تمرين عام (اشتقاق و تكامل)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I = [0,1]$ وفق : $f(x) = x\sqrt{x(1-x)}$ و **المطلوب** :

1- ادرس قابليّة اشتقاق التابع f عند $x = 0$.

2- احسب حجم المجسّم الدوراني الناتج عن دوران C دورة كاملة حول محور الفواصل .

BAC MATHS

الطلب الأوّل :

معدّل التغيّر :

$$t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ; a = 0$$

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x(1-x)} - 0}{x - 0}$$

$$t(x) = \frac{x\sqrt{x(1-x)}}{x} = \sqrt{x(1-x)}$$

$$\lim_{x\to 0} t(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x(1-x)} = 0$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x = 0$ و لدينا : $\boxed{f'(0) = 0}$

الطلب الثاني :

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2(x(1-x))\, dx = \pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{5}1^5\right) - \left(\frac{1}{4}0^4 - \frac{1}{5}0^5\right)\right] = \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{20}}$$