المقاربات ودراسة التوابع

- نهاية تابع عند اللانهاية الموجبة :

تعريف(1) نقول أن تابع f معرف في جوار اللانهاية الموجبة إذا كانت مجموعة تعريفه تحوي مجالاً من الشكل

$]a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$

تعريف(2) نقول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا كانت قيمة $f(x)$ تتجاوز أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة ما يكفي أي :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

أمثلة : أوجد النهايات :

*) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x$

$= \lim +\infty = +\infty$

*) $\lim_{x \to +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

*) $\lim_{x \to +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$

*) $\lim_{x \to +\infty} x^5 = (+\infty)^5 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

تعريف (3): نقول أن نهاية التابع f عند $+\infty$ هي $-\infty$ اذا كانت قيم $f(x)$ تصبح أصغر من أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة بما يكفي:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

أمثلة: أوجد النهايات للتوابع التالية:

*) $\lim_{x \to +\infty} -x = \lim_{x \to +\infty} -(+\infty) = -\infty$

*) $\lim_{x \to +\infty} -x^2 = \lim_{x \to +\infty} -(+\infty)^2 = -\infty$

*) $\lim_{x \to +\infty} -x^3 = \lim_{x \to +\infty} -(+\infty) = -\infty$

*) $\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} -(\sqrt{+\infty}) = -\infty$

ملاحظات:

[1] $\frac{\pm\infty}{\text{عدد}} = \pm\infty \Rightarrow \frac{\pm\infty}{2} = \pm\infty$

[2] $\frac{\text{عدد}}{+\infty} = 0 \Rightarrow \frac{2}{+\infty} = 0$

[3] $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty \Rightarrow \frac{2}{0} = \infty$

تعريف (4): نقول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l عدد اذا كانت قيم $f(x)$ تصبح قريبة من l أو تتجمع حول l عندما تصبح x كبيرة بما يكفي حيث l عدد

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

$y = l$ مستقيم مقارب موازي لمحور $x'x$ عند $+\infty$ في جوار $+\infty$

امثلة : ادرس النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$y=0$ مستقيم مقارب للخط C عندما x تسعى نحو $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$y=0$ مستقيم مقارب للخط C عندما x تسعى نحو $+\infty$

- نهاية تابع عند اللانهايات السالبة :

امثلة : ادرس نهايات التوابع التالية :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$y=0$ مستقيم مقارب يوازي $x'x$ للخط C عندما x تسعى نحو $-\infty$ ومنطبق على $x'x$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$y=0$ مستقيم مقارب يوازي $x'x$ للخط C عندما x تسعى نحو $-\infty$

ملاحظات جانبية: نأخذ الحد الأعلى :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - x = -\infty$$

تدريب : ص 106

احسب نهايات الدوال الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$

1) $f(x) = x^3 - x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Big| \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2) $f(x) = x^4 - 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Big| \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

3) $f(x) = \frac{x^3}{5} - 2x + 6$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Big| \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

4) $f(x) = \frac{2}{x} - 2x^2 - 106$

نعوض في كل حد

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب يوازي xx' عندما x تسعى نحو $+\infty$

5) $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) = \lim \left(\frac{2}{(\infty)^2} + 1\right) = (0 + 1) = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني C يوازي xx' عندما x تسعى نحو $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) = +1$$

6) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x^2}\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{\infty} = 0$$

$y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني c يوازي $x'x$ عندما x تسعى نحو $+\infty$

7) $f(x) = \frac{2x^2+2}{3x^2+3x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+2}{3x^2+3x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2}\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$y=\frac{2}{3}$ مستقيم مقارب أفقي للخط c يوازي $x'x$ عندما x تسعى نحو $+\infty$

8) $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2+x}\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2}\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (2x) = 2(+\infty)$$

$$\Rightarrow = +\infty$$

ملاحظة: $\boxed{1}$ $\lim_{x \to \mp\infty}$ (كثيرة حدود) $= \lim_{x \to \mp\infty}$ (الحد المسيطر)

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}\right) =$

$\Rightarrow \lim \left(\frac{\text{الحد الأعلى في البسط}}{\text{الحد الأعلى في المقام}}\right) \Rightarrow$ نختصر $\Rightarrow$ نعوض

Subject : / /

ادرس النهايات: ط

$f(x) = x^3 - x$

$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \lim (+\infty)^3\left(1 - \frac{1}{(\infty)^2}\right)$

$\Rightarrow \lim +\infty(1 - 0)$

$\Rightarrow +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \lim (-\infty)^3\left(1 - \frac{1}{(-\infty)^2}\right)$

$\Rightarrow \lim -\infty(1 - 0)$

$\Rightarrow -\infty$

$f(x) = \frac{2}{x} - 2x^2 - 100$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2}{x} - 2x^2 - 100\right)$

$= \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2}{\infty} - 2(\infty)^2 - 100\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{2}{x} - 2x^2 - 100\right)$

$= \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{2}{-\infty} - 2(-\infty)^2 - 100\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} = -\infty$

تدريب: صفحة 109

عين نهايات الدوال الآتية عند $-\infty$.

1) $f(x) = x^3 - 2x - 1$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x - 1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (x^3) = \lim_{x \to -\infty} (-\infty)^3 = -\infty$$

2) $f(x) = x^4 - \frac{5}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^4 - \frac{5}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left((-\infty)^4 - \frac{5}{\infty}\right) = +\infty$$

3) $f(x) = -2x + 6x^5$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x + 6x^5)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (6x^5) = -\infty$$

4) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{-\infty} - \frac{1}{-\infty}\right) = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب منطبق للمحور (محور $x x'$ عندما x تسعى نحو $-\infty$

Subject :

5) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x^2} + x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{(-\infty)^2} + (-\infty) \right)$$

$$= -\infty$$

6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب منطبق للخط C يوازي xx' عندما x تسعى نحو $-\infty$

7) $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) = 2$$

$y = 2$ مستقيم مقارب أفقي للخط C يوازي xx' عندما x تسعى نحو $-\infty$

8) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4}{x^2} \right) = \lim_{x \to -\infty} (x^2) = (-\infty)^2 = +\infty$$

نهاية تابع عند نقطة

تعريف: لتكن D_f مجموعة تعريف التابع f ونفرض أن A عدد حقيقي يحقق الشرطين:

1) إذا كان a عنصراً من D_f

2) إذا كان a طرفاً لأحد مجالات التابع f عندئذٍ

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ نهاية التابع f عندما تسعى x نحو a من اليمين

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ نهاية التابع $f(x)$ من اليسار

$x = a$ مستقيم مقارب شاقولي يوازي yy'

نتائج هامة:

1) إذا كانت $a \geq 0$ عندئذٍ

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

2) إذا كان P كثير حدود وكان a عدداً حقيقياً كان:

$$\lim_{x \to a^+} P(x) = P(a)$$

3) إذا كان f تابعاً كسرياً معرفاً عند a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

4) أياً كان العدد الحقيقي a عندئذٍ.

$$\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$$

$$\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$$

تدريب: ادرس النهايات على مجموعة تعريفه :

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad D_f =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x = 0$ مستقيم مقارب شاقولي منطبق على yy' عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي منطبق على xx' عندما x تسعى نحو $+\infty$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

+ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي منطبق على xx' عندما x تسعى نحو $-\infty$

+ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي منطبق على xx' عندما x تسعى نحو $+\infty$

+ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب شاقولي منطبق على yy' عند $-\infty$

+ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب شاقولي منطبق على yy' عند $+\infty$

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$

$D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{2}{-\infty} = 0$

$y=0$ مستقيم مقارب منطبق على $x'x$ عندما x تسعى نحو $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

$y=0$ مستقيم مقارب منطبق على $x'x$ عندما x تسعى نحو $+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} \dfrac{2x}{x^2-9} = \dfrac{2(-3)}{(-3)^2-9} = \dfrac{-6}{0} = +\infty$

$x=-3$ مستقيم مقارب للخط C شاقولي يوازي $y'y$ ~~عندها~~ من اليسار باتجاه $+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} +3} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} +3} \left(\dfrac{2x}{x^2-9}\right) = \dfrac{2(3)}{(3)^2-9} = \dfrac{6}{0^-} = -\infty$

$x=3$ مستقيم مقارب للخط C شاقولي يوازي $y'y$ من اليسار باتجاه $-\infty$

1] $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3) = 2(\infty)^3 = \infty$

2] $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

3] $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x - x^3}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

4] $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 + 3x^4 - 1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^5) = (+\infty)^5 = +\infty$

5] $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2) = 2$

$y = 2$ مستقيم مقارب أفقي للخط c عندما x تسعى نحو $+\infty$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^8}{x^2 - 1} \right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^8}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^6) = 3(+\infty)^6 = +\infty$

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4x}{x^2 - x} \right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{-\infty} = 0$

$y = 0$ مستقيم مقارب منطبق على xx' عندما x تقترب نحو $-\infty$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x - x^2)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -(-\infty)^2 = -\infty$