- ← س- = ٣-

ثانياً / نوجد بُعد النقطة (٢ ، ٢) عن البؤرة (٠، ٣) وبعدها عن الدليل ونقارن بينهما كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{بُعد النقطة عن البؤرة} &= \sqrt{(٢-٠)^2 + (٢-٣)^2} = \sqrt{٢^2 + (-١)^2} = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥} \\ \text{بُعد النقطة عن الدليل} &= \frac{|٥|}{١\sqrt{١٢}} = \frac{|٣ + ٢ \times \text{صفر} + ٢ \times ١|}{\sqrt{٠ + ١٢}} \end{aligned}$$

∴ $\sqrt{٥} > ٥$ ← البُعد عن البؤرة > البُعد عن الدليل ∴ النقطة تقع داخل القطع المكافئ. هـ.ط.ث

معرفة موقع نقطة ن(پ ، ب) بالنسبة لقطع مكافئ معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفيرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون معامل س^٢ أو ص^٢ موجب ثم نعوض بـ س = پ ، ص = ب فإذا كان:

- (١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع المكافئ
- (٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع المكافئ
- (٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع خارج منحنى القطع المكافئ

مثال (١) أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطوع التالية :

$$(١) \text{ ص } ٩ = ٢ \text{ س}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $\text{ص } ٩ - ٢ \text{ س} = ٠$ ، ونعوض بـ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ٣$ فيكون:

$$٣ - ٢ \times ١ = ٩ - ٩ = ٠ \therefore \text{النقطة تقع على القطع (تحقق معادلة القطع)}$$

$$(٢) \text{ س } ٢ = ٢ \text{ ص}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $\text{س } ٢ - ٢ \text{ ص} = ٠$ ، ونعوض بـ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ٣$ فيكون:

$$٢ - ٢ \times ٣ = ٢ - ٦ = -٤ < ٠ \therefore \text{النقطة تقع داخل القطع}$$

$$(٣) \text{ س } ٦ = ١ + \frac{١}{٣} \text{ ص}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $\text{س } ٦ = \frac{١}{٣} \text{ ص} + ١$ ، ونعوض بـ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ٣$ فيكون:

$$٦ = \frac{١}{٣} \times ٣ + ١ = ١ + ١ = ٢ < ٦ \therefore \text{النقطة تقع خارج القطع}$$

مثال (٢) إذا كان القطع المكافئ $\text{س } ٢ = ٢ \text{ ص}$ يمر بالنقطة (٢ ، ٣) فأوجد قيمة p ؟

الحل

\therefore القطع يمر بالنقطة (٢ ، ٣) \therefore النقطة تحقق معادلة القطع

نعوض عن $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٣$ في معادلة القطع فيكون:

$$٣ - ٢ = ٢ \times ٣ - ٤ \iff ١ = ٦ - ٤ \iff ١ = ٢$$

⌚ ... تمرين التحدي ... ⌚

(١) إذا كان القطع المخروطي $\text{ص } ٥ = ٢ \text{ س}$ يمر بالنقطة (هـ ، ٥) فأوجد قيمة هـ

(٢) أوجد معادلة المحل الهندسي لكل النقاط التي بعدها عن (٤ ، ٠) أقل من بعدها عن

المستقيم $\text{س} = ٦$ بمقدار واحد



نشاط (١)

(٨) أكمل الفراغ في كل فقرة مما يلي بما يجعلها صحيحة:

- ① المعادلة $س^٢ + ٢٠ ص = ٠$ تمثل قطع مكافئ بؤرته هي
- ② المعادلة $س - ٤ ص^٢ = ٠$ تمثل قطع مكافئ بؤرته هي
- ③ إذا كانت معادلة الدليل هي $ص = ١٢٥,٠$ ورأسه $(٠, ٠)$ فإن معادلة القطع المكافئ هي
- ④ القطع المكافئ $س^٢ = ص$ دليله هو وبؤرته
- ⑤ المعادلة $س^٢ = ك ص - ٣$ ص تمثل معادلة قطع مكافئ عندما $ك =$
- ⑥ موقع النقطة $(٣, ٥)$ بالنسبة للقطع $ص^٢ + ٢ س = ٠$
- ⑦ معادلة دليل القطع المكافئ $ص^٢ - ٤ س = ٠$ هي
- ⑧ البعد بين البؤرة والدليل في القطع المكافئ $ص^٢ = ٨ س$ يساوي
- ⑨ إذا كان بُعد نقطة على قطع مكافئ عن بؤرته ٤ وحدات فإن بُعد هذه النقطة عن الدليل =
- ⑩ محور تناظر القطع المكافئ $ص^٢ = ٢٤ س$ هو
- ⑪ في القطع المكافئ إذا كان بُعد نقطة عن البؤرة أكبر من بعدها عن الدليل فإنها تقع
- ⑫ إذا كان القطع المكافئ $ص^٢ = ك س$ يمر بالنقطة $(٢, -٦)$ فإن قيمة $ك =$

(ب) استنتج صفات القطع الذي معادلته:

$$① \quad ٣ ص^٢ - ٥ س = س \quad ② \quad \sqrt{٤ ص^٢ + ٢ س} = ٤ \quad ③ \quad \sqrt{٨ س} = ٢ ص$$

(ج) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي فيه:

- ① البؤرة $(٠, ٦)$ ومعادلة دليله $س = ٦$ (الاجابة: $ص^٢ - ٢٤ س = ٠$)
- ② البؤرة $(٠, \frac{1}{4})$ ومعادلة دليله $ص = -\frac{1}{4}$ (الاجابة: $س = ٢ ص$)
- ③ الرأس نقطة الأصل ومعادلة دليله $س + ١٥ = ٠$ (الاجابة: $ص^٢ = ١٢ س$)
- ④ الرأس نقطة الاصل ومتماثل بالنسبة لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(٢, -٣)$ (الاجابة: $س^٢ = \frac{4}{3} ص$)
- ⑤ البؤرة $(٢, ٢)$ ومعادلة دليله $س = ٨$ (الاجابة: $ص^٢ - ٤ ص + ١٢ = ٥٦ س = ٠$)
- ⑥ البؤرة $(١, ٢)$ ومعادلة دليله $ص = -٧$ (الاجابة: $س^٢ - ٤ س - ١٦ = ٤٤ س = ٠$)
- ⑦ الرأس $(٥, ١)$ و البؤرة $(٥, ٣)$ (الاجابة: $ص^٢ - ١٠ ص + ١٦ = ٩ س = ٠$)

(د) أوجد معادلة المحل الهندسي لجميع النقاط التي تتحرك بحيث يكون بعدها عن النقطة $(٣, ٢)$

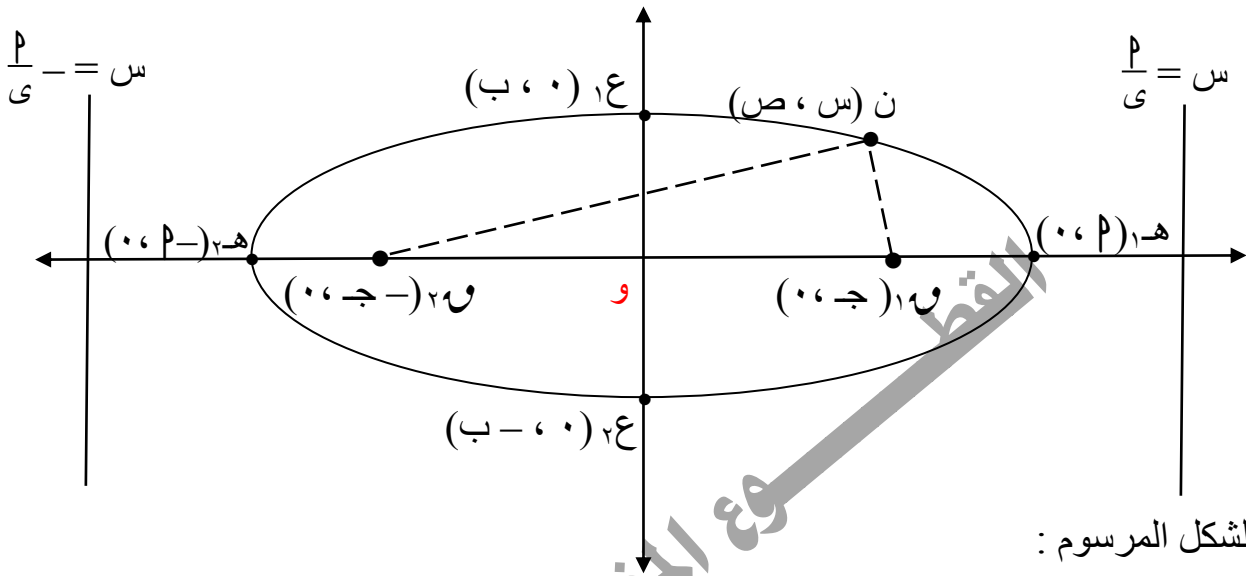
يساوي بعدها عن المستقيم $س = -٤$ (الاجابة: $ص^٢ - ٤ ص - ١٤ س - ٣ = ٠$)



ثانياً / القطع الناقص Ellipse

تعريف :

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) في المستوى يساوي طوياً ثابتاً (طول المحور الأكبر ومقداره $2a$).



من الشكل المرسوم :

- ✓ تسمى النقطتان: $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **البؤرتين** والبعد بينهما يسمى **البعد البؤري** ويساوي $2c$
- ✓ تسمى القطعة المستقيمة a الواصلة بين الرأسين **بالمحور الأكبر** للقطع الناقص وطوله $2a$
- ✓ تسمى القطعة المستقيمة b **بالمحور الأصغر** للقطع الناقص وطوله $2b$
- ✓ تسمى النقطتان $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **رأسى القطع** (وهما نقطتا تقاطع القطع بالمحور الأكبر)
- ✓ النقطة O تسمى **مركز القطع** الناقص وهي نقطة تقاطع محوري القطع الناقص.
- ✓ يسمى المستقيم الذي معادلته $\frac{x}{a} = \frac{p}{c}$ دليل القطع المرافق للبؤرة $(c, 0)$ ، ويسمى المستقيم الذي

معادلته $\frac{x}{a} = -\frac{p}{c}$ دليل القطع المرافق للبؤرة $(-c, 0)$ ويسمى المستقيمان **دليلي القطع الناقص**

ملاحظات :

- ① البعد بين مركز القطع و أحد رأسيه $= p$ ، و البعد بين مركز القطع و إحدى بؤرتيه $= c$
- ② البعد بين الرأسين $<$ البعد بين البؤرتين

التخالف المركزي : يسمى العدد $\frac{c}{a}$ التخالف المركزي للقطع ويرمز له بالرمز e أي أن :

$e = \frac{c}{a}$ ويمكن في القطع الناقص إيجاده أيضاً بالقانون : $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ويكون : $e < 1$

معادلة القطع الناقص:

سنستخدم تعريف القطع الناقص لاستنتاج معادلة القطع وبالإستعانة بالشكل المرسوم في الصفحة السابقة

يكون: لتكن $(س، ص)$ \in القطع ، وبؤرتيه $١٠(ج، ٠)$ ، $٢٠(٠، ج)$

∴ بعد النقطة ١٠ عن البؤرة $١٠(ج، ٠)$ + بعد النقطة ٢٠ عن البؤرة $٢٠(٠، ج)$ = ٢٢

$$\therefore ٢٢ = |١٠٠| + |٢٠٠|$$

$$٢٢ = \sqrt{٢(٠-ص) + ٢(ج+س)} + \sqrt{٢(٠-ص) + ٢(ج-س)} \leftarrow$$

$$\sqrt{٢(٠-ص) + ٢(ج+س)} - ٢٢ = \sqrt{٢(٠-ص) + ٢(ج-س)} \leftarrow$$

$$٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) - ٢٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) - ٢٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) - ٢٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$\leftarrow ٢٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$\sqrt{٢(٠-ص) + ٢(ج+س)} + ٢٢ = \sqrt{٢(٠-ص) + ٢(ج-س)} \leftarrow$$

$$٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$\leftarrow ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$\leftarrow ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$\leftarrow ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$\leftarrow ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$\leftarrow ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س)) = ٢(٢(٠-ص) + ٢(ج+س) + ٢(٠-ص) + ٢(ج-س))$$

$$١ = \frac{٢ص}{٢ب} + \frac{٢س}{٢٢} \quad ، \quad ١ < ٢$$

وتمثل المعادلة $١ = \frac{٢ص}{٢ب} + \frac{٢س}{٢٢}$ ، الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص من النموذج الأول

✧ نقاط تقاطع القطع الناقص في الصورة القياسية مع المحاور:

✓ مع محور السينات نضع $v = 0$ فيكون: $1 = \frac{v^2}{p^2}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftrightarrow s^2 = p^2$

∴ $s = \pm p$ أي أن النقطتين $(0, p)$ ، $(0, -p)$ واقعتين على القطع الناقص وهي نقاط تقاطع القطع الناقص في الوضع القياسي مع محور السينات.

✓ مع محور الصادات نضع $s = 0$ فيكون: $1 = \frac{v^2}{b^2}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftrightarrow v^2 = b^2$

∴ $v = \pm b$ أي أن النقطتين $(b, 0)$ ، $(-b, 0)$ واقعتين على القطع الناقص وهي نقاط تقاطع القطع الناقص في الوضع القياسي مع محور الصادات.

✧ تأثير التخالف المركزي على القطع الناقص (مهم) :

نعلم أن التخالف المركزي $e = \frac{c}{p}$ وعليه فإن: إذا كان $e = 0$ فإن:

$$\frac{c}{p} = 0 \Leftrightarrow c = 0, \therefore p = b^2 + c^2 = b^2 \Leftrightarrow p = b \text{ وهذا يعني أن}$$

القطع الناقص يتحول إلى دائرة نصف قطرها $p = b$ ، ويكون موقع البؤرتين في مركز الدائرة لأن $c = 0$ وتصبح المعادلة بالشكل: $s^2 + v^2 = p^2$ (لذا تعتبر الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص)

✧ تذكر أن/ في القطع الناقص:

- ① دائماً p ، b ، c قيم موجبة لأنها أطوال حيث أن: طول المحور الأكبر $= 2p$ ، طول المحور الأصغر $= 2b$ ، البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) $= 2c$
- ② دائماً $p > b$ ، $p > c$ أي أن: p هي أكبر الأطوال في القطع الناقص.
- ③ دائماً قيمة الطرف الأيسر لمعادلة القطع الناقص موجب واحد والطرف الأيمن عبارة عن مجموع مربعين.
- ④ $p^2 = b^2 + c^2$ (قانون مهم وخاص بالقطع الناقص فقط)
- ⑤ البؤرتان $(\pm c, 0) = (\pm p, 0)$ (يمكن إيجاد إحداثيات البؤرتان بمعرفة قيم p ، c)
- ⑥ معاملي s^2 ، v^2 قيم موجبة دائماً وفي مقامهما القيمة الأكبر هي قيمة p^2
- ⑦ محور السينات محور تماثل (تناظر) للقطع وكذلك محور الصادات محور تماثل (تناظر) للقطع حيث: إذا استبدلنا s بـ $-s$ أو v بـ $-v$ في المعادلة القياسية للقطع فإن المعادلة لا تتغير.
- ⑧ القطع الناقص متماثل (متناظر) أيضاً حول نقطة الأصل $(0, 0)$ أي متماثل حول مركزه.

يوجد نموذجان تياسيان للقطع الناقص فيما يلي توضيح لهما :

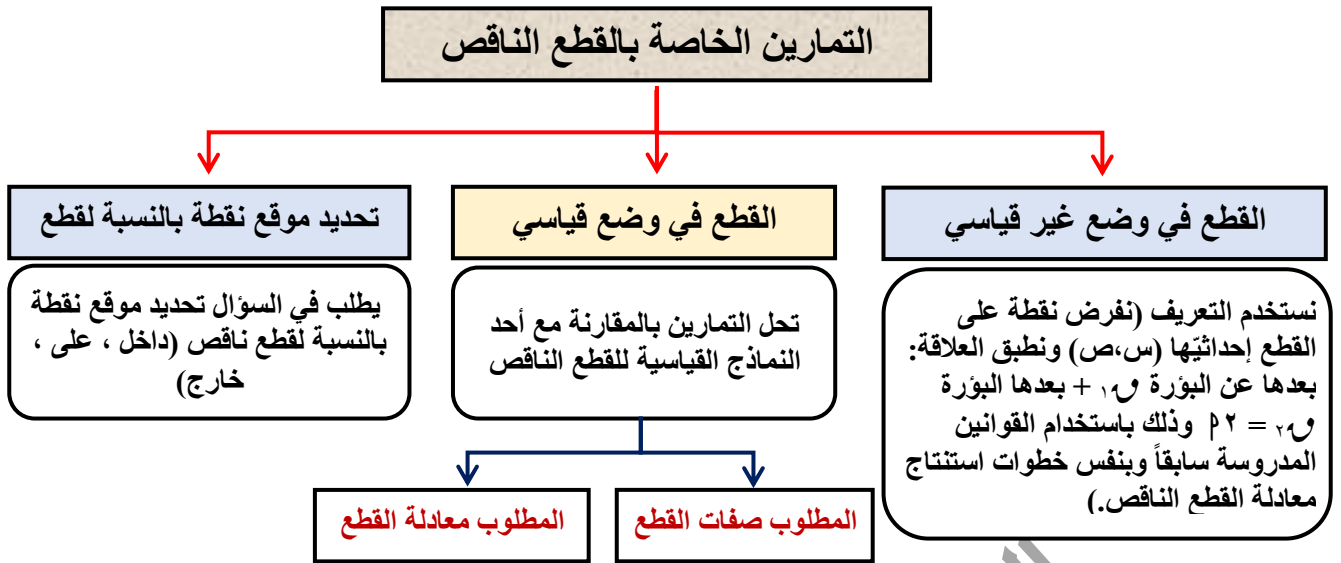
الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ، $b < a$ مقام $x^2 < 2$ مقام y^2	$1 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}$ ، $b < a$ مقام $x^2 < 2$ مقام y^2
المركز	(0,0)	(0,0)
المحور الأكبر يقع على	السينات	الصادات
الرأسان	(0, ±a)	(±a, 0)
البؤرتان	(0, ±c)	(±c, 0)
معادلة الدليلان	$\frac{x}{c} \pm \frac{y}{a} = 1$ أو $\frac{x}{c} \pm \frac{y}{b} = 1$	$\frac{x}{c} \pm \frac{y}{b} = 1$ أو $\frac{x}{c} \pm \frac{y}{a} = 1$
التخالف المركزي	$e = \frac{c}{a} > 1$ أو $e = \frac{c}{b} > 1$	$e = \frac{c}{b} > 1$ أو $e = \frac{c}{a} > 1$
طول المحور الأكبر	2a (ويقع على محور السينات)	2b (ويقع على محور الصادات)
طول المحور الأصغر	2b (ويقع على محور الصادات)	2a (ويقع على محور السينات)
البعد البؤري	c	
الرسم		

ملاحظة هامة: يمكن إيجاد معادلتى الدليلين في النموذج الأول بإحدى الصيغتين:

$$\frac{x}{c} \pm \frac{y}{a} = 1 \text{ أو } \frac{x}{c} \pm \frac{y}{b} = 1 \text{ ، وفي النموذج الثاني بإحدى الصيغتين: } \frac{x}{c} \pm \frac{y}{b} = 1 \text{ أو } \frac{x}{c} \pm \frac{y}{a} = 1$$

وذلك حسب معطيات السؤال..

تكون تمارين القطع ناقص عادةً وفق المخطط التالي:



تمارين على القطع الناقص

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

④ معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثال/ أوجد صفات القطع الناقص الذي معادلته :

$$(1) \quad ١٦س^2 + ٢٥ص^2 = ٤٠٠ \quad \text{ثم ارسمه}$$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية وذلك بالقسمة على ٤٠٠ فيكون :

$$١ = \frac{١٦س^2}{٤٠٠} + \frac{٢٥ص^2}{٤٠٠} \quad \leftarrow \quad ١ = \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٢٥}$$

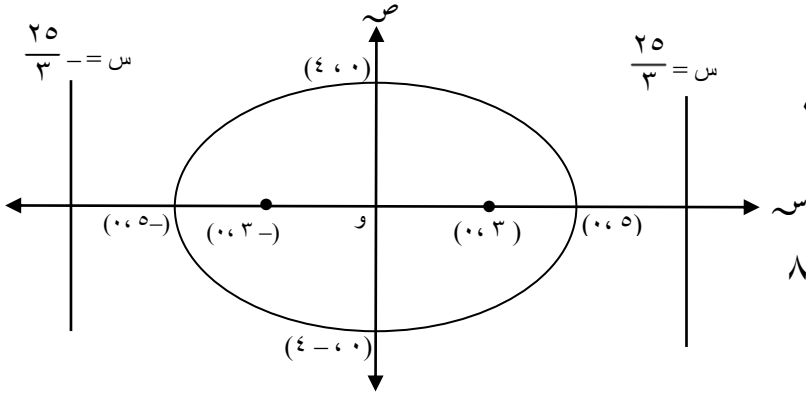
∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول ومعادلته : $١ = \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٢٥}$

∴ $٢٥ = ٢٥ \cdot ١ \leftarrow ٢٥ = ٢٥ \cdot ١$ ، $١٦ = ١٦ \cdot ١ \leftarrow ١٦ = ١٦ \cdot ١$ ، $٥ = ٥ \cdot ١ \leftarrow ٥ = ٥ \cdot ١$ ، $٤ = ٤ \cdot ١ \leftarrow ٤ = ٤ \cdot ١$

$٢٥ = ٢٥ \cdot ١ \leftarrow ٢٥ = ٢٥ \cdot ١$ ، $١٦ = ١٦ \cdot ١ \leftarrow ١٦ = ١٦ \cdot ١$ ، $٥ = ٥ \cdot ١ \leftarrow ٥ = ٥ \cdot ١$ ، $٤ = ٤ \cdot ١ \leftarrow ٤ = ٤ \cdot ١$

إحداثيات الرأسين $(٠, ٥) = (٠, ٥)$ ، $(٠, ٣) = (٠, ٣)$

إحداثيات البؤرتين $(٠, ٣) = (٠, ٣)$ ، $(٠, ٥) = (٠, ٥)$



الدليلان : $\frac{x^2}{16} \pm \frac{y^2}{25} = 1$

طول المحور الأكبر = $2a = 2 \times 4 = 8$

طول المحور الأصغر = $2b = 2 \times 3 = 6$

البعد البؤري = $2c = 2 \times 3 = 6$

التخالف المركزي : $\frac{c}{a} = \frac{3}{4} = 0.75 < 1$

لاحظ أن: $1 > 0.75$

(2) $0 = 288 - (16x^2 + 9y^2)$ ثم ارسمه

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية وذلك بترتيب الحدود والقسمة على 2 فيكون :

$$1 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \iff 1 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \iff 144 = 9x^2 + 16y^2$$

∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني ومعادلته : $1 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$

∴ $16 = 2a^2 \iff a^2 = 8 \iff a = 2\sqrt{2}$ ، $9 = 2b^2 \iff b^2 = 4.5 \iff b = \sqrt{4.5}$ ، $3 = 2c^2 \iff c^2 = 1.5 \iff c = \sqrt{1.5}$

∴ $16 = 9 + 7 = 2a^2 \iff a^2 = 5.5 \iff a = \sqrt{5.5}$ ، $9 = 4 + 5 = 2b^2 \iff b^2 = 2.5 \iff b = \sqrt{2.5}$ ، $7 = 2c^2 \iff c^2 = 3.5 \iff c = \sqrt{3.5}$

إحداثيات الرأسين $(\pm 4, 0) = (\pm a, 0)$

إحداثيات البؤرتين $(\pm \sqrt{7}, 0) = (\pm c, 0)$

الدليلان : $\frac{x^2}{16} \pm \frac{y^2}{9} = 1$

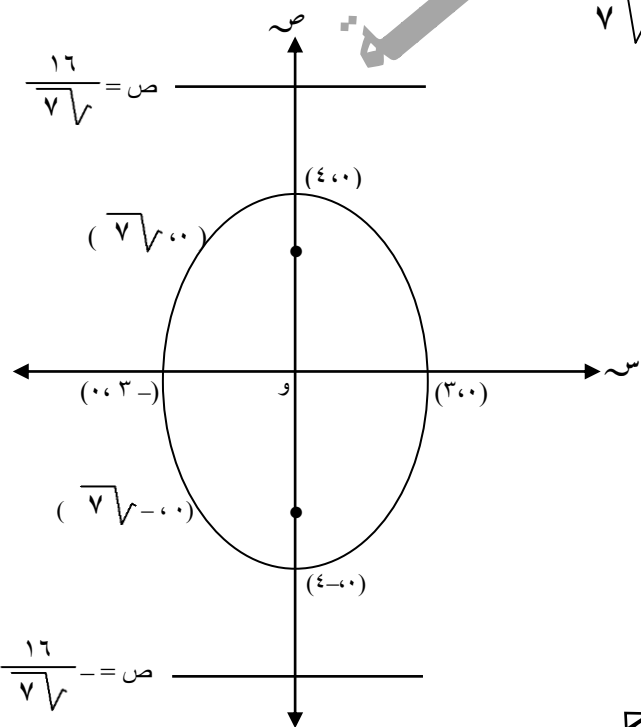
طول المحور الأكبر = $2a = 2 \times 4 = 8$

طول المحور الأصغر = $2b = 2 \times 3 = 6$

البعد البؤري = $2c = 2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

التخالف المركزي : $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.66 < 1$

لاحظ أن: $1 > 0.66$



٢) صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثال/ أوجد معادلة القطع الناقص الذي يحقق ما يلي:

(١) طولي محوريه ٦ ، ١٠ وحدات ومركزه (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات .

الحل

∴ المحور الأكبر منطبق على محور السينات ، والمركز (٠،٠) ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

$$\begin{aligned} \text{طول المحور الأكبر} = 2a &= 10 \iff a = 5 \iff \boxed{25 = a^2} \\ \text{طول المحور الأصغر} = 2b &= 6 \iff b = 3 \iff \boxed{9 = b^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$$

(٢) المحور الأكبر منطبق على السينات وطوله ١٤ وحدات ، و البعد البؤري يساوي ١٠ وحدات ومركز القطع نقطة الأصل

الحل

∴ المحور الأكبر منطبق على محور السينات ، والمركز نقطة الأصل ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

$$\begin{aligned} \text{طول المحور الأكبر} = 2a &= 14 \iff a = 7 \iff \boxed{49 = a^2} \\ \text{البعد البؤري} = c &= 10 \iff c^2 = 100 \\ \text{المعادلة} &: \boxed{49 = a^2} \iff 25 + b^2 = 49 \iff \boxed{24 = b^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24}$$

(٣) الرأسان (٠ ، ٦ ±) ، والبؤرتان (٠ ، ٧ ±)

الحل

∴ الرأسين والبؤرتان في وضع نمونجي وتقع على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

$$\begin{aligned} \text{الرأسان} &: (0, 6 \pm) = (0, a \pm) \iff a = 6 \iff \boxed{36 = a^2} \\ \text{والبؤرتان} &: (0, 7 \pm) = (0, c \pm) \iff c = 7 \iff \boxed{49 = c^2} \\ \text{المعادلة} &: \boxed{36 = a^2} \iff 7 + b^2 = 36 \iff \boxed{29 = b^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{36}$$



(٤) الرأسان $(\frac{3}{4} \pm, 0)$ ، وطول محوره الأصغر $\frac{2}{3}$

الحل

∴ الرأسين نموذجيان، ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\frac{9}{16} = \frac{2}{p} \iff \frac{3}{4} = p \iff (\frac{3}{4} \pm, 0) = (p \pm, 0)$$

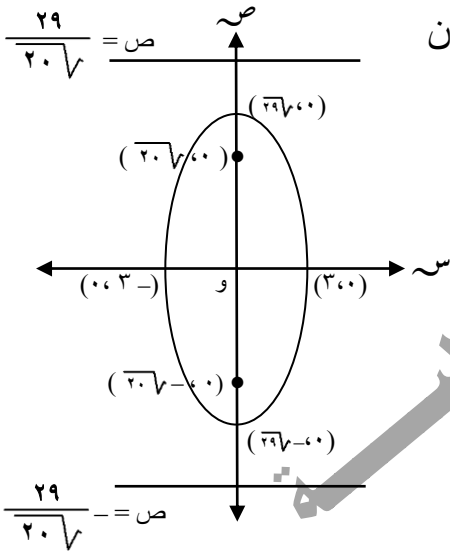
$$\frac{1}{9} = \frac{2}{b} \iff \frac{1}{3} = b \iff \frac{2}{3} = b \iff \text{∴ طول المحور الأصغر} = 2b$$

$$\text{∴ معادلة القطع هي: } 1 = \frac{ص^2}{\frac{9}{16}} + \frac{س^2}{\frac{1}{9}} \iff \text{المعادلة هي: } 1 = \frac{ص^2}{9} + 9س^2$$

(٥) منحنى القطع يقطع المحور الأصغر عند $(0, 3 \pm)$ ، والبؤرتان $(\pm 20\sqrt{2}, 0)$ ثم أرسمه

الحل

∴ البؤرتين نموذجيتان، وتقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني



منحنى القطع في النموذج الثاني يقطع محور السينات عند النقطتان

$(0, 3 \pm)$ وبالمقارنة:

$$\frac{9}{b^2} = \frac{2}{p} \iff 3 = b$$

$$\text{البؤرتان } (20\sqrt{2} \pm, 0) = (ج \pm, 0)$$

$$\text{∴ } 20\sqrt{2} = ج \iff 20 = ج$$

$$\frac{29}{p} = \frac{2}{b^2} \iff 20 + 9 = \frac{2}{b^2} \iff \frac{2}{b^2} + \frac{2}{ج^2} = \frac{2}{p}$$

$$\text{∴ معادلة القطع هي: } 1 = \frac{ص^2}{29} + \frac{س^2}{9}$$

(٦) دليلاه : $ص = 12 \pm$ ، والبؤرتان $(0 \pm, 0)$

الحل

∴ البؤرتين نموذجيتان، وتقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\text{البؤرتان } (0 \pm, 0) = (ج \pm, 0) \iff 0 = ج \iff 25 = ج^2$$

$$\text{الدليلان : } 12 = \frac{2}{p} \iff 12 = \frac{2}{ج} \iff \frac{2}{ج} \pm = 12 \iff \frac{2}{ج} = 12 \iff 12 = \frac{2}{ج} \iff 60 = \frac{2}{b^2}$$

$$\frac{35}{p} = \frac{2}{b^2} \iff 25 + \frac{2}{b^2} = \frac{2}{b^2} \iff 25 + \frac{2}{ب^2} = 60 \iff \frac{2}{ب^2} = 35 \iff 35 = \frac{2}{ب^2}$$

$$\text{∴ معادلة القطع هي: } 1 = \frac{ص^2}{60} + \frac{س^2}{35}$$

(٧) البورتان $(٣ \pm, ٠)$ ، وطول محوره الأكبر يساوي ضعف طول محوره الأصغر .

الحل

∴ البورتان نموذجيتان، وتقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\text{البورتان } (٣ \pm, ٠) = (ج \pm, ٠) \iff ج = ٣ \iff ج = ٣ \iff ج = ٣$$

∴ طول المحور الأكبر = ضعف طول المحور الأصغر (معطى في السؤال)

$$\therefore ٣ = ٢ \times ج \iff ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢}$$

$$\iff ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢} \iff ج = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{معادلة القطع هي: } ١ = \frac{ص^٢}{١٢} + \frac{س^٢}{٣}$$

(٨) تخالفه المركزي $١ = \frac{١}{٤}$ ، ودليلاه : $س = ٨ \pm$ ، ومركز القطع نقطة الأصل .

الحل

∴ الدليلان نموذجيان ويقعان على محور السينات، ومركز القطع نقطة الأصل ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

$$\text{التخالف المركزي: } ١ = \frac{١}{٤} \iff ١ = \frac{١}{٤} \iff ١ = \frac{١}{٤} \iff ١ = \frac{١}{٤}$$

$$\text{الدليلان: } س = ٨ \pm \iff س = ٨ \iff س = ٨ \iff س = ٨$$

$$\therefore س = ٨ \iff س = ٨ \iff س = ٨ \iff س = ٨$$

$$\therefore س = ٨ \iff س = ٨ \iff س = ٨ \iff س = ٨$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } ١ = \frac{ص^٢}{١٢} + \frac{س^٢}{١٦}$$

⌚ ... سؤال التحدي ... ⌚

قطع مكافئ معادلته : $س^٢ = ٢٤ ص$ أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع

المكافئ ورأسه نقطة الأصل ومجموع طولي محوريه = ٣٦ ؟ (الإجابة: $١ = \frac{ص^٢}{٦٤} + \frac{س^٢}{١٠٠}$)



(٩) البورتان $(\pm 3, 0)$ ، والقطع يمر بالنقطة $(4, 1)$ ؟

الحل

∴ البورتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

معادلته: $1 = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{b}$ ∴ البورتان $(\pm 3, 0) = (\pm 3, 0)$ $\Leftrightarrow 3 = \frac{b}{3} \Leftrightarrow 9 = b$

$$\therefore 9 = b + \frac{a^2}{b} \Leftrightarrow 9 + \frac{a^2}{9} = p \Leftrightarrow 9 - p = \frac{a^2}{9}$$

∴ القطع يمر بالنقطة $(4, 1)$ فتتحقق معادلته، نعوض عن $s = 4$ ، $v = 1$ ، $b = 9 - p$ فيكون:

$$1 = \frac{1}{9 - p} + \frac{16}{p} \quad \text{بالضرب} \times [(9 - p)p] \Leftrightarrow [(9 - p)p] = p + 144 - 16p \Leftrightarrow (9 - p)p = p + 144 - 16p$$

$$0 = (18 - p)(8 - p) \Leftrightarrow 0 = 144 + 26p - p^2 \Leftrightarrow p^2 - 26p - 144 = 0$$

$$\text{إما } 8 - p = 0 \Leftrightarrow p = 8 \text{ مرفوضة لأن } p > 8$$

$$\text{أو } 18 - p = 0 \Leftrightarrow p = 18 \text{ مقبولة} \quad \therefore 18 = p$$

$$\therefore 9 - p = b \quad \therefore 9 - 18 = b \quad \Leftrightarrow b = -9$$

$$\therefore \text{معادلة القطع هي: } 1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18}$$

***** * * * * * ***** * * * * * ***** * * * * * *****

(١٠) مركز القطع $(0, 0)$ ، والقطع يمر بالنقطتين $(3, 4)$ ، $(-1, 4)$ ومحوراه محوري الاحداثيات

الحل

∴ مركز القطع نقطة الأصل $(0, 0)$ ومحوراه محور الاحداثيات ∴ القطع في وضع قياسي وبالتالي

$$\text{سنفرض معادلته بالشكل: } 1 = \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n}$$

∴ القطع يمر بالنقطة $(4, 3)$ نعوض عن $s = 4$ ، $v = 3$ فيكون :

$$1 = \frac{9}{m} + \frac{16}{n} \quad (1) \dots\dots\dots$$

∴ القطع يمر بالنقطة (- 1 ، 4) نعوض عن س = - 1 ، ص = 4 فيكون :
 (2) $1 = \frac{16}{2م} + \frac{1}{2ن}$ بالضرب × 16 يكون :
 (3) $16 = \frac{256}{2م} + \frac{16}{2ن}$ بطرح (3) من (1) يكون :

$$1 = \frac{9}{2م} + \frac{16}{2ن}$$

$$- \quad 16 = \frac{256}{2م} + \frac{16}{2ن}$$

$$\frac{247}{15} = \frac{256}{2م} - \frac{9}{2م}$$

(بالضرب × 2م) $15 - 9 = 256 - 9 \Rightarrow 2م \cdot 15 - 2م \cdot 9 = 256 - 9$

نعوض في معادلة (2) عن قيمة 2م فيكون :

$$\frac{240}{247} - 1 = \frac{1}{2ن} \Leftrightarrow 1 = \frac{240}{247} + \frac{1}{2ن} \Leftrightarrow 1 = \frac{16}{\frac{247}{15}} + \frac{1}{2ن}$$

$$\frac{247}{15} = \frac{1}{2ن} \Leftrightarrow \frac{7}{247} = \frac{1}{2ن}$$

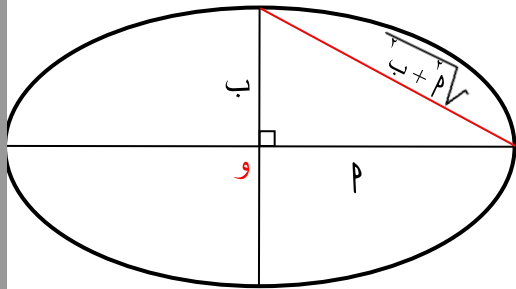
معادلة القطع هي : $1 = \frac{ص}{\frac{247}{15}} + \frac{س}{\frac{247}{7}}$ ويمكن كتابتها بالشكل : $1 = \frac{ص \cdot 15}{247} + \frac{س \cdot 7}{247}$

أو بالشكل : $247 = ص \cdot 15 + س \cdot 7$ لاحظ أن القطع من النموذج الأول لأن : $\frac{247}{15} < \frac{247}{7}$

***** * * * * ***** * * * * ***** * * * * ***** * * * * *****

البُعد بين طرفي (نهايتي) المحور الأكبر والأصغر

بالاعتماد على الشكل المرسوم جانباً يمكن إيجاد البُعد بين طرفي (نهايتي) المحور الأكبر والمحمور



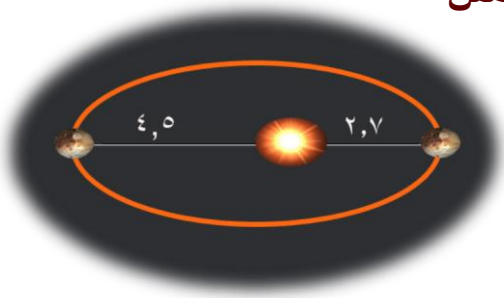
الأصغر في القطع الناقص بالقانون: $\sqrt{ب + ١٢} = \sqrt{ب} + \sqrt{١٢}$

مثال/ إذا كان طول المحور الأكبر و المحور الأصغر في قطع ناقص يساوي ١٢ ، ٥ على الترتيب أوجد البُعد بين طرفيهما

الحل

$$\sqrt{ب + ١٢} = \sqrt{ب} + \sqrt{١٢} = \sqrt{٥ + ١٢} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$$

مثال (١١) يدور كوكب بلوتو على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه فإذا علم أن أصغر بُعد وأكبر بُعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون كوكب بلوتو عند رأسي القطع وكانت أصغر مسافة ٢,٧ بليون ميل تقريباً وأكبر مسافة ٤,٥ بليون ميل تقريباً أوجد التخالف المركزي لمدار كوكب بلوتو؟



الحل

$$4,5 + 2,7 = 2p \iff 2p = \text{أكبر بُعد} + \text{أصغر بُعد}$$

$$3,6 = p \iff 7,2 = 2p \therefore$$

$$p - \text{بُعد الشمس عن المركز} = \text{ج} \iff \text{ج} = \text{أكبر بُعد} - p$$

$$0,9 = \text{ج} \iff 3,6 - 4,5 = \text{ج} \iff$$

$$\frac{0,9}{3,6} = \text{ي} \iff \frac{\text{ج}}{p} = \text{ي} = \text{التخالف المركزي}$$

$$\frac{1}{4} = \text{ي} \iff \frac{9}{36} = \text{ي} \iff$$

***** * * * ***** * * * ***** * * * ***** * * * *****

مثال (١٢) بُنيَ جسر مقوس على شكل نصف قطع ناقص قاعدته أفقيه فإذا كان طول قاعدته ٣٠ م وأقصى ارتفاع للجسر ١٠ م أوجد ارتفاع الجسر على بُعد ٦ م من مركز القاعدة



الحل

$$\therefore \text{الجسر أفقي} \therefore \text{يتبع النموذج القياسي الأول معادلته: } 1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{p^2}$$

$$225 = p^2 \iff 15 = p \iff 30 = 2p \therefore$$

$$100 = b^2 \iff 10 = b \therefore$$

$$\therefore \text{معادلة القطع: } 1 = \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{225}$$

$$\therefore (6, \text{ص}) \text{ تقع على القطع}$$

$$\frac{18900}{225} = \text{ص}^2 \iff \frac{189}{225} = \frac{\text{ص}^2}{100} \iff \frac{36}{225} - 1 = \frac{\text{ص}^2}{100} \iff 1 = \frac{\text{ص}^2}{100} + \frac{36}{225} \therefore$$

$$\iff \text{ص} = \sqrt{\frac{18900}{225}} \approx 9,17 \text{ أي أن الارتفاع المطلوب يساوي تقريباً } 9,17$$

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(0, 0)$ ، $(0, 3)$ ، إذا كان طول محوره الأكبر يساوي 6 ؟

الحل

القطع في وضع غير قياسي لأن البؤرتين غير نموذجيتين و سنستخدم تعريف القطع الناقص لاستنتاج

معادلة القطع : لتكن (s, v) \in القطع

\therefore بعد النقطة $(0, 0)$ عن البؤرة $(0, 3)$ + بعد النقطة $(0, 3)$ عن البؤرة $(0, 0)$ = 6

$$6 = \sqrt{(0-s)^2 + (0-v)^2} + \sqrt{(0-s)^2 + (3-v)^2}$$

$$\leftarrow \sqrt{(0-s)^2 + (0-v)^2} - 6 = \sqrt{(0-s)^2 + (3-v)^2}$$

$$s^2 - 2s\sqrt{(0-s)^2 + (0-v)^2} + v^2 - 12 = s^2 + 9 + 6v - 2s\sqrt{(0-s)^2 + (3-v)^2}$$

$$\leftarrow s^2 - 2s\sqrt{(0-s)^2 + (0-v)^2} + v^2 - 12 = s^2 + 9 + 6v - 2s\sqrt{(0-s)^2 + (3-v)^2}$$

$$\leftarrow -2s\sqrt{(0-s)^2 + (0-v)^2} + v^2 - 12 = 9 + 6v - 2s\sqrt{(0-s)^2 + (3-v)^2}$$

$$\leftarrow -2s\sqrt{(0-s)^2 + (0-v)^2} + v^2 - 12 = 27 - 6v - 2s\sqrt{(0-s)^2 + (3-v)^2}$$

$$2s\sqrt{(0-s)^2 + (0-v)^2} = 9 + 6v - v^2 + 12 \quad \leftarrow \text{بالتربيع}$$

$$\leftarrow 4s^2((0-s)^2 + (0-v)^2) = 81 + 36v + 4s^2 - 12v^2 - 12v + 4v^3$$

$$\leftarrow 4s^2(0 - 2s + s^2 + 0 - v + v^2) = 81 + 36v + 4s^2 - 12v^2 - 12v + 4v^3$$

$$\leftarrow 4s^2(-2s - v + s^2 + v^2) = 81 + 36v + 4s^2 - 12v^2 - 12v + 4v^3$$

$$\boxed{0 = 81 - 36v - 4s^2 + 12v^2 + 4v^3} \quad \text{(المعادلة المطلوبة)}$$

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع ناقص

لإثبات وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع الناقص أو داخله أو خارجه فإن:

- (١) إذا كان بعدها عن ١٠ + بعدها عن $٢٠ = ٢٢$ فإن النقطة تقع على القطع الناقص .
- (٢) إذا كان بعدها عن ١٠ + بعدها عن $٢٠ < ٢٢$ فإن النقطة تقع خارج القطع الناقص .
- (٣) إذا كان بعدها عن ١٠ + بعدها عن $٢٠ > ٢٢$ فإن النقطة تقع داخل القطع الناقص .

مثال/ أثبت أن النقطة (٤ ، ٠) تقع خارج القطع الناقص الذي معادلته: $١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{٢٥}$

الحل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الاول ، $٢٥ = ٢٠$ ، $٩ = ٢٠$ أولاً / نوجد إحداثيات البؤرتين:

$$\therefore ٢٠ = ٢٠ + ٩ = ٢٩ \leftarrow ٢٠ = ٢٠ \leftarrow ٩ = ٩ \leftarrow ٤ = ٤$$

∴ البؤرتان $١٠(٠، ٤)$ ، $٢٠(٠، -٤)$

ثانياً / نوجد مجموع بُعدي النقطة (٤ ، ٠) عن البؤرتين $١٠(٠، ٤)$ ، $٢٠(٠، -٤)$ كما يلي:

$$\sqrt{١٦+١٦}\sqrt{١} + \sqrt{١٦+١٦}\sqrt{١} = \sqrt{(٠-٤)^2+(٤+٠)^2}\sqrt{١} + \sqrt{(٠-٤)^2+(٤-٠)^2}\sqrt{١}$$

$$\therefore \text{مجموع البُعدين} = \sqrt{٣٢}\sqrt{٢} + \sqrt{٣٢}\sqrt{٢} = \sqrt{٣٢}\sqrt{٢} \times ٢ = ٢\sqrt{٣٢} = ٢\sqrt{١٦} = ٨\sqrt{٢}$$

∴ $٢٥ = ٢٠ \leftarrow ٥ = ٢٠ \leftarrow ١٠ = ٢٢$ نقارن بين مجموع البُعدين وقيمة ٢٢ نلاحظ:

$$٨\sqrt{٢} < ١٠ \leftarrow \text{مجموع البُعدين} < ٢٢ \therefore \text{النقطة تقع خارج القطع الناقص. هـ.ط.ث}$$

لمعرفة موقع نقطة ن(م ، ن) بالنسبة لقطع ناقص معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون معامل $س^٢$ و $ص^٢$ موجب ثم نعوض بـ $س = م$ ، $ص = ن$ فإذا كان:

- (١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع الناقص
- (٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الناقص
- (٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع خارج منحنى القطع الناقص

مثال/ أين تقع النقطة (٣ ، ١) بالنسبة للقطوع التالية :

$$(١) \quad ١ = ٢س٢ + ٤ص٢$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $٢س٢ + ٤ص٢ = ١$ ، ونعوض عن $س = ١$ ، $ص = ٣$ فيكون:

$$٠ < ٣٧ = ١ - ٣٦ + ٢ = ١ - ٣ \times ٤ + ٢ \times ١$$

$$(٢) \quad ٢س٣ = ٥٠ - ٢ص٢$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $٢س٣ + ٢ص٢ = ٥٠$ ، نعوض عن $س = ١$ ، $ص = ٣$ فيكون:

$$٠ > ٢٩ = ٥٠ - ١٨ + ٣ = ٥٠ - ٢ \times ٣ + ٢ \times ١$$

$$(٣) \quad ١ = \frac{٢ص١٢}{٢٢٥} + \frac{٢س١٢}{٢٥}$$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $١ = \frac{٢ص١٢}{٢٢٥} + \frac{٢س١٢}{٢٥}$ ، نعوض عن $س = ١$ ، $ص = ٣$ فيكون:

$$٠ = ١ - ١ = ١ - \frac{٢٥}{٢٥} = ١ - \frac{١}{٢٥} + \frac{٢٤}{٢٥} = ١ - \frac{٩}{٢٢٥} + \frac{١ \times ٢٤}{٢٥}$$

⌚ ... سؤال التحدي ... ⌚

① إذا كان البعد البؤري لقطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر فأوجد

التخالف المركزي للقطع. **(الإجابة: $٢\sqrt{\frac{٢}{١٧}}$)**

② أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(٠ ، ٤ \pm)$ ومساحته ٢π سم^٢ علماً بأن مساحته تُعطى

بالعلاقة التالية: **مساحة القطع الناقص = πb** ب **(الإجابة: $١ = \frac{٢ص١٢}{٩} + \frac{٢س١٢}{١٦}$)**

نشاط (٢)

(٨) أكمل الفراغ بما يناسب :

- ① طول المحور الأكبر للقطع الناقص $9س^2 + 16ص^2 = 1$ يساوي
- ② الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $1 = \frac{ص^2}{25} + \frac{س^2}{9}$ يساوي
- ③ معادلتنا الدليلين للقطع: $3س^2 + 2ص^2 = 2$ هما:
- ④ في القطع الذي معادلته $ص^2 + م س^2 = 4$ إذا كانت قيمة $م = 1$ فإن $ص =$
- ⑤ قطع ناقص طولاً محوريه ٨ ، ١٠ فإن البعد بين بؤرتيه = و البعد بين طرفي محوريه =
- ⑥ إذا كان تخالف قطع ناقص $0,3 =$ وطول المحور الأكبر $20 =$ ومحوراه هما محور الاحداثيات فإن إحداثي البؤرتين =

⑦ النقطة $(-2, 5)$ بالنسبة للقطع $2س^2 + \frac{1}{3}ص^2 = 7$ تقع

(ب) استنتج صفات القطع الناقص ثم أرسمه إذا كانت معادلته:

$$\begin{aligned} ① \quad 25س^2 + 9ص^2 = 225 \\ ② \quad 18س^2 + 4ص^2 = 36 \\ ③ \quad 9س^2 + 4ص^2 = 1 \\ ④ \quad 1س^2 - 1ص^2 = 2 \end{aligned}$$

(ج) أوجد معادلة القطع الناقص الذي فيه:

- ① محوره الأكبر على محور السينات وطوله $6\sqrt{2}$ ومركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(2, 3)$
- ② التخالف المركزي $ص = \frac{3}{4}$ ويمر بالنقطة $(6, 4)$ وبؤرتاه على محور السينات ومركزه $(0, 0)$
- ③ محوره الأكبر على محور السينات ومركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(2, 6)$ ، $(4, 3)$.
- ④ مجموع بُعدي أي نقطة على القطع عن $(0, 3)$ ، $(0, 9)$ يساوي ١٢

(الإجابة: ① $8س^2 + 18ص^2 = 144$ ② $1 = \frac{ص^2}{5.8} + \frac{س^2}{12.7}$ ③ $1 = \frac{ص^2}{4.5} + \frac{س^2}{2.0}$ ④ $0 = 36س^2 - 4ص^2 + 3س^2 - 1ص^2$)

(د) قطع مخروطي محوره الأكبر يقع على محور السينات، ومركزه $(0, 0)$ ، و اختلافه

المركزي $0,6 =$ ، والبعد بين بؤرتيه $6 =$ وحدات طولية ، عين نوع القطع واوجد معادلته .

(الإجابة: قطع ناقص ، $16س^2 + 25ص^2 = 400$)

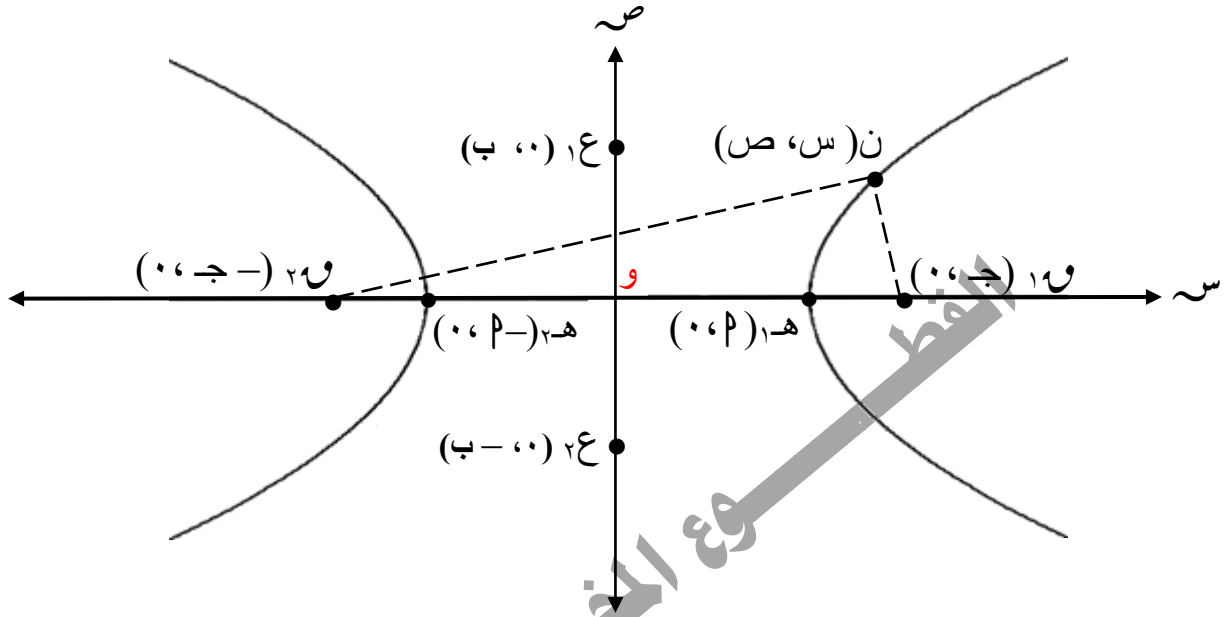
(هـ) أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(\pm 6, 0)$ والنسبة بين طولي محوريه الأكبر والأصغر

تساوي $4 : 3$ (الإجابة: $1 = \frac{ص^2}{81} + \frac{س^2}{36}$)

ثالثاً / القطع الزائد Hyperbola

تعريف:

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي الفرق بين بُعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) في المستوى يساوي طولاً ثابتاً (يسمى طول المحور القاطع ومقداره $2a$).



ملاحظات :

- (١) تسمى النقطتان $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ **بؤرتي القطع الزائد** و يسمى البعد بين البؤرتين **بالبعد البؤري** و بالتالي فإن: $2c = |a - (-a)|$
- (١) يسمى المستقيم المار بالبؤرتين a و $-a$ **بالمحور القاطع** أو **المحور البؤري** وهو المحور الرئيسي للقطع ويكون: طول المحور القاطع يساوي $2a$ أي أن: $2a = |a - (-a)|$
- (٢) القطعة المستقيمة a و b هي المنصف العمودي للقطعة المستقيمة a و $-a$ و تسمى **المحور المرافق** أو **المحور غير القاطع** حيث: $2b = |a - (-a)|$
- (٣) تسمى النقطتان a و $-a$ **رأسي القطع** الزائد وهما نقطتا تقاطع منحنى القطع مع المحور القاطع.
- (٤) النقطة **و** تسمى **مركز القطع** الزائد وهي نقطة تقاطع المحور القاطع مع المحور المرافق.
- (٥) البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) c < البعد بين الرأسين .
- (٦) القطع الزائد متماثل بالنسبة لمحور السينات وكذلك محور الصادات ومتماثل بالنسبة لنقطة الأصل (المركز).
- (٧) بالنسبة للتخالف المركزي للقطع الزائد: $c > a$ لأن $c > a$

معادلة القطع الزائد:

سنستخدم تعريف القطع الزائد لاستنتاج معادلة القطع وبالإستعانة بالشكل المرسوم في الصفحة السابقة

يكون: لتكن ن (س ، ص) \in القطع ، وبؤرتيه $١ (٠ ، ج)$ ، و $٢ (٠ ، -ج)$

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $١ (٠ ، ج)$ - بعد النقطة ن عن البؤرة $٢ (٠ ، -ج)$ = ٢٢

$$٢٢ = |١ن| - |٢ن|$$

$$٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} - \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2}$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

$$\sqrt{(٠-ص)^2 + (ج-س)^2} + ٢٢ = \sqrt{(٠-ص)^2 + (ج+س)^2} \leftarrow$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد من النموذج الأول:

$$\text{حيث: } ج < پ ، ج < ب ، ج^2 + پ^2 = ب^2$$

$$١ = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{پ^2}$$

✳ نقاط تقاطع القطع الزائد في الصورة القياسية مع المحاور:

✓ مع محور السينات نضع $v = 0$ فيكون: $1 = \frac{v^2}{p^2}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftrightarrow s^2 = p^2$

∴ $s = \pm p$ أي أن النقطتين $(0, p)$ ، $(0, -p)$ واقعتين على القطع الزائد وهي نقاط تقاطع القطع الزائد في الوضع القياسي مع محور السينات.

✓ مع محور الصادات نضع $s = 0$ فيكون: $1 = \frac{v^2}{b^2}$ (ضرب طرفين \times وسطين) $\Leftrightarrow v^2 = b^2$

لا يمكن حل المعادلة ∴ النقطتين $(b, 0)$ ، $(-b, 0)$ غير واقعتان على القطع الزائد أي أن القطع الزائد لا يتقاطع مع محور الصادات في الوضع القياسي.

✳ استنتاج معادلتَي المستقيمان المقاربة للقطع الزائد :

لإيجاد معادلتَي المستقيمان المقاربان في القطع الزائد نضع معادلة القطع تساوي صفر فيكون:

بالنسبة للنموذج الأول:

$$0 = \frac{v^2}{b^2} - \frac{s^2}{p^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{b^2} = \frac{s^2}{p^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{b^2}{p^2} s^2 \Leftrightarrow v = \pm \frac{b}{p} s$$

بالنسبة للنموذج الثاني:

$$0 = \frac{s^2}{b^2} - \frac{v^2}{p^2} \Leftrightarrow \frac{s^2}{b^2} = \frac{v^2}{p^2} \Leftrightarrow s^2 = \frac{b^2}{p^2} v^2 \Leftrightarrow s = \pm \frac{b}{p} v$$

✳ تذكر أن/ في القطع الزائد :

✓ دائماً p ، b ، c قيم موجبة لأنها أطوال (أبعاد) حيث أن: طول المحور القاطع $= 2p$ ،

طول المحور المرافق $= 2b$ ، البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) $= 2c$

✓ دائماً $c > p$ ، $c > b$ بينما قد يكون $p < b$ أو $b < p$ أو $p = b$

وهذا يعني أن: c هي أكبر الأطوال في القطع الزائد.

✓ دائماً قيمة الطرف الأيسر لمعادلة القطع موجب واحد، والطرف الأيمن عبارة عن فرق بين مربعين.

✓ $c^2 = p^2 + b^2$ (قانون مهم وخاص بالقطع الزائد).

✓ يوجد مستقيمان مقاربان للقطع الزائد.

✓ إذا كان طول المحور القاطع = طول المحور المرافق فإن القطع يسمى قطع زائد متساوي الساقين.

✓ إذا كان القطع الزائد متساوي الساقين ($p = b$) فإن: $e = \sqrt{2}$ (على الطالب اثبات ذلك)

يوجد نموذجان قياسيان للقطع الزائد فيما يلي توضيح لهما :

الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$1 = \frac{ص}{ب} - \frac{س}{م}$ (س موجبة)	$1 = \frac{ص}{ب} - \frac{س}{م}$ (س سالبة)
المركز	(0, 0)	(0, 0)
الرأسان	(0, ±ب)	(±ب, 0)
البؤرتان	(0, ±ج)	(±ب, 0)
المستقيمان المقاربان	$ص = \pm \frac{ب}{م} س$ أو $ص = \frac{ص}{ب} - \frac{س}{م}$	$ص = \pm \frac{ب}{م} س$ أو $ص = \frac{ص}{ب} - \frac{س}{م}$
معادلة الدليلان	$س = \pm \frac{ب}{ج}$ أو $س = \frac{ب}{ج}$	$ص = \pm \frac{ب}{ج}$ أو $ص = \frac{ب}{ج}$
التخالف المركزي	$1 < \frac{ج}{ب} = ي$ أو $1 < \sqrt{\frac{ب}{م} + 1} = ي$	
طول المحور القاطع	٢ ب (ويقع على محور السينات)	٢ م (ويقع على محور الصادات)
طول المحور المرافق	٢ ب (ويقع على محور الصادات)	٢ م (ويقع على محور السينات)
البعد البؤري	٢ ج	٢ ج
الرسم		

ملاحظة: إذا كانت إشارة س^٢ موجبة فإن القطع الزائد من النموذج الأول و مقام س^٢ يمثل قيمة م^٢ ، و إذا كانت إشارة س^٢ سالبة فإن القطع الزائد من النموذج الثاني و مقام س^٢ يمثل قيمة ب^٢

تمارين على القطع الزائد

ملحوظة : كل التمارين المأخوذة في القطع الناقص تطابق تماماً تمارين القطع الزائد وبنفس مخطط تمارين القطع الناقص المذكور سابقاً ... لذا تحل التمارين بنفس الطرق والاستراتيجيات المتبعة مع مراعاة صفات القطع الزائد وصيغة المعادلة وما يترتب على ذلك من اضافة أو تغيير.

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

① معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثال/ أوجد صفات القطع الزائد الذي معادلته :

$$(1) \quad 11 = \frac{س^2}{4} - (ص + 5)^2 + 10ص$$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية كالتالي:

$$11 = \frac{س^2}{4} - (ص + 5)^2 + 10ص \iff 11 = \frac{س^2}{4} - (ص^2 + 10ص + 25) + 10ص$$

$$\iff 11 = \frac{س^2}{4} - ص^2 - 10ص - 25 + 10ص \iff 11 = \frac{س^2}{4} - ص^2 - 25$$

∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول ومحوره القاطع على محور السينات ومعادلته : $1 = \frac{س^2}{4} - \frac{ص^2}{36}$

$$∴ 144 = 4س^2 - 36ص^2 \iff 12 = س \iff 6 = ص$$

$$ج^2 = 4س^2 + 36ص^2 = 144 + 36 = 180 \iff ج = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

إحداثيات الرأسين $(0, 12 \pm)$ ، $(0, 6 \pm)$ ، إحداثيات البؤرتين $(0, 6 \pm)$ ، $(0, 6\sqrt{5} \pm)$

$$\text{الدليلان : } س = \pm \frac{4س}{ج} \iff س = \pm \frac{144}{6\sqrt{5}} \iff س = \pm \frac{24}{\sqrt{5}}$$

طول المحور القاطع = $2س = 12 \times 2 = 24$ ، طول المحور المرافق = $2ص = 6 \times 2 = 12$

$$\text{، البعد البؤري} = 2ج = 2 \times 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

التخالف المركزي: $ع = \frac{ج}{س} \iff ع = \frac{6\sqrt{5}}{\frac{24}{\sqrt{5}}} = \frac{6\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{24} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4} > 1$ **لاحظ أن:**

$$\text{المقاربات : } ص = \pm \frac{ب}{س} \iff ص = \pm \frac{6}{\frac{24}{\sqrt{5}}} = \pm \frac{6\sqrt{5}}{24} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$(2) \quad 0 = \frac{1}{4} + {}^2\text{ص} \frac{4}{9} - {}^2\text{س} \frac{1}{4}$$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية كالتالي:

$$1 = \frac{{}^2\text{س}}{\frac{1}{4}} - \frac{{}^2\text{ص}}{\frac{9}{16}} \iff 1 = {}^2\text{س} \frac{4}{1} - \frac{{}^2\text{ص} \frac{16}{9}}{9} \iff \frac{1}{4} = - \frac{{}^2\text{ص} \frac{4}{9}}{9} \iff \frac{1}{4} = - \frac{{}^2\text{ص} \frac{4}{9}}{9}$$

$$1 = \frac{{}^2\text{س}}{\frac{1}{4}} - \frac{{}^2\text{ص}}{\frac{9}{16}} \iff 1 = \frac{{}^2\text{س}}{\frac{1}{4}} - \frac{{}^2\text{ص}}{\frac{9}{16}} \iff 1 = \frac{{}^2\text{س}}{\frac{1}{4}} - \frac{{}^2\text{ص}}{\frac{9}{16}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{{}^2\text{ب}}{4} \iff \frac{1}{4} = \frac{{}^2\text{ب}}{4}, \quad \frac{3}{4} = \frac{{}^2\text{ب}}{4} \iff \frac{3}{4} = \frac{{}^2\text{ب}}{4} \iff \frac{3}{4} = \frac{{}^2\text{ب}}{4}$$

$$\frac{4}{16} + \frac{9}{16} = \frac{{}^2\text{ج}}{16} \iff \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{{}^2\text{ج}}{16} \iff \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{{}^2\text{ج}}{16}$$

$$\frac{13}{16} = \frac{{}^2\text{ج}}{16} \iff \frac{13}{16} = \frac{{}^2\text{ج}}{16}$$

$$\text{إحداثيات الرأسين} = ({}^2\text{ب} \pm, 0) = (\frac{3}{4} \pm, 0)$$

$$\text{إحداثيات البؤرتين} = ({}^2\text{ج} \pm, 0) = (\frac{13}{16} \pm, 0)$$

$$\text{الدليلان: ص} = \frac{{}^2\text{ب}}{4} \pm = \text{ص} \iff \frac{9}{16} \pm = \frac{4}{16} \times \frac{9}{16} \pm = \frac{9}{16} \pm = \text{ص} \iff \frac{9}{16} \pm = \frac{4}{16} \times \frac{9}{16} \pm = \frac{9}{16} \pm = \text{ص}$$

$$\text{طول المحور القاطع} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{طول المحور المرافق} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{البعد البؤري} = 2 = \frac{13}{16} \times 2 = \frac{13}{8}$$

$$\text{التخالف المركزي: } \frac{13}{16} = \frac{13}{16} \times \frac{4}{4} = \frac{13}{4} = \text{د} \iff \frac{13}{16} = \frac{13}{4} = \text{د}$$

$$\text{المقاربات: ص} = \frac{{}^2\text{ب}}{4} \pm = \text{ص} \iff \frac{3}{4} \pm = \text{ص} \iff 2 \times \frac{3}{4} \pm = \text{ص} \iff \frac{3}{2} \pm = \text{ص}$$

ب) صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثال/ أوجد معادلة القطع الزائد الذي يحقق ما يلي:

(١) رأساه (٠، ±٦) وتخالفه المركزي يساوي $\frac{٥}{٣}$.

الحل

∴ الرأسان نموذجيان ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\text{∴ الرأسان } (٠، ±٦) = (٠، ±p) \text{ ∴ } ٦ = p \text{ ∴ } \boxed{٣٦ = p^2}$$

$$\text{التخالف المركزي: } \frac{٥}{٣} = \frac{c}{p} \text{ ∴ } \frac{٥}{٣} = \frac{c}{٦} \text{ ∴ } ٣٠ = ٥c \text{ ∴ } ٦ = c \text{ ∴ } ١٠ = \frac{a^2}{٣} \text{ ∴ } ١٠٠ = ٣a^2$$

$$\text{∴ } ١٠٠ = ٣a^2 \text{ ∴ } ٣٦ - ١٠٠ = ٣b^2 \text{ ∴ } ٣٦ - ١٠٠ = ٣b^2 \text{ ∴ } \boxed{٦٤ = ٣b^2}$$

$$\text{∴ معادلة القطع هي: } ١ = \frac{٣x^2}{٦٤} - \frac{٣y^2}{٣٦}$$

(٢) البورتان (٠، ±٨)، وطول المحور غير القاطع (المرافق) = ٦

الحل

∴ البورتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي ويتبع النموذج الأول

$$\text{∴ البورتان } (٠، ±٨) = (٠، ±٨) \text{ ∴ } ٨ = ٨ \text{ ∴ } ٦٤ = ٨^2$$

$$\text{∴ طول المحور غير القاطع (المرافق) = ٦ ∴ } ٦ = ٢b \text{ ∴ } ٣ = b \text{ ∴ } \boxed{٩ = b^2}$$

$$\text{∴ } ٩ = ٢b^2 \text{ ∴ } ٩ + ٢p^2 = ٦٤ \text{ ∴ } ٩ + ٢p^2 = ٦٤ \text{ ∴ } ٩ - ٦٤ = ٢p^2 \text{ ∴ } \boxed{٥٥ = ٢p^2}$$

$$\text{∴ معادلة القطع هي: } ١ = \frac{٣x^2}{٩} - \frac{٣y^2}{٥٥}$$

(٣) البورتان (٠، ±٦)، وأحد دليليه س = ٣.

الحل

∴ البورتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي ويتبع النموذج الأول

$$\text{∴ البورتان } (٠، ±٦) = (٠، ±٦) \text{ ∴ } ٦ = ٦ \text{ ∴ } ٣٦ = ٦^2$$

$$\text{الدليل: } \frac{٣}{٦} = \frac{p}{٦} \text{ ∴ } ٣ = \frac{p}{٦} \text{ ∴ } \boxed{١٨ = p^2}$$

$$\text{∴ } ١٨ = ٢b^2 \text{ ∴ } ١٨ - ٣٦ = ٢b^2 \text{ ∴ } ١٨ - ٣٦ = ٢b^2 \text{ ∴ } \boxed{١٨ = ٢b^2}$$

$$\text{∴ معادلة القطع هي: } ١ = \frac{٣x^2}{١٨} - \frac{٣y^2}{١٨}$$

(٤) رأساه $(\pm\sqrt{2}, 0)$ ، والقطع يمر بالنقطة $(-1, 3)$ ؟

الحل

الرأسان نموذجيان ويقعان على محور الصادات وبالتالي القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

$$\therefore \text{الرأسان } (\pm\sqrt{2}, 0) = (p \pm, 0) \quad \because \sqrt{2} = p \quad \leftarrow \boxed{p = \sqrt{2}}$$

، \therefore القطع يمر بالنقطة $(-1, 3)$ نعوض عن $s = -1$ ، $v = 3$ ، $p = \sqrt{2}$ في المعادلة فيكون :

$$1 = \frac{1}{p} - \frac{9}{8} \quad \text{بضرب } 8 \times \text{ب} \quad 8 = 8 - 9 \quad \text{ب} \quad 8 = 8 - 9 \quad \text{ب}$$

$$\leftarrow 8 = 8 - 9 \quad \text{ب} \quad \leftarrow \boxed{8 = 8 - 9 \quad \text{ب}} \quad \therefore \text{معادلة القطع هي : } 1 = \frac{s}{8} - \frac{v}{8}$$

... صورة أخرى لمعادتي المستقيمان المقاربان ...

يمكن استنتاج صورة أخرى لمعادتي المستقيمان المقاربان لقطع زائد (بدلالة v) بالشكل التالي:

بالنسبة للنموذج الأول:

$$0 = \frac{s}{p} - \frac{v}{p} \quad \leftarrow \frac{s}{p} = \frac{v}{p} \quad \leftarrow s = v \quad \leftarrow \boxed{s = \frac{p}{v} \pm}$$

بالنسبة للنموذج الثاني:

$$0 = \frac{s}{p} - \frac{v}{p} \quad \leftarrow \frac{s}{p} = \frac{v}{p} \quad \leftarrow s = v \quad \leftarrow \boxed{s = \frac{p}{v} \pm}$$

⌘ ... سؤال التحدي ... ⌘

اختر الإجابة الصحيحة :

١) المعادلة $s^2 + 5v^2 = 5$ تمثل قطع زائد عندما تكون قيم p ...

- Ⓐ $0 < p$ Ⓑ $0 \leq p$ Ⓒ $0 > p$ Ⓓ $0 = p$

٢) القطع المخروطي الذي رأساه $(\pm 5, 0)$ ومعادلتي دليليه : $s = \pm 3$ قطع

- Ⓐ مكافئ Ⓑ ناقص Ⓒ زائد Ⓓ دائرة

٣) المعادلة $s^3 + 3v^3 = 1$ تمثل معادلة

- Ⓐ قطع مكافئ Ⓑ قطع ناقص Ⓒ قطع زائد Ⓓ دائرة

(٧) تخالفه المركزي $\sqrt[3]{\text{ج}}$ ، ومركز القطع مبدأ الاحداثيات، ومحوره القاطع على محور السينات ، والقطع يمر بالنقطة (٣ ، ٢) ثم أرسم القطع .

الحل

:: المحور القاطع على محور السينات ، :: مركز القطع نقطة الأصل :: القطع قياسي من النموذج

$$\text{الأول معادلته: } 1 = \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}} - \frac{\text{س}^2}{\text{م}}$$

$$\text{التخالف المركز: } \text{ج} = \frac{\text{ج}}{\text{م}} \iff \sqrt[3]{\text{ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{م}} \iff \text{ج} = \text{م} \sqrt[3]{\text{ج}} \iff \text{ج}^2 = \text{م}^2 \sqrt[3]{\text{ج}} \iff \text{ج}^3 = \text{م}^2 \text{ج} \iff \text{ج}^2 = \text{م}^2$$

$$\text{ج}^2 = \text{ب} \iff \text{ج} - \text{ج}^3 = \text{ب} \iff \text{ب} + \text{ج} = \text{ج}^3 \iff \text{ب} + \text{ج} = \text{ج}^2$$

، :: القطع يمر بالنقطة (٣ ، ٢) نعوض عن $\text{س} = ٣$ ، $\text{ص} = ٢$ ، $\text{ب} = \text{ج}^2$ فيكون:

$$1 = \frac{4}{\text{ب}} - \frac{9}{\text{م}} \iff (\text{بالضرب } \times \text{ب}) \iff 1 = \frac{4}{\text{ب}} - \frac{9}{\text{م}} \iff 14 = \text{ب} \iff \text{ب} = 14 \iff \text{ج} = 21$$

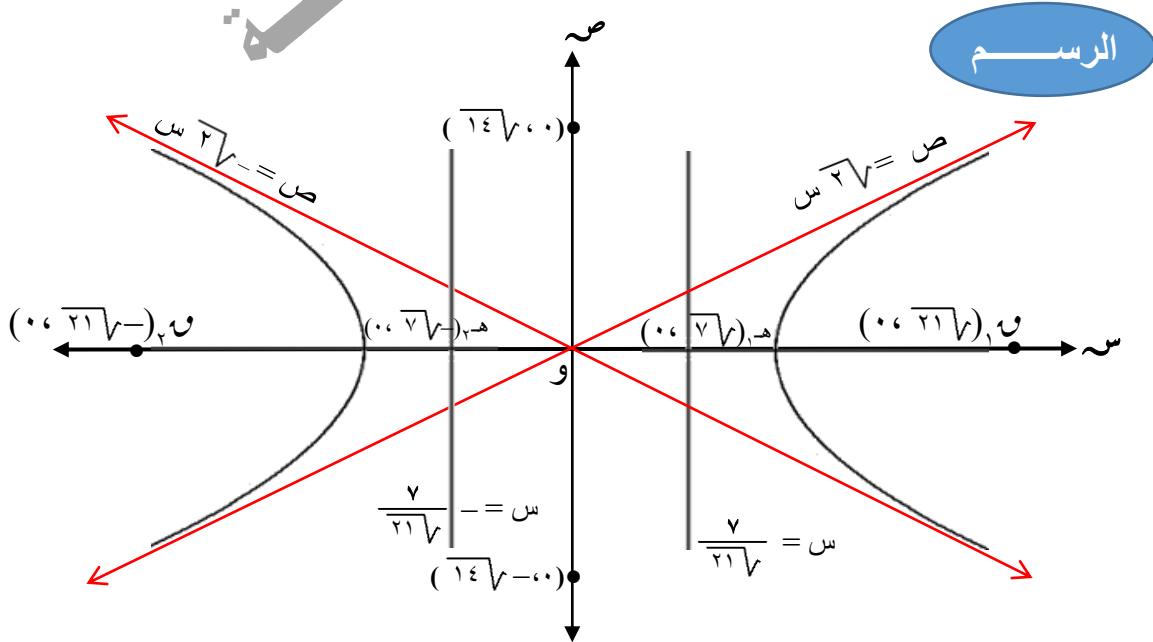
$$\text{ب} = 14 \iff \text{ج} = 21 \iff \text{ج} = 21 \iff \text{ب} = 14 \iff \text{ج} = 21$$

:: معادلة القطع هي: $1 = \frac{\text{ص}^2}{14} - \frac{\text{س}^2}{21}$

إحداثيات الرأسين $(0, \pm\sqrt{\text{ب}}) = (0, \pm\sqrt{14})$ ، إحداثيات البؤرتين $(0, \pm\sqrt{\text{ج}}) = (0, \pm\sqrt{21})$

$$\text{الدليلان: } \text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ج}}} = \pm\sqrt{\frac{14}{21}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{المقاربات: } \text{ص} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{م}}} = \pm\sqrt{\frac{14}{21}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$



النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها عن النقطتين $(0, 2)$ ، $(0, 5)$ يساوي ١ ؟

الحل

∴ ن تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها ∴ القطع زائد و النقطتين $(0, 2)$ ، $(0, 5)$ هما بؤرتي

القطع وواضح أنهما غير نموذجيتان ∴ القطع في وضع غير قياسي ... سنستخدم تعريف القطع الزائد

لاستنتاج معادلة القطع : لتكن ن $(س، ص)$ ∴ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $(0, 5)$ - بعد النقطة ن عن البؤرة $(0, 2)$ = ١

$$١ = \sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٥)^2} - \sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٢)^2}$$

$$\sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٥)^2} = \sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٢)^2} + ١ \iff$$

$$س^2 - ٢٠س + ١٠٠ + ص^2 = (س^2 + ٢٠س + ٤ + ص^2) + ٢\sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٢)^2} + ١$$

$$\sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٢)^2} = \frac{س^2 - ٢٠س + ١٠٠ + ص^2 - س^2 - ٢٠س - ٤ - ص^2 - ١}{٢} = \frac{-٤٠س + ٩٦}{٢}$$

$$\sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٢)^2} = ٢٠ - ٢٠س \iff$$

$$\sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٢)^2} = ١٠ - ٢٠س \iff$$

$$س^2 + ٤ + ص^2 - ٤ص = ١٠٠ + ٤٠٠س - ٤٠٠س^2 \iff$$

$$٩س^2 - ٤٠٠س + ٤ + ص^2 = ١٠٠ \iff$$

$$٨س^2 - ٤٠٠س + ٩٦ + ص^2 = ٠ \iff$$

$$\boxed{٨س^2 - ٤٠٠س + ٩٦ + ص^2 = ٠} \text{ ∴ المعادلة المطلوبة هي:}$$

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع زائد

لإثبات وقوع نقطة ن(س، ص) على القطع الزائد أو داخله أو خارجه فإن:

- (١) إذا كان بعدها عن ٢٠ - بعدها عن ١٠ ، $٢٢ = ١٠$ فإن النقطة تقع على القطع الزائد .
- (٢) إذا كان عن ٢٠ - بعدها عن ١٠ ، $٢٢ > ١٠$ فإن النقطة تقع خارج القطع الزائد .
- (٣) إذا كان بعدها عن ٢٠ - بعدها عن ١٠ ، $٢٢ < ١٠$ فإن النقطة تقع داخل القطع الزائد .

مثال/ أثبت أن النقطة (٠، ٢) تقع خارج القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{١٦} = ١$

الحل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الاول ، $١٦ = ٢٠$ ، $٩ = ٢٠$ أولاً / نوجد إحداثيات البؤرتين:

$$\therefore ج^2 = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠ \iff ج = ٢٠ \iff ١٦ + ٩ = ٢٠ \iff ج = ٢٠ \iff ٢٠ = ٢٠ \iff ج = ٢٠$$

∴ البؤرتان $١٠(٠، ٥)$ ، $٢٠(٠، -٥)$

ثانياً / نوجد الفرق بين بُعدي النقطة (٠، ٢) عن البؤرتين $٢٠(٠، -٥)$ ، $١٠(٠، ٥)$ كما يلي:

$$٤ = ٣ - ٧ = \sqrt{٠ + ٩} - \sqrt{٠ + ٤٩} = \sqrt{٠ + ٩} + \sqrt{٠ + ٤٩} - \sqrt{٠ + ٤٩} - \sqrt{٠ + ٩} = \sqrt{٠ + ٩} - \sqrt{٠ + ٤٩}$$

∴ الفرق بين البُعدين = ٤ ، ∴ $١٦ = ٢٠ \iff ٤ = ٢٠ \iff ١٦ = ٢٠$ نقارن بين الفرق بين

البُعدين وقيمة ٢٢ نجد أن: $٨ > ٤ \iff$ الفرق بين البُعدين > ٢٢ ∴ النقطة خارج القطع الزائد.

لمعرفة موقع نقطة ن(م ، ن) بالنسبة لقطع زائد معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفيرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون الحد المطلق سالب ثم

نعوض ب $س = م$ ، $ص = ن$ فإذا كان:

(١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع الزائد

(٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع خارج القطع الزائد

(٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الزائد

مثال/ أين تقع النقطة (٦ ، ٢) بالنسبة للقطع الزائد: $٧ = ٢٠ص^2 - ٢س^2$

الحل

نضع المعادلة بالشكل: $٢س^2 - ٢٠ص^2 = ٧$ ، ونعوض عن $س = ٦$ ، $ص = ٢$ فيكون:

$$٢ \times ٦^2 - ٢٠ \times ٢^2 = ٧ - ٧٢ = ٧ - ٨٠ = -٧٣ < ٠ \therefore$$

∴ النقطة تقع داخل القطع

التعريف العام للقطع باستخدام التخالف المركزي

تعريف:

القطع المخروطي هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي نسبة بُعدها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) إلى بُعدها عن مستقيم ثابت (يسمى الدليل المرافق للبؤرة) يساوي عدد ثابت (يسمى التخالف المركزي ويرمز له بالرمز u)

و وفقاً لقيمة التخالف المركزي " u " يمكن التعرف على نوع القطع المخروطي حيث:

- ① إذا كان: $u = 1$ فإن القطع مكافئ
- ② إذا كان: $u > 1$ فإن القطع ناقص، (حالة خاصة) إذا كان $u = 0$ فإن القطع دائرة
- ③ إذا كان: $u < 1$ فإن القطع زائد

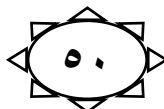
معلومات مهمة :

- ① في القطع الناقص إذا كان $u = \frac{b^2}{a^2}$ فإن القطع يمثل دائرة نصف قطرها $a = b$ ، وستكون قيمة التخالف المركزي $u = 0$ ، وقيمة $c = 0$.
- ② في القطع الزائد إذا كان $u = \frac{b^2}{a^2}$ فإن قيمة التخالف المركزي $u = \frac{c^2}{a^2}$ (القطع متساوي الساقين)
- ③ في القطع الزائد إذا كان $u = \frac{b^2}{a^2}$ فإن المستقيمين المقاربيين متعامدين ومعادلتها $v = \pm c$
- ④ في القطع المخروطي إذا كان $u < 1$ فإن القطع ناقص.
- ⑤ في القطع المخروطي إذا كان $u > 1$ فإن القطع زائد.

⌚ ... تدريب ... ⌚

أكمل كل فقرة من الفقرات التالية بما يجعلها صحيحة :

- (١) إذا كان $u = 1$ فإن القطع
- (٢) إذا كان $u > 1$ فإن القطع
- (٣) في القطع الناقص إذا كان طول المحور الأكبر يساوي طول المحور الأصغر فإن معادلة القطع
تمثل
- (٤) نوع القطع الذي تخالفه المركزي يساوي $u = 0, 3$ هو قطع والذي تخالفه $u = 2, 3$ هو قطع
- (٥) إذا كان البعد بين إحداثيات الرأسين أقل من البعد بين إحداثيات البؤرتين فإن القطع



مثال (١) أوجد التخالف المركزي للمعادلة: $1 = \frac{ص^2}{٢م} + \frac{س^2}{٢م}$ في الحالات التالية:

$$(١) م = ١$$

الحل

نعوض عن $م = ١$ في المعادلة فتصبح بالشكل $1 = \frac{ص^2}{٢} + \frac{س^2}{٢}$ وهي تمثل معادلة دائرة \therefore $٠ = ١$

*** ***** **

$$(٢) م = -٣$$

الحل

نعوض عن $م = -٣$ في المعادلة فتصبح بالشكل $1 = \frac{ص^2}{٢} - \frac{س^2}{٢}$ ويمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$1 = \frac{ص^2}{٢} - \frac{س^2}{٢}$$

وهي تمثل معادلة قطع زائد

$$\begin{aligned} \therefore \text{ج} = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} &\leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \\ \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} &\leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} \end{aligned}$$

*** ***** **

$$(٣) م = ٤$$

الحل

نعوض عن $م = ٤$ في المعادلة فتصبح بالشكل $1 = \frac{ص^2}{٨} + \frac{س^2}{٨}$ ويمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$1 = \frac{ص^2}{٨} + \frac{س^2}{٨}$$

وهي تمثل معادلة قطع ناقص

$$\therefore \text{ج} = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١ \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١ \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١ \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

$$\frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤} \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤} \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤} \leftarrow \text{ج} = \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤}$$

مثال (٢) حدد نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة : $٤ ص^٢ + ٢ س٢ = ١$ في الحالات التالية :

$$(١) ٤ = ٢$$

الحل : بالتعويض عن $٤ = ٢$ في المعادلة $٤ ص^٢ + ٢ س^٢ = ١$ وهي تمثل دائرة

$$(٢) ٤ - = ٢$$

الحل : بالتعويض عن $٤ - = ٢$ في المعادلة $٤ ص^٢ - ٢ س^٢ = ١$ وهي تمثل قطع زائد

$$(٣) ٦ = ٢$$

الحل : بالتعويض عن $٦ = ٢$ في المعادلة $٤ ص^٢ + ٢ س^٢ = ١$ وهي تمثل قطع ناقص

مثال (٣) حدد نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة : $١ = \frac{٢ ص^٢}{١٦} + \frac{٢ س^٢}{٩ - ٢ ل}$ في الحالات التالية :

$$(١) ٥ = ل$$

الحل : بالتعويض عن $٥ = ل$ في المعادلة تصبح بالشكل $١ = \frac{٢ ص^٢}{١٦} + \frac{٢ س^٢}{١٦}$ وهي تمثل دائرة

$$(٢) ٢ = ل$$

الحل : بالتعويض عن $٢ = ل$ في المعادلة تصبح بالشكل $١ = \frac{٢ ص^٢}{٥} - \frac{٢ س^٢}{١٦}$ وهي تمثل قطع زائد

$$(٣) ٦ = ل$$

الحل : بالتعويض عن $٦ = ل$ في المعادلة تصبح بالشكل $١ = \frac{٢ ص^٢}{١٦} + \frac{٢ س^٢}{٢٧}$ وهي تمثل قطع ناقص

مثال (٤) إذا كان: $٥ = صفر$ أوجد قيمة $ل$ في معادلة القطوع التالية:

$$(١) ١ = \frac{٢ ص^٢}{٤ ل} + \frac{٢ س^٢}{١٢} \quad (٢) ١ = \frac{٢ ص^٢}{٥} + \frac{٢ س^٢}{١ + ٢ ل}$$

الحل

$$(١) \therefore ٥ = صفر \therefore ٢ ب = ٢ ب \Leftarrow ١٢ = ل٤ \Leftarrow ٣ = ل$$

(٢) نضع المعادلة بصورة قياسية بالشكل : $١ = \frac{٢ ص^٢}{٥} + \frac{٢ س^٢}{١ + ٢ ل}$ ، \therefore التخالف = صفر

$$\therefore ٢ ب = ٢ ب \Leftarrow ١ + ٢ ل = \frac{٥}{٢} \Leftarrow ١ - \frac{٥}{٢} = ل٢ \Leftarrow \frac{٣}{٢} = ل٢ \Leftarrow \frac{٣}{٤} = ل$$

مثال (٥) لدينا المعادلة التالية : $ل س^٢ + ٥ ص^٢ = م$ أكمل الجدول التالي :

نوعها	المعادلة بعد التعويض عن المجاهيل	المجاهيل
تمثل معادلة دائرة	$٥س^٢ + ٥ص^٢ = م ، م > ٠$	$ل = ٥ ، م > ٠$
تمثل قطع زائد	$٥ص^٢ - ٥س^٢ = م ، م > ٠$	$ل = ٥ - ، م > ٠$
تمثل قطع ناقص	$٧س^٢ + ٥ص^٢ = م ، م > ٠$	$ل = ٧ ، م > ٠$

*** بشكل عام في المثال السابق إذا كان : $ل > ٠ ، م > ٠$ فإن المعادلة تمثل قطع زائد .

*** بشكل عام في المثال السابق إذا كان : $ل < ٠ ، م > ٠$ فإن المعادلة تمثل مجموعة خالية

القطوع المخروطية والاشروطية

نشاط (٣)

(أ) أكمل الفراغ بما يناسبه :

- ① طول المحور الرئيسي للقطع الزائد $s^2 - 9v^2 = 36 + 0$ يساوي
- ② البعد البؤري للقطع الزائد $9v^2 - 16s^2 = 144$ يساوي
- ③ معادلة المحور المرافق للقطع الزائد $(\frac{s}{2} - \frac{s}{3})(\frac{s}{2} + \frac{s}{3}) = 1$ هي
- ④ معادلتني المستقيمان المقاربان للقطع $3s^2 - 2v^2 = 2$ هي
- ⑤ معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وبؤرته $(12 \pm, 0)$ وطول محوره القاطع $= 10$ هي
- ⑥ البعد بين البؤرتين في القطع المخروطي $\frac{s^2}{5} - \frac{v^2}{4} = 1$ يساوي
- ⑦ في القطع $s^2 + m^2 = 4$ إذا كان $m = 1$ فإن التخالف المركزي =
- ⑧ في القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وتخالفه $2\sqrt{7}$ معادلتني المقاربان هي
- ⑨ قطع مخروطي في وضع قياسي إذا كانت بؤرتاه في المركز فإن القطع
- ⑩ في القطع الزائد الذي محوره القاطع ينطبق على المحور السيني و مركزه $(0,0)$ تكون معادلتني المستقيمان المقاربان هي
- ⑪ التخالف المركزي للقطع $9s^2 + v^2 = 9$ يساوي
- ⑫ إحداثي كلا من نهايتي المحور المرافق للقطع $4s^2 - 16v^2 = 64$ هما
- ⑬ التخالف المركزي للقطع $\frac{s^2}{3\sqrt{7}} - \frac{v^2}{3\sqrt{7}} = 1$ هو
- ⑭ في القطع الزائد الذي أطوال محاوره متساوية تخالفه المركزي يساوي

(ب) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ فيما يلي:

- ① طرفي أو نهايتي المحور الأكبر للقطع الناقص من النموذج الأول هي $(0, p \pm)$ ()
- ② القطع الناقص هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي نسبة بُعدها عن البؤرة إلى بعدها عن الدليل المرافق لهذه البؤرة يساوي التخالف المركزي y ، $y > 1$ ()
- ③ الدليلان للقطع $\frac{s^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ يقطعان المحور القاطع عند النقطة $(0, \frac{p}{c} \pm)$ ()

ج) اختر من المجموعة (٢) ما يناسبها من المجموعة (ب)

المعادلة (٣- م) $٧ = ٢س + ٢ص + ٣$

ب	٢
١) $٣ < م$ (٢)	١) تمثل معادلة قطعاً مكافئاً عندما.....
٢) $٣ > م$ (٣)	٢) تمثل معادلة قطعاً ناقصاً عندما.....
٣) $٤ = م$ (٤)	٣) تمثل معادلة قطعاً زائداً عندما.....
٤) $٣ = م$ (٥)	٤) تمثل معادلة دائرة عندما.....

د) أوجد صفات القطع الزائد الذي معادلته:

١) $٩س^٢ - ٣٦ص^٢ = ٠$ ٢) $١ = \frac{٢ص^٢}{٢} - \frac{٢س^٢}{٢}$

هـ) أوجد قيم ك التي تجعل المعادلة $٢س^٢ + كص^٢ = ٨$ تمثل معادلة قطع زائد؟

و) أوجد قيم م التي تجعل المعادلة (م - ٩) $١ = ٢ص^٢ + ٢س^٢$ تمثل قطعاً زائداً؟

ز) أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان المقاربان : $ص = ٢ \pm س$ ، والرأسان $(٠, ٦ \pm)$ ،

وارسمه (الاجابة: $\frac{٢ص^٢}{١٤٤} - \frac{٢س^٢}{٣٦} = ١$)

ح) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه ١٢ ، واختلافه المركزي

$٣ = \frac{٣}{٢}$ ، ومحوره القاطع منطبق على الصادات، وارسمه (الاجابة: $\frac{٢ص^٢}{٢٠} - \frac{٢س^٢}{١٣} = ١$)

ط) قطع زائد طول محوره الأكبر يساوي ٢ وينطبق على محور السينات و معادلتى الدليلين

$س = ١ \pm \frac{١}{٤}$ ، ومركزه نقطة الأصل أوجد معادلته وصفاته ثم ارسمه (الاجابة: $\frac{٢ص^٢}{١٥} - ٢س^٢ = ١$)

ك) في القطع الزائد $٢س^٢ - ١ص^٢ = ١$ أوجد :

١) معادلة الدليلين (الاجابة: $س = \pm \frac{١}{٢\sqrt{٧}}$) ٢) إحداثي الرأسين (الاجابة: $(٠, ١) \pm$)

ي) أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها عن

النقطتين $(٠, ٢)$ ، $(٠, ١٠)$ ، يساوي ١ ؟ (الاجابة: $٢٥٢س^٢ - ٤ص^٢ - ٣٠٢٤س + ٩٠٠٩ = ٠$)

