



قررت وزارة التعليم تدريس  
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

وزارة التعليم  
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

# الرياضيات ٢ - ١

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثانية

الفصل الدراسي الأول

الجلول  
الجلول اون لاين  
h u l u l . o n l i n e

قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

توزيع مجاناً وللبيع

اضغط على عنوان الفصل للوصول السريع إليه

## الدوال والامتباينات Functions and Inequalities

الفصل  
**1**

## المصفوفات Matrices

الفصل  
**2**

## كثيرات الحدود ودوالها Polynomials and Polynomial Functions

الفصل  
**3**

الجلول اون لاين  
h u t u . o n l i n e

# الدوال والمتباينات Functions and Inequalities

## الفصل 1


### فيما سبق،

درست حل المعادلات والمتباينات الخطية.

### والآن،

- استعمل معادلات العلاقات والدوال.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً.
- أحل مسائل من واقع الحياة مستخدماً البرمجة الخطية.

### لماذا؟

 **مصانع:** تسعى المصانع عادة لتحقيق أعلى ربح ممكن، ويتطلب ذلك من إدارتها إتقان مهارات رياضية معينة لتحقيق التكلفة، وفي هذا الفصل سنتعلم كيفية زيادة الربح أو تقليل التكلفة لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

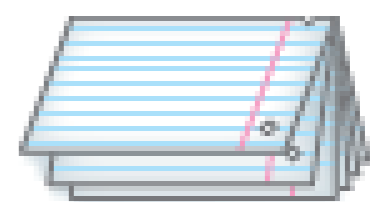
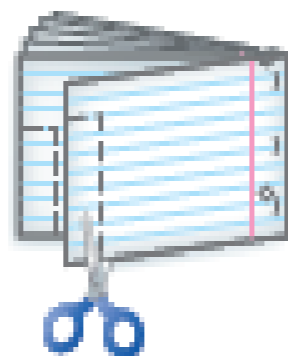


### منظم أفكار

## المستويات

الدوال والمتباينات، اعمل هذه المعطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الدوال والمتباينات. مبتدئاً بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات.

- 1 اطو كل ورقة من المنتصف.
- 2 قُصّ الأوراق مع خط الطي، ثم ثبت أنصاف الأوراق الست الناتجة لتحصل على كتيب صغير.
- 3 قُصّ أطراف الأوراق، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى و4 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
- 4 سمّ طرف كل ورقة برقم درس من دروس الفصل، واكتب عنوان الفصل.



## التهيئة

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

$$12.25 = 15.7 + (-3.45) \quad (1)$$

$$13.51 = -18.54 - (-32.05) \quad (2)$$

$$-66.15 = -9.8 \cdot 6.75 \quad (3)$$

$$-8 = 4 \div (-0.5) \quad (4)$$

$$1\frac{13}{15} = \frac{253}{21} = 3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right) \quad (5)$$

$$3\frac{8}{21} = \frac{54}{7} - \frac{26}{6} \quad (6)$$

$$-1\frac{1}{3} = \left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right) \quad (7)$$

$$-3\frac{3}{7} = -3 \div \frac{7}{8} \quad (8)$$

صناعة يدوية: ما يلزم فاطمة

$$10.5 m = \frac{21}{2} = \cancel{12}^3 \times \frac{7}{\cancel{8}_2}$$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي إذا كانت  $c=-2, b=4, a=-3$ :

$$-15 = 4(-3) - 3 = 4a - 3 \quad (10)$$

$$18 = 2(4) - 5(-2) = 2b - 5c \quad (11)$$

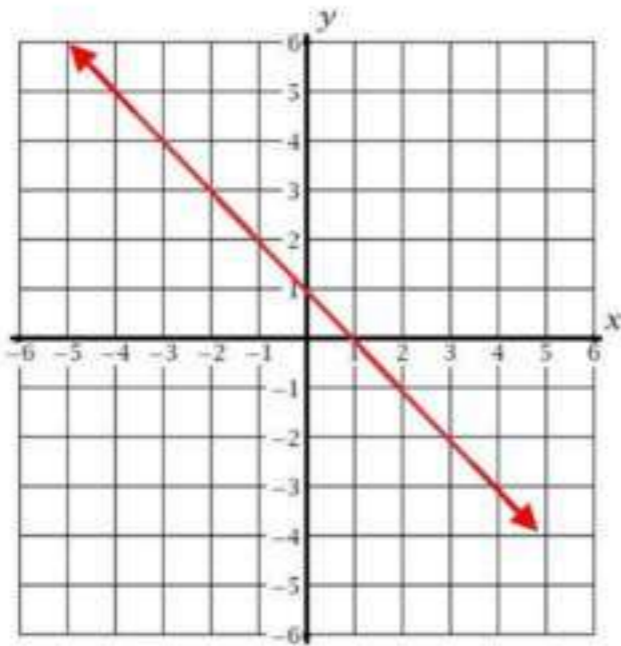
$$10 = 4^2 - 3(4) + 6 = b^2 - 3b + 6 \quad (12)$$

$$-5 = \frac{2(-3) + 4(4)}{-2} = \frac{2a + 4b}{c} \quad (13)$$

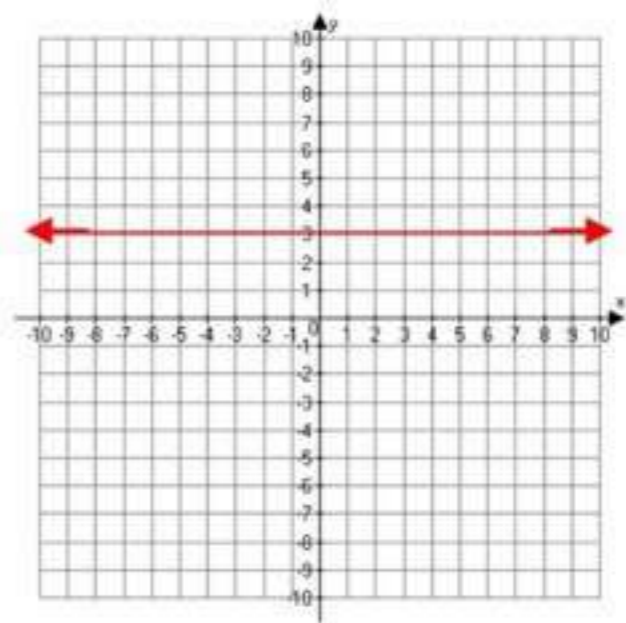
$$\text{اتصالات: التكلفة} = 20 + 0.25(80) = 40 \text{ ريالاً} \quad (14)$$

مثل في المستوى كل مسقيم مما يأتي بيانياً

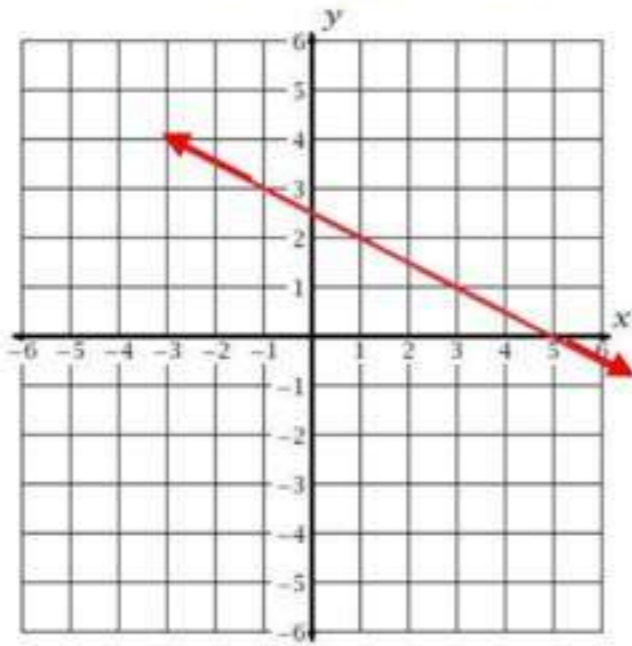
$$x + y = 1 \quad (16)$$



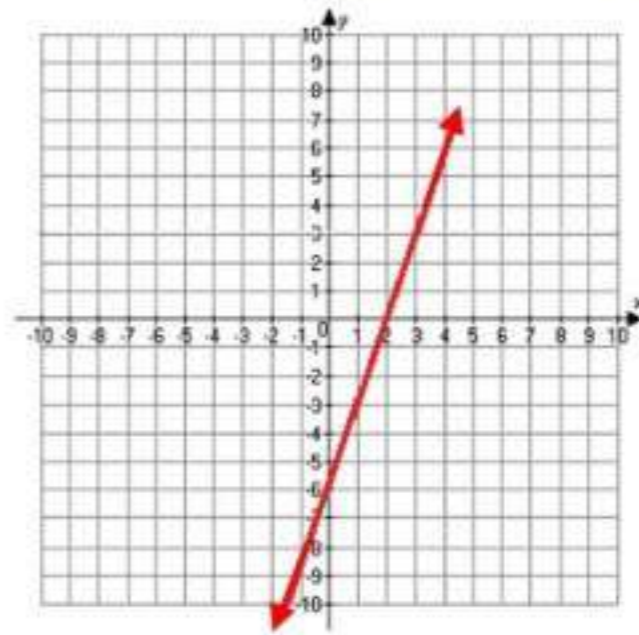
$$y = 3 \quad (15)$$



$$x + 2y = 5 \quad (18)$$

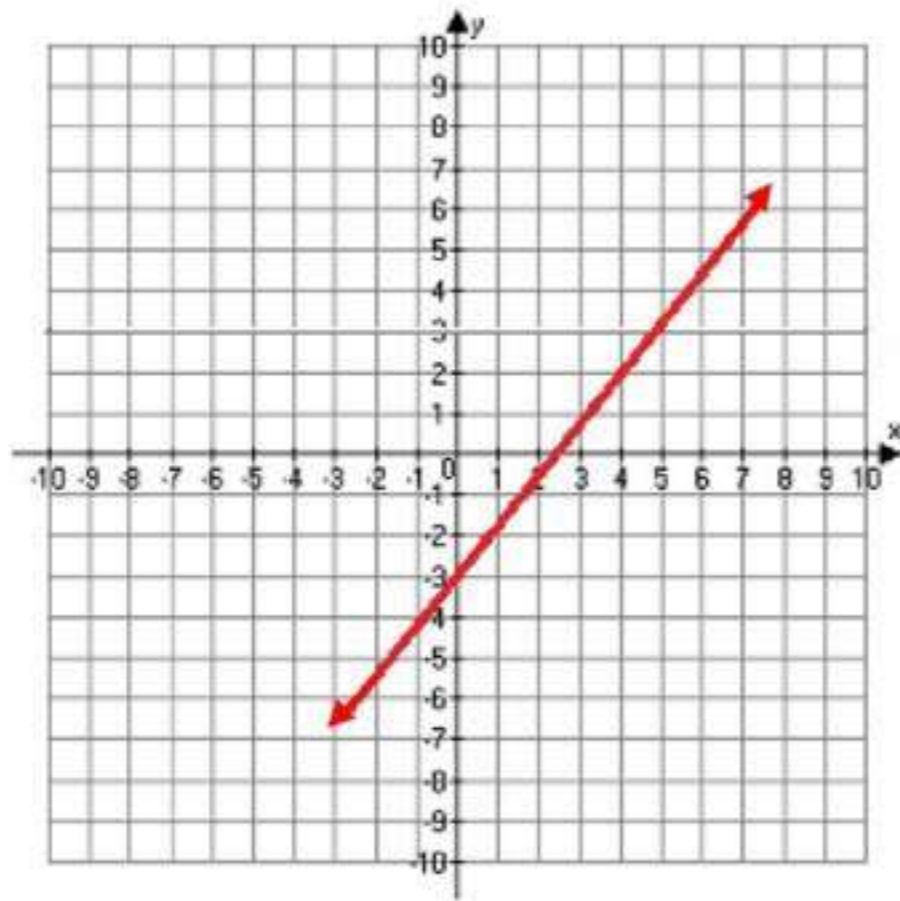


$$3x - y = 6 \quad (17)$$



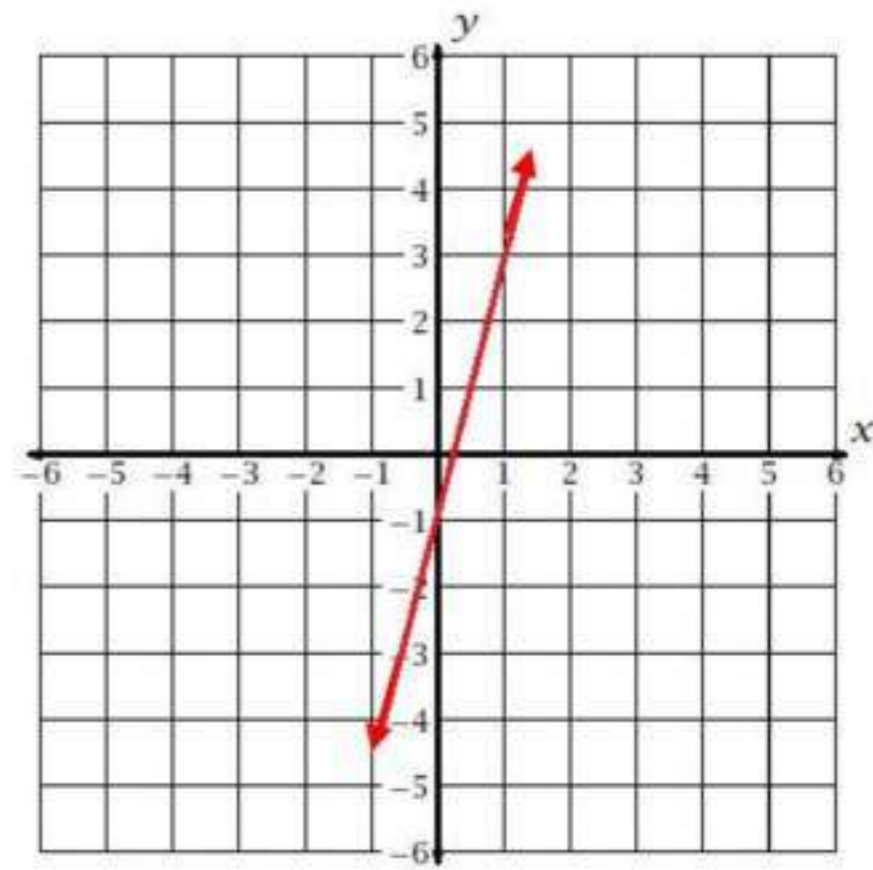
$$5x - 4y = 12$$

20



$$y = 4x - 1$$

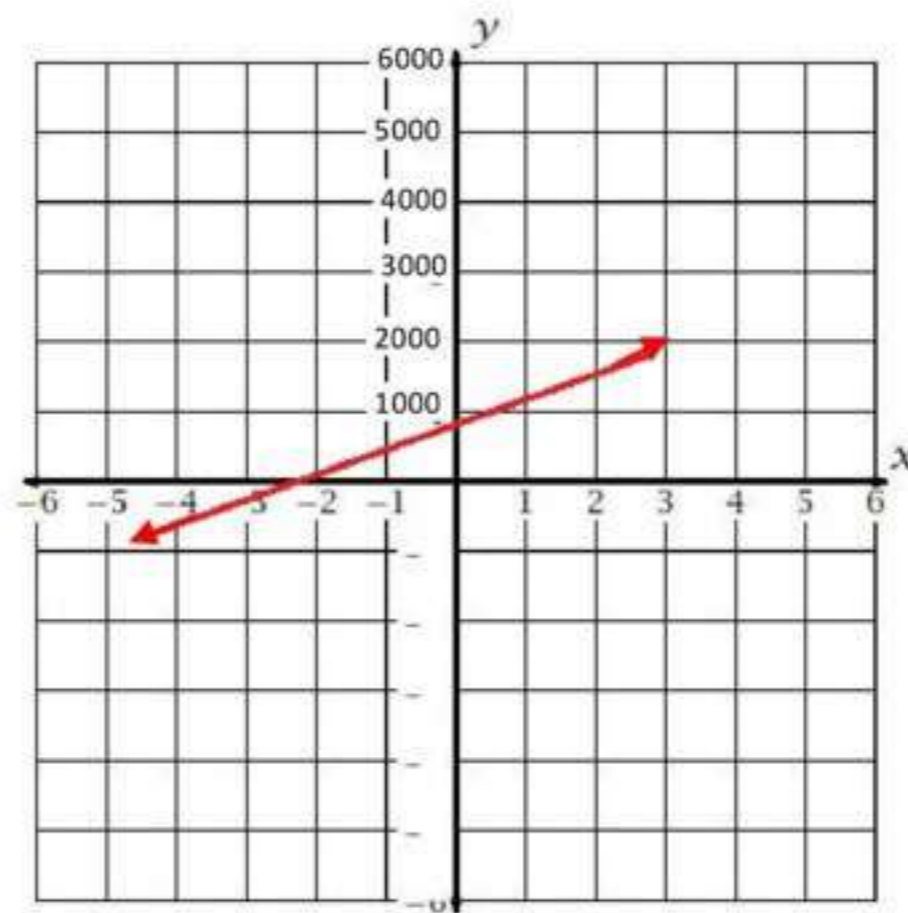
19



مشتریات:

21

ما يدفعه صلاح بعد  $x$  شهر  $400x + 900 =$





حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

$$Z, Q, R \quad -185 \quad (1A)$$

$$Z, Q, R \quad -\sqrt{49} \quad (1B)$$

$$R, I \quad \sqrt{95} \quad (1C)$$

$$Q, R \quad -\frac{7}{8} \quad (1D)$$

(2) اذكر الخاصية الموضحة في:  $2(x+3) = 2x+6$  ؟

خاصية التوزيع

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

$$1.25 \quad (3A)$$

$$0.8, -1.25$$

$$2\frac{1}{2} \quad (3B)$$

$$\frac{2}{5}, -2\frac{1}{2}$$

(4) أعمال:

$$20(4 + 3 + 2.5 + 3 + 4) = \text{المبلغ الذي حصل عليه كمال في ذلك الأسبوع} = 330 \text{ ريالاً.}$$

(5) بسط العبارة:

$$3(4x - 2y) - 2(3x + y) =$$

$$12x - 6y - 6x - 2y =$$

$$6x - 8y =$$

## تأكد

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (مثال 1)

$R, Q, Z, W, N : 62$  ①

$R, Q : \frac{5}{4}$  ②

$R, I : \sqrt{11}$  ③

$Z, R, Q : -12$  ④

ما الخاصية الموضحة في كل مما يأتي: (مثال 2)

الخاصية التجميعية (×)  $(6 \cdot 8) \cdot 5 - 6 \cdot (8 \cdot 5)$  ⑤

خاصية التوزيع.  $7(9 - 5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$  ⑥

الخاصية التبديلية (+)  $84 + 16 = 16 + 84$  ⑦

خاصية التوزيع.  $(12 + 5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$  ⑧

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي: (مثال 3)

$-7$  : النظير الجمعي:  $7$  ، النظير الضربي:  $-\frac{1}{7}$  ⑨

$\frac{4}{9}$  : النظير الجمعي:  $-\frac{4}{9}$  ، النظير الضربي:  $\frac{9}{4}$  ⑩

$3.8$  : نظير الجمعي:  $-3.8$  ، النظير الضربي:  $\frac{5}{19}$  ⑪

$\sqrt{5}$  : النظير الجمعي:  $-\sqrt{5}$  ، النظير الضربي:  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  ⑫



13

تخفيضات: (مثال 4)

قيمة الزيادة في سعر القميص =  $8\% \times 40 = 3.2$  ريالقيمة الزيادة في سعر البنطال =  $8\% \times 60 = 4.8$  ريالقيمة الزيادة في سعر الثوب =  $8\% \times 100 = 8$  ريالقيمة الزيادة في سعر المعطف =  $8\% \times 200 = 16$  ريال

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$5(3x + 6y) + 4(2x - 9y) \quad 14$$

$$15x + 30y + 8x - 36y =$$

$$23x - 6y =$$

$$6(6a + 5b) - 3(4a + 7b) \quad 15$$

$$36a + 30b - 12a - 21b =$$

$$24a + 9b =$$

$$-4(6c - 3d) - 5(-2c - 4d) \quad 16$$

$$-24c + 12d + 10c + 20d =$$

$$-14c + 32d =$$

$$-5(8x - 2y) - 4(-6x - 3y) \quad 17$$

$$-40x + 10y + 24x + 12y =$$

$$-16x + 22y =$$

## تدريب وحل المسائل

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (مثال 1)

$$Q, R : -\frac{4}{3} \quad (18)$$

$$Q, R : -8.13 \quad (19)$$

$$N, W, Z, Q, R : \sqrt{25} \quad (20)$$

$$Q, R : 0.\overline{61} \quad (21)$$

$$N, W, Z, Q, R : \frac{9}{3} \quad (22)$$

$$Z, Q, R : -\sqrt{144} \quad (23)$$

$$N, W, Z, Q, R : \frac{21}{7} \quad (24)$$

$$I, R : \sqrt{17} \quad (25)$$

ما الخاصية الموضحة في كل مما يأتي: (مثال 2)

$$-7y + 7y = 0 \quad (26) \text{ : خاصية النظير الجمعي.}$$

$$8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8 + 5)\sqrt{11} \quad (27) \text{ : خاصية التوزيع (×).}$$

$$(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23) \quad (28) \text{ : الخاصية التجميعية (+).}$$

$$\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1 \quad (29) \text{ : خاصية النظير الضربي.}$$

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

30  $-8$  : النظير الجمعي:  $8$  ، النظير الضربي:  $-\frac{1}{8}$

31  $12.1$  : النظير الجمعي:  $-12.1$  ، النظير الضربي:  $\frac{1}{12.1}$

32  $-0.25$  : النظير الجمعي:  $0.25$  ، النظير الضربي:  $-4$

33  $\frac{6}{13}$  : النظير الجمعي:  $-\frac{6}{13}$  ، النظير الضربي:  $\frac{13}{6}$

34  $-\frac{3}{8}$  : النظير الجمعي:  $\frac{3}{8}$  ، النظير الضربي:  $-\frac{8}{3}$

35  $\sqrt{15}$  : النظير الجمعي:  $-\sqrt{15}$  ، النظير الضربي:  $\frac{1}{\sqrt{15}}$

36 ترشيد:

$$0.15(3000 + 1000 + 500 + 750) = \text{مقدار ما توفره الأسرة} = 787.5 \text{ ريالاً.}$$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

37  $12b + 6c = 8b - 3c + 4b + 9c$

38  $-7a + 3d = -2a + 9d - 5a - 6d$

39  $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$

$$16x - 36y + 24x + 16y =$$

$$40x - 20y =$$

40  $6(9a - 3b) - 8(2a + 4b)$

$$54a - 18b - 16a - 32b =$$

$$38a - 50b =$$

$$-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k) \quad (41)$$

$$10g - 12k + 18g - 36k =$$

$$28g - 48k =$$

$$-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z) \quad (42)$$

$$-50x - 40z - 24x + 42z =$$

$$-74x + 2z =$$

43 رة قدم:

$$53(60 + 60)$$

$$53(60) + 53(60) =$$

$$6360yd^2 =$$

44 تخفيضات:

$$630 - (170 + 350 + 110)(0.30) \quad (a)$$

$$360 - [170(0.30) + 350(0.30) + 1110(0.30)] \quad (a)$$

(b) بحل المعادلتين السابقتين نجد ان المبلغ الذي سيدفعه أحمد = 441 ريالاً.

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{4}(6x - 2y) \quad (45)$$

$$\frac{5}{3}x + \frac{8}{3}y + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y =$$

$$\frac{19}{6}x + \frac{13}{6}y =$$

$$\frac{2}{5}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d) \quad (46)$$

$$\frac{12}{5}c - \frac{16}{5}d + 3c - \frac{27}{4}d =$$

$$\frac{27}{5}c - \frac{199}{20}d =$$

$$-6(3a + 5b) - 3(6a - 8c)$$

47

$$-18a - 30b - 18a + 24b =$$

$$-36a - 30b + 24c =$$

$$-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z)$$

48

$$-27x - 72y - 15x - 30z =$$

$$-42x - 72y - 30z =$$

ديكور:

49

$$14\frac{1}{2}m = \frac{29}{2}m = 2\left(3\frac{3}{4}\right) + 3\left(2\frac{1}{3}\right) \quad (a)$$

$$\text{تعريف العدد الكسري} \quad 2\left(3 + \frac{3}{4}\right) + 3\left(2 + \frac{1}{3}\right) = 2\left(3\frac{3}{4}\right) + 3\left(2\frac{1}{3}\right) \quad (b)$$

$$\text{خاصية التوزيع} \quad 2(3) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3(2) + 3\left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$\text{بالضرب} \quad 6 + \frac{3}{2} + 6 + 1 =$$

$$\text{الخاصية التبديلية للجمع} \quad 6 + 6 + 1 + \frac{3}{2} =$$

$$\text{بالجمع} \quad 13 + \frac{3}{2} =$$

$$\text{بالجمع} \quad 14\frac{1}{2} =$$

تمثيلات متعددة:

50

a جدولياً:

الطبيعية	الكلية	الصحيحة	النسبية	غير النسبية
3	0، 3	3، 0، $-\frac{15}{3}$	3، $\frac{3}{8}$ ، 0، $-\frac{15}{3}$	$-\sqrt{6}$ ، $\pi$

$\sqrt{36}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{36}$ ،	$\sqrt{36}$ ، 4.1 ،	
-------------	-------------	---------------	---------------------	--

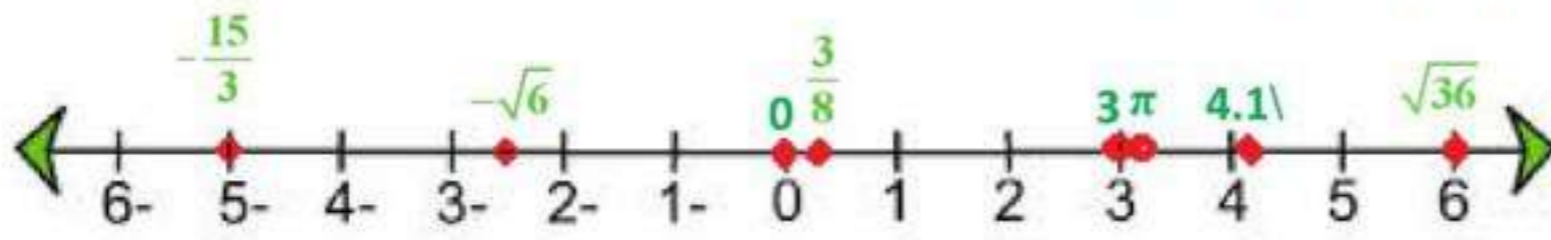
$$4.1 = 4.1, -\frac{15}{3} = -5, 3 = 3.0, -\sqrt{6} \approx -2.449 \quad (b)$$

التحويل الى ارقام عشرية

$$\sqrt{36} = 6, \pi = 3.14, 0 = 0, \frac{3}{8} = 0.375,$$

الترتيب:

$$\sqrt{36}, 4.1, \pi, 3, \frac{3}{8}, 0, -\sqrt{6}, -\frac{15}{3}$$



بيانيا: (c)

لفظيا: يمكن بسهولة مقارنة الأعداد الحقيقية وترتيبها عن طريق كتابتها على الصورة العشرية. (d)

### مسائل مهارات التفكير العليا

51 د المختلف:  $\sqrt{81}$  من الأعداد النسبية وباقي الأعداد من الأعداد الغير نسبية

52 تحدد:

$$w = 12(5r + 6t) \quad @ \quad 48(30r + 36t)$$

$$48 \cdot 6(5r + 6t) =$$

$$24 \cdot 12(5r + 6t) =$$

$$24w =$$

$$48 = 2 \times 24$$

53 ن الخطأ:

إجابة فاطمة صحيحة وخديجة بدلت معاملات a ، b عند ضرب القوس الثاني

في العدد 6 -

54 بر:

صحيح أحيانا ،  $\pi$  ، e عدنان غير نسبيين ولا يتضمنان إشارة الجذر.

55 ألة مفتوحة:

لا،  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$  و 5 عدد نسبي.

56:

لا تنطبق خاصية التبديل على عمليتي الطرح والقسمة وذلك لان الترتيب في هاتين العمليتين مهم بينما في عمليتي الجمع والضرب الترتيب غير مهم

مثال: عملية الجمع و الضرب:  $2 + 3 = 3 + 2$  @  $2 \times 3 = 3 \times 2$   
عملية الطرح و القسمة:  $5 - 3 \neq 3 - 5$  @  $\frac{5}{3} \neq \frac{3}{5}$

### تدريب على اختبار

57 الحد العاشر في المتتابعة  $2, 4, 7, 11, 16, \dots$  هي الإجابة (B) 56

58 أبسط صورة للعبارة:  $2(x - y) - 3(y - 2x)$  هي الإجابة (B)  $8x - 5y$

### مراجعة تراكمية

أوجد قيمة:

$$64 = 8 \times 8 = 8(2)^3 = 8(4 - 2)^3$$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) \quad (60)$$

$$b^2 - 10b + 21 = (b - 7)(b - 3) \quad (61)$$

أوجد قيمة كل مما يأتي علما بأن  $a = 3$  ,  $b = \frac{2}{3}$  ,  $c = -1.7$

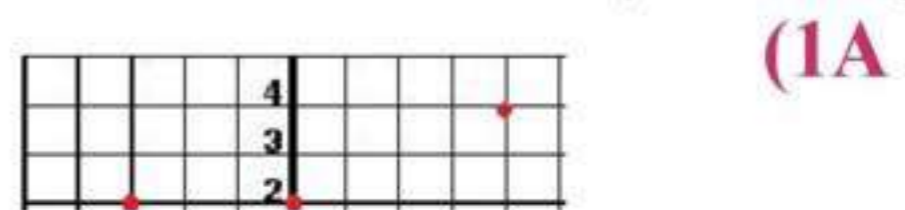
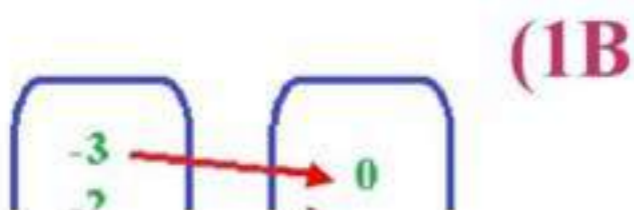
$$\frac{10}{9} = \frac{1}{9} + \frac{9}{9} = \frac{1}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{3} + 1 = \frac{1}{6}b + 1 \quad (62)$$

$$-1.176 \approx \frac{2}{-1.7} = \frac{\cancel{2} \cdot \frac{2}{\cancel{2}}}{-1.7} = \frac{a \cdot b}{c} \quad (63)$$

## ٢ - ١ العلاقات والدوال



١. مجال و مدى كل علاقة فيما يأتي، و بين أيهما دالة ، و إن كانت دالة، فهل هي متباينة أم لا؟





المجال =  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4\}$       المجال =  $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$   
 المدى =  $\{-3, -2, 1, 2, 4\}$       المدى =  $\{0, 2, 4, 6\}$   
 ليست دالة      هذه العلاقة دالة و هي ليست متباينة

عمال:

علاقة منفصلة ؛ تمثل دالة

3 المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية  
 المدى:  $\{y | y \geq 1\}$

4  $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$

$g(2.8) = 0.5(2.8)^2 - 5(2.8) + 3.5 = -6.58$  (4A)

$g(4a) = 0.5(4a)^2 - 5(4a) + 3.5 = 8a^2 - 20a + 3.5$  (4B)



حدد مجال كل دالة فيما يأتي ومداهها، وبين ما إذا كانت دالة أم لا وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟ (مثال 1)

1 المجال =  $\{-2, 5, 6\}$  ، المدى =  $\{-8, 1, 3\}$  العلاقة دالة متباينة.

2 المجال =  $\{-2, 1, 4\}$  ، المدى =  $\{-1, 2, 3, 5\}$  العلاقة ليست دالة

3 المجال =  $\{-2, 1, 4, 8\}$  ، المدى =  $\{-4, -2, 6\}$  العلاقة دالة ليست متباينة

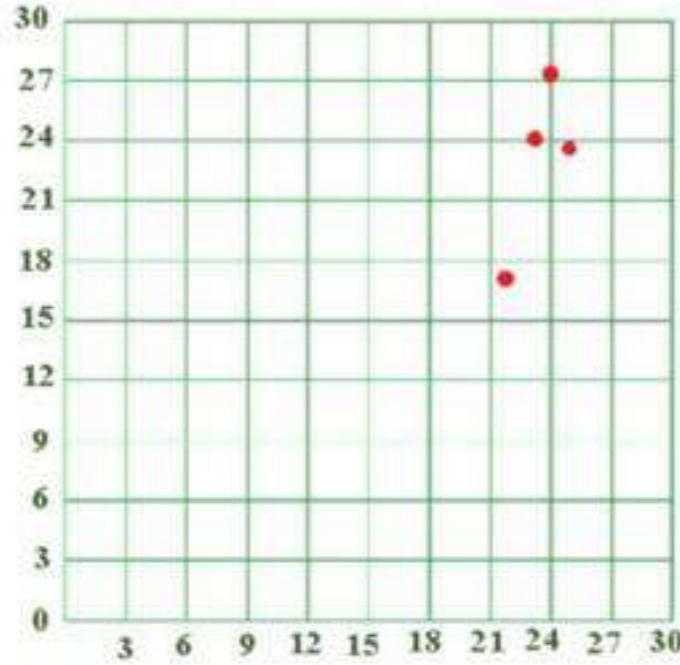
4

كرة قدم: (مثال 2)

(a) المجال =  $\{25, 24, 23, 22\}$  ، المدى =  $\{27.2, 24.1, 23.5, 16.2\}$ (b)  $\{(22, 23.5), (25, 27.2), (24, 24.1), (23, 16.2)\}$ 

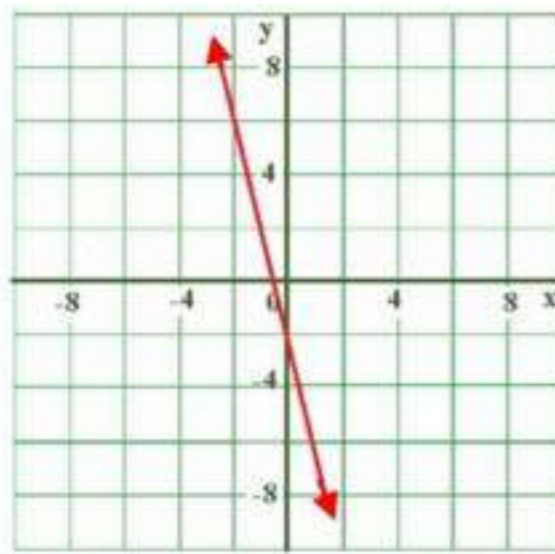
(c) العلاقة منفصلة

(d) العلاقة دالة



(مثال 3)

مثل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد مجالها، ومداهها، وحدد إذا ما كانت دالة أم لا، وان كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

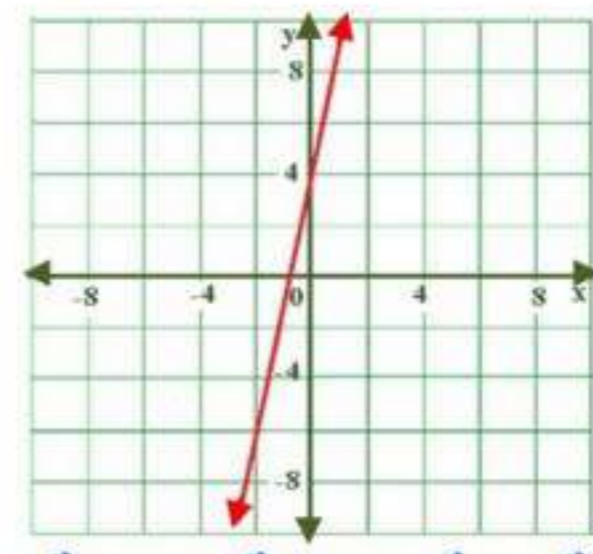


6

المعادلة دالة متباينة متصلة،

،  $R$ دالة متباينة متصلة  $R$ 

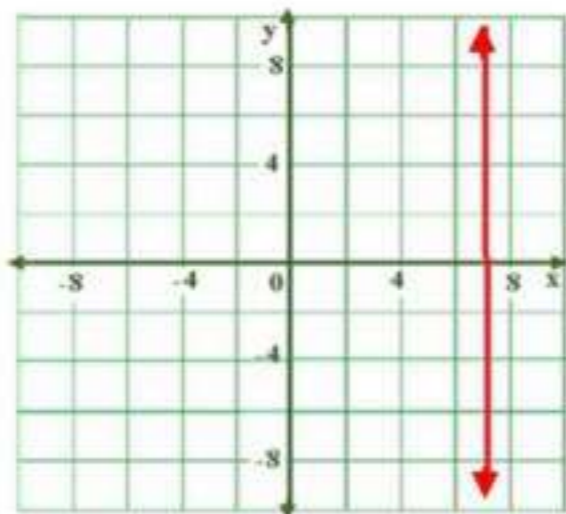
مداها =



5

المعادلة دالة متباينة متصلة،

مجالها =

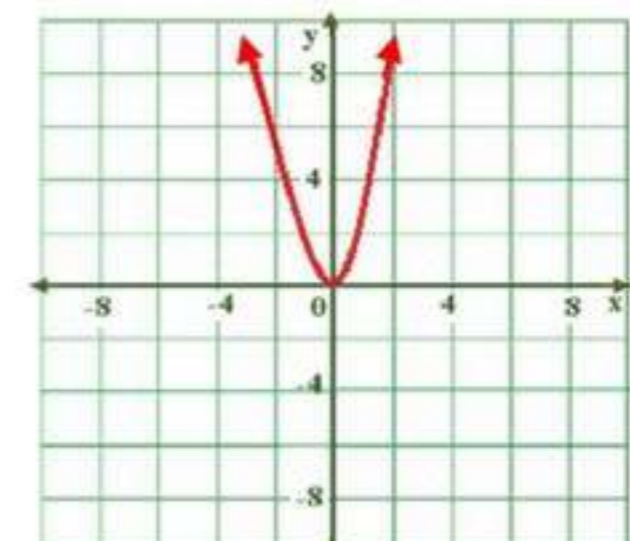
،  $R =$  مجالهامداها = دالة متباينة متصلة  $R =$ 

8

المعادلة دالة غير متباينة متصلة،

،  $\{7\}$ ليست دالة  $R$ 

مداها =



7

المعادلة دالة غير متباينة متصلة،

مجالها =  $\{y | y \geq 0\}$ مداها =  $\{y | y \geq 0\}$  دالة ليست متباينة

أوجد قيمة كل مما يأتي: (مثال 4)

9  $f(x) = -4x - 8$  إذا كانت  $f(-3)$

$$f(-3) = -4(-3) - 8 = 4$$

10  $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$  إذا كانت  $g(5)$

$$g(5) = -2(5)^2 - 4(5) + 1 = -69$$

## تدرب وحل المسائل

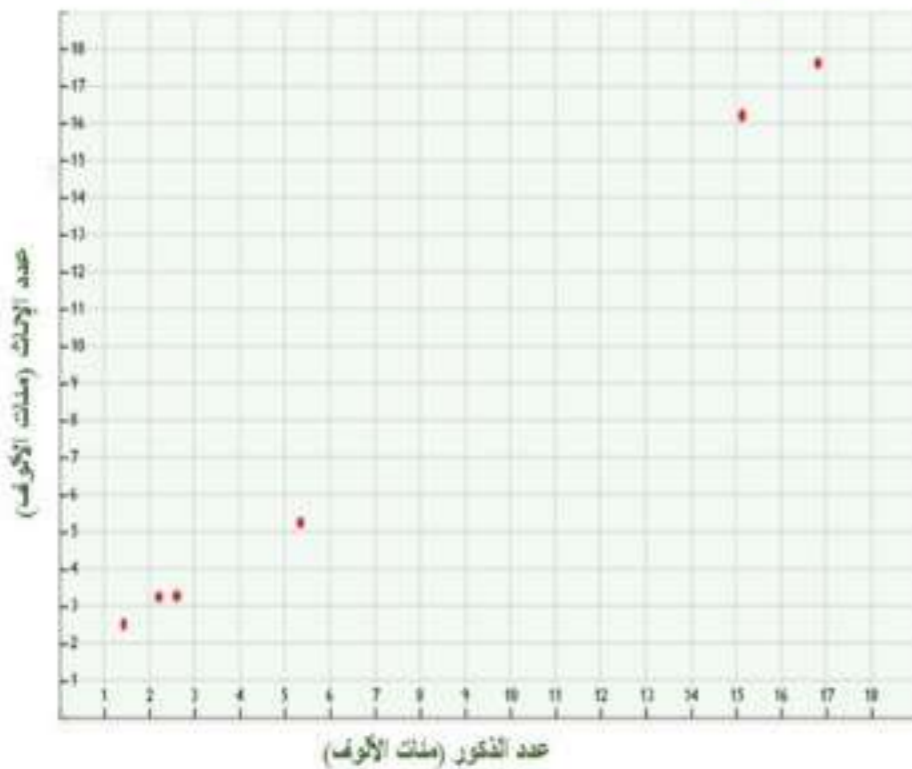
حدد مجال كل دالة فيما يأتي ومداهها، وبين ما إذا كانت دالة أم لا وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟

11 المجال =  $\{1.2, 0.4, -0.3\}$  ، المدى =  $\{-1, -3, -6\}$  العلاقة دالة متباينة.

12 المجال =  $\{4, 2, -8\}$  ، المدى =  $\{14, -4, -6\}$  العلاقة ليست دالة

13 المجال =  $\{5, 3, -1\}$  ، المدى =  $\{3, 0, -4\}$  العلاقة ليست دالة

14 سكان:



a التمثيل البياني ←

b المجال =

$$\{1782178, 216800, 543833, 145764, 264656\}$$

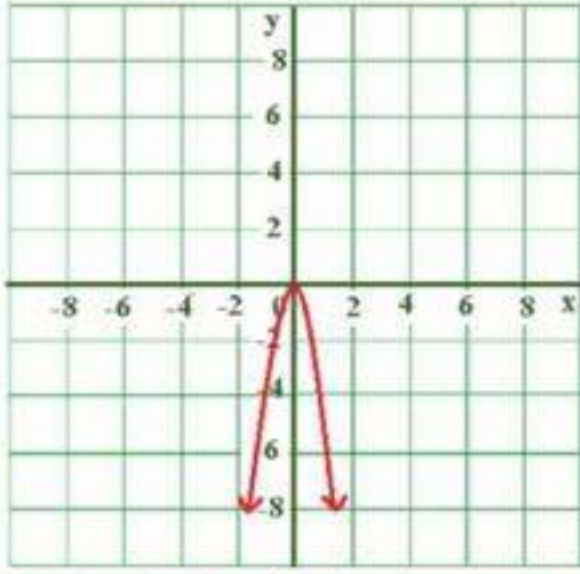
$$\{517258, 1627541, 1773382, 145969, 243225, 232883\} = \text{المدى}$$

c العلاقة منفصلة

d نعم؛ لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من المدى. لذا العلاقة دالة.

(مثال 3)

مثل كل معادلة فيما يأتي بيانيا، ثم حدد مجالها، ومداهها، وحدد إذا ما كانت دالة أم لا، وان كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.



مجالها = جميع الأعداد الحقيقية

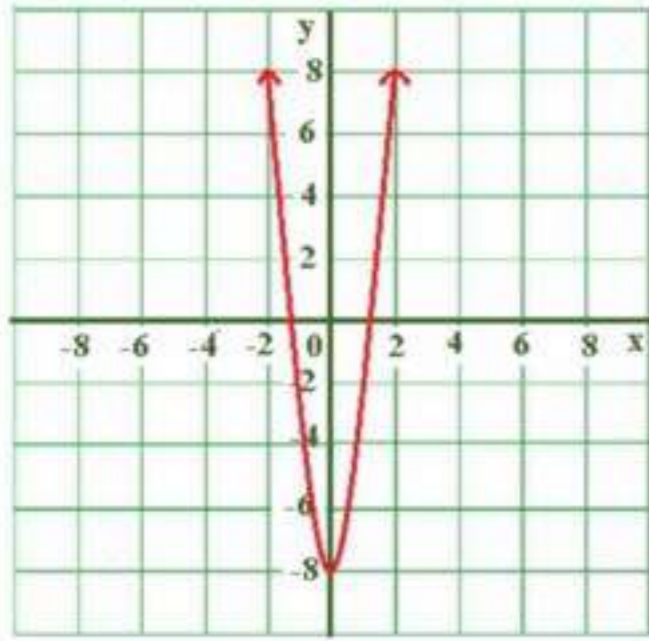
$$\{y | y \leq 0\} = \text{مداهها}$$

المعادلة دالة غير متباينة متصلة،

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

$$\{y | y \geq -8\} = \text{المدى}$$

دالة ؛ ليست متباينة ؛ متصلة



أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$f(-8) \text{ إذا كانت } f(x) = 5x^3 + 1$$

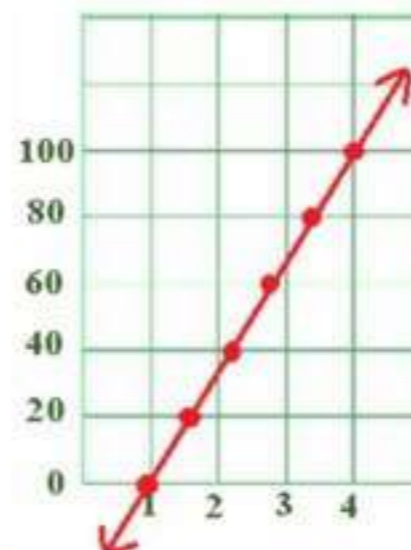
$$5(-8)^3 + 1 = 5(-512) + 1 = -2559$$

$$f(2.5) \text{ إذا كانت } f(x) = 16x^2$$

$$f(2.5) = 16(2.5)^2 = 100$$

غوص:

(a) التمثيل البياني:



(b) المجال = {100, 80, 60, 40, 20, 0} ، المدى = {4, 3.4, 2.8, 2.2, 1.6, 1}

c العلاقة دالة

إذا كانت  $f(x) = 3x + 2$  ،  $g(x) = -2x^2$  ،  $h(x) = -4x^2 - 2x + 5$  فلوجد قيمة كل مما يأتي:

$$g(-6) = -2(-6)^2 = -2 \times 36 = -72 \quad (20)$$

$$h(3) = -4(3)^2 - 2(3) + 5 = -36 - 6 + 5 = -37 \quad (21)$$

$$h(8) = -4(8)^2 - 2(8) + 5 = -256 - 16 + 5 = -267 \quad (22)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{3}\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right) + 2 = 4 \quad (23)$$

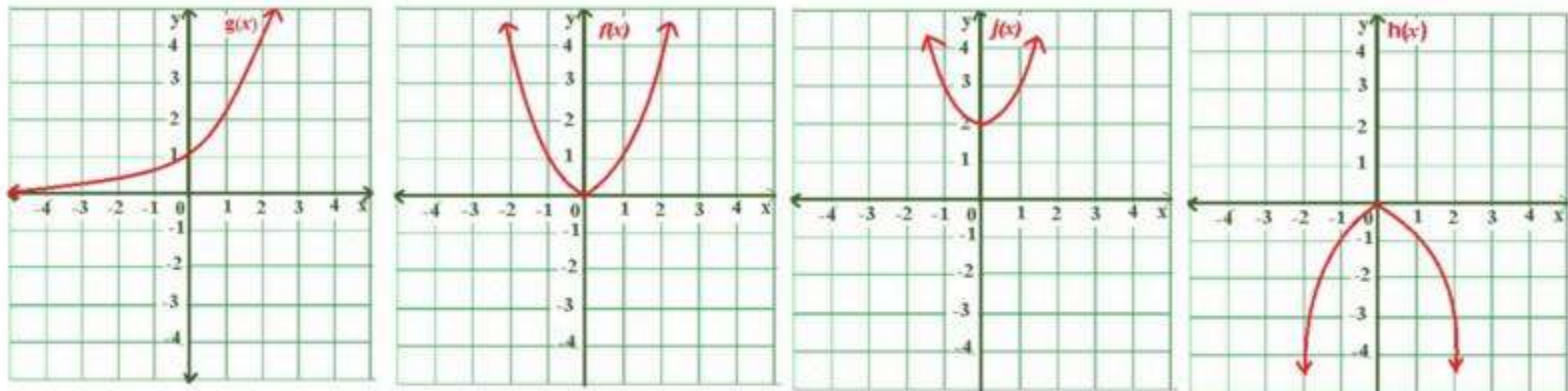
$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\cancel{2} \times \frac{9}{\cancel{4}} = -\frac{9}{2} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{5}\right) &= -4\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{5}\right) + 5 = -\frac{4}{25} - \frac{2}{5} + 5 \\ &= \frac{-8 - 20 + 250}{50} = \frac{222}{50} = \frac{111}{25} \end{aligned} \quad (25)$$

تمثيلات متعددة:

بيانياً:

(26)



عدد المرات الممكنة	الدالة
0 , 1, 2	$f(x) = x^2$
0 , 1	$g(x) = 2x$
0 , 1, 2	$h(x) = -x^2$

جدولياً:

0 , 1, 2	$j(x) = x^2 + 2$
----------	------------------

تحليلياً:  $g(x)$  متباينة بينما الدوال  $f(x)$  ,  $h(x)$  ,  $j(x)$  غير متباينة.  
جدولياً:

المتباينة	الدالة
لا	$f(x) = x^2$
نعم	$g(x) = 2x$
لا	$h(x) = -x^2$
لا	$j(x) = x^2 + 2$

ما مع فهد من نقود بعد 8 أشهر

$$p(t) = 800 + 200t = p(t)$$

$$p(8) = 800 + 200(8) = p(8)$$

$$2400 = 800 + 1600 = p(8) \text{ ريالاً}$$

27

### مسائل مهارات التفكير العليا

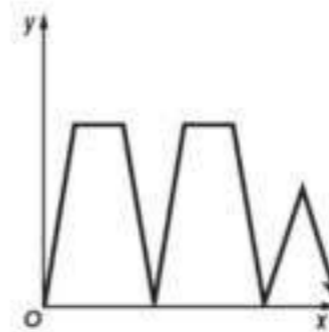
اكتشف الخطأ:

28

حل احمد صحيحا حيث أن خالد لم يقم بتربيع العدد 3 قبل الضرب في 4-

مسألة مفتوحة:

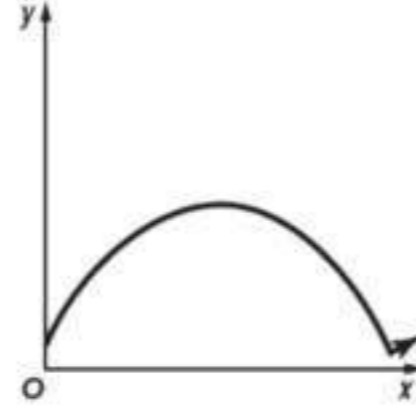
29



a



b



تحد:

30

إذا كانت  $f(x), g(x)$  دالتين بحيث

$a = 5, b = 8$  وكانت  $f(a) = 19, g(a) = 33, f(b) = 31, g(b) = 51$   
فأوجد دالتين  $f(x), g(x)$  تحققا المعطيات السابقة.

$$f(x) = 4x - 1$$

$$g(x) = 6x + 3$$

أكتب:

31

العلاقة هي دالة إذا ارتبطت كل قيمة من قيم المتغير  $x$  بقيمة واحدة فقط من قيم المتغير  $y$  ويفشل اختبار الخط الرأسي إذا ارتبطت أكثر من قيمة من المتغير  $x$  بقيمة واحدة للمتغير  $y$

## تدريب على اختبار

بركة سباحة:

32

الجواب الصحيح (A)  $g = 19500 - 6m$

الجواب الصحيح (C)  $x^2 + 2x + 1$

33

## مراجعة تراكمية

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$6(3a - 2b) + 3(5a + 4b)$$

$$18a - 12b + 15a + 12b =$$

$$33a =$$

34

$$\begin{aligned}
 & -4(5x - 3y) + 2(y + 3x) \\
 & -20x + 12y + 2y + 6x = \\
 & \quad \quad \quad -14x + 14y =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -7(2c - 4d) + 8(3c + d) \\
 & -14c + 28d + 24c + 8d = \\
 & \quad \quad \quad 10c + 36d =
 \end{aligned}$$

36

حل كل معادلة فيما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل:

$$\begin{aligned}
 & 4(2y - 3) + 5(3y + 1) = -99 \\
 & 8y - 12 + 15y + 5 = -99 \\
 & \quad \quad \quad 23y - 7 = -99 \\
 & \quad \quad \quad 23y = -92 \\
 & \quad \quad \quad y = -4
 \end{aligned}$$

37

$$\begin{aligned}
 & 8d - 4 + 3d = 2d - 100 - 7d \\
 & \quad \quad \quad 11d - 4 = -100 - 5d \\
 & \quad \quad \quad 16d - 4 = -100 \\
 & \quad \quad \quad 16d = -96 \\
 & \quad \quad \quad d = -6
 \end{aligned}$$

38

40

$$\begin{aligned}
 & 10y - 5 - 3y = 4(2y + 3) - 20 \\
 & \quad \quad \quad 7y - 5 = 8y + 12 - 20 \\
 & \quad \quad \quad -5 = y - 8 \\
 & \quad \quad \quad 3 = y
 \end{aligned}$$



# توسع ١-٢ معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة

بين إذا كانت كل علاقة فيما يأتي متصلة أو منفصلة ، و فسر إجابتك.

1 تحويل الوحدات:  
متصلة ؛ لأنه يمكن أن تكون هناك أطوال مساوية لأعداد غير صحيحة.

2 البريد الإلكتروني:  
منفصلة؛ لأنه لا يمكن استلام جزء من رسالة بريد إلكترونية.

3 متصلة؛ المجال، أو عدد الساعات هو مجموعة قيم أكبر من أو تساوي صفر.  
لذا فإن تمثيل الدالة البياني هو مستقيم.

منفصلة؛ المجال، أو عدد الركاب هو مجموعة من الأعداد الكلية، لذا فإن تمثيل الدالة البياني يتكون من نقاط متباعدة.

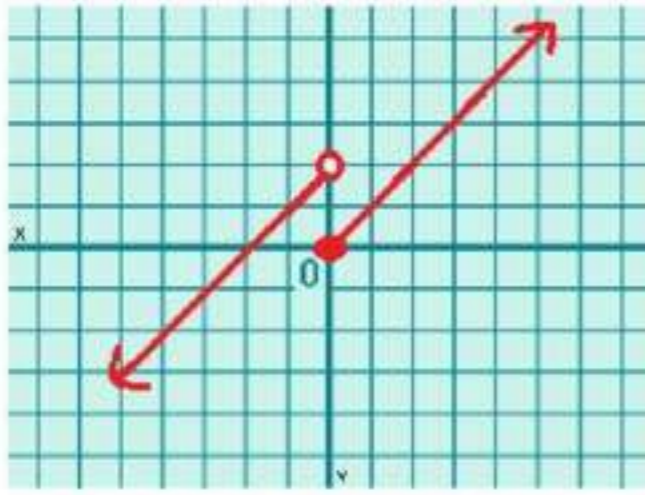
اكتب:

5

الدالة التي تصف المبلغ المتجمع  $y$  من بيع  $x$  تذكرة هي دالة منفصلة وذلك لأن قيم المجال هي أعداد كلية والدالة التي تصف السعر  $y$  لعدد  $x$  كيلو جرام من التفاح هي دالة متصلة وذلك لأن قيم مجال هذه الدالة هي مجموعة القيم الأكبر من الصفر.

# دوال خاصة<sup>1-3</sup>

## تتق



$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

1

الخطوة 1

$$f(x) = x+2$$
$$f(0) = 0+2 = 2$$

بما أن العدد 0 لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظلة عند النقطة (0,2)

الخطوة 2

$$f(x) = x$$
$$f(0) = 0$$

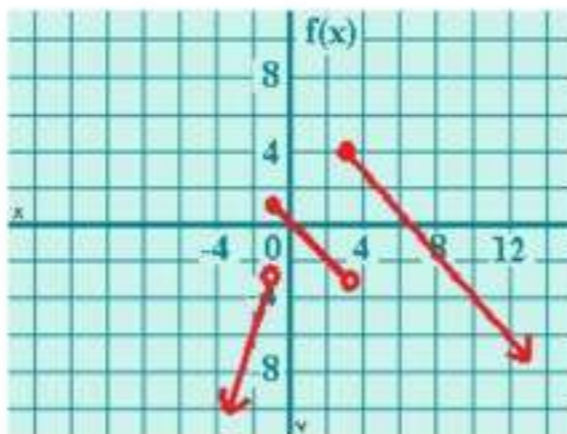
بما أن العدد 0 يحقق المتباينة' لذا نبدأ بدائرة مظلة عند النقطة (0,0)  
بما أن الدالة معرفة عند جميع قيم  $x$  ، لذا **فالمجال: جميع الأعداد الحقيقية.**  
قيم  $f(x)$  للزوج المرتبة في التمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من 0 و جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 0 ،  
**فللمدى : جميع الأعداد الحقيقية.**

$$\frac{4-2}{3-5} = \frac{2}{-2} = -1$$
$$y-2 = -1(x-5)$$
$$y = -x+7$$

$$\frac{1-0}{-1-0} = -1$$
$$y-0 = -1(x-0)$$
$$y = -x$$

$$\frac{-3-(-6)}{-1-(-2)} = 3$$
$$y-(-3) = 3(x-(-1))$$
$$y = 3x$$

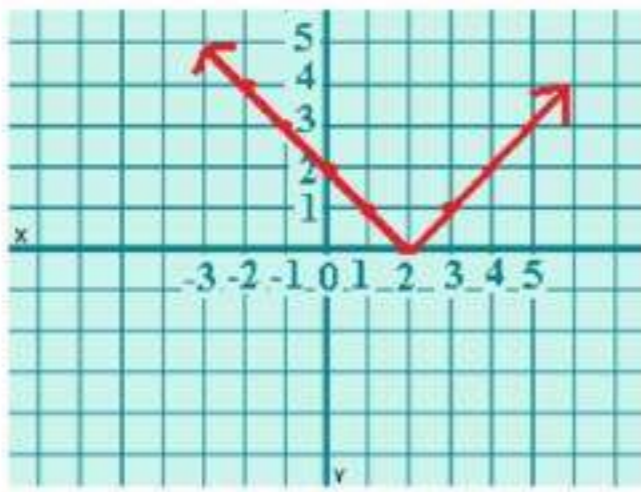
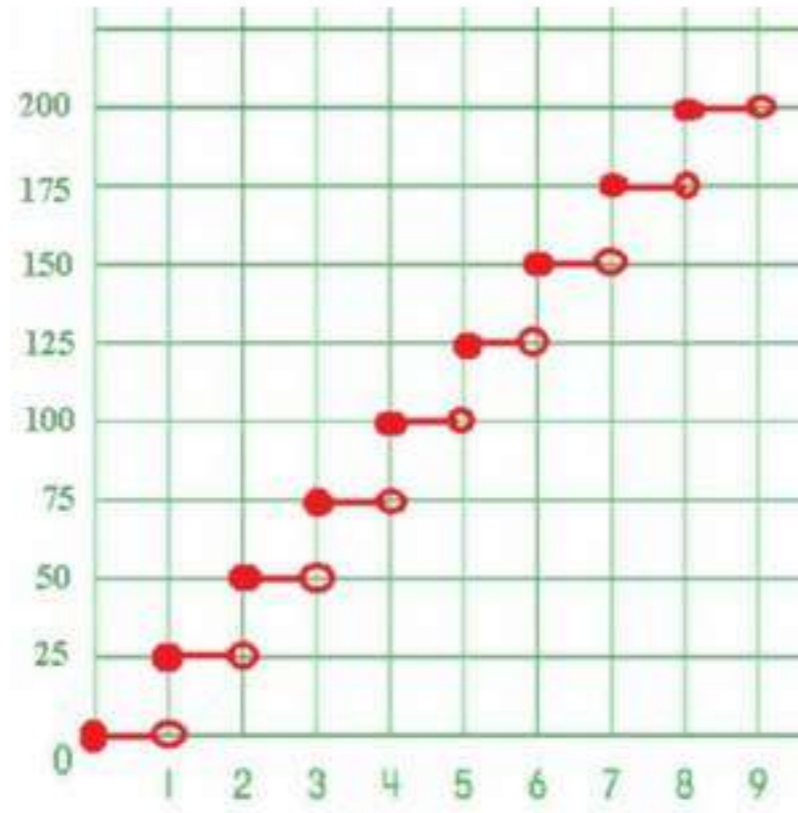
2



$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{if } -1 \leq x < 3 \\ 3x & \text{if } x < -1 \\ -x+7 & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

### إعادة تدوير الورق

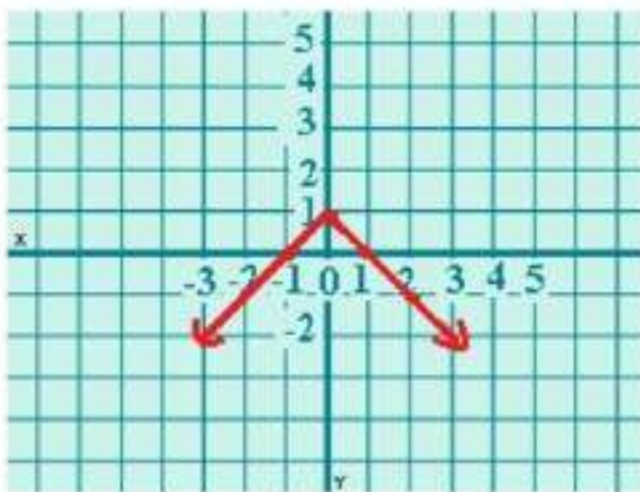
3



$x$	$ x - 2 $
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	1

4  
A

المجال: كل الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$



$x$	$- x  + 1$
-2	-1
-1	0
0	1
1	0
2	-1

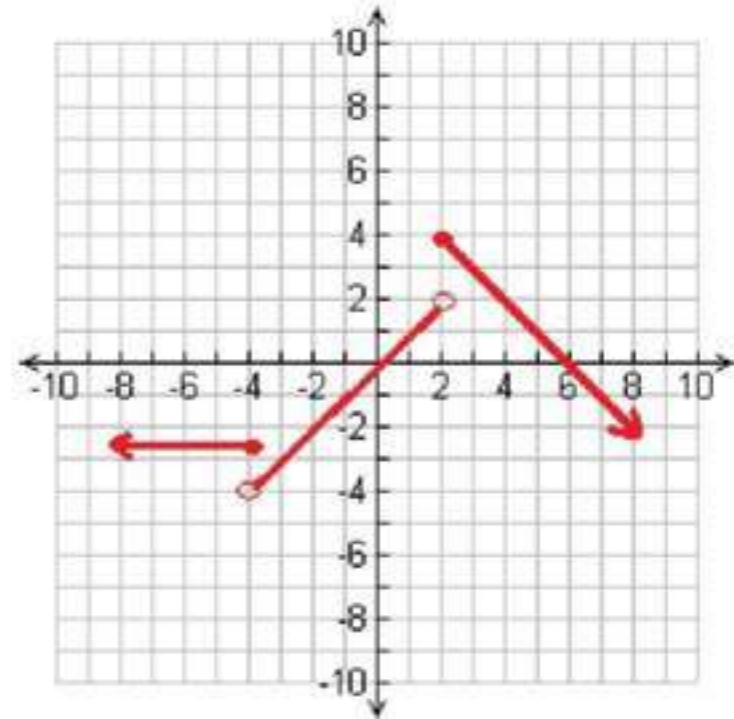
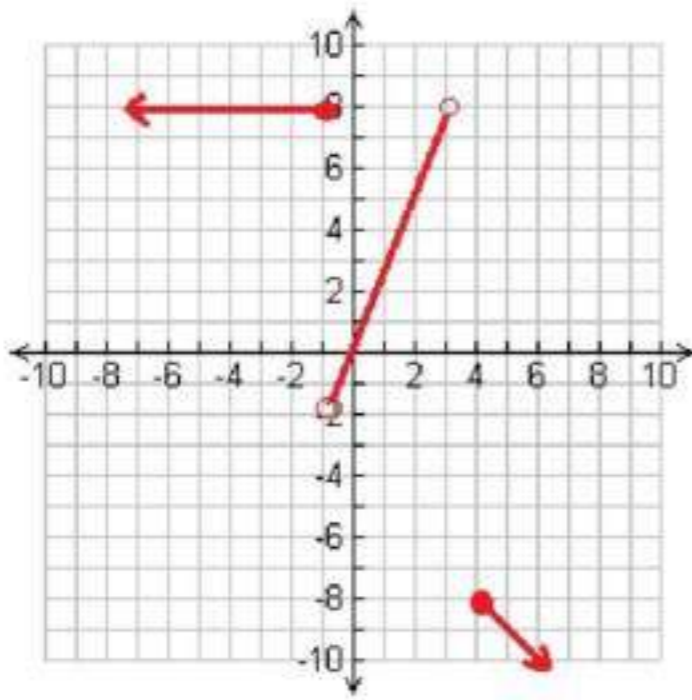
4  
B

المجال: كل الأعداد الحقيقية،  
المدى:  $\{f(x) | f(x) \leq 1\}$

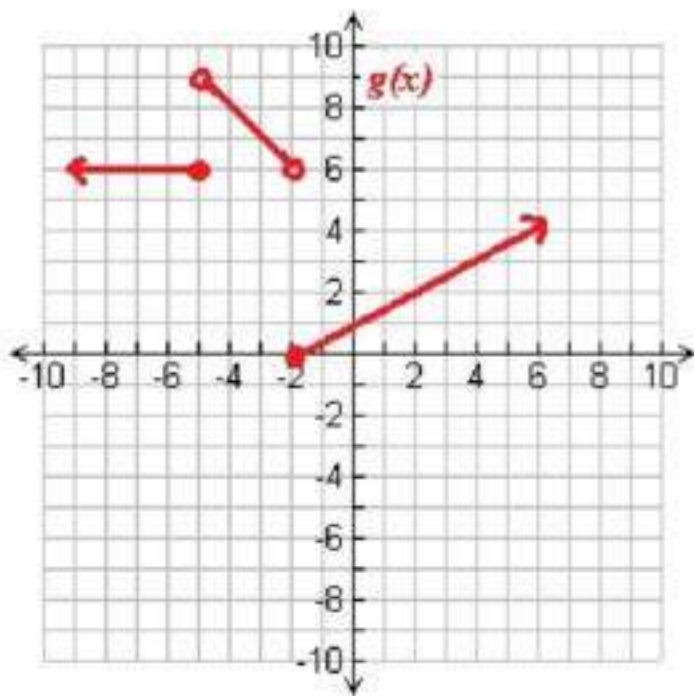
# تأكد

مثل كل دالة مما يأتي، ثم حدد كلا من مجالها ومدائها: (مثال 1)

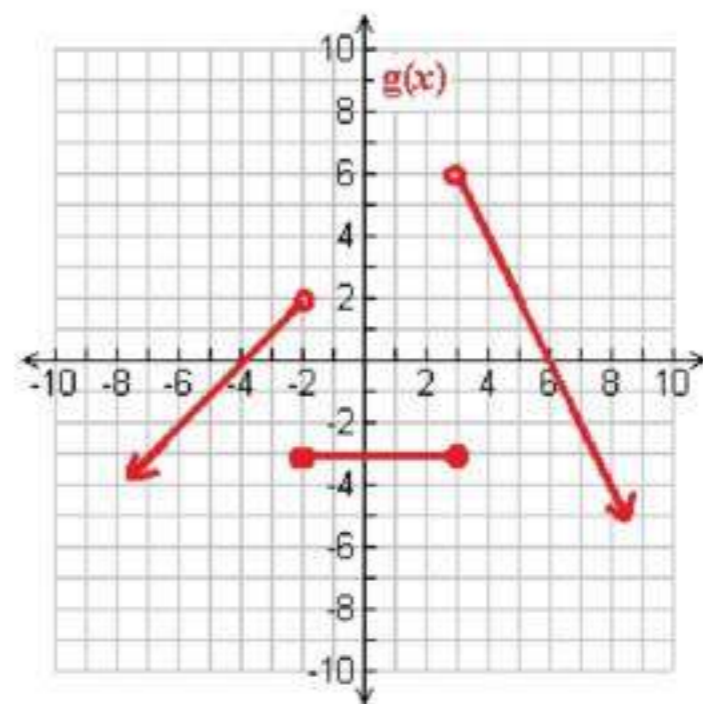
1 المجال: جميع الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ ، المدى:  $\{y | y \leq 4\}$



اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيا في كل مما يأتي: (مثال 2)



$$g(x) = \begin{cases} 6 & , x \leq -5 \\ -x + 4 & , -5 < x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & , x \geq -2 \end{cases}$$

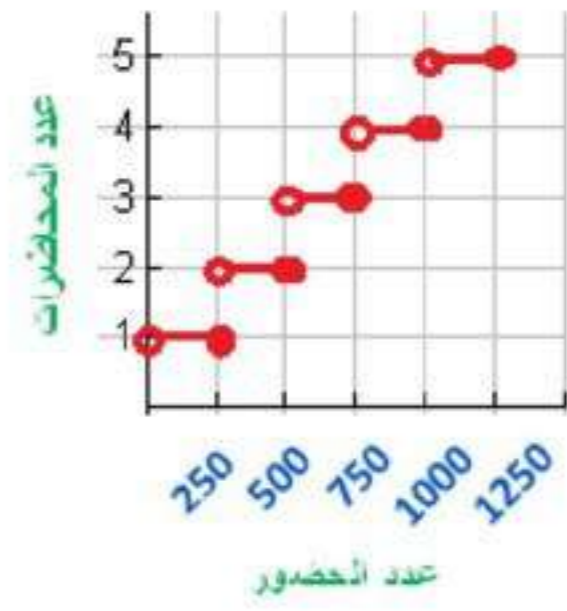


$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , x < -2 \\ -3 & , -2 \leq x \leq 3 \\ -2x + 12 & , x > 3 \end{cases}$$

محاضرات طبية:

5

(مثالان 3 و 4)

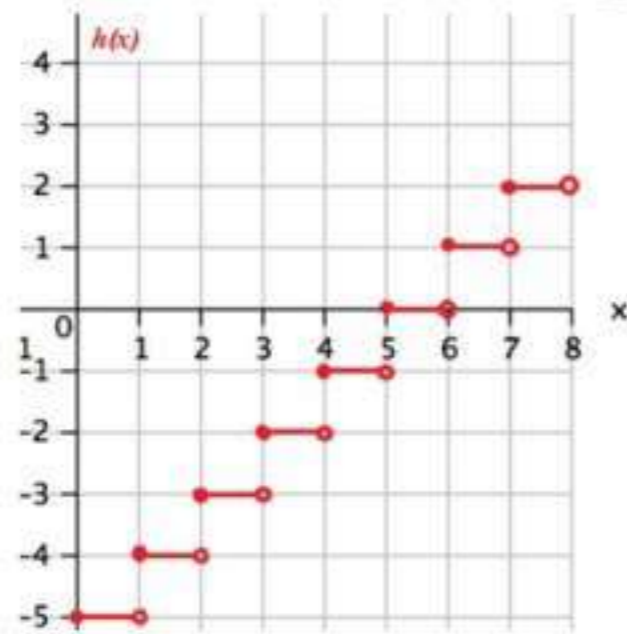


(مثال 1)

مثل كل دالة فيما يأتي بيانها، ثم حدد كلا من مجالها ومداهما:

$h(x) = [x - 5]$

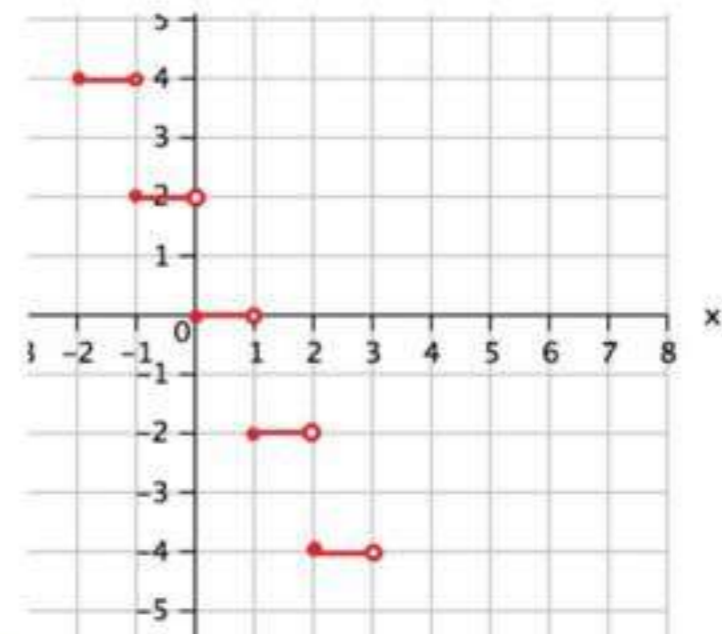
7



المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى: جميع الأعداد الصحيحة

$g(x) = -2[x]$

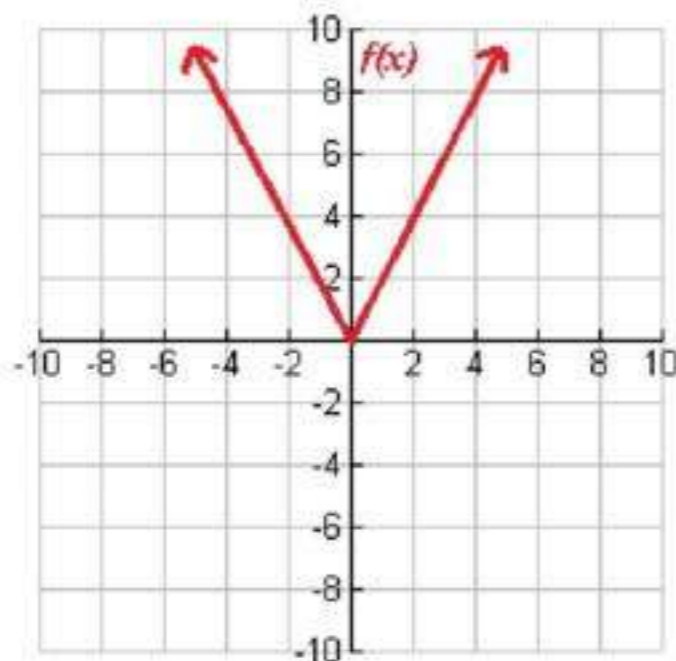
6



المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى: جميع الأعداد الزوجية

$f(x) = 2|x|$

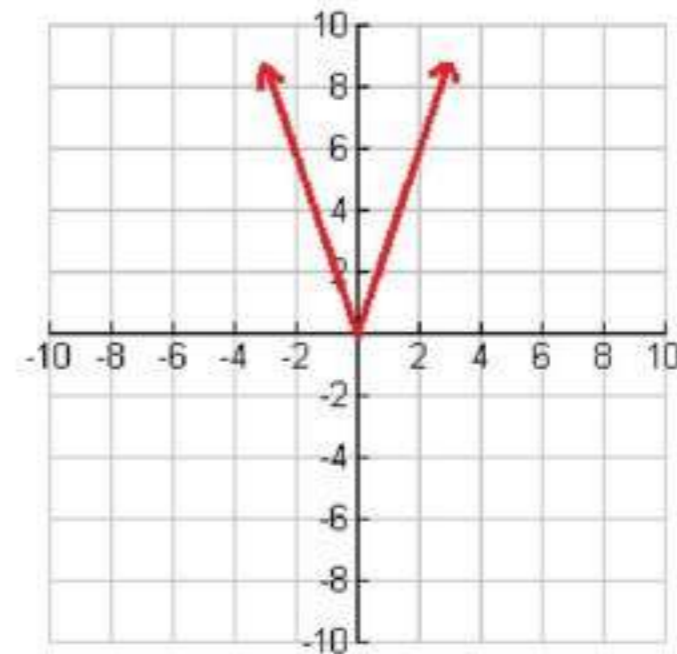
9



المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

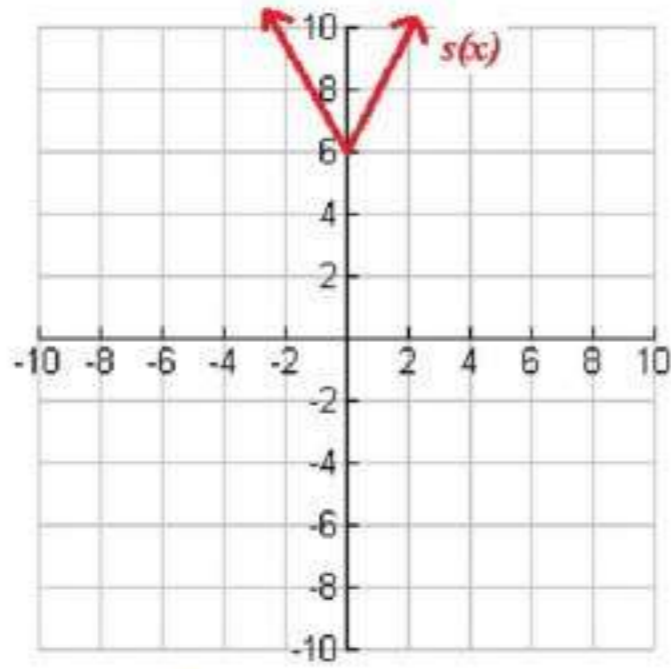
$g(x) = |-3x|$

8



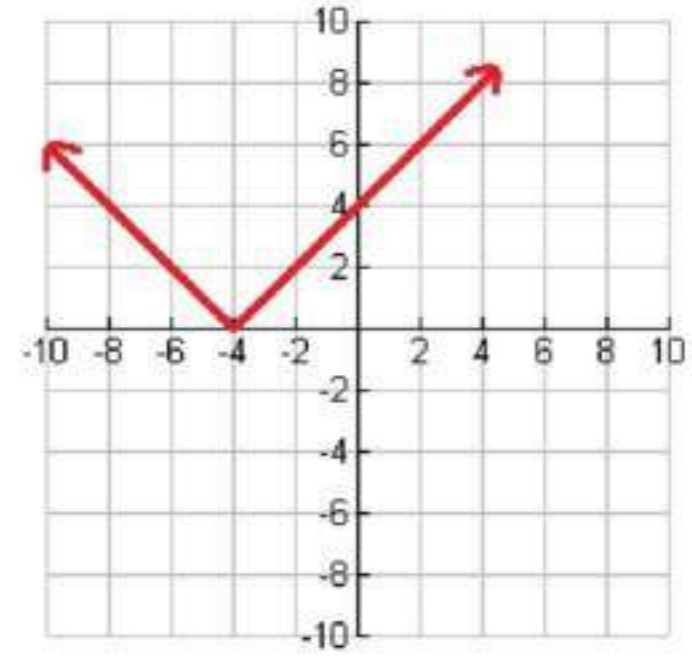
المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{g(x) | g(x) \geq 0\}$

$$s(x) = |-2x| + 6 \quad (11)$$



المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{s(x) | s(x) \geq 6\}$

$$h(x) = |x + 4| \quad (10)$$

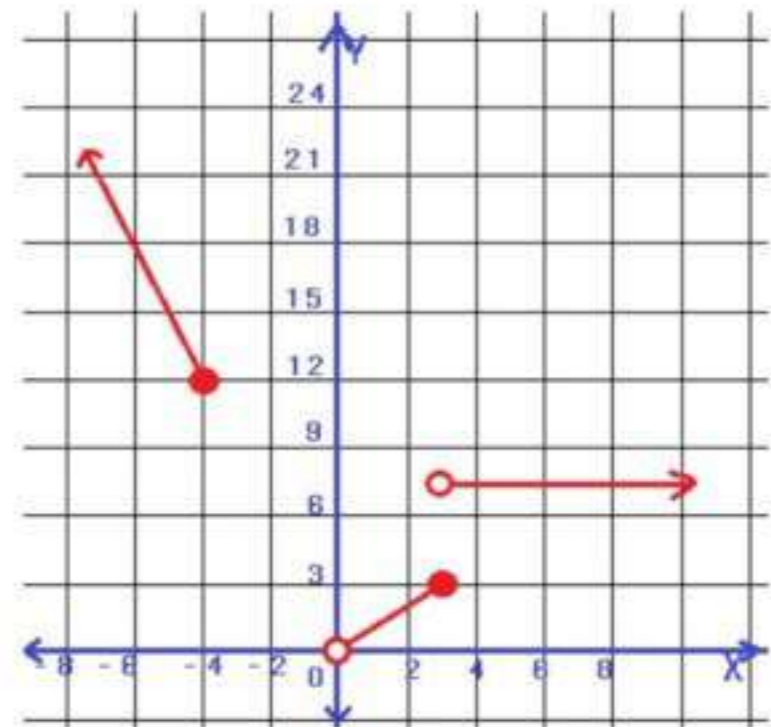


المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{h(x) | h(x) \geq 0\}$

## تدريب وحل المسائل

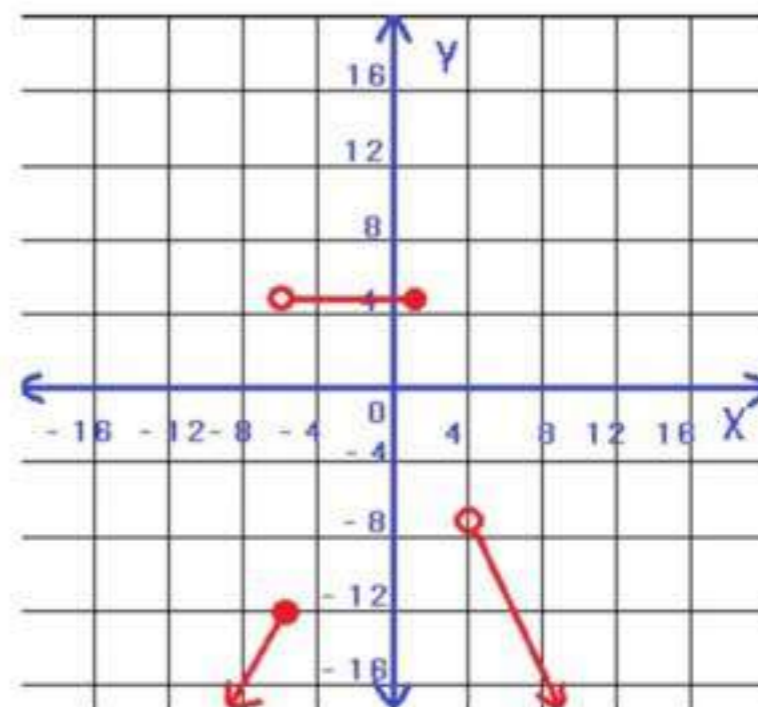
مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد مجالها ومداهما: (مثال 1)

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq -4 \\ x, & 0 < x \leq 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases} \quad (12)$$



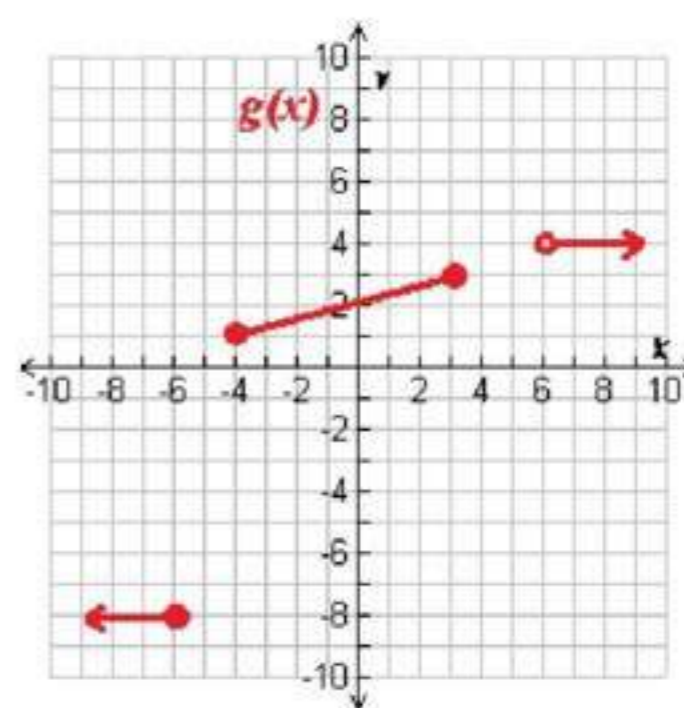
المجال =  $\{x | x \leq -4 \text{ أو } 0 < x\}$   
المدى =  $\{f(x) | f(x) \geq 12 \text{ أو } f(x) = 8 \text{ أو } 0 < f(x) \leq 3\}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -6 \\ 5, & -6 < x \leq 2 \\ -2x+1, & x > 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{المجال} &= \{f(x) | x \leq 2 \text{ أو } x > 4\} \\ \text{المدى} &= \{f(x) | f(x) < -7 \text{ أو } f(x) = 5\} \end{aligned}$$

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني في كل مما يأتي: (مثال 2)



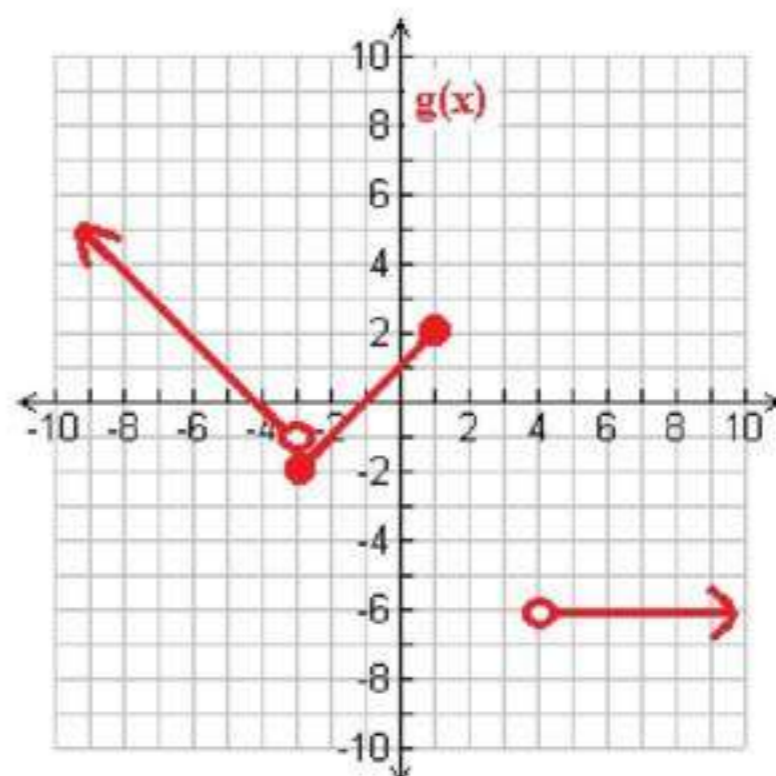
$$\begin{aligned} \frac{1-3}{-4-4} &= \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} \\ y-3 &= \frac{1}{4}(x-4) \\ y &= \frac{1}{4}x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4-4}{6-8} &= 0 \\ y-4 &= 0(x-8) \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-8+8}{-6+8} &= 0 \\ y+8 &= 0(x-8) \\ y &= -8 \end{aligned}$$

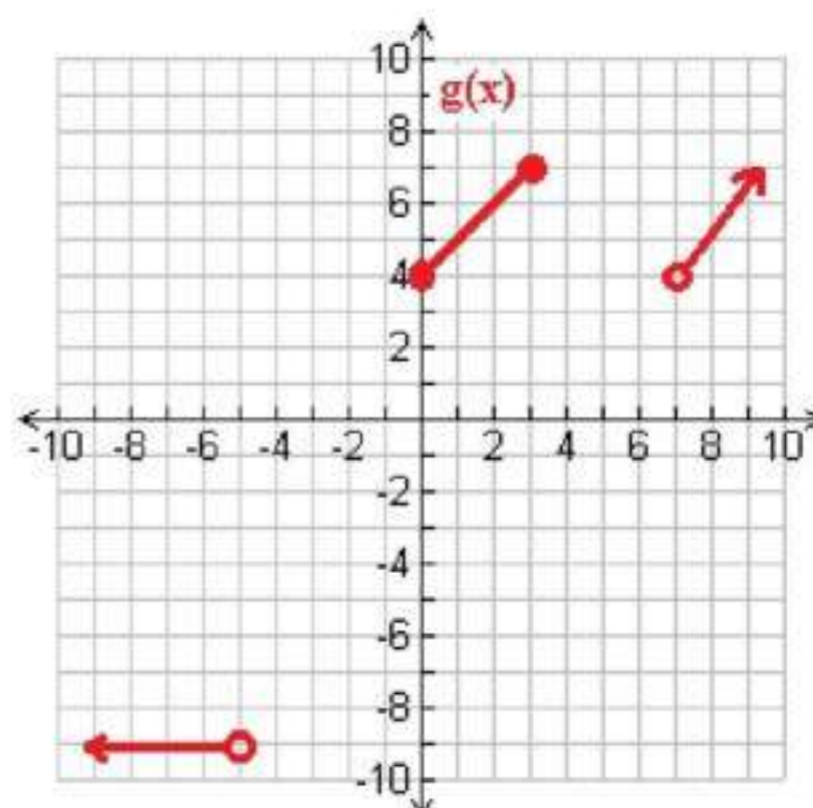
$$g(x) = \begin{cases} -8, & x \leq -6 \\ 0.25x + 2, & -4 \leq x \leq 4 \\ 4, & x > 4 \end{cases}$$





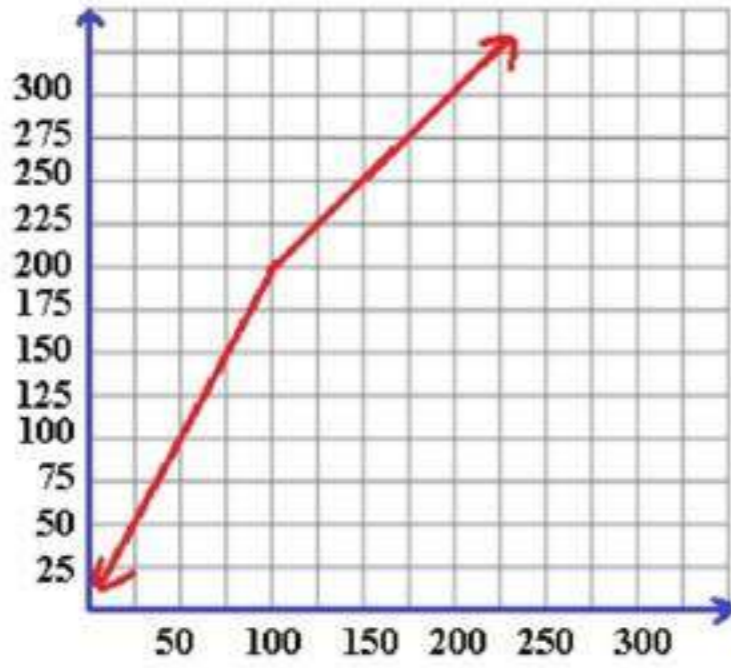
تتبع نفس الطريقة السابقة للحل

$$g(x) = \begin{cases} -x - 4 & , x < -3 \\ x + 1 & , -3 \leq x \leq 1 \\ -46 & , x > 4 \end{cases}$$



تتبع نفس الطريقة السابقة للحل

$$g(x) = \begin{cases} -9 & , x < -5 \\ x + 4 & , 0 \leq x \leq 3 \\ x - 3 & , x > 7 \end{cases}$$

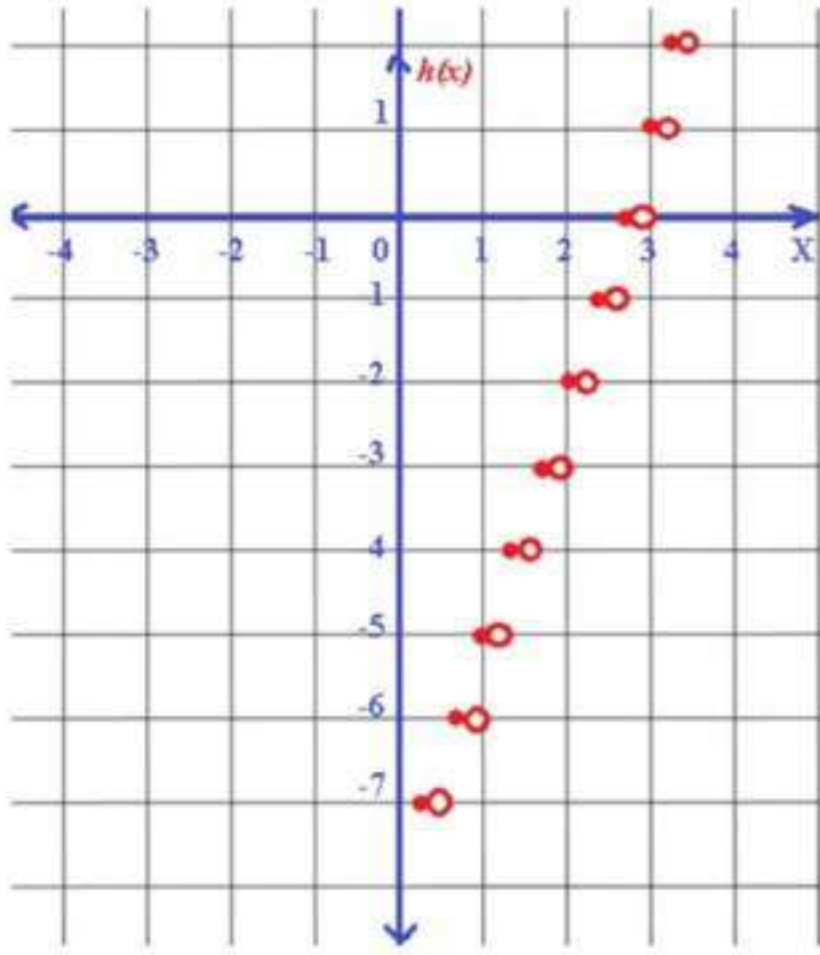


a) الة متعددة التعريف خطية

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 100 \\ x+100, & x > 100 \end{cases} \quad \text{b)}$$

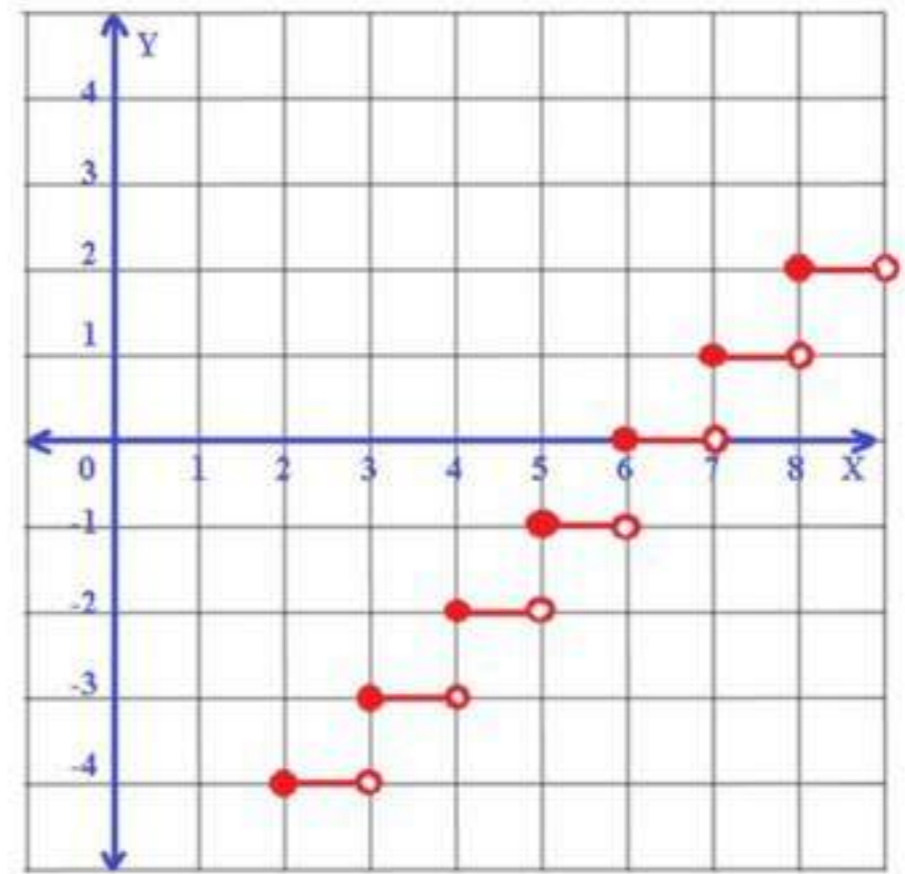
مثل كل دالة فيما يأتي بيانها، ثم حدد كلا من مجالها و مداها:

$$h(x) = 3[x] - 8 \quad \text{19}$$



المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدي: جميع الأعداد الصحيحة

$$f(x) = [x] - 6 \quad \text{18}$$

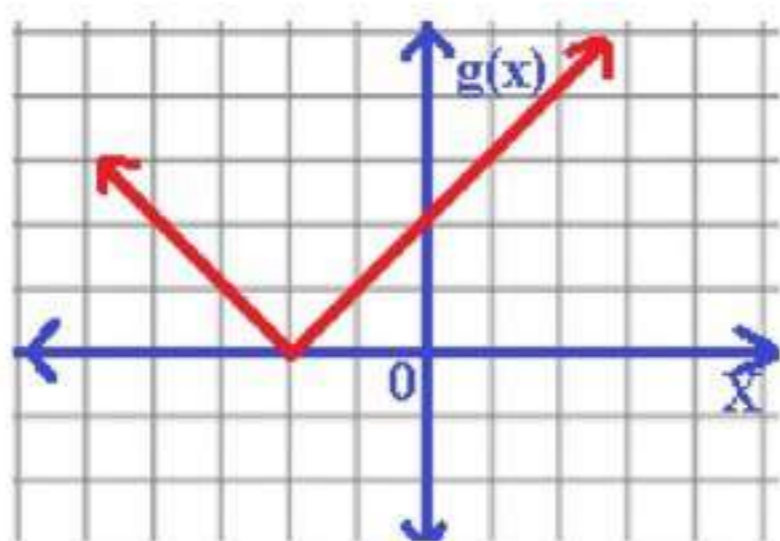


المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدي: جميع الأعداد الصحيحة

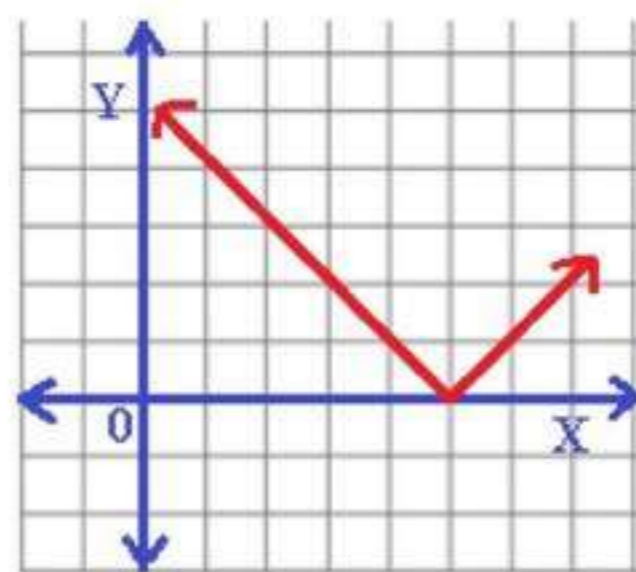
مثل كل دالة فيما يأتي بيانها، ثم حدد كلا من مجالها و مداها:

$$g(x) = |x + 2| \quad \text{21}$$

$$f(x) = |x - 5| \quad \text{20}$$

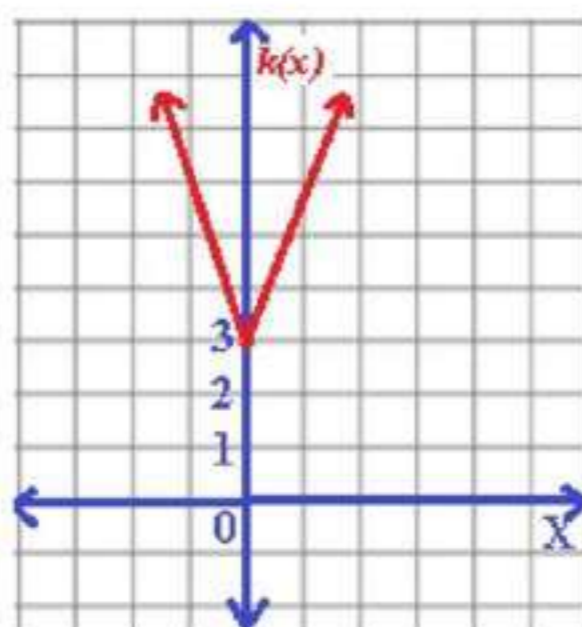


المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{g(x) | g(x) \geq 0\}$



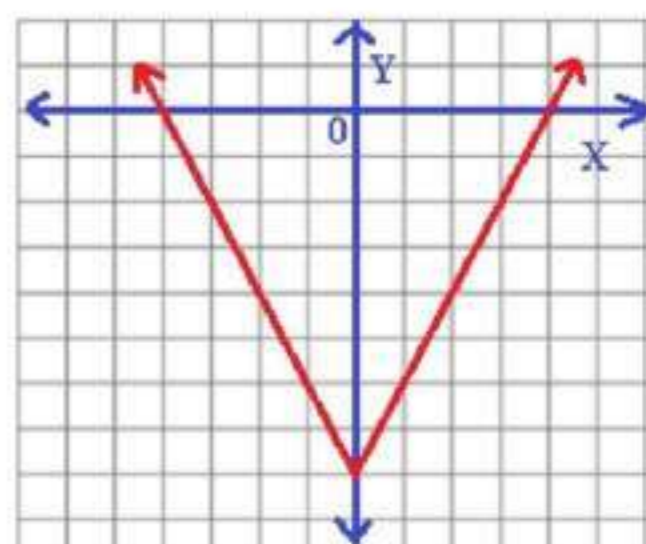
المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

$$k(x) = |-3x| + 3 \quad (23)$$



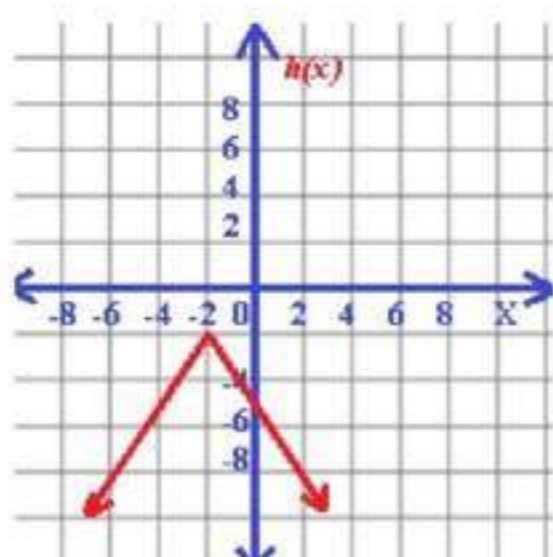
المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{k(x) | k(x) \geq 3\}$

$$h(x) = |2x| - 8 \quad (22)$$



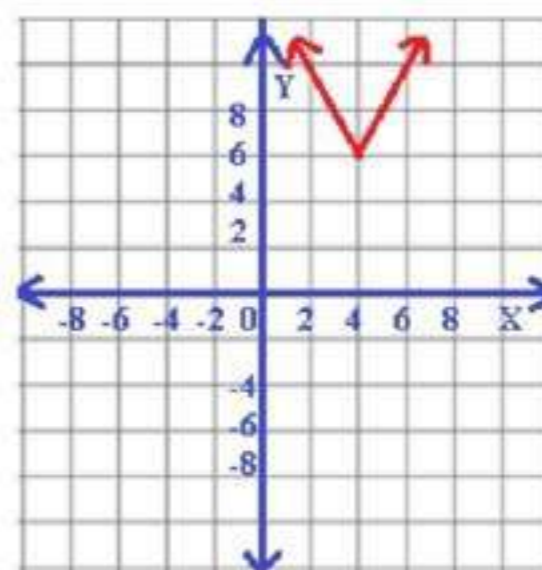
المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{h(x) | h(x) \geq -8\}$

$$h(x) = -3|0.5x + 1| - 2 \quad (25)$$



المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{h(x) | h(x) \leq -2\}$

$$f(x) = 2|x - 4| + 6 \quad (24)$$



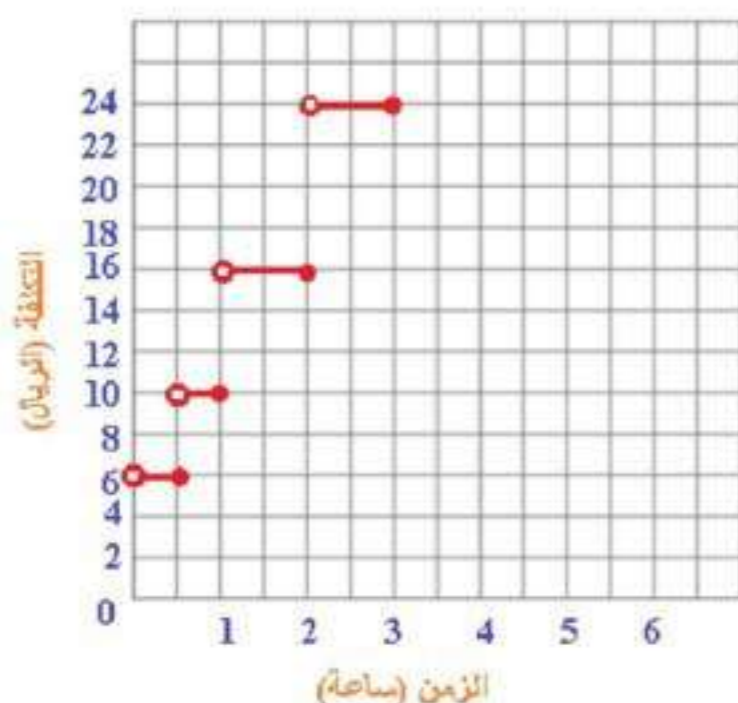
المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{f(x) | f(x) \geq 6\}$

26

ترفيه:

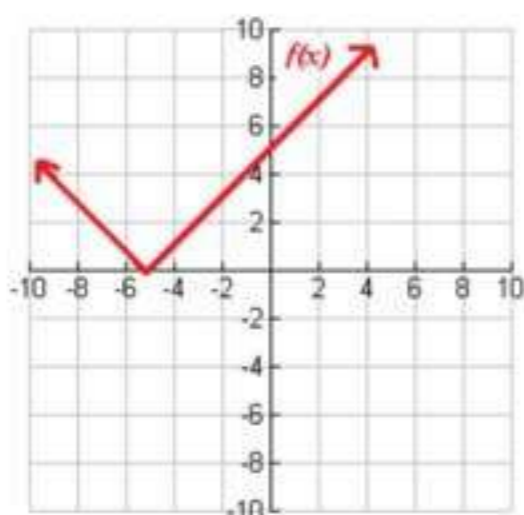
الدرجة a

$$c(t) = \begin{cases} 6, & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 10, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 16, & 1 < t \leq 2 \\ 24, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad \text{b}$$

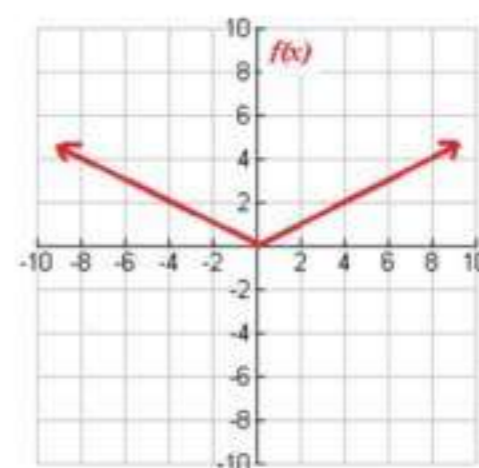


اكتب دالة القيمة المطلقة الممثلة بيانياً في كل مما يأتي:

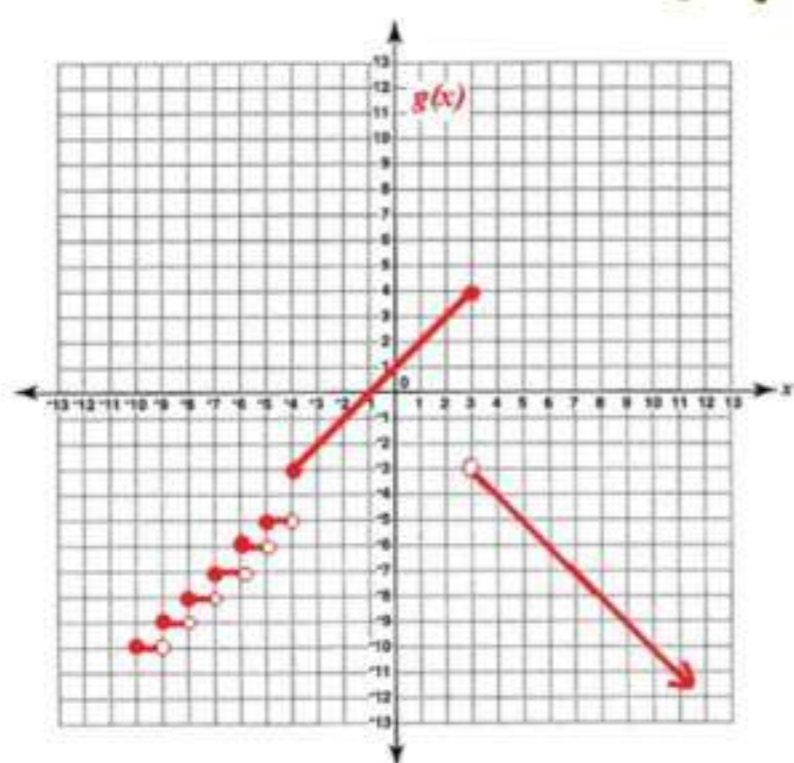
$$f(x) = |x + 5| \quad \text{28}$$



$$f(x) = |0.5x| \quad \text{27}$$

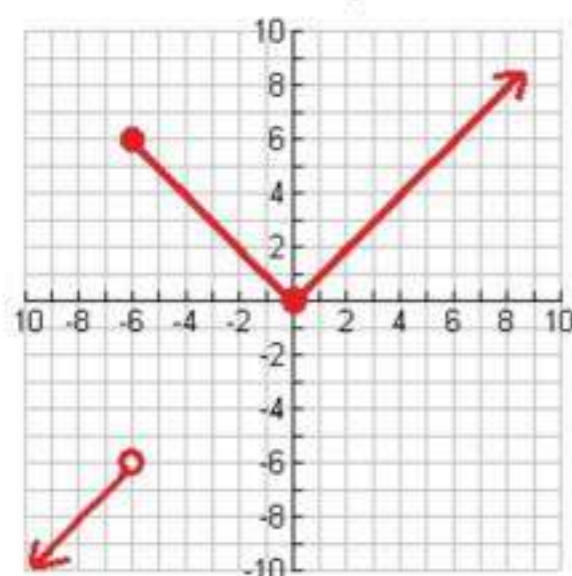


مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد كلاً من مجالها و مداها:



$$g(x) = \begin{cases} [x], & x < -4 \\ x+1, & -4 \leq x \leq 3 \\ -|x|, & x > 3 \end{cases} \quad \text{29}$$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{g(x) | g(x) \leq 4\}$



$$h(x) = \begin{cases} -|x|, & x < -6 \\ |x|, & -6 \leq x \leq 2 \\ |-x|, & x > 2 \end{cases} \quad \text{30}$$

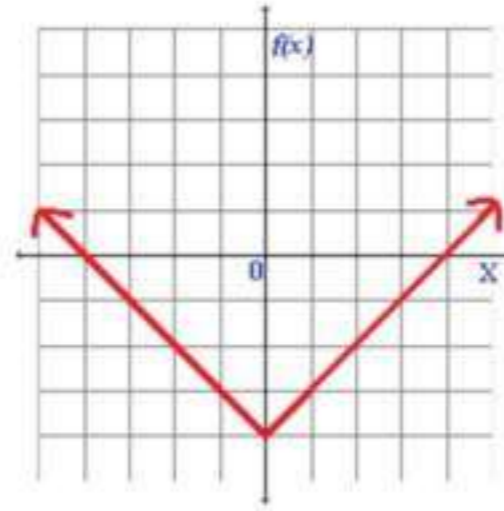
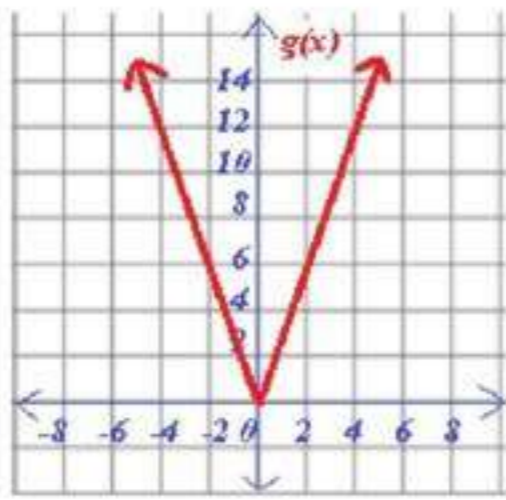
المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى:  $\{h(x) | h(x) \leq -6 \text{ أو } 0 \leq h(x)\}$

31 تمثيلات متعددة: لتكن  $f(x) = |x| - 4$  ,  $g(x) = |3x|$

a جدوليا:

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12



بيانيا:

b

عدديا:

c

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0
الميل		-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12
الميل		-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

d ميل كل من الجزأين يساوي النظير الجمعي لميل الجزء الآخر، أما الميل في كل جزء فهو ثابت.

## مسائل مهارات التفكير العليا

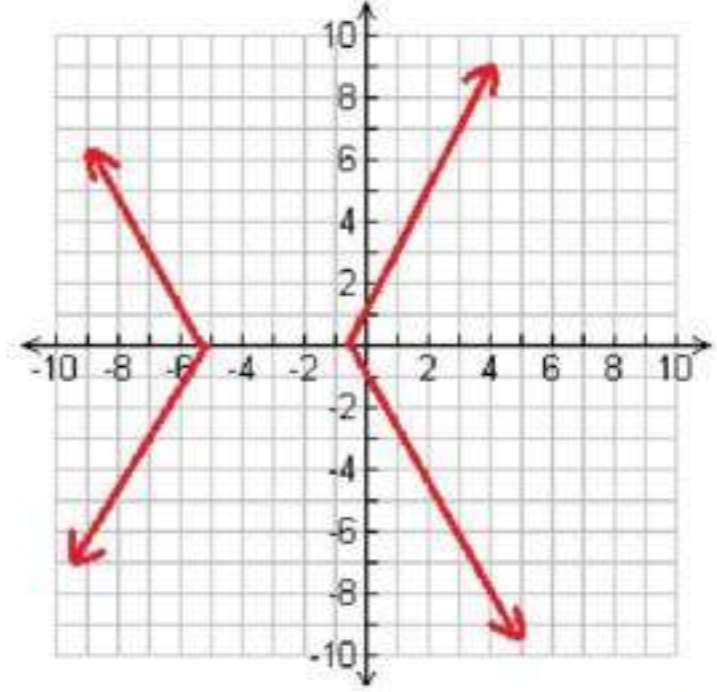
مسألة مفتوحة:

32

$$|y| = x$$

تحذ: مثل المعادلة  $|y| = 2|x + 3| - 5$  بيانياً.

33



تبرير:

34

$[8.6] = 8$ ، لكن عندما نقرب العدد 8.6 يكون ناتج التقريب هو 9 لذا الإجابة الصحيحة  $[8.6] \approx 9$

مسألة مفتوحة:

35

$$f(x) = -|x - 2|$$

اكتب:

36

يمكن استعمال الدالة المتعددة التعريف لتمثيل الأجر الذي يدفعه شخص مقابل استخدامه موقف سيارات.

### تدريب على اختبار

إجابة قصيرة: ما العبارة التي تعطي الحد النوني للنمط في الجدول التالي؟

37

2	4	6	8	$n$
7	3	19	25	?

$$3n+1$$

أي دالة مما يأتي يكون فيها  $f(x) \neq -1$  ؟  
الاختيار الصحيح : (B)  $f(x) = |-2x|$

### مراجعة تراكمية

إذا كان  $f(x) = -4x + 6$  ،  $g(x) = -x^2$  ،  $h(x) = -2x^2 - 6x + 9$  ، فأوجد كل قيمة مما يأتي:

$$\begin{aligned} f(2c) & \quad (39) \\ -4(2c) + 6 &= f(2c) \\ -8c + 6 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(a+1) & \quad (40) \\ -(a+2a+1) &= -(a+1)^2 = g(a+1) \\ -a^2 - 2a - 1 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(6) & \quad (41) \\ -2(6)^2 - 6(6) + 9 &= h(6) \\ -99 &= \end{aligned}$$

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

$$\mathbf{N, W, Z, Q, R} : \sqrt{36} \quad (42)$$

$$\mathbf{Z, Q, R} : -3 \quad (43)$$

$$\mathbf{Q, R} : \frac{2}{5} \quad (44)$$

$$\mathbf{I, R} : \sqrt{11} \quad (45)$$

## اختبار منتصف الفصل

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1  $Q, R : \frac{25}{11}$

2  $Z, Q, R : -\frac{128}{32}$

3  $I, R : \sqrt{50}$

4  $Q, R : -32.4$

5 اذكر الخاصية الموضحة في المعادلة الآتية:  $(4-15)7 = 4(7) + 15(7)$  ؟  
خاصية التوزيع

6 العبارة  $-3(7a-4b) + 2(-3a+b)$   
 $-27a+14b$

7  $3(35+55)$  ,  $3(35)+3(55)$

8 اختيار من متعدد: أي العبارات التالية تكافئ  $\frac{2}{3}(4m-5n) + \frac{1}{5}(2m+n)$  ؟

الاختيار الصحيح هو (A)  $\frac{46}{15}m - \frac{47}{15}n$

9 أوجد كلاً من النظير الجمعي و النظير الضربي للعدد  $\frac{7}{6}$ .

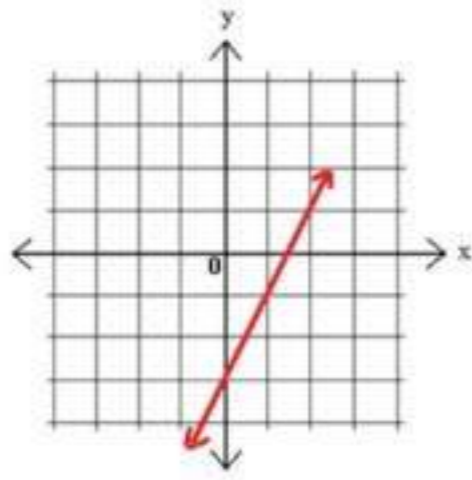
النظير الجمعي:  $-\frac{7}{6}$  ، و النظير الضربي:  $\frac{6}{7}$



10 حدد كلاً من مجال العلاقة الآتية و مداها ، ثم بين هل تمثل دالة أم لا"  
 $\{(3,2), (4,1), (0,3), (5,-2), (3,7)\}$

المجال =  $\{3, 4, 0, 5\}$   
 المدى =  $\{2, 1, 3, -2, 7\}$   
 لا تمثل دالة

11 مثل المعادلة  $y = 2x - 3$  بيانياً، ثم بين إذا كانت تمثل دالة أم لا.  
 و هل هي متباينة أم لا؟ و هل هي منفصلة أم متصلة؟



$x$	$y$
0	-3
1	-1
2	1

هي دالة  
 هي متباينة  
 هي متصلة

إذا كان  $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$  ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

12  $f(-2)$   
 $3(-2)^3 - 2(-2) + 7 = f(-2)$   
 $-13 =$

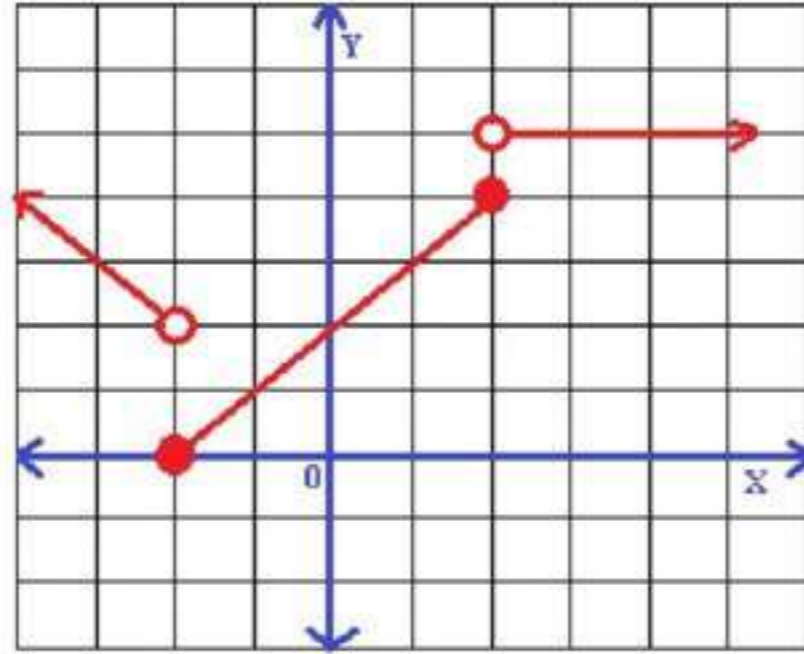
13  $f(2y)$   
 $3(2y)^3 - 2(2y) + 7 = f(2y)$   
 $24y^3 - 4y + 7 =$

14  $f(1.4)$   
 $3(1.4)^3 - 2(1.4) + 7 = f(1.4)$   
 $12.432 =$

15 تيار من متعدد:  
 الإجابة الصحيحة (C) 136.50 ريالاً

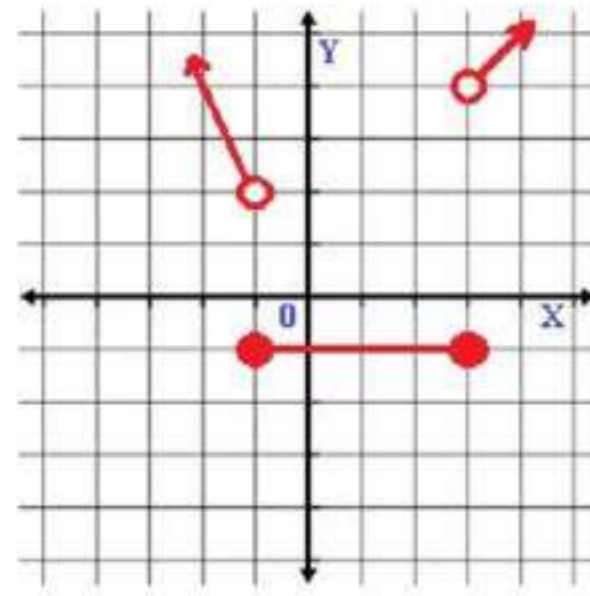
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x+2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

16 بيانياً الدالة



17 اكتب الدالة متعددة التعريف الممثلة بيانياً فيما يأتي:

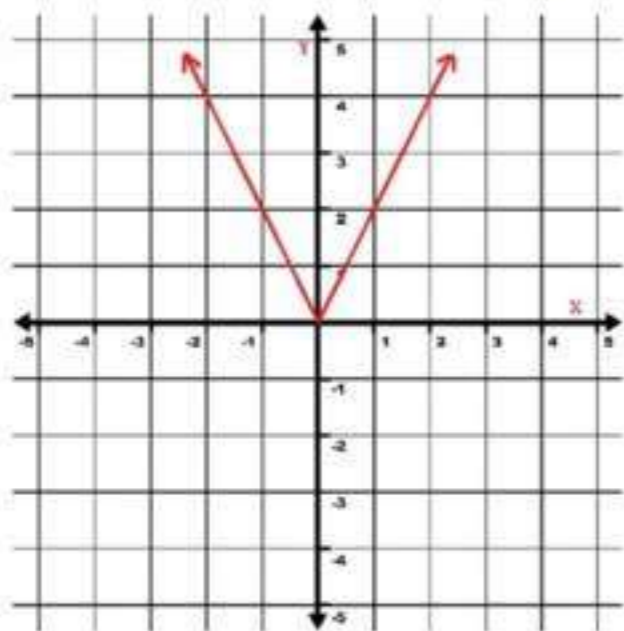
$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x > -1 \\ -1, & -1 \leq x \leq 3 \\ x-1, & x > 3 \end{cases}$$



18 حدد كلاً من المجال و المدى للدالة:  $y = [|x|] + 2$

المجال: كل الأعداد الحقيقية  
المدى: كل الأعداد الصحيحة

19 مثل الدالة  $f(x) = |2x|$  ، ثم حدد كلاً من مجالها و مداها.



المجال = كل الأعداد الحقيقية  
المدى =  $\{f(x) | x \geq 0\}$

1-4

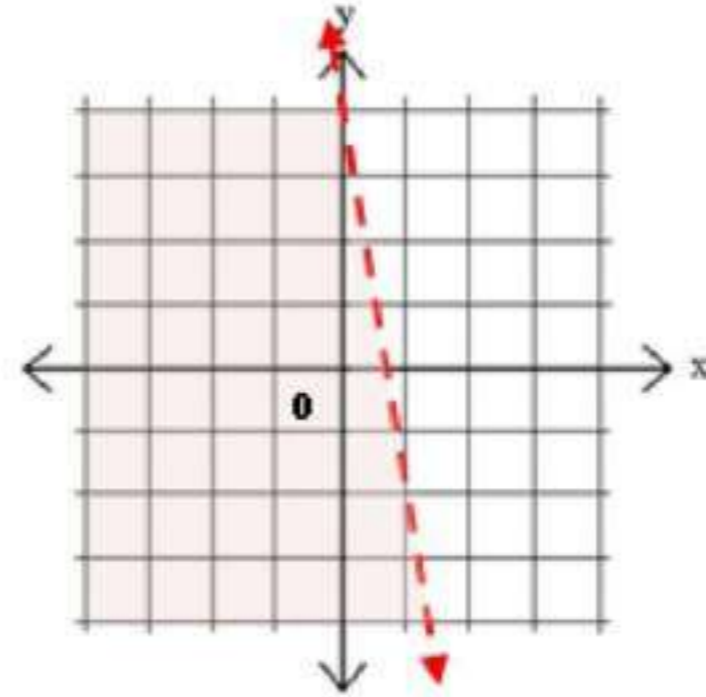
تمثيل المتباينات الخطية

و متباينات القيمة المطلقة بيانياً

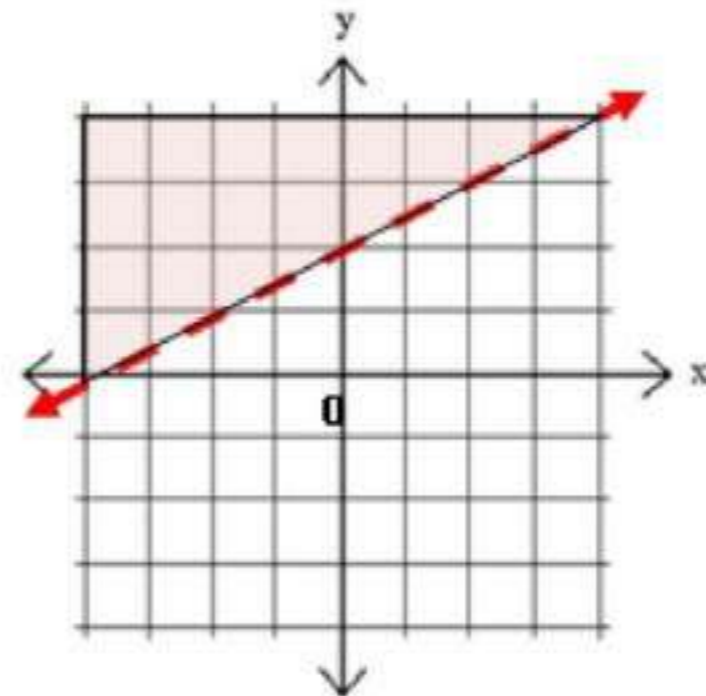
نقطة

مثال المتباينة  $3x + \frac{1}{2}y < 2$  بيانياً

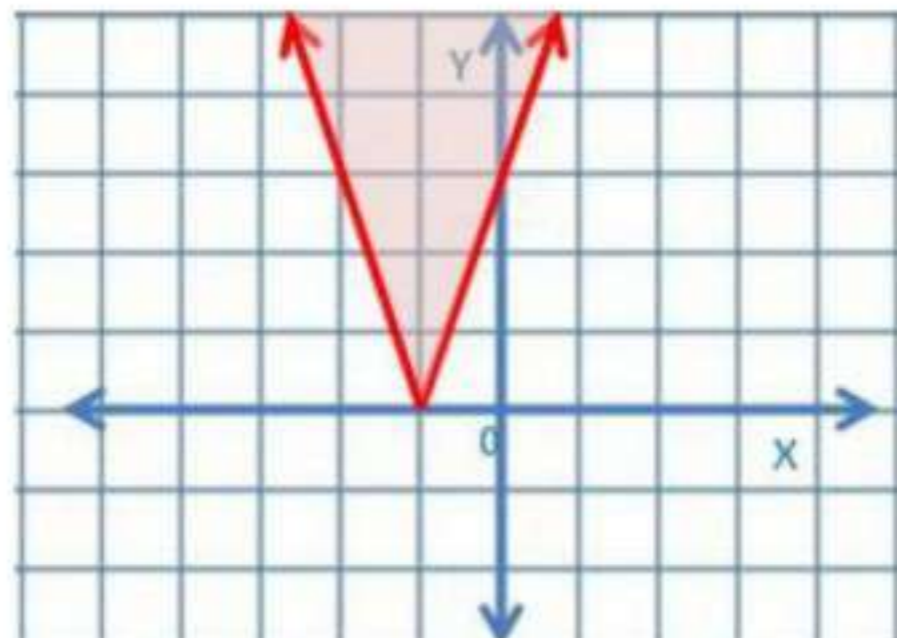
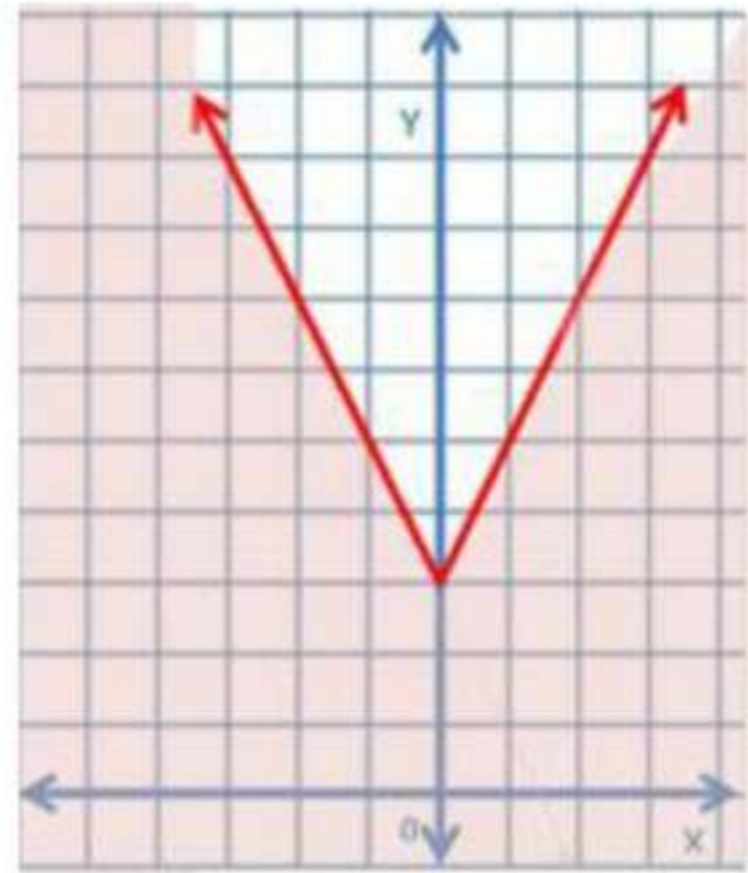
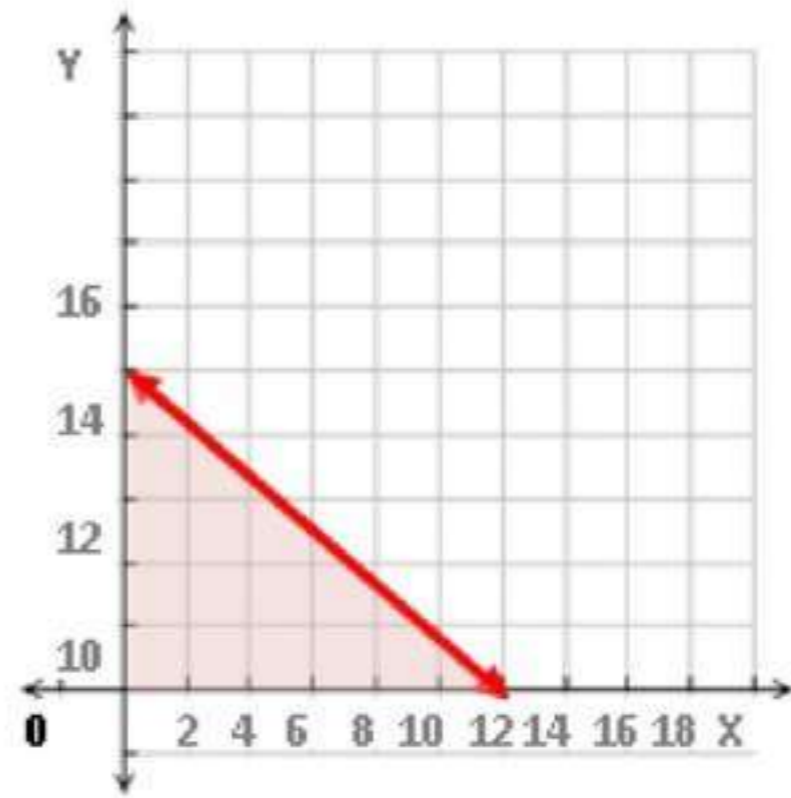
1  
A



1  
B



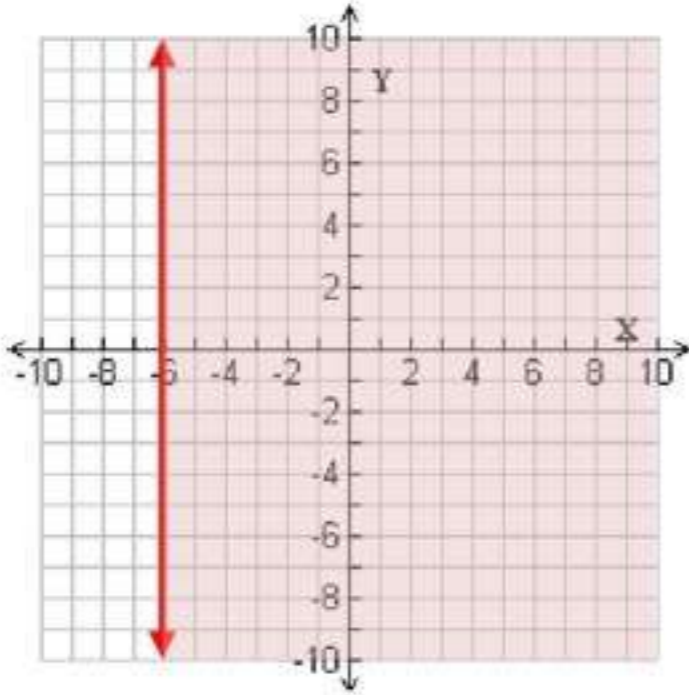
$$3x + 6y \leq 60$$



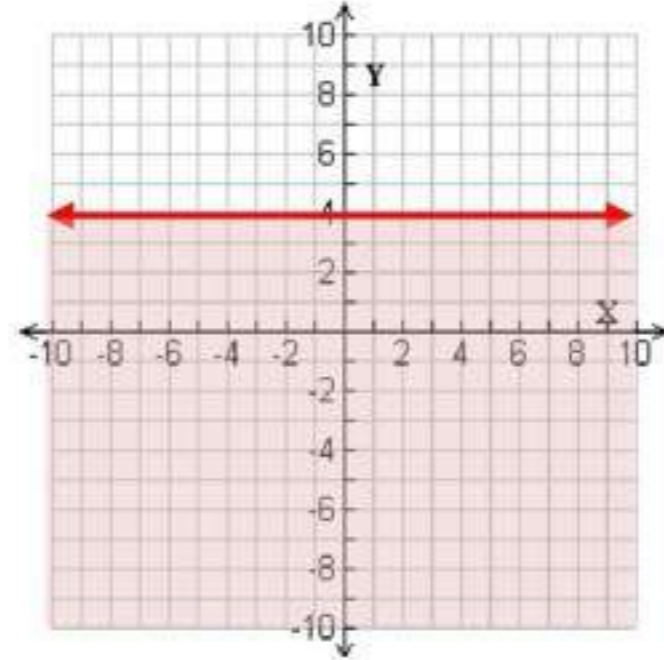
## تأكد

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

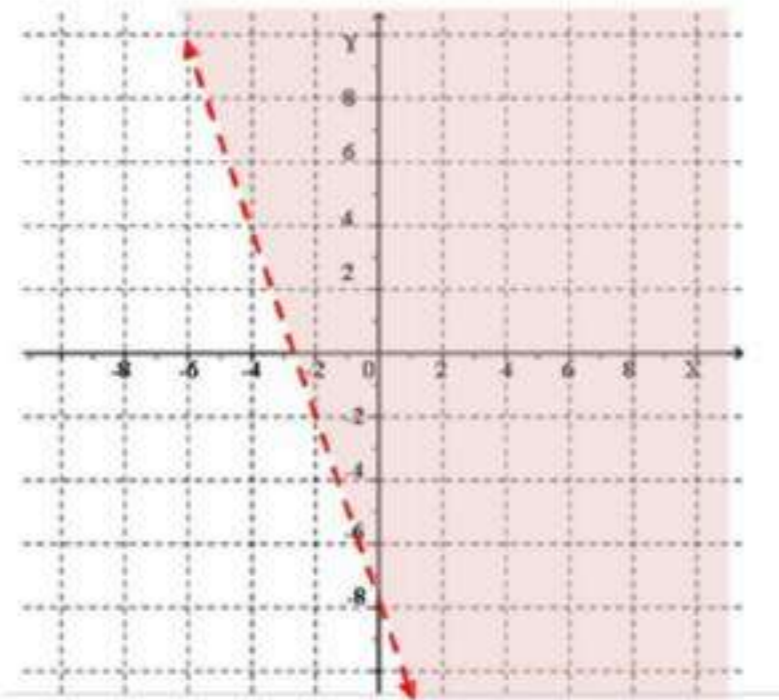
2)  $x > -6$



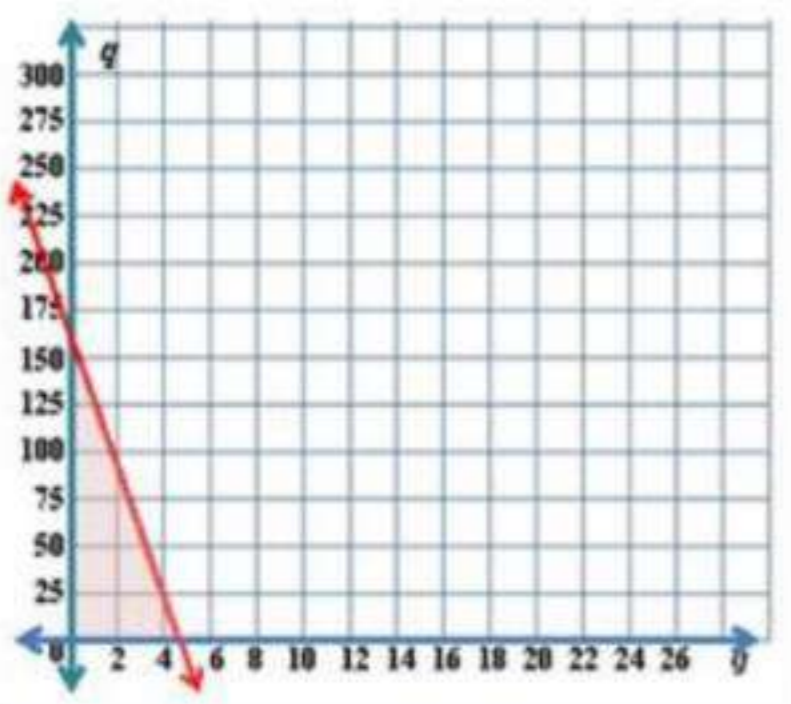
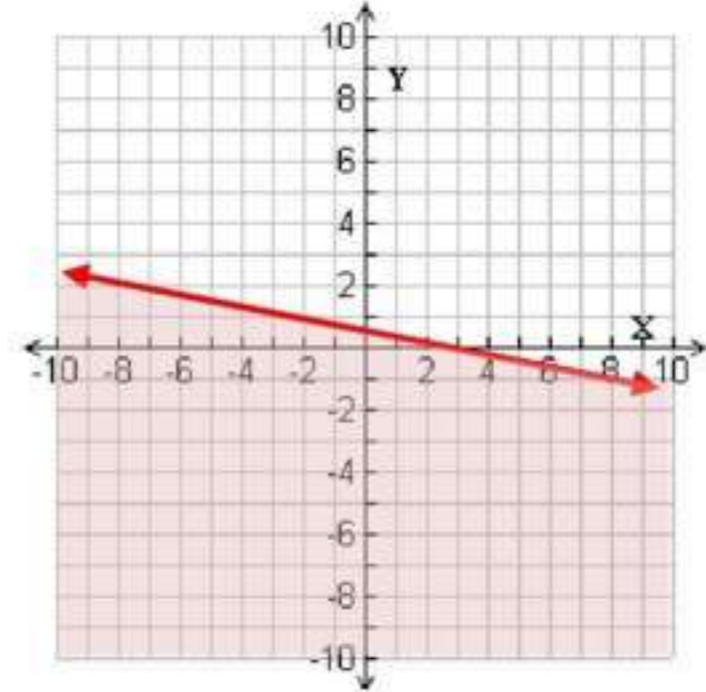
1)  $y \leq 4$



4)  $3x + y > -8$



3)  $x + 4y \leq 2$



وقود:

5) a)  $13g + 0.45 \leq 76$

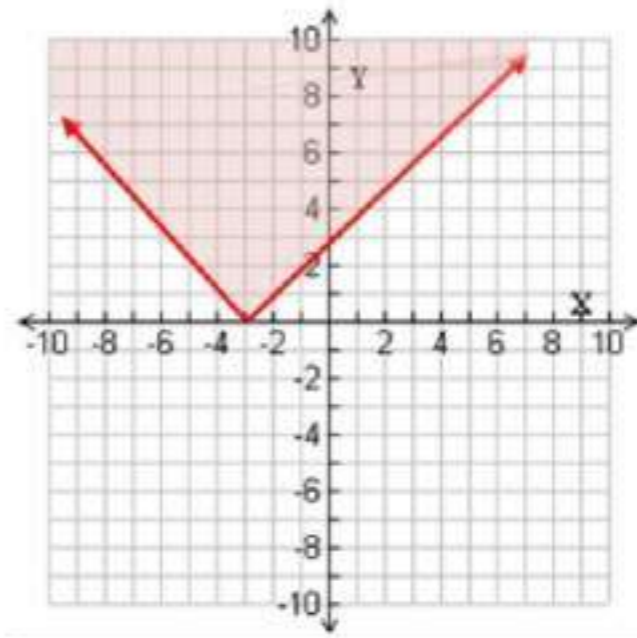
مثل المتباينة بيانياً

b) نعم؛ لأن النقطة (4, 20) تقع في المنطقة المظللة

مثل المتباينتين الآتيتين بيانياً

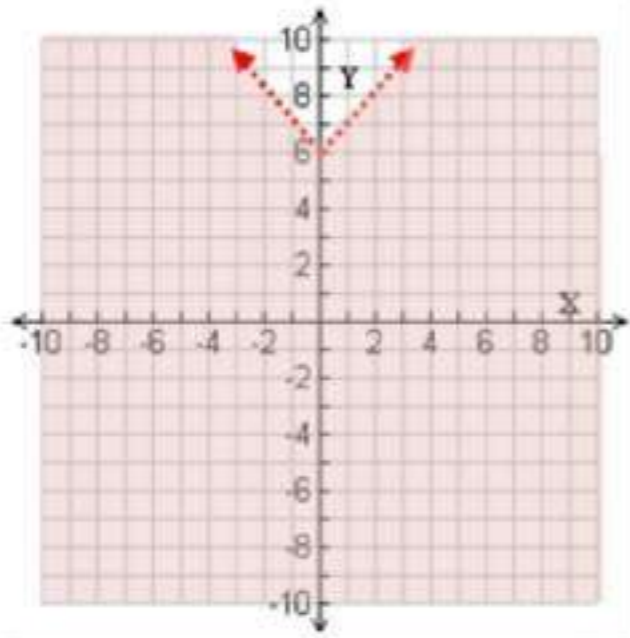
$$y \geq |x + 3|$$

6



$$y - 6 < |x|$$

7

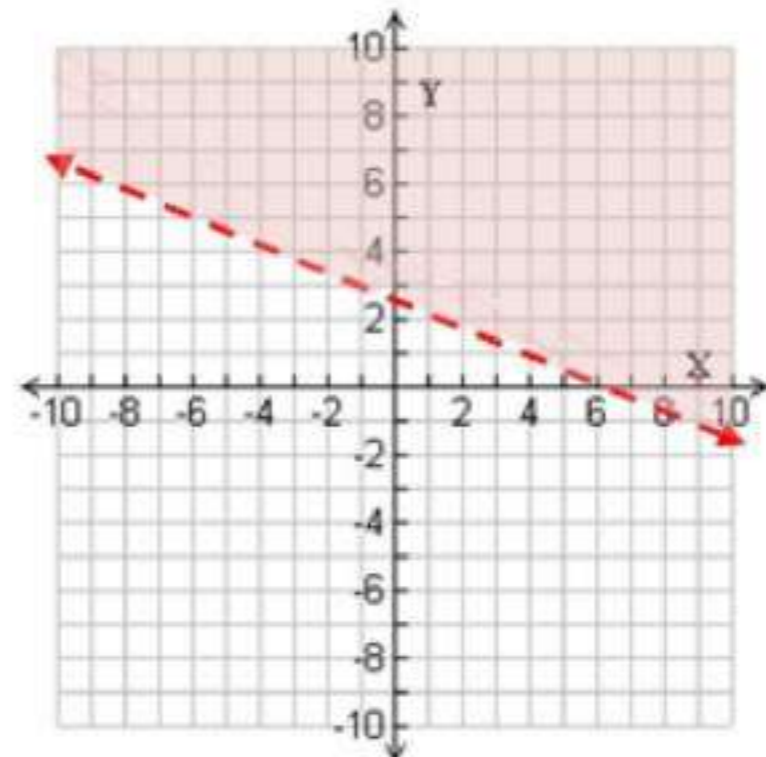


### تدرب وحل المسائل

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

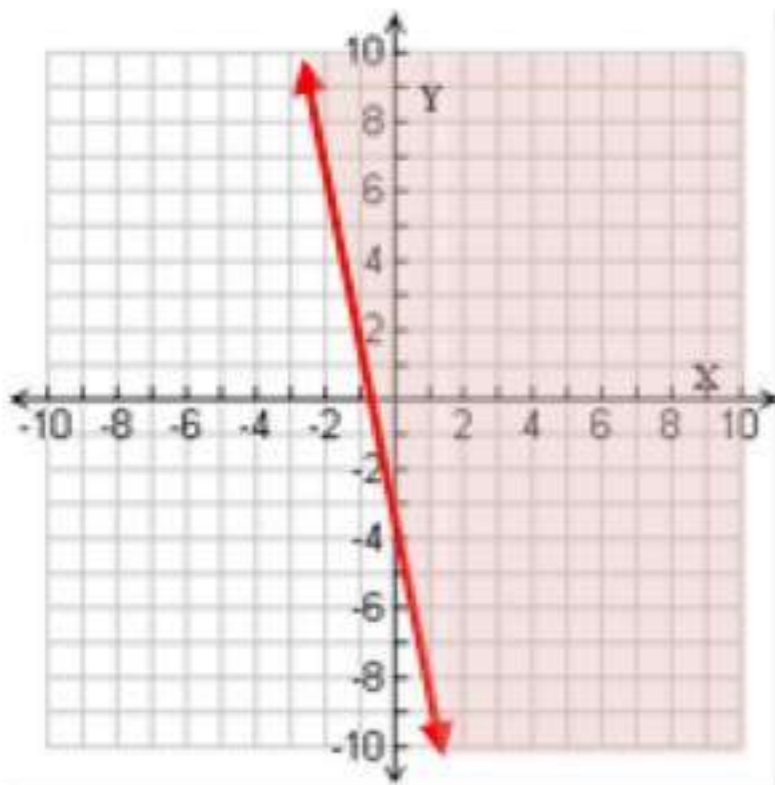
$$x + 2y > 6$$

8



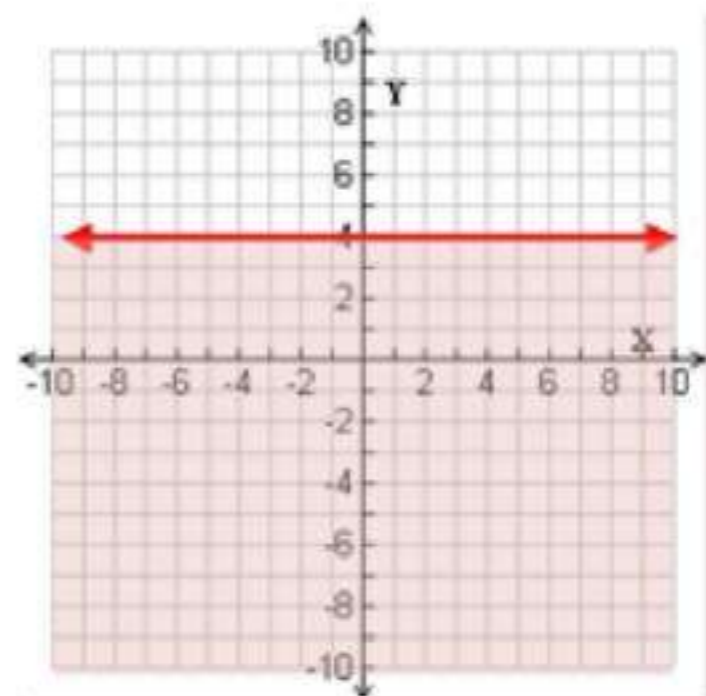
$$y \geq -3x - 2$$

9



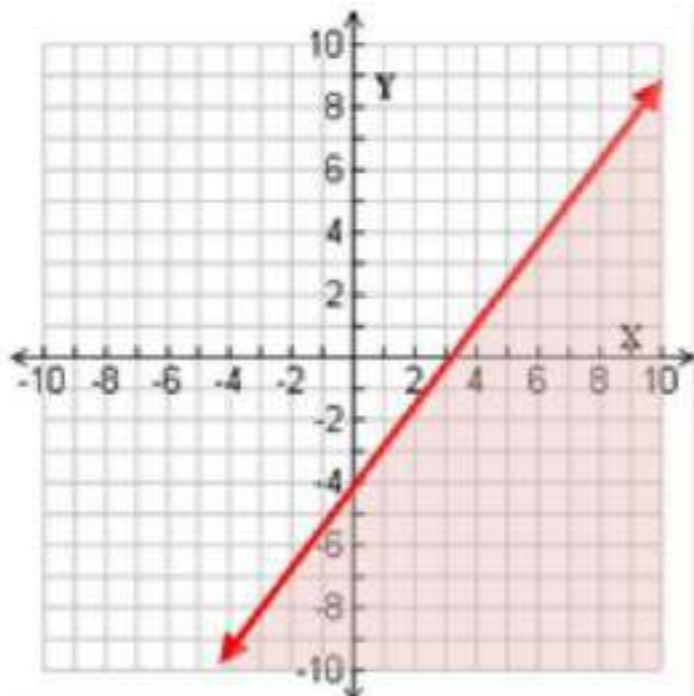
$$2y + 3 \leq 11$$

10



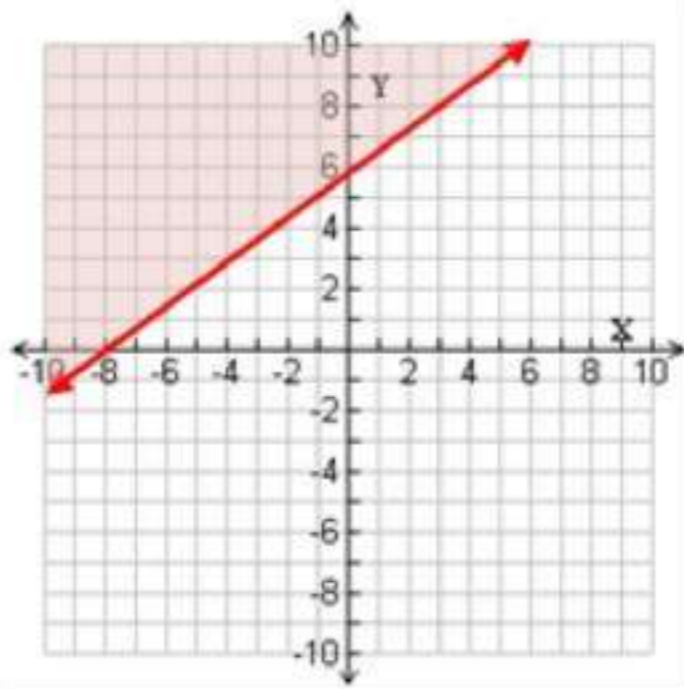
$$4x - 3y > 12$$

11



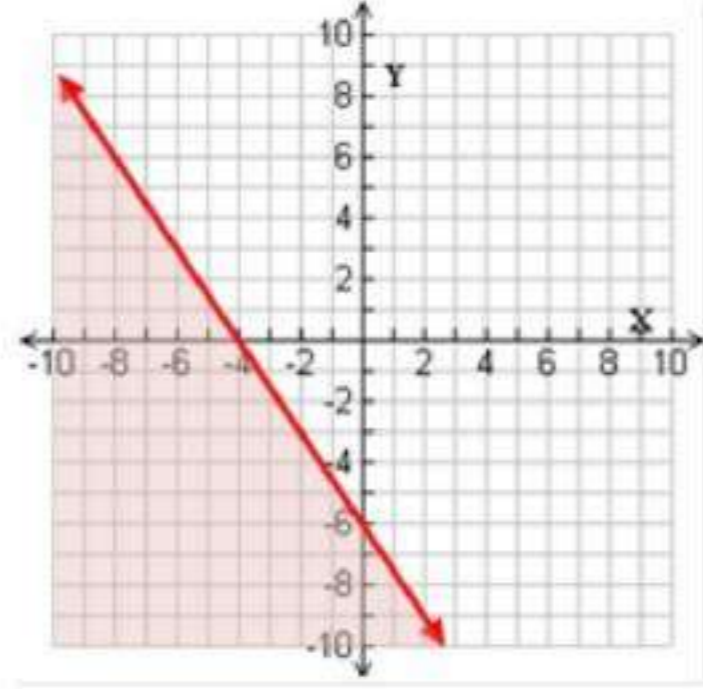
$$y \geq \frac{3}{4}x + 6$$

13



$$6x + 4y \leq -24$$

12



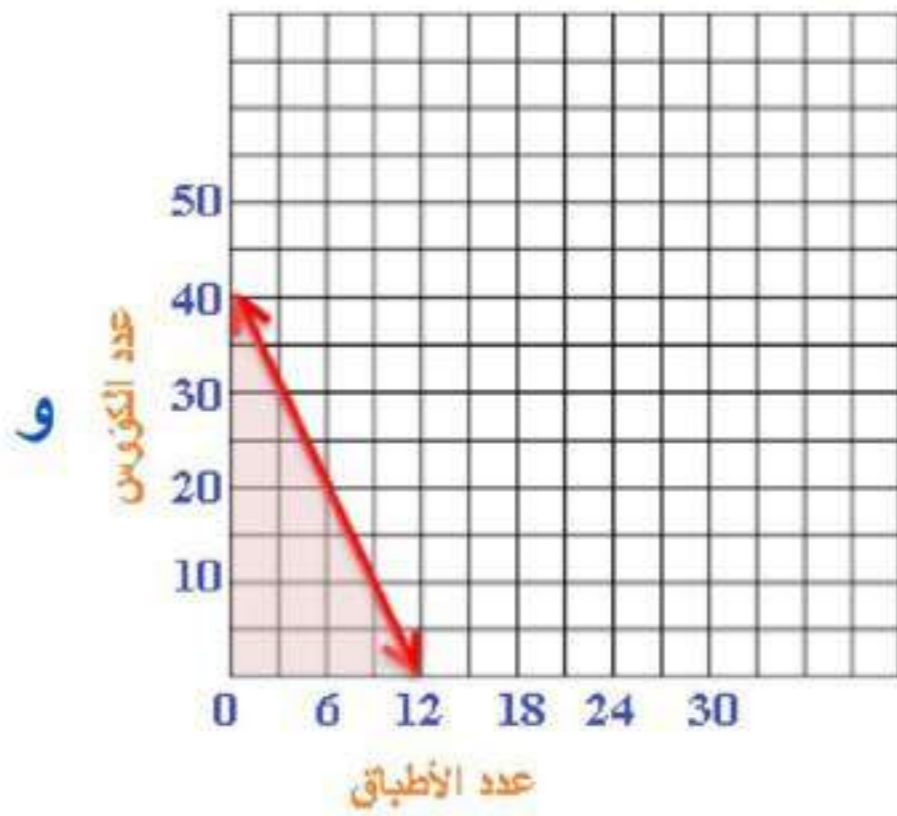
مشتریات:

14

اكتب متباينة تمثل العدد الممكن شراؤه من الأطباق و الكؤوس.

$$15d + 5c \leq 200$$

بیانیا



10 أطباق

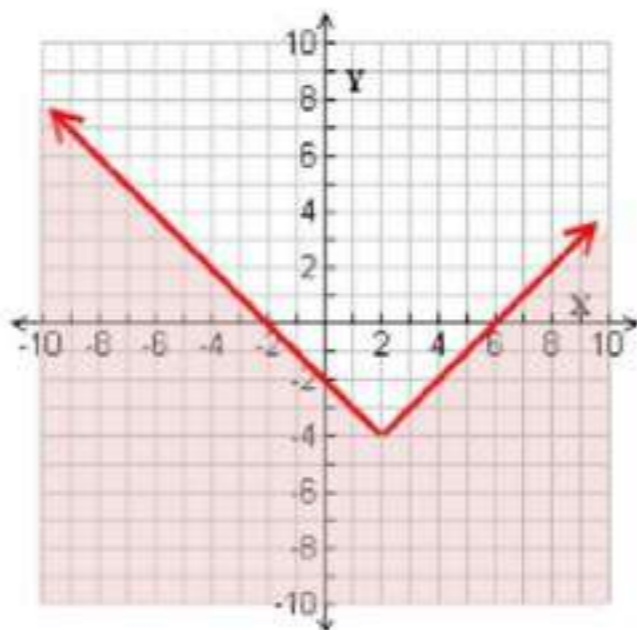
ب) تستطيع سعاد شراء

10 كؤوس.

مثل كل متباينة فيما يأتي بیانیا

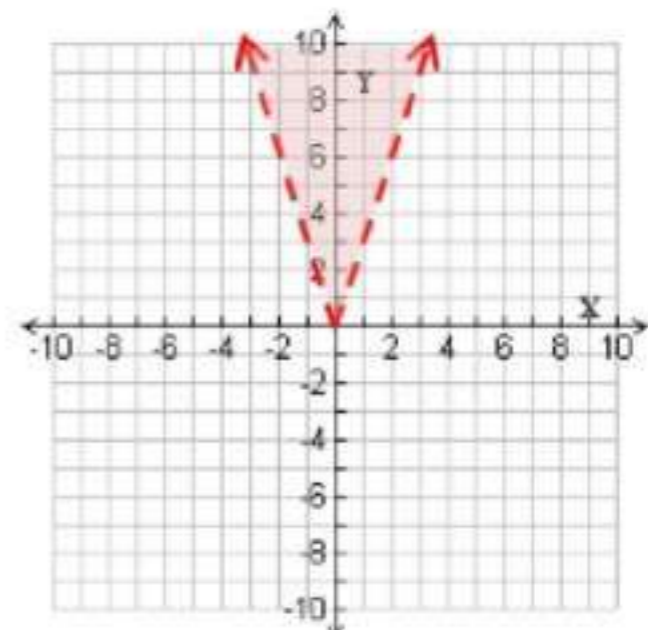
$$y + 4 \leq |x - 2|$$

16

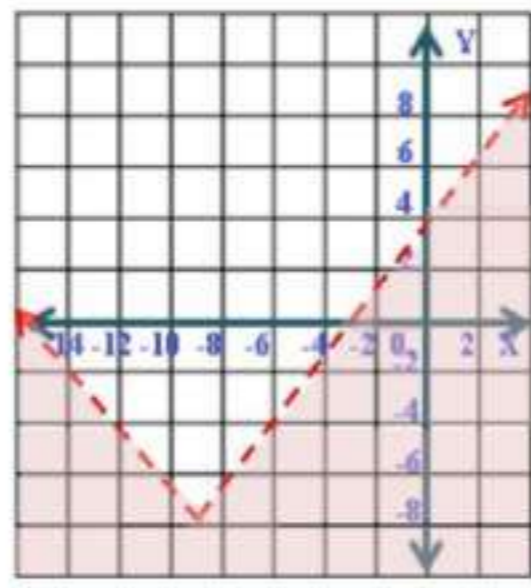


$$y > |3x|$$

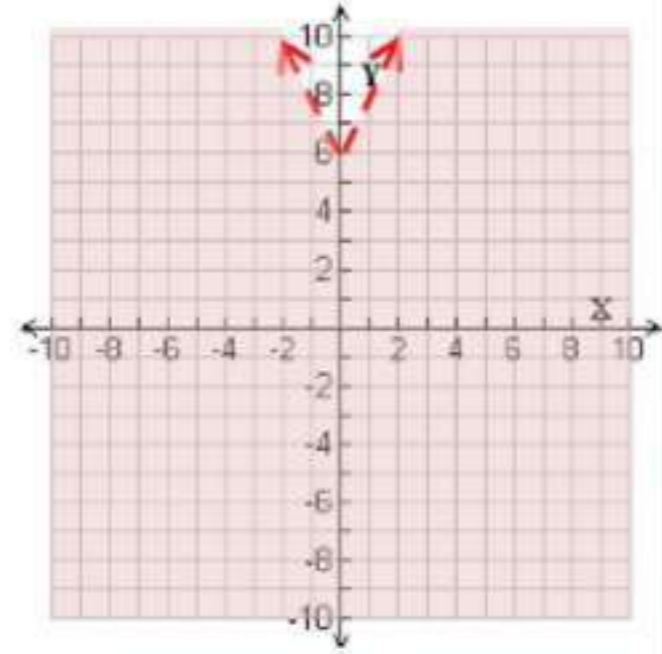
15



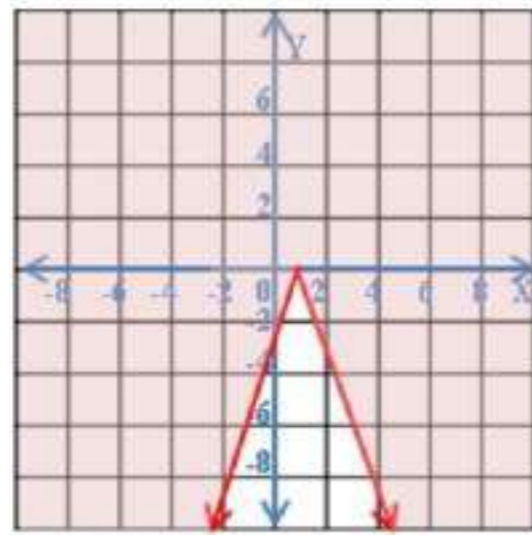
$$y + 8 < 2 \left| \frac{2}{3}x + 6 \right| \quad (18)$$



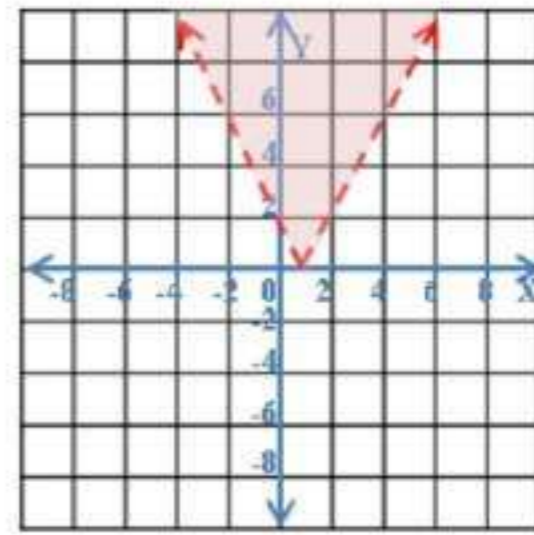
$$y - 6 < |-2x| \quad (17)$$



$$-y \leq |3x - 4| \quad (20)$$

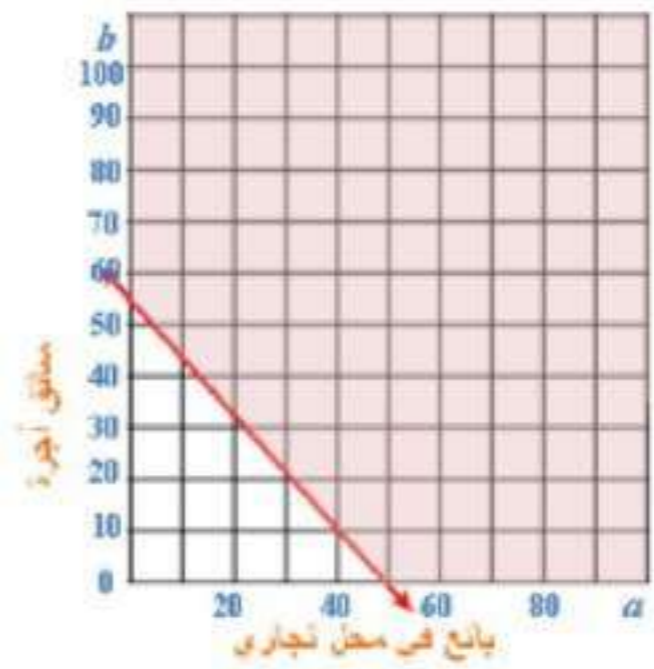


$$2y > |4x - 5| \quad (19)$$



حيث  $a$  عدد الساعات التي يعملها كبائع،  $b$  عدد الساعات التي يعملها كسائق.

$$20a + 25b \geq 1500$$



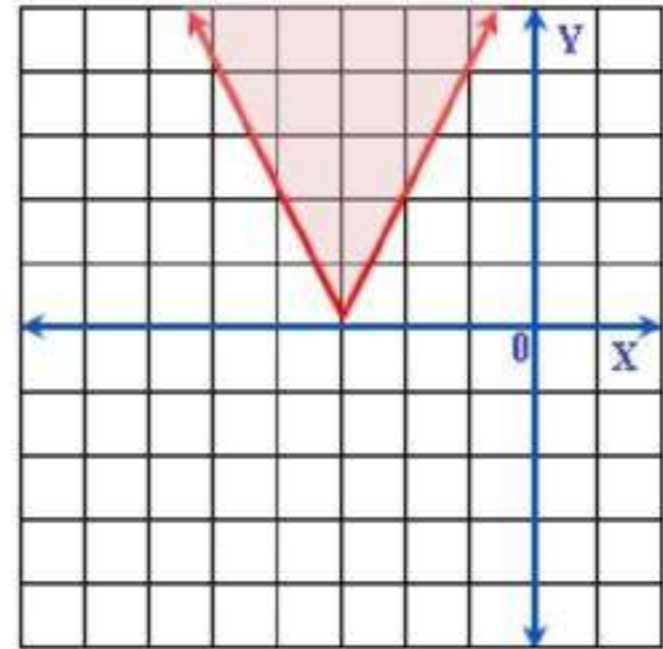
(c) لن يحصل عليه



مثل كل متباينة فيما يأتي:

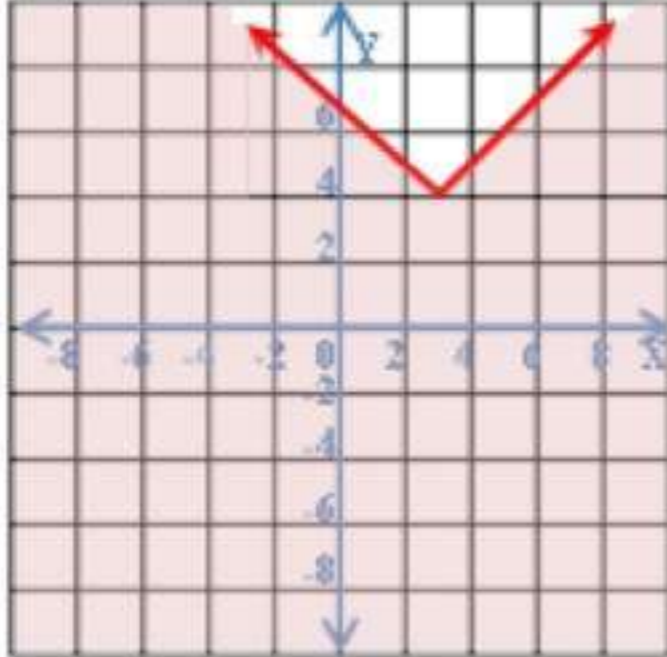
$$y \geq |-2x - 6|$$

22



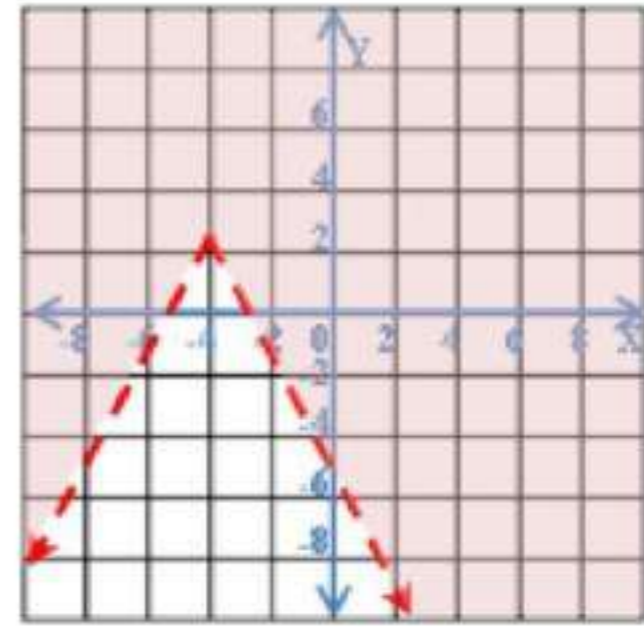
$$y \leq |x - 3| + 4$$

23



$$y - 3 > -2|x + 4|$$

24



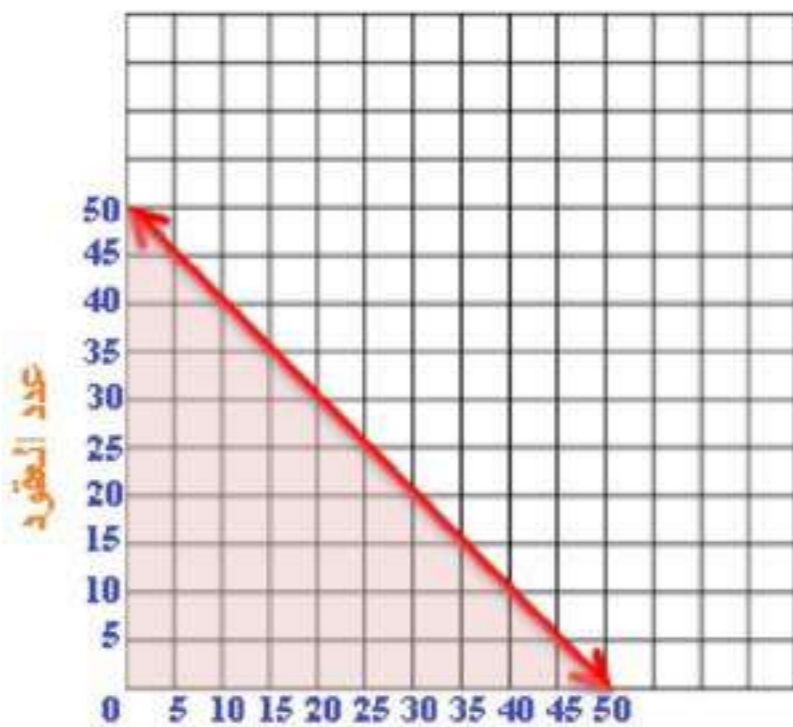
زينة

25

اكتب متباينة تبين عدد العقود و الأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

$$x + y \leq 50$$

بياناً



عدد الأساور

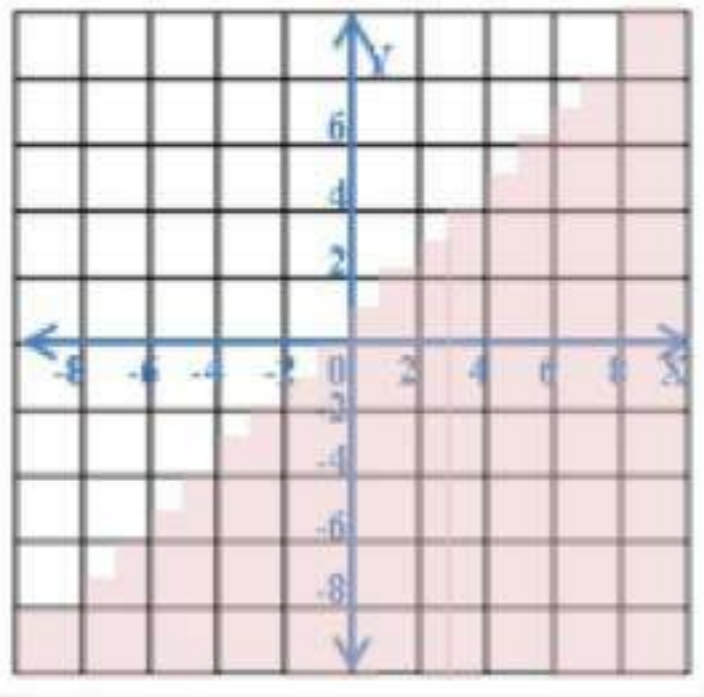
0 إسوارة ، 50 عقداً

25 إسوارة ، 25 عقداً

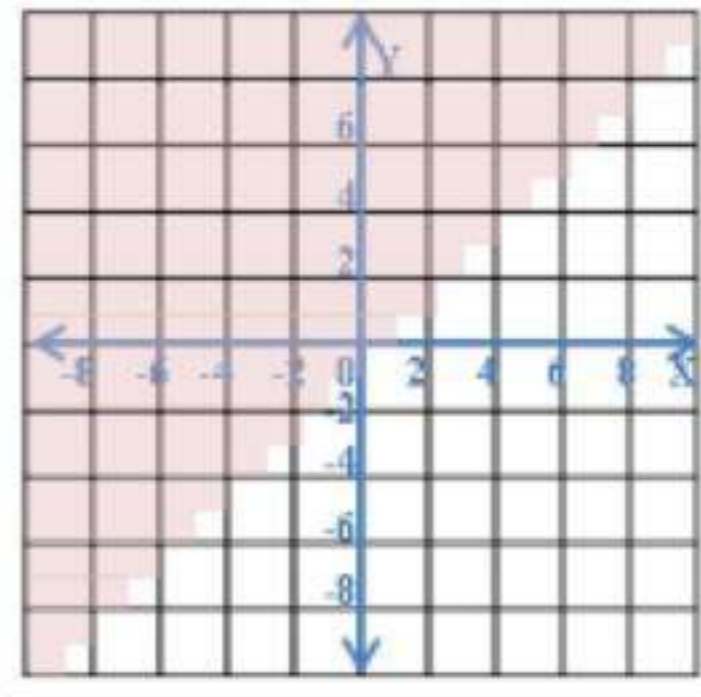
30 إسوارة ، 20 عقداً

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً

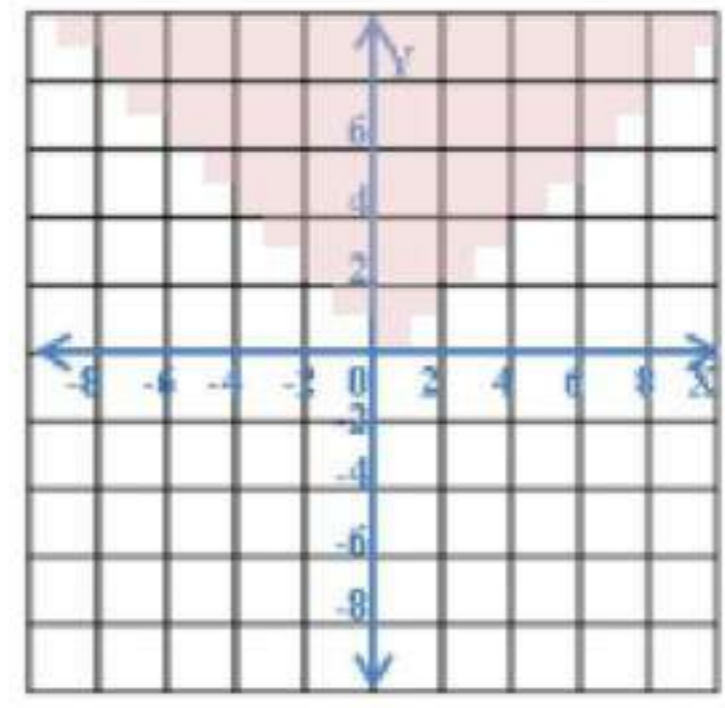
$$y < [x + 2] \quad (27)$$



$$y \geq [x] \quad (26)$$



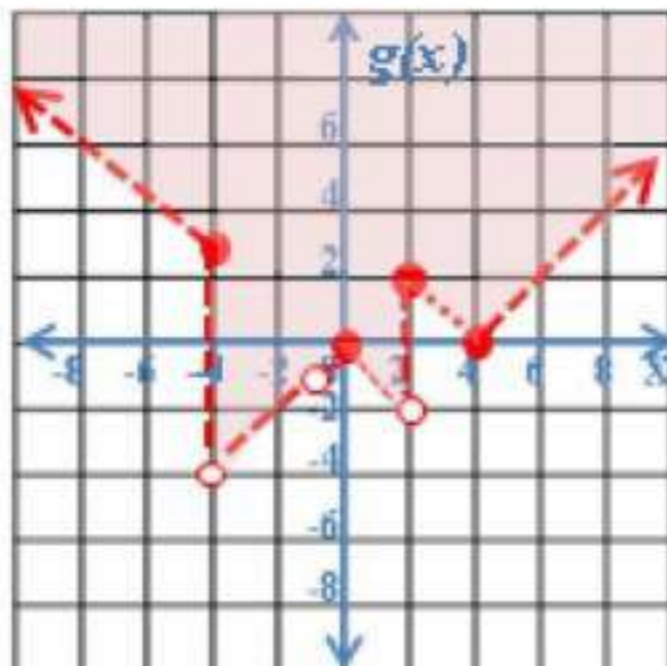
$$y \leq [x] \quad (28)$$



### مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة (29)

$$|y| < x$$



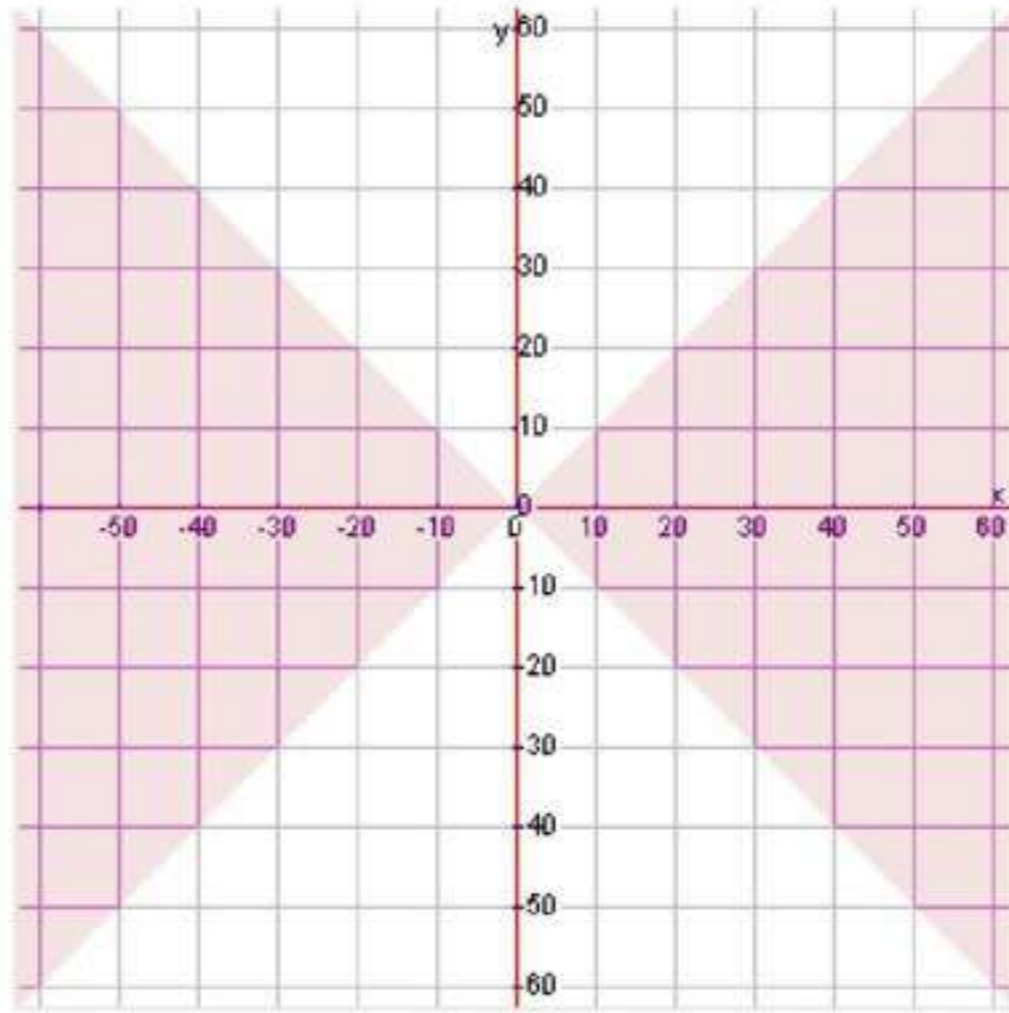
ند: مثل المتباينة الآتية بيانياً (30)

$$g(x) > \begin{cases} |x + 1|, & x > 4 \\ -|x|, & -4 < x < 2 \\ |x - 4|, & x \geq 2 \end{cases}$$

31 شف الخطأ:

مصعب،  $x - y \geq 2$  يمكن كتابتها على الصورة  $y \leq x - 2$

32 تبرير: عندما تكون  $x, y$  كلتاهما داخل القيمة المطلقة، و مثال على ذلك  $|y| \leq |x|$  وعند حدوث هذا يجب أن يقع حل هذه المتباينة في منطقتين مختلفتين.



33 تب: أحد الإحتمالات هو عندما  $|y| < 0$  . وحتى يكون لهذه المتباينة حل فإن القيمة المطلقة لـ  $y$  يجب أن تكون أقل من 0 . وهذا مستحيل.

## تدريب على اختبار

34 أي النقاط الآتية يقع في منطقة حل المتباينة  $y + 3x > -2$  ؟  
الجواب الصحيح (C)

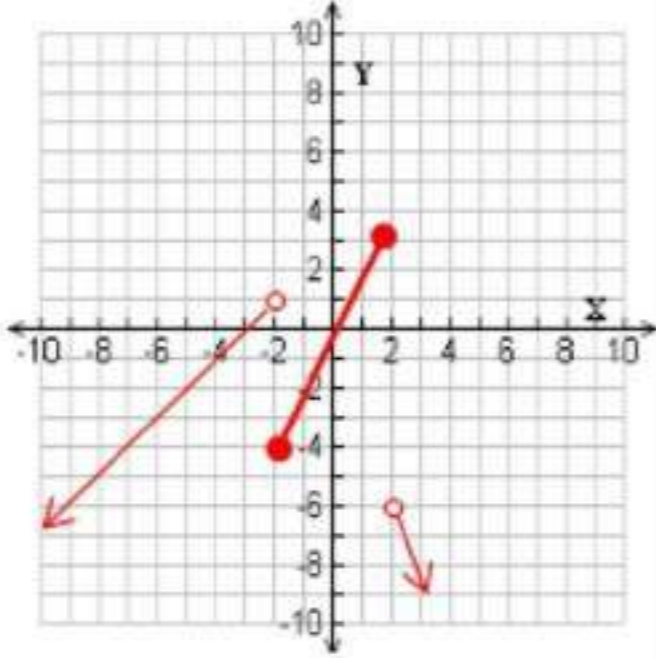
35 من الدوال الآتية مداها هو  $\{f(x) | f(x) \leq 0\}$  ؟  
الجواب الصحيح (D)  $f(x) = -|x|$

## مراجعة تراكمية

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً:

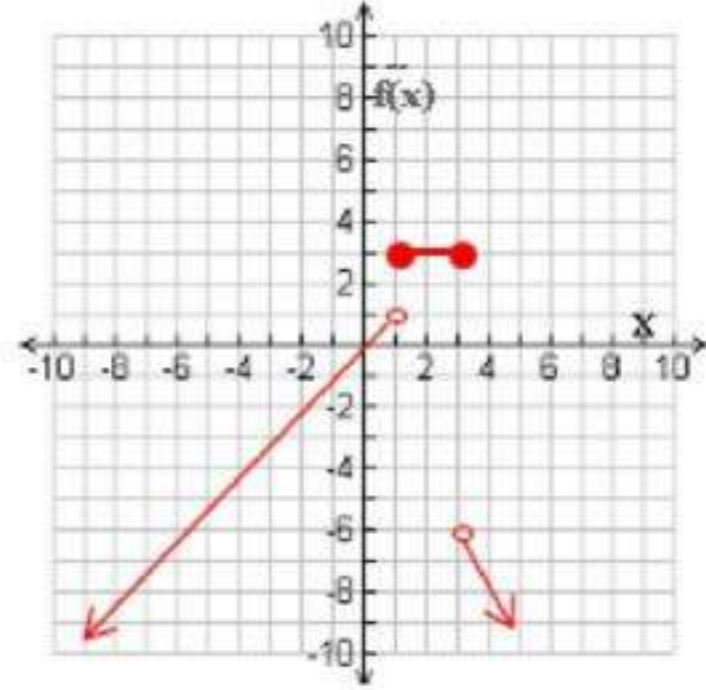
$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases}$$

37



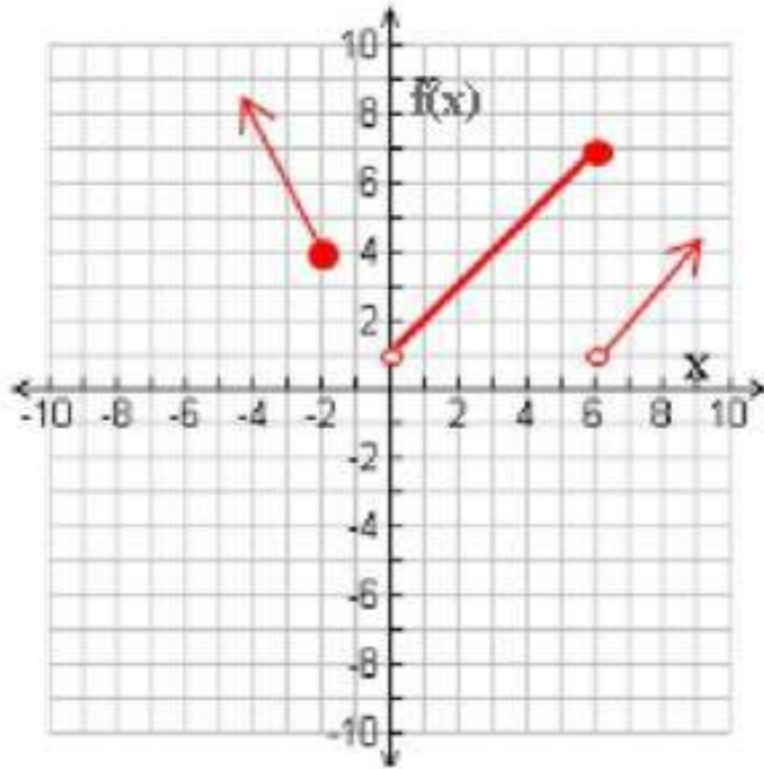
$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases}$$

36



$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -2 \\ x+1, & 0 < x \leq 6 \\ x-5, & x > 6 \end{cases}$$

38



فأوجد كل قيمة مما يأتي:

$$h(x) = 4x^2 - 10x$$

$$g(x) = -3x^2 + 2$$

$$f(x) = -7x + 8$$

إذا كان:

$$f(-9) = -7(-9) + 8 = 71$$

40

$$g(-4) = -3(-4)^2 + 2 = -46$$

41

$h(12)$

42

$$4(12)^2 - 10(12) = h(12)$$

$$456 =$$

1 - 5

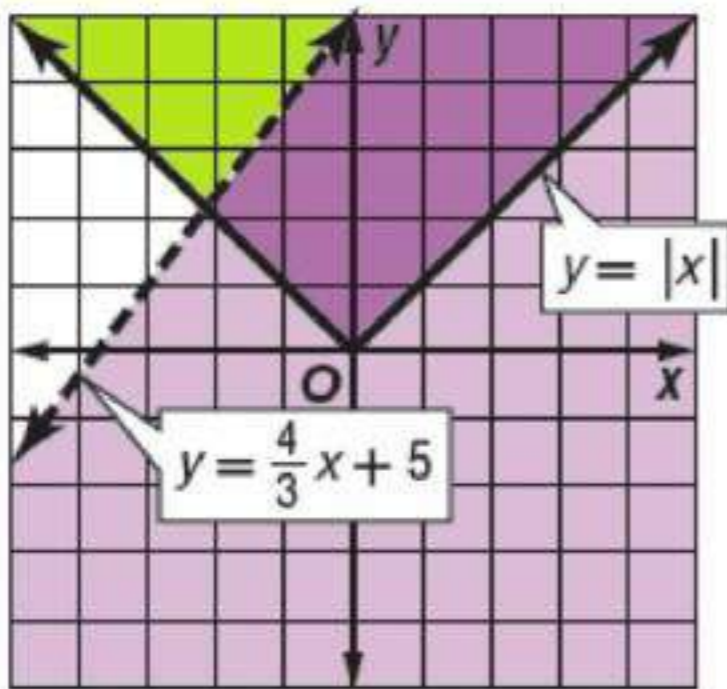
# حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

## نظري

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

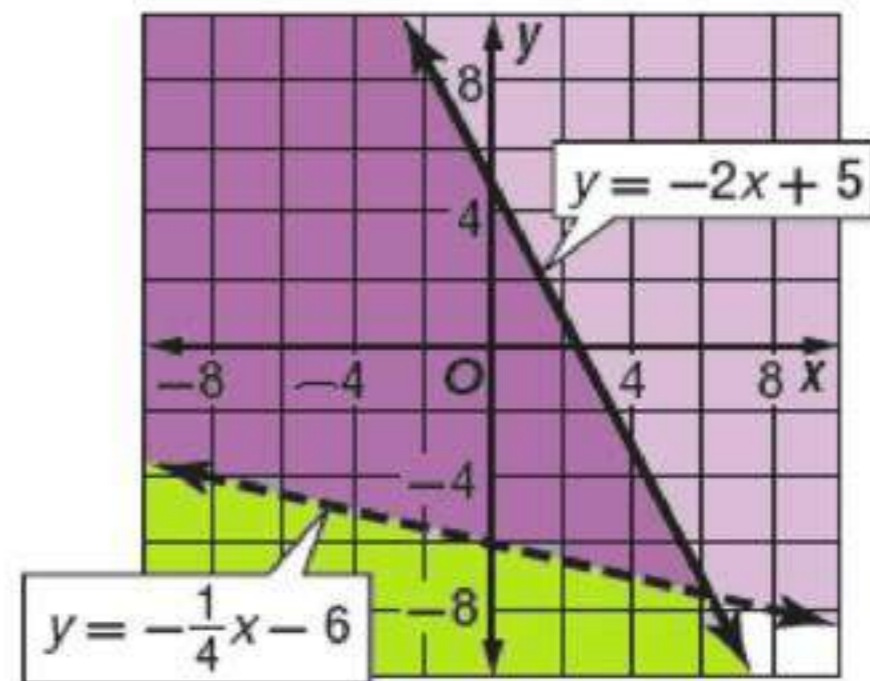
$$\begin{aligned} y &\geq |x| \\ y &< \frac{4}{3}x + 5 \end{aligned}$$

1 B



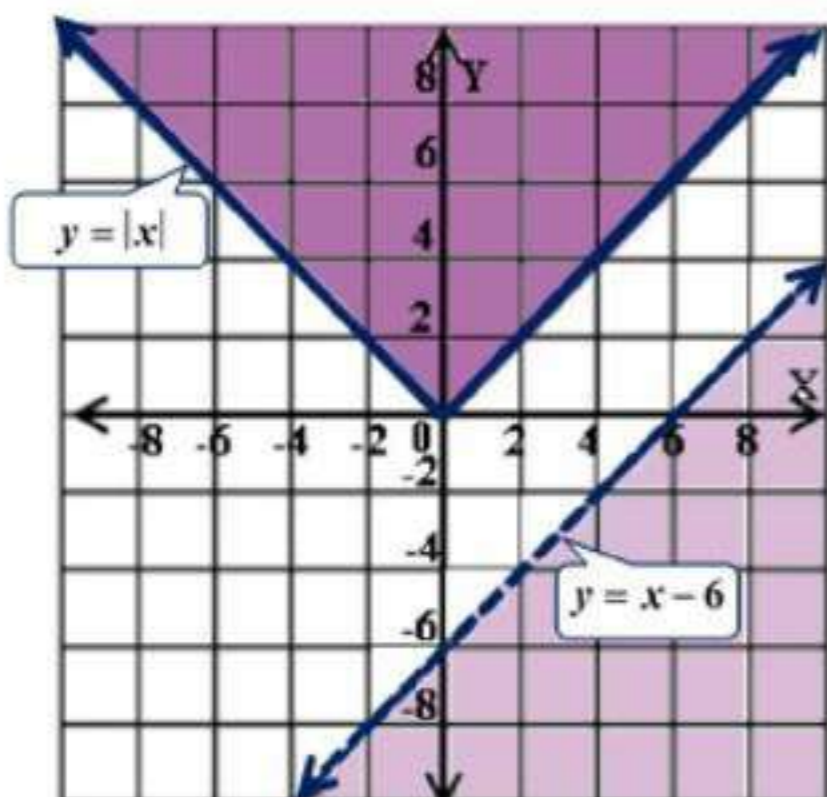
$$\begin{aligned} y &\leq -2x + 5 \\ y &> -\frac{1}{4}x - 6 \end{aligned}$$

1 A



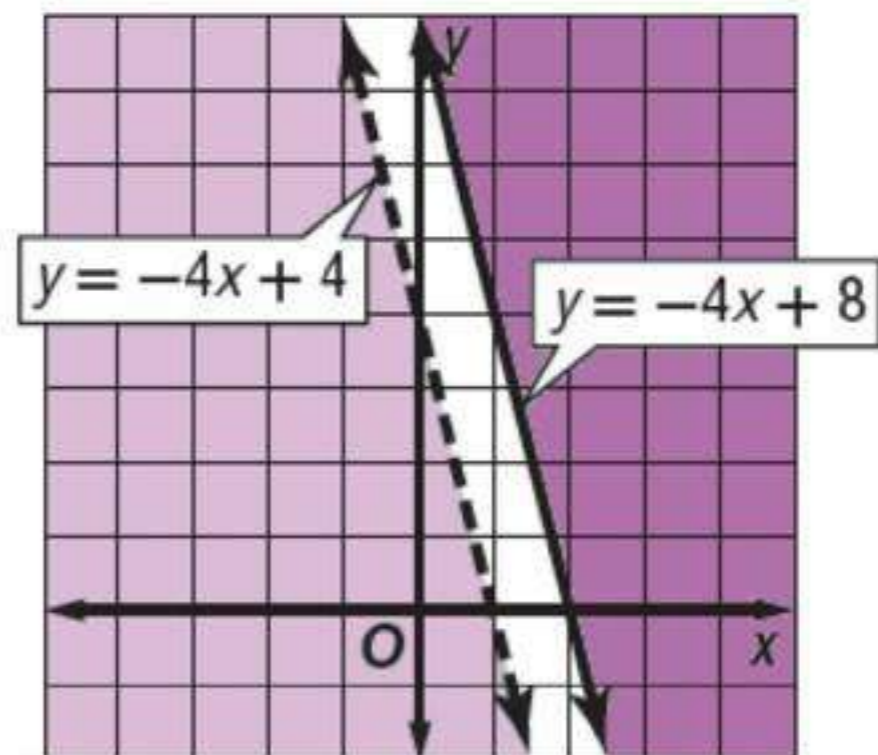
$$\begin{aligned} y &\geq |x| \\ y &< x - 6 \end{aligned}$$

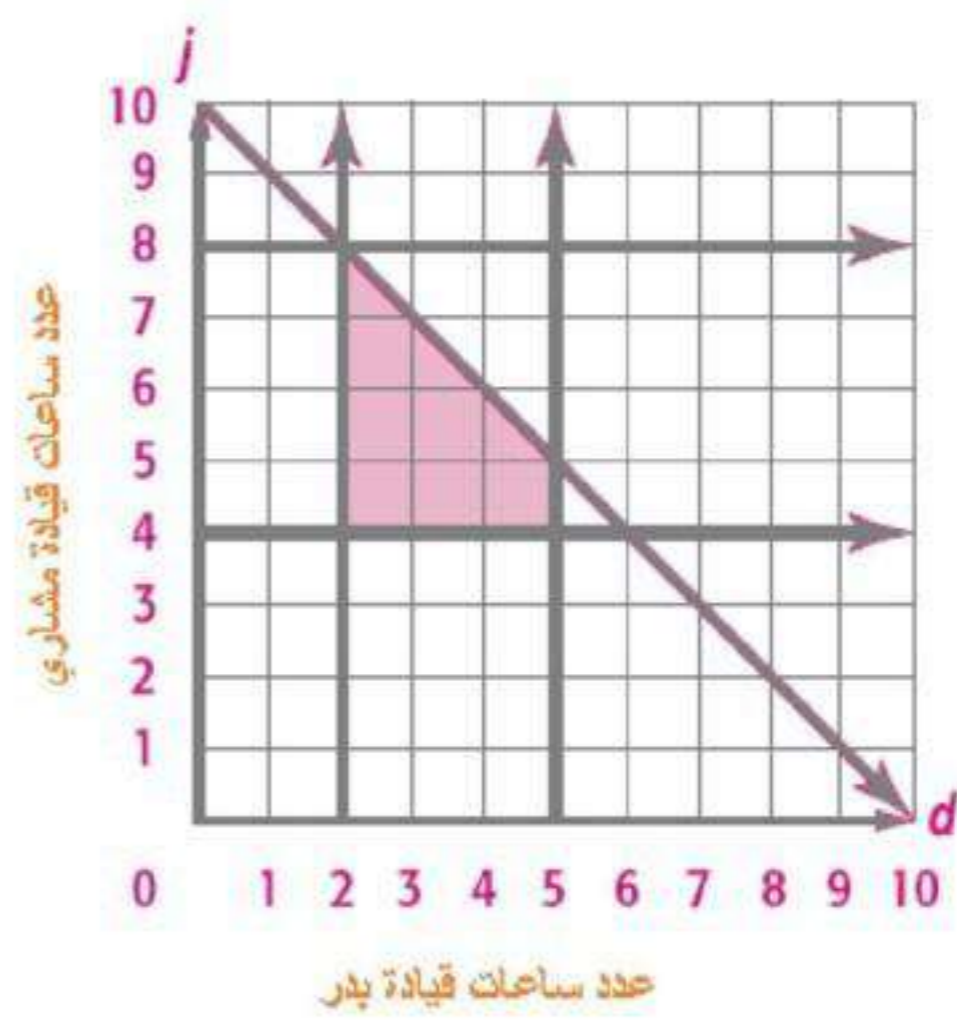
2 B



$$\begin{aligned} y &\geq -4x + 8 \\ y &< -4x + 4 \end{aligned}$$

2 A

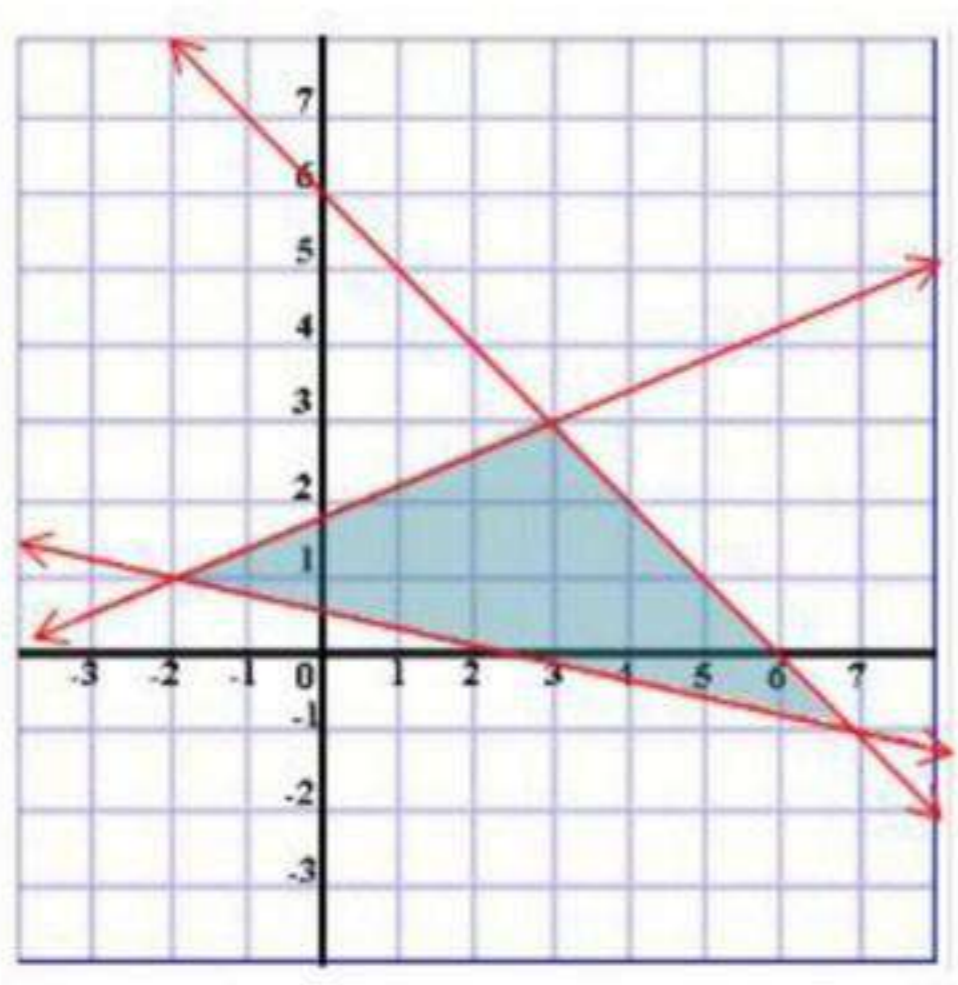




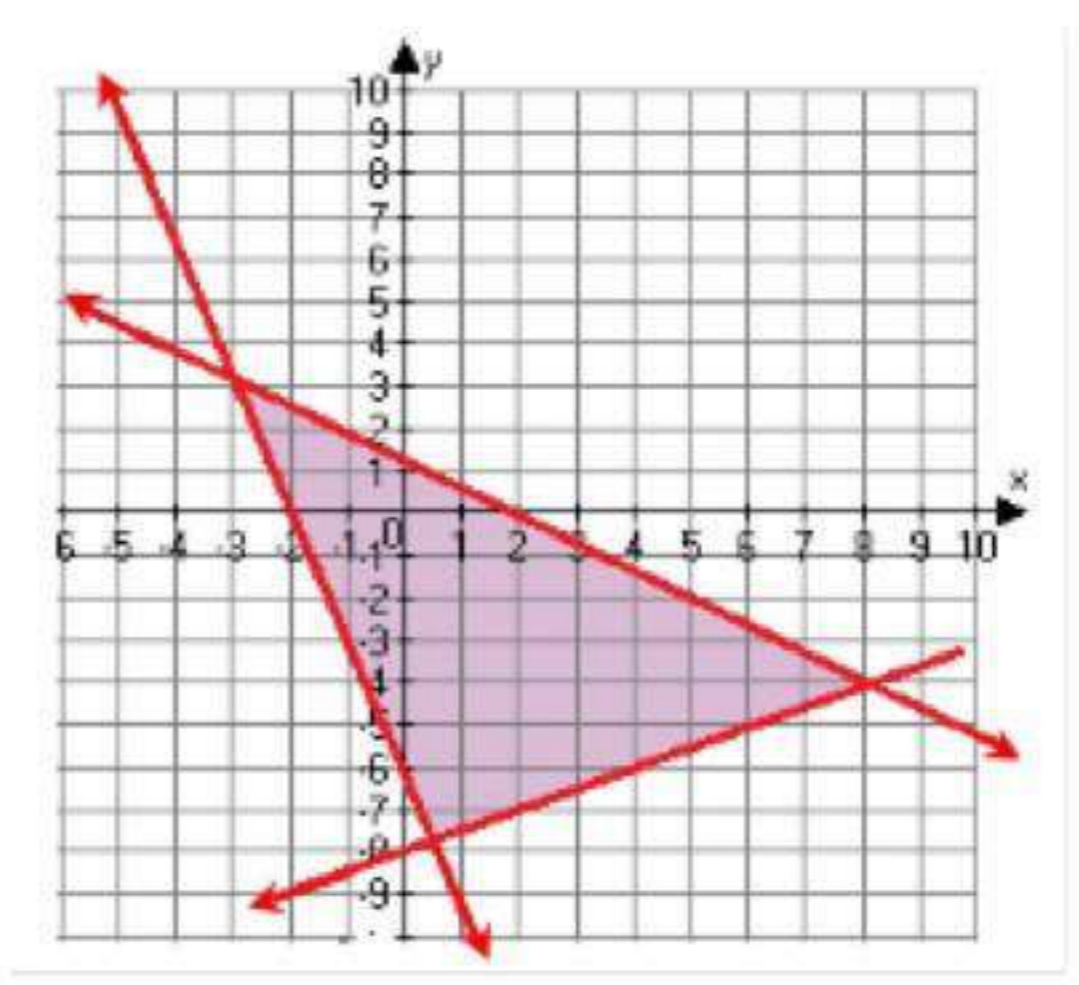
أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

$$\begin{cases} 5y \leq 2x + 9 \\ y \leq -x + 6 \\ 9y \geq -2x + 5 \end{cases} \quad \text{4 B}$$

$$\begin{cases} y \geq -3x - 6 \\ 2y \geq x - 16 \\ 11y + 7x \leq 12 \end{cases} \quad \text{4 A}$$



$(-2, 1)$  ,  $(3, 3)$  ,  $(7, -1)$



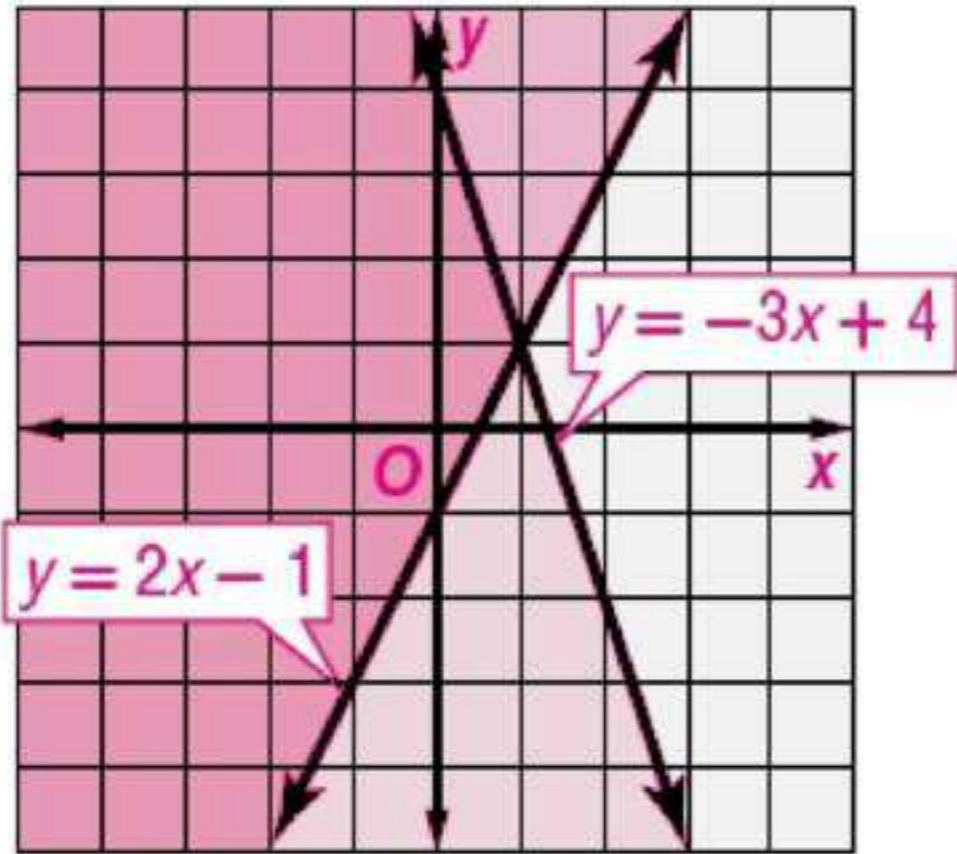
$(8, -4)$  ,  $(-3, 3)$  ,  $(\frac{4}{7}, \frac{54}{7})$



حل كل نظام فيما يأتي بيانياً:

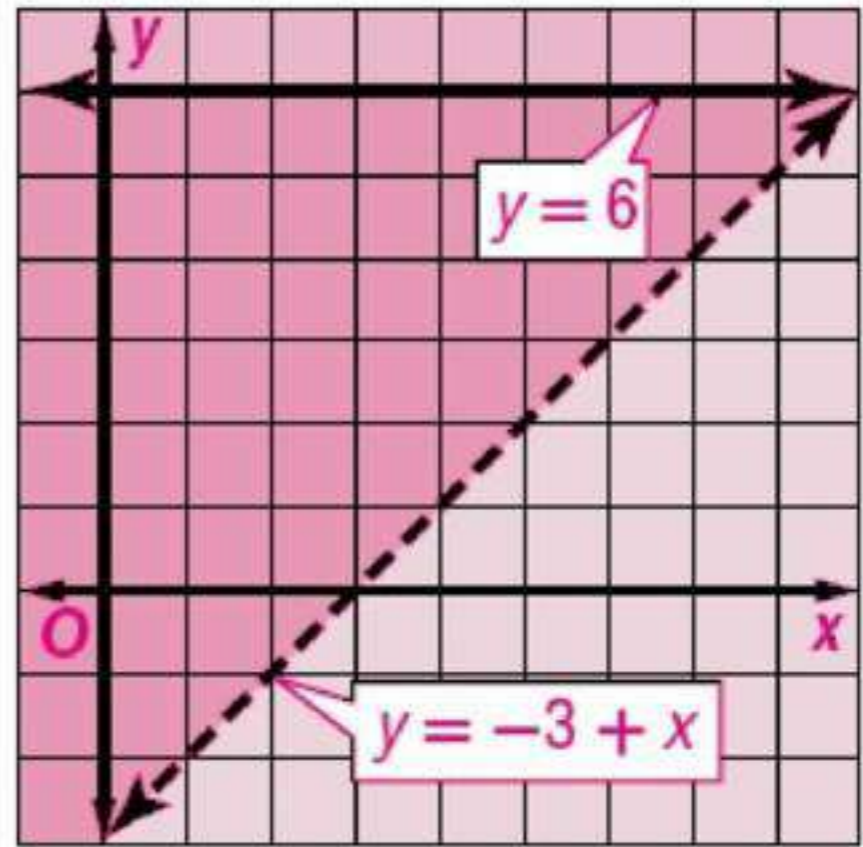
$$\begin{cases} y \leq -3x + 4 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$$

2



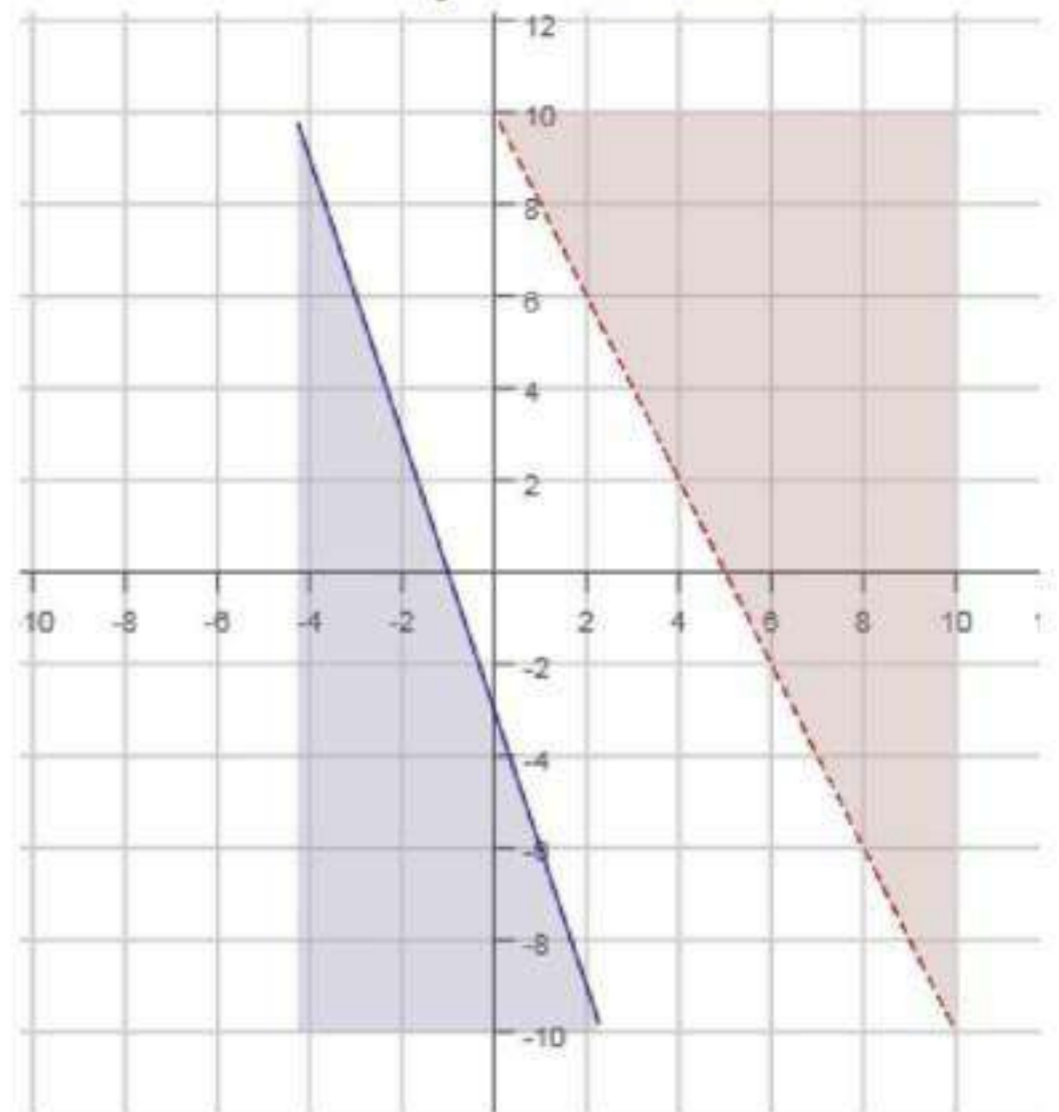
$$\begin{cases} y \leq 6 \\ y > -3 + x \end{cases}$$

1



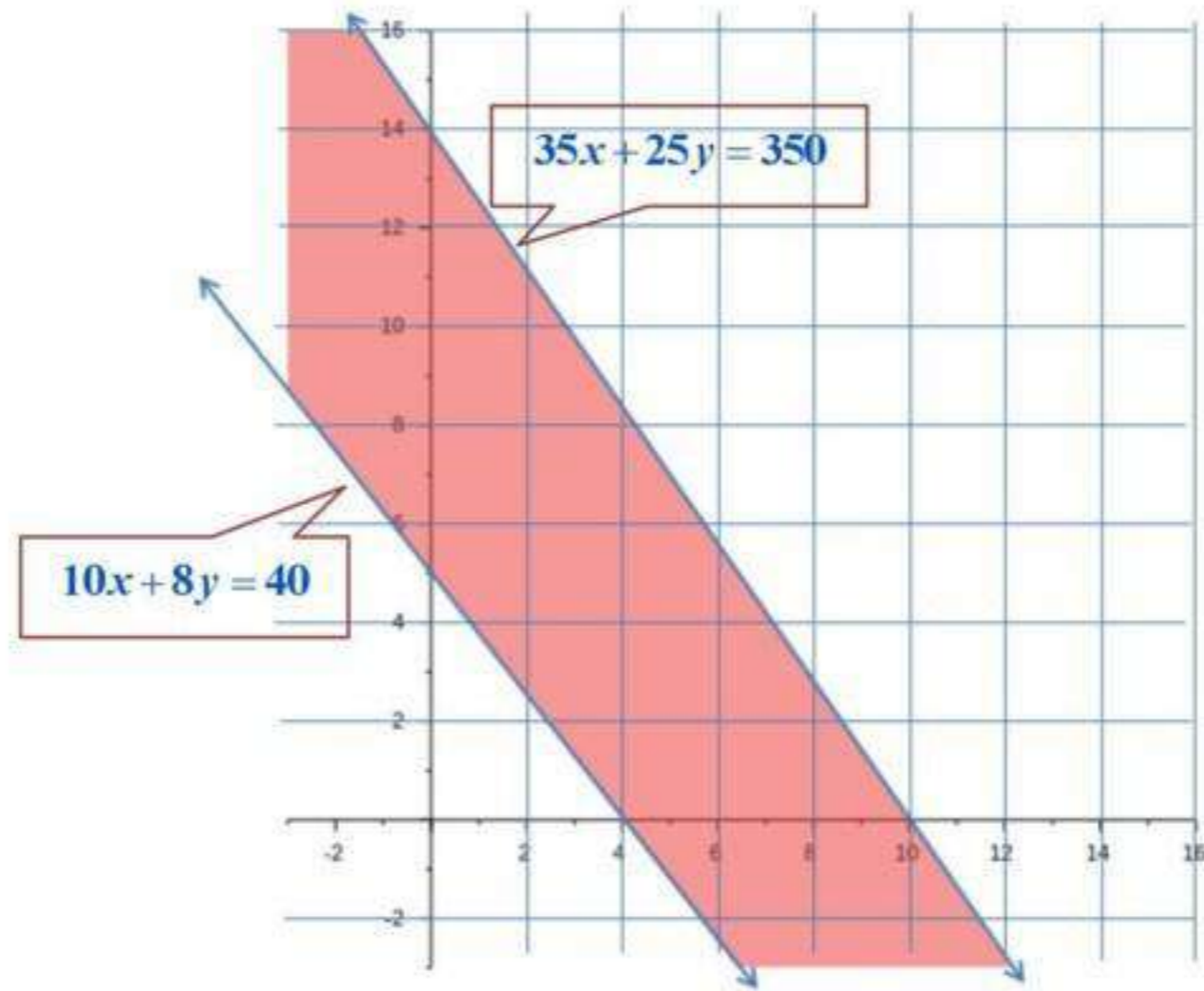
$$\begin{cases} y > -2x + 10 \\ y \leq -3x - 3 \end{cases}$$

3





مشتريات:



4 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني.  
 أو 5 رزم من النوع الأول، و 6 رزم من النوع الثاني.  
 أو 6 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني.

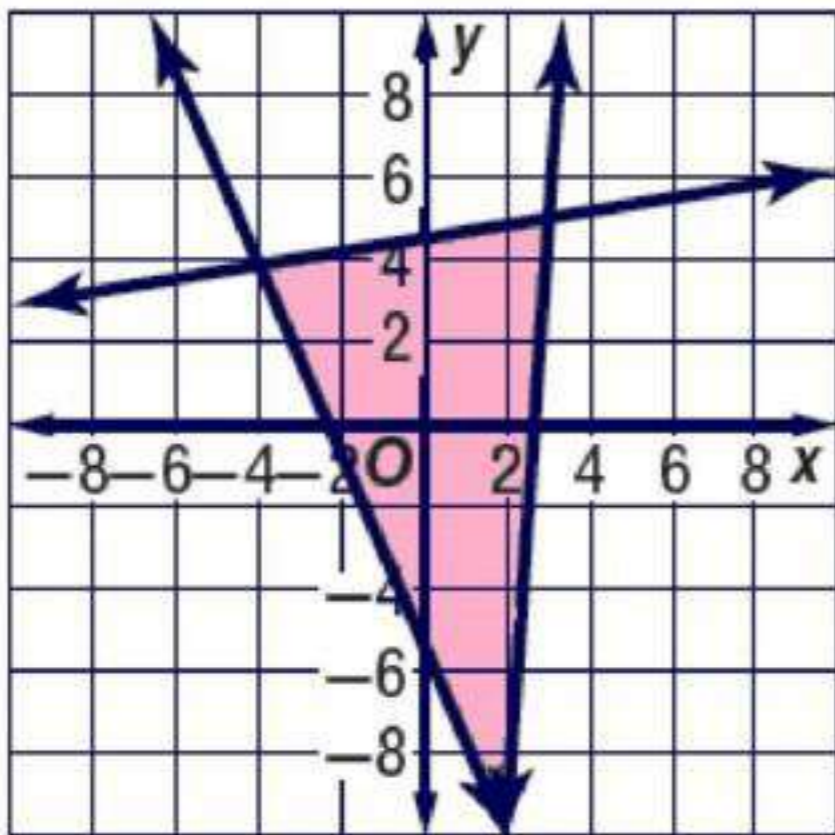
أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

6

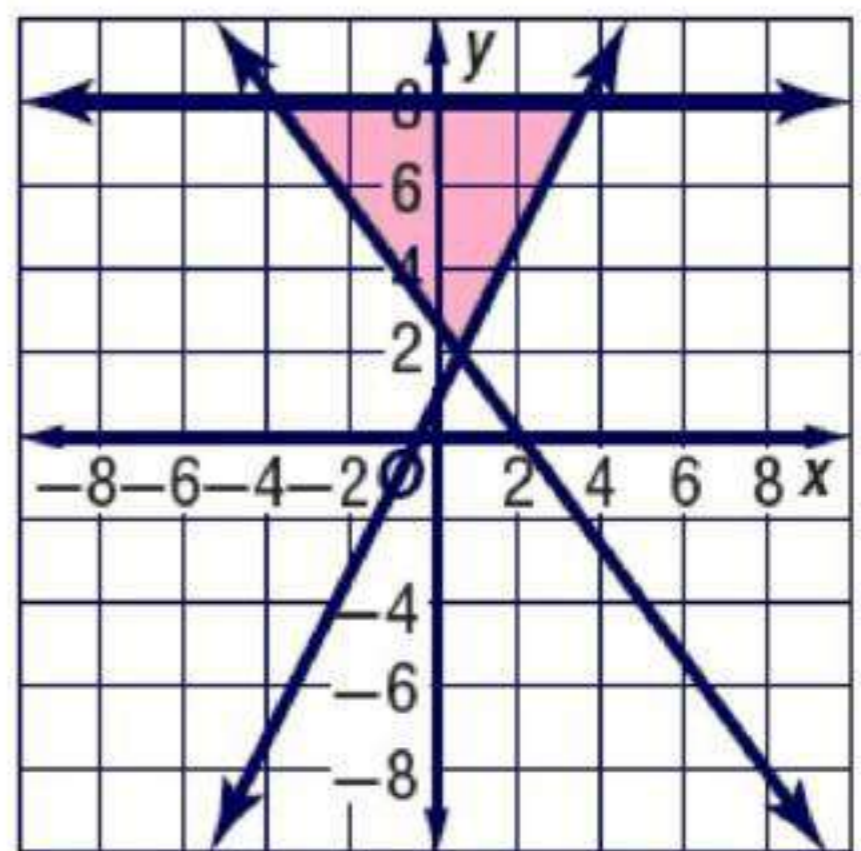
$$\begin{aligned} y &\geq -2x - 4 \\ 6y &\leq x + 28 \\ y &\geq 13x - 34 \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} y &\geq 2x + 1 \\ y &\leq 8 \\ 4x + 3y &\geq 8 \end{aligned}$$

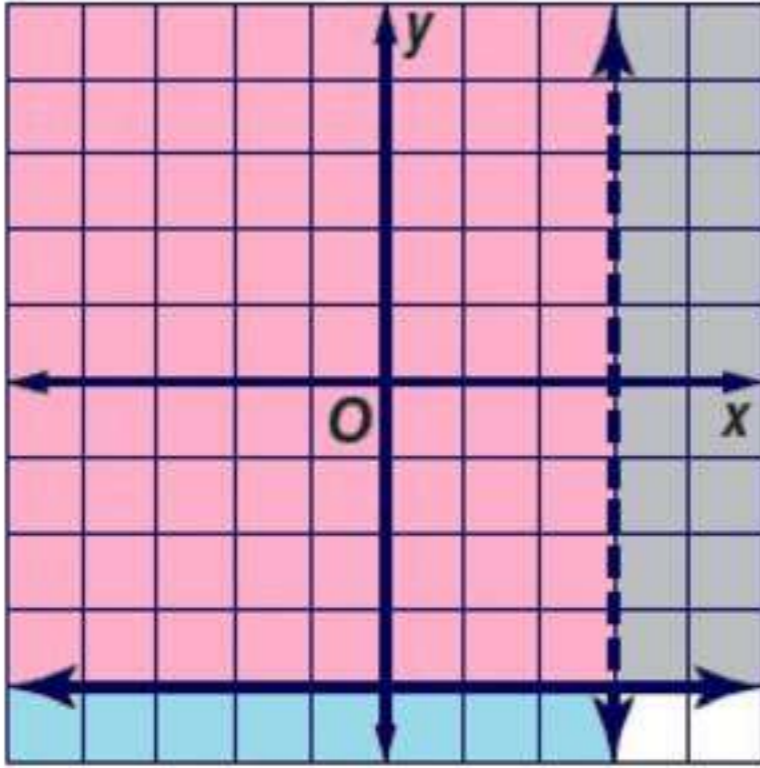


$(2, -8)$  ,  $(3, 5)$  ,  $(-4, 4)$



$(3.5, 8)$  ,  $(-4, 8)$  ,  $(0.5, 2)$

## تدرب وحل المسائل

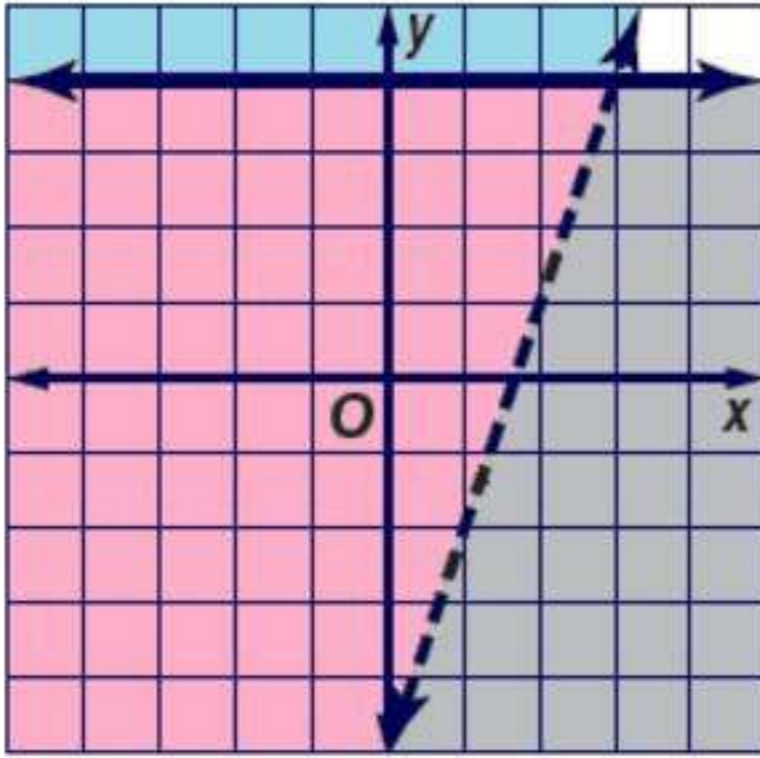


حل كل نظام مما يأتي بيانيا:

$$x < 3$$

$$y \geq -4$$

7



$$y > 3x - 5$$

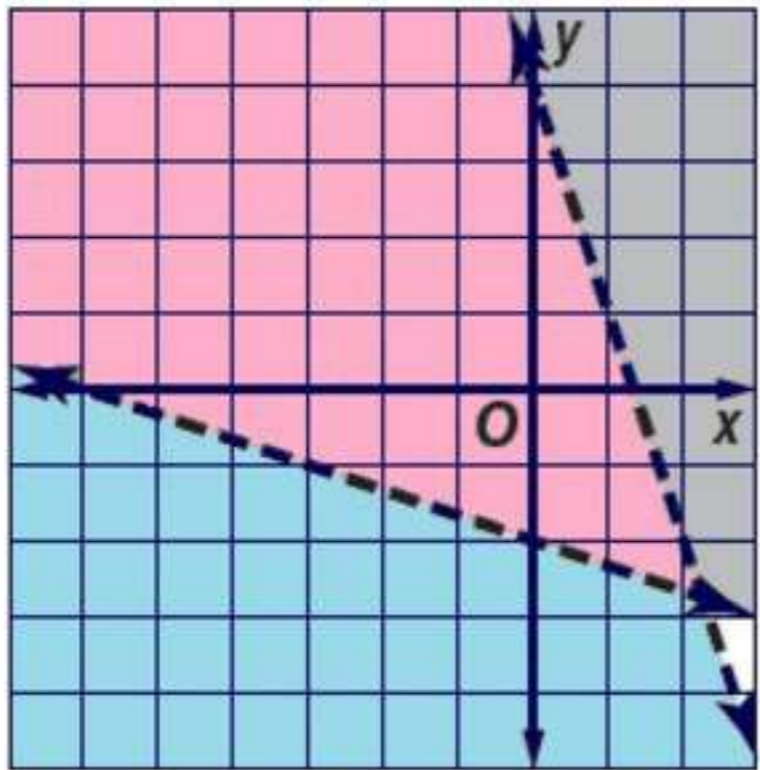
$$y \leq 4$$

8

بالتعويض عن  $(x, y)$  بـ  $(0, 0)$

$$0 > x(0) - 5$$

$$0 > -5 \quad \text{C}$$



$$y < -3x$$

$$y < -3x + 4$$

$$y < -3x + 4$$

$$3y + x > -6$$

9

$$3y + x > -6$$

$$y > -\frac{1}{3}x - 2$$

بالتعويض عن

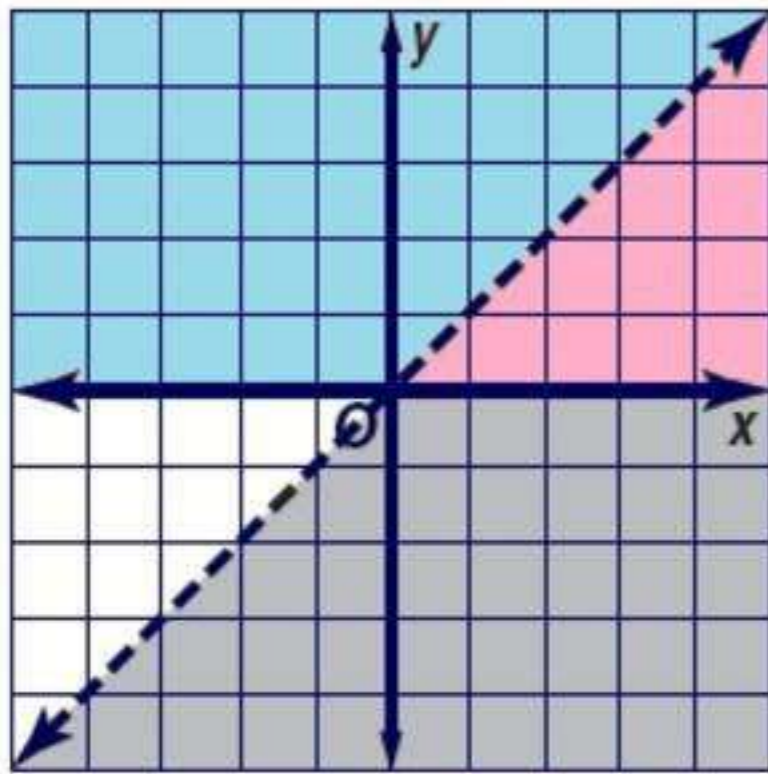
$(0, 0)$  بـ  $(x, y)$

$$0 < -3(0) + 4$$

$$0 < 4 \quad \text{C}$$

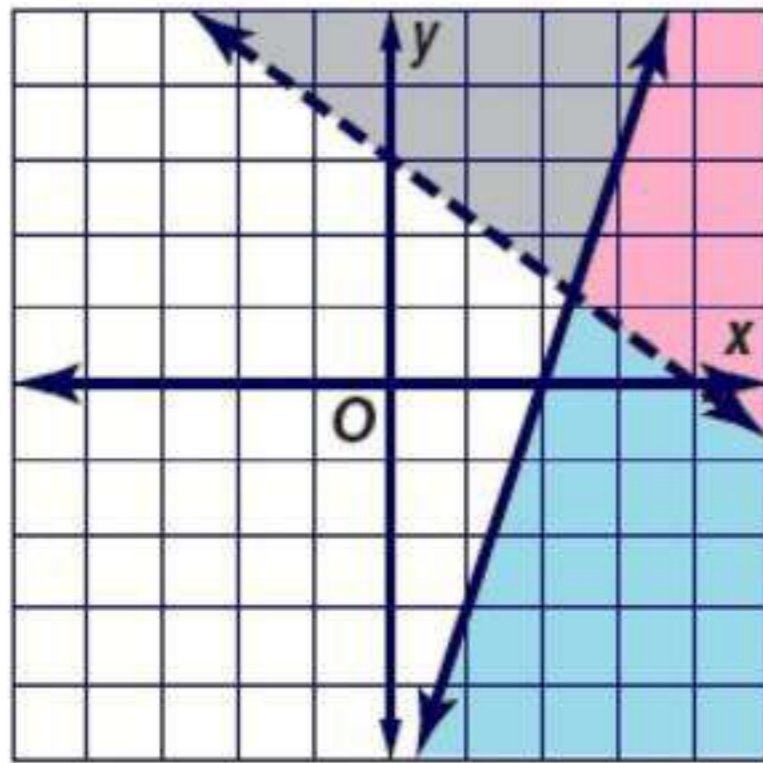
$$0 > -\frac{1}{3}(0) - 2$$

$$0 > -2 \quad \text{C}$$



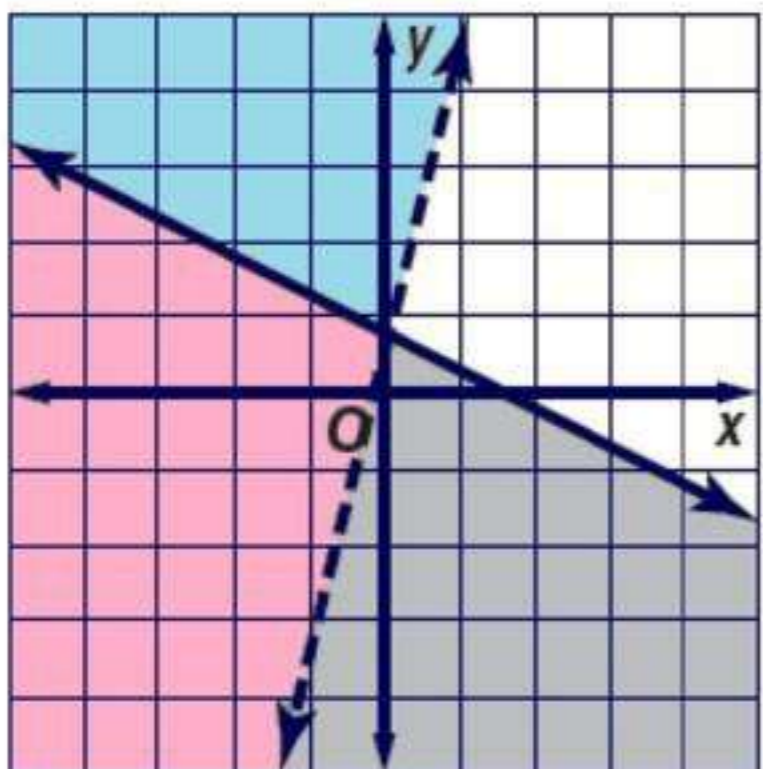
$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ y &< x \end{aligned} \quad (10)$$

بالتعويض عن  
 $(2, 0) \rightarrow (x, y)$   
 $y < x$   
 $0 < 2$     **c**



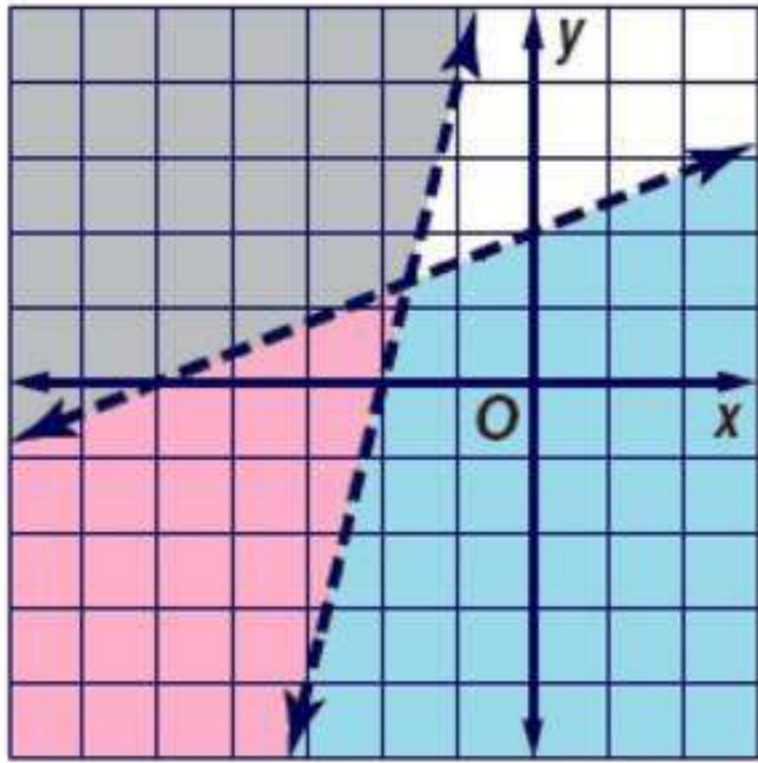
$$\begin{aligned} 6x - 2y &\geq 12 \\ 3x + 4y &> 12 \end{aligned} \quad (11)$$

$6x - 2y \geq 12$	$3x + 4y > 12$
$-2y \geq -6x - 12$	$4y > -3x + 12$
$y \leq 3x - 6$	$y > -\frac{3}{4}x + 3$
بالتعويض عن	بالتعويض عن
$(0, 0) \rightarrow (x, y)$	$(0, 0) \rightarrow (x, y)$
$0 \leq 3(0) - 6$	$0 > -\frac{3}{4}(0) + 3$
$0 \leq -6$ <b>d</b>	$0 > 3$ <b>d</b>



$$\begin{aligned} -8x &> -2y - 1 \\ -4y &\geq 2x - 5 \end{aligned} \quad (12)$$

$-8x > -2y - 1$	$-4y \geq 2x - 5$
$-8x + 1 > -2y$	$y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$
$4x - \frac{1}{2} < y$	
بالتعويض عن	بالتعويض عن
$(0, 0) \rightarrow (x, y)$	$(0, 0) \rightarrow (x, y)$
$4(0) - \frac{1}{2} < 0$	$0 \leq \frac{1}{2}(0) + \frac{5}{4}$
$-\frac{1}{2} < 0$ <b>c</b>	$0 \leq \frac{5}{4}$ <b>c</b>



$$5y < 2x + 10$$

$$y < \frac{2}{5}x + 2$$

بالتعويض عن

$$(0, 0) \rightarrow (x, y)$$

$$0 < \frac{2}{5}(0) + 2$$

$$0 < 2 \quad c$$

$$5y < 2x + 10 \quad (13)$$

$$y - 4x > 8$$

$$y - 4x > 8$$

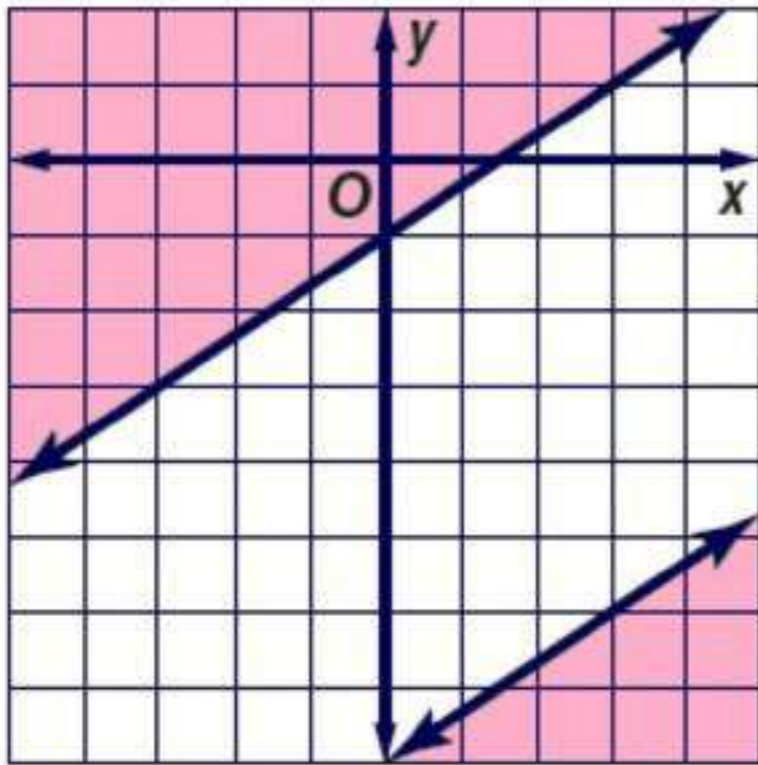
$$y > 4x + 8$$

بالتعويض عن

$$(0, 0) \rightarrow (x, y)$$

$$0 > 4(0) + 8$$

$$0 > 8 \quad d$$



$$3y - 2x \leq -24$$

$$3y \leq 2x - 24$$

بالتعويض عن

$$(0, 0) \rightarrow (x, y)$$

$$0 \leq \frac{2}{3}(0) - 8$$

$$0 \leq -8 \quad d$$

$$3y - 2x \leq -24 \quad (14)$$

$$y \geq \frac{2}{3}x - 1$$

$$y \geq \frac{2}{3}x - 1$$

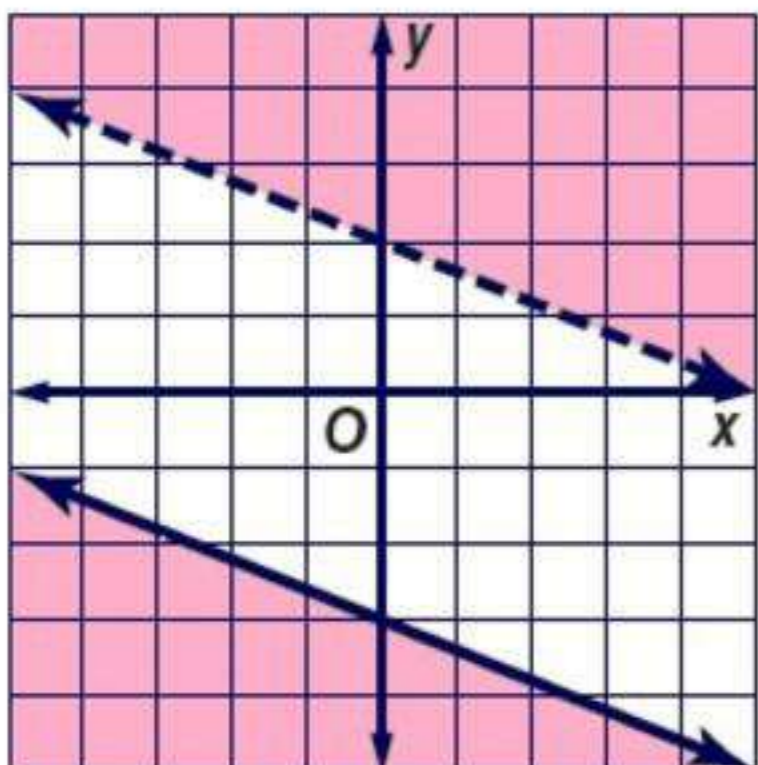
بالتعويض عن

$$(0, 0) \rightarrow (x, y)$$

$$0 \geq \frac{2}{3}(0) - 1$$

$$0 \geq -1 \quad c$$

مجموعة الحل هي  $\Phi$



$$y > -\frac{2}{5}x + 2$$

بالتعويض عن

$$(0, 0) \rightarrow (x, y)$$

$$0 > -\frac{2}{5}(0) + 2$$

$$0 > 2 \quad d$$

$$y > -\frac{2}{5}x + 2 \quad (15)$$

$$5y \leq -2x - 15$$

$$5y \leq -2x - 15$$

$$y \leq -\frac{2}{5}x - 3$$

بالتعويض عن

$$(0, 0) \rightarrow (x, y)$$

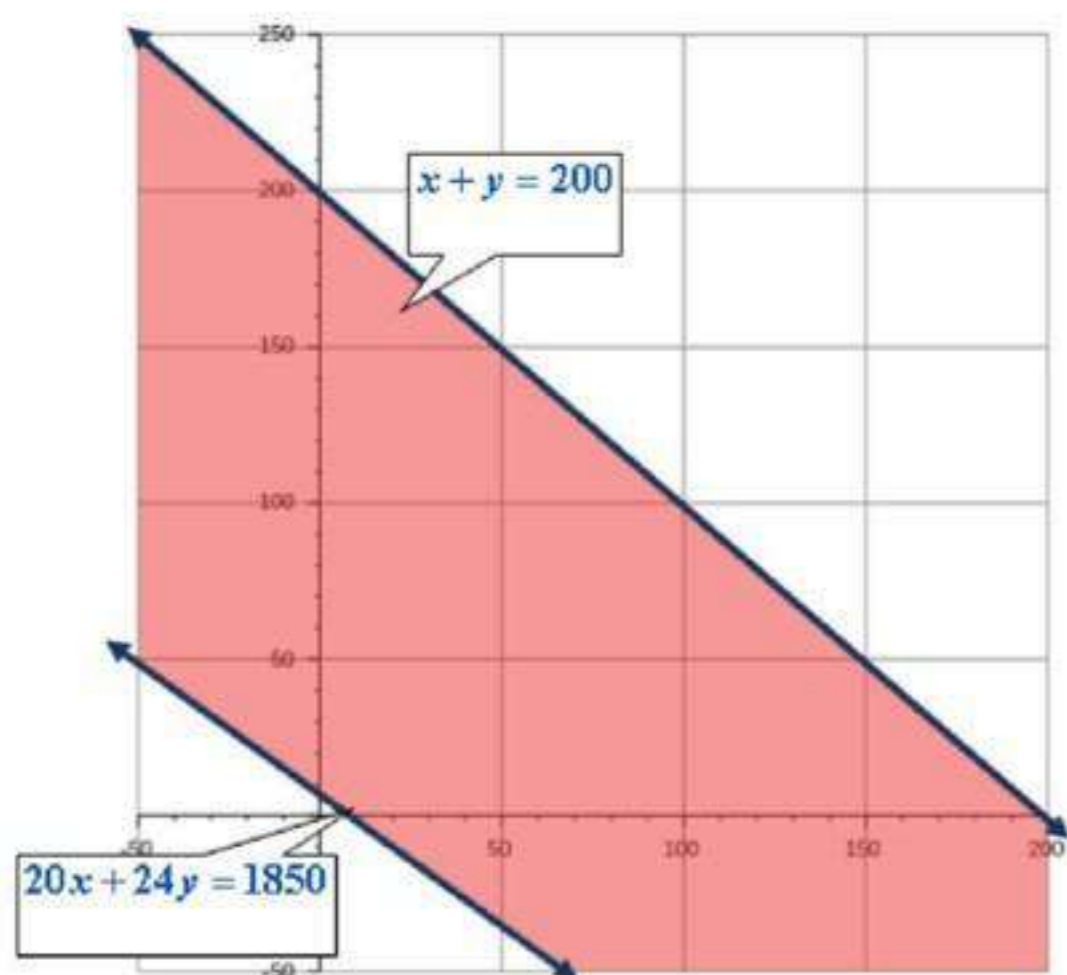
$$0 \leq -\frac{2}{5} - 3$$

$$0 \leq -3 \quad d$$

مجموعة الحل هي  $\Phi$

عمل جزئي:

16



$x$ : عدد الساعات في العمل الأول  
 $y$ : عدد الساعات في العمل الثاني

بضرب عدد الساعات في الاسبوع  
 في 8

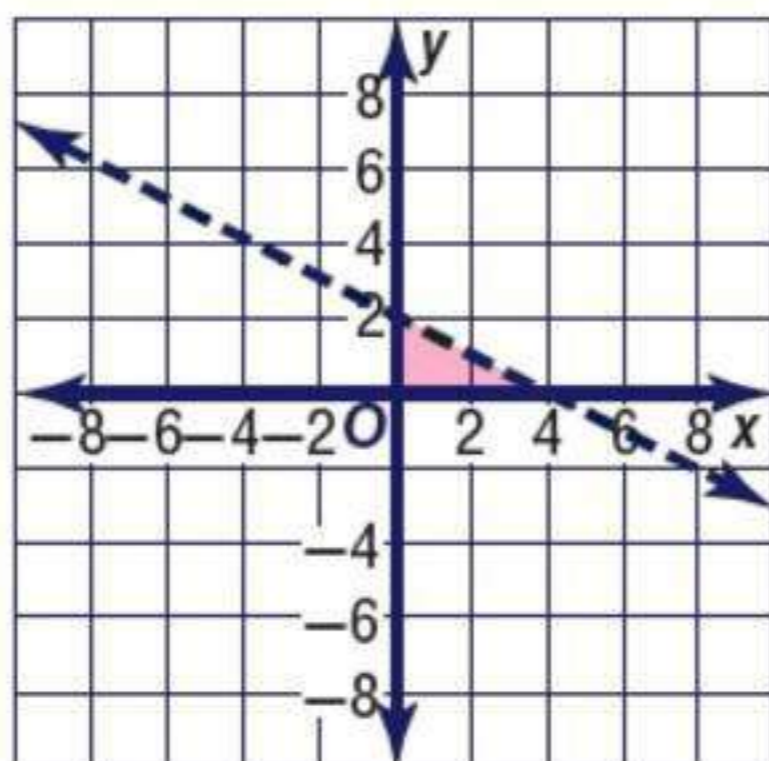
$$25 \times 8 = 200$$

$$20x + 24y \geq 1850$$

$$x + y \leq 200$$

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

17



$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + 2y < 4$$

$$x + 2y < 4$$

$$2y < -x + 4$$

$$y < -\frac{1}{2}x + 2$$

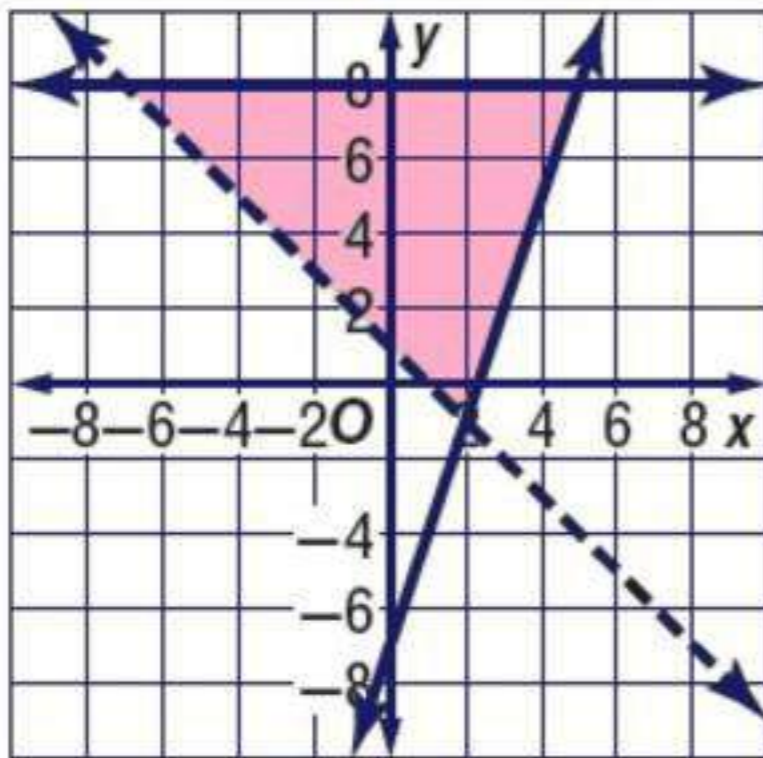
بالتعويض عن

$$(0, 0) \rightarrow (x, y)$$

$$0 < -\frac{1}{2}(0) + 2$$

$$0 < 2 \quad \text{C}$$

$$(0, 2), (4, 0), (0, 0)$$

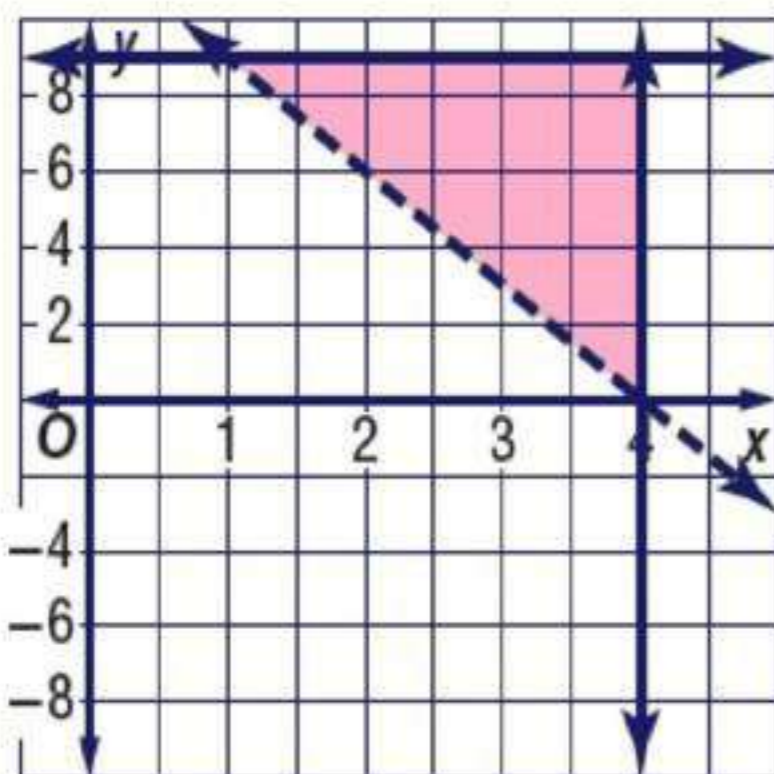


$$y \geq 3x - 7$$

$$y \leq 8$$

$$x + y > 1$$

$$(0, 2), (4, 0), (-7, 8)$$

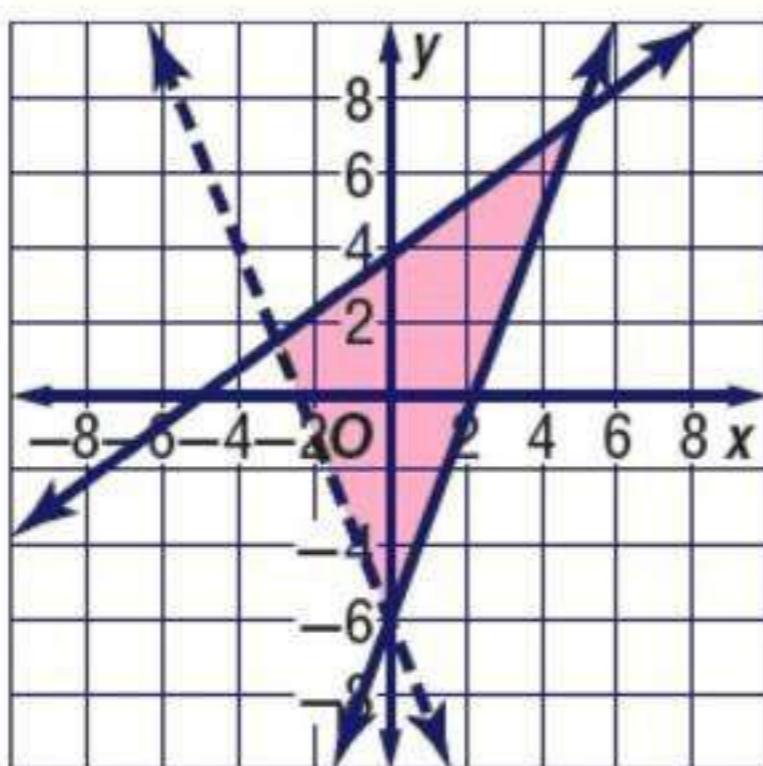


$$x \leq 4$$

$$y > -3x + 12$$

$$y \leq 9$$

$$(1, 9), (4, 0), (4, 9)$$



$$-3x + 4y \leq 15$$

$$2y + 5x > -12$$

$$10y - 60 \geq 27x$$

$$4y \leq 3x + 15$$

$$y \leq \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$2y > -5x - 12$$

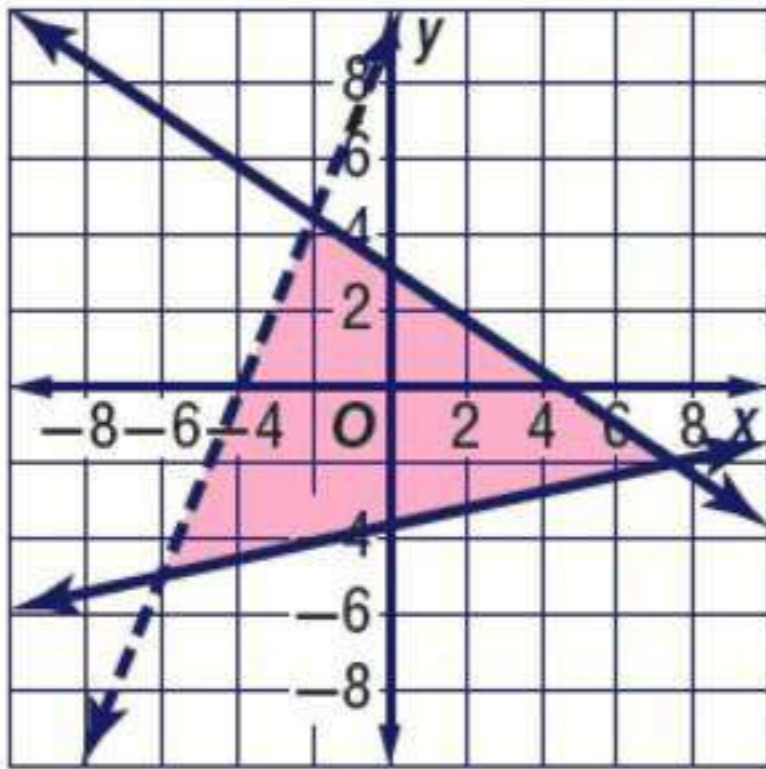
$$y > -\frac{5}{2}x - 12$$

$$10y \geq 27x + 60$$

$$y \geq 2.7x + 6$$

$$(-3, 1.5), (5, 7.5), (0, -6)$$

$$\begin{aligned} 8y - 19x &< 74 \\ 38y + 26x &< 119 \\ 54y - 12x &\geq -198 \end{aligned}$$



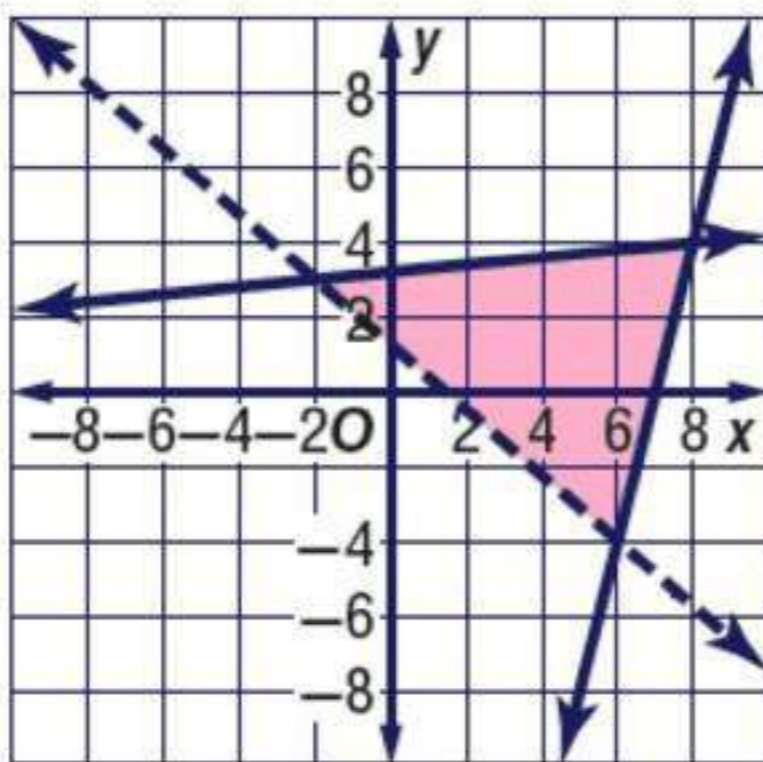
$$\begin{aligned} 8y &< 19x + 74 \\ y &< \frac{19}{8}x + \frac{74}{8} \\ y &< 2.4x + 9.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38y &< -26x + 119 \\ y &< -0.7x + 3.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 54y &\geq 12x - 198 \\ y &\geq 0.2x - 3.7 \end{aligned}$$

$$(-6, -5), (-2, 4.5), (7.5, -2)$$

$$\begin{aligned} 6y - 24x &\geq -168 \\ 8y + 7x &> 10 \\ 20y - 2x &\leq 64 \end{aligned}$$

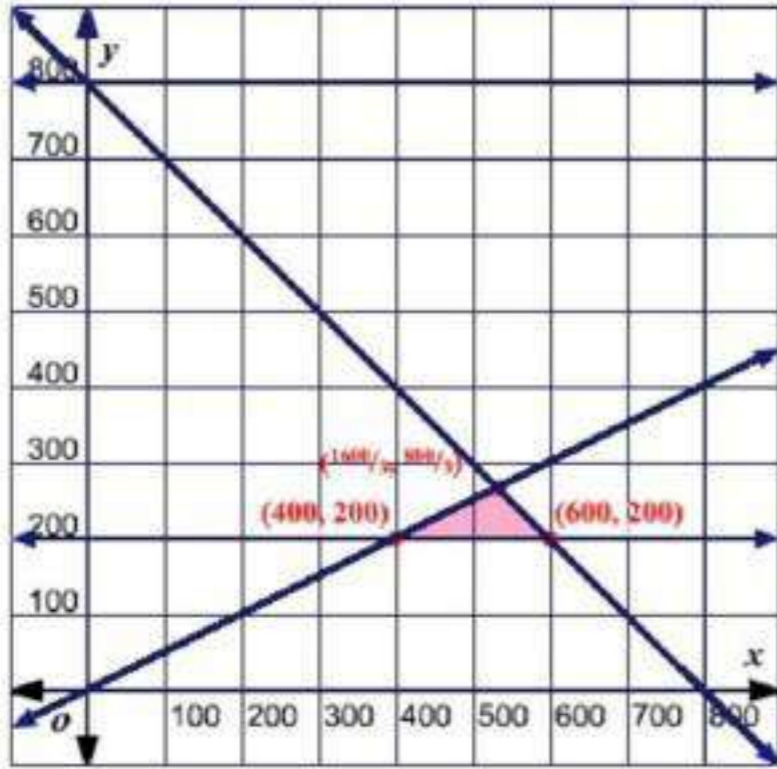


$$\begin{aligned} 6y &\geq 24x - 168 \\ y &\geq 4x - 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8y &> -7x + 10 \\ y &> -0.9 + 1.25 \end{aligned}$$

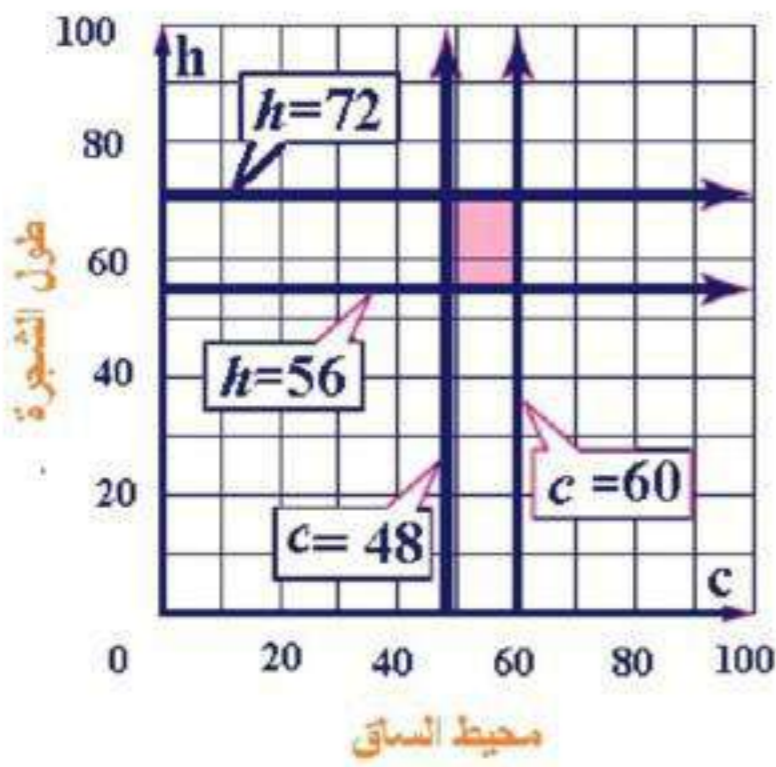
$$\begin{aligned} 20y &\geq 2x - 64 \\ y &\geq 0.1 - 3.2 \end{aligned}$$

$$(8, 4), (6, -4), (-2, 3)$$



بفرض  $x$  عدد الدقائق نهاراً  
و  $y$  عدد الدقائق ليلاً  
 $x \geq 0$  ,  $y \geq 200$

$$x + y \leq 800 \quad , \quad 2y \leq x$$



اكتب نظام متباينات خطية يمثل مدى كل من  
الارتفاع  $h$  و محيط الساق  $c$  للأشجار شبه  
السيطرة و مثله بيانياً

$$h \geq 56, \quad h \leq 72, \quad c \geq 48, \quad c \leq 60$$

ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة  
زيزفون إرتفاعها 48ft؟ و ما المدى الذي  
يقع فيه محيط ساقها؟

المجموعة التي تنتمي إليها شجرة الزيزفون هي: الأشجار المتوسطة السيطرة  
المدى الذي يقع فيه محيط ساقها: 34 – 48 in.

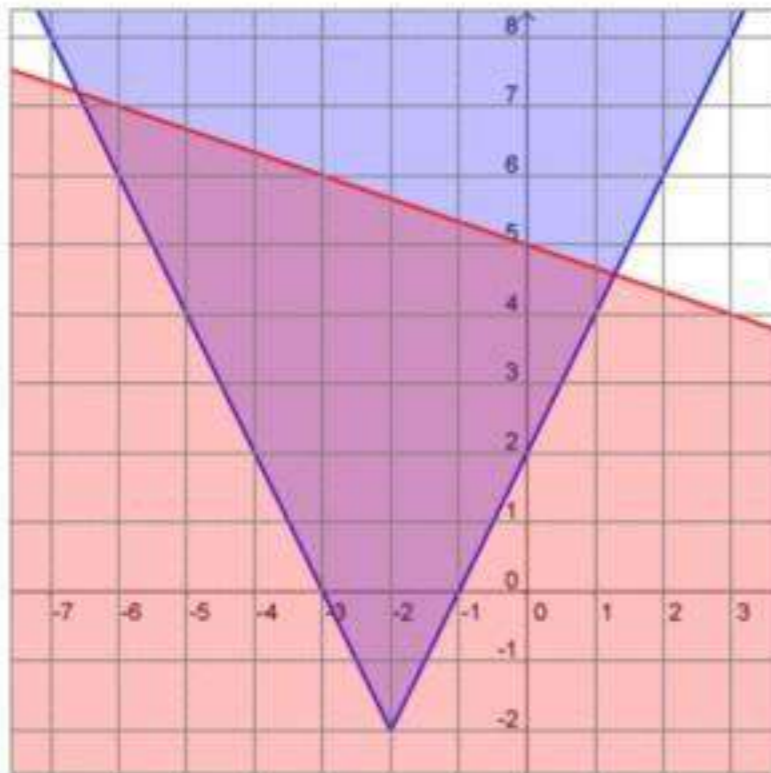
حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

$$y \geq |2x + 4| - 2$$

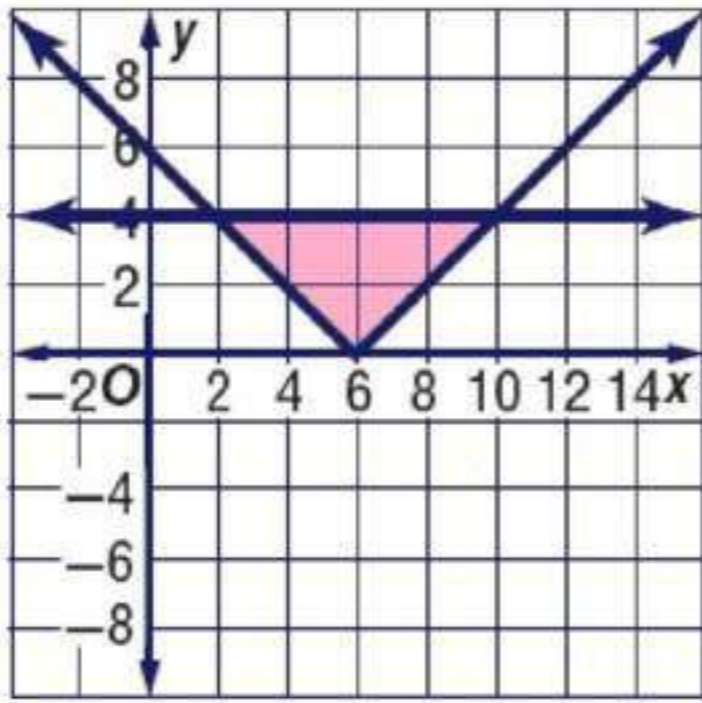
$$3y + x \leq 15$$

$$3y \leq -x + 15$$

$$y \leq -\frac{x}{3} + 5$$

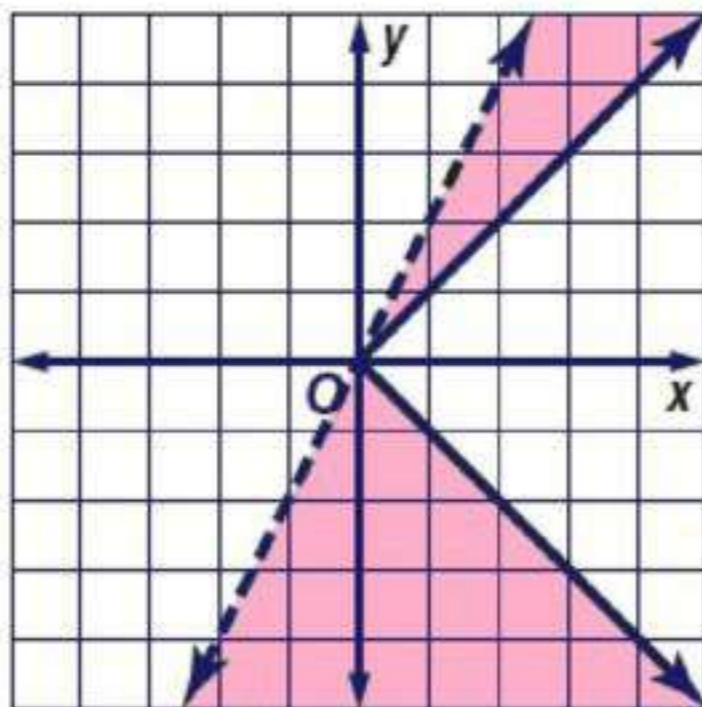






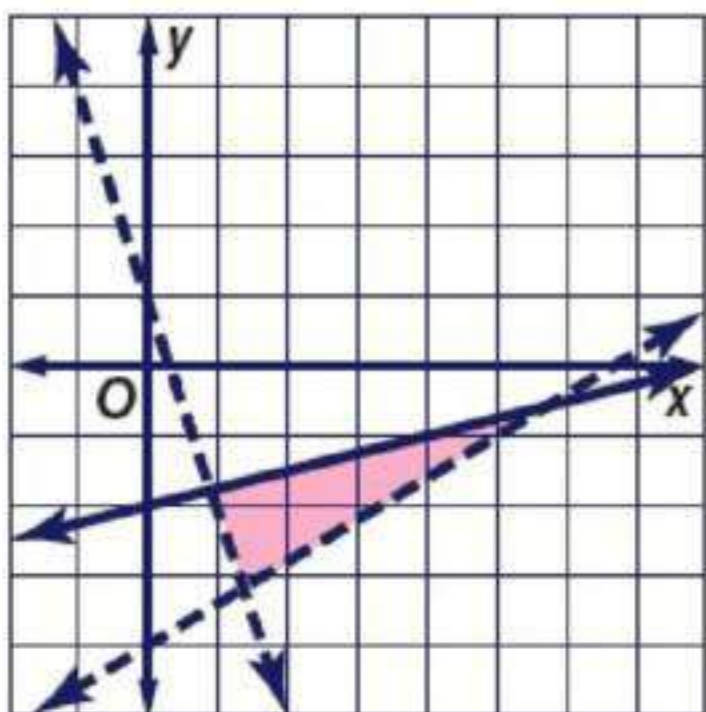
$$\begin{cases} y \geq |6 - x| \\ |y| \leq 4 \end{cases}$$

26



$$\begin{cases} |y| \geq x \\ y < 2x \end{cases}$$

27



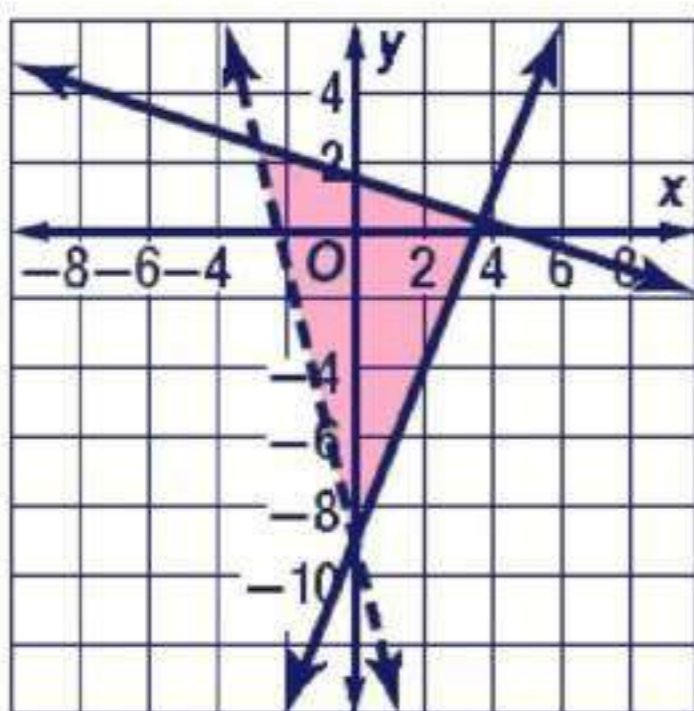
$$\begin{cases} y > -3x + 1 \\ 4y \leq x - 8 \\ 3x - 5y < 20 \end{cases}$$

28

$$y \leq \frac{1}{4}x - 2$$

$$-5y < -3x + 20$$

$$y > \frac{3}{5}x - 4$$



$$6y + 2x \leq 9$$

$$2y + 18 \geq 5x$$

$$y > -4x - 9$$

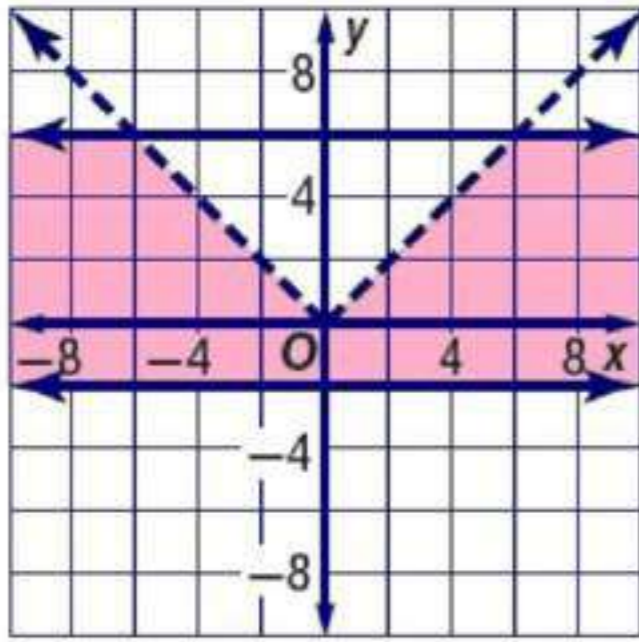
$$6y \leq -2x + 9$$

$$y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$$

$$2y \geq 5x - 18$$

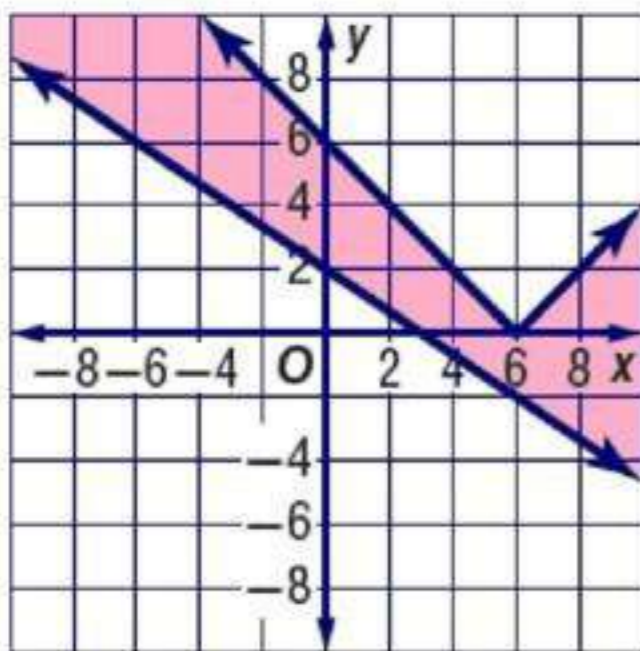
$$y \geq \frac{5}{2}x - 9$$

29



$$\begin{aligned} |x| &> y \\ y &\leq 6 \\ y &\geq -2 \end{aligned}$$

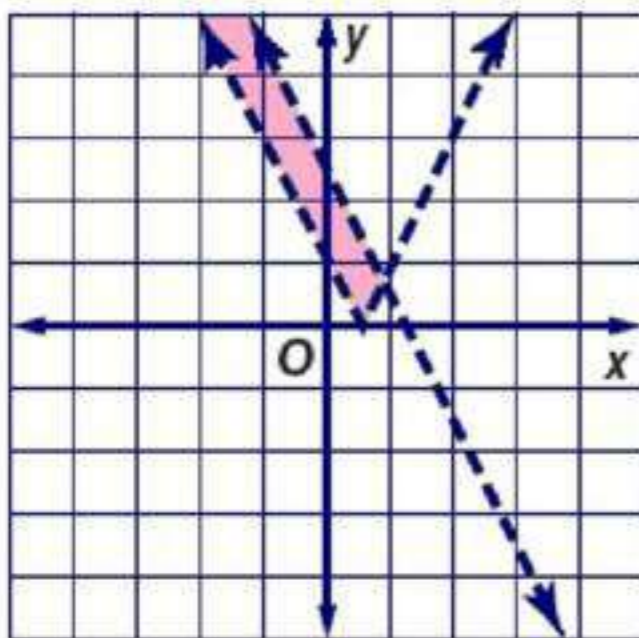
30



$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 6 \\ y &\leq |x - 6| \end{aligned}$$

31

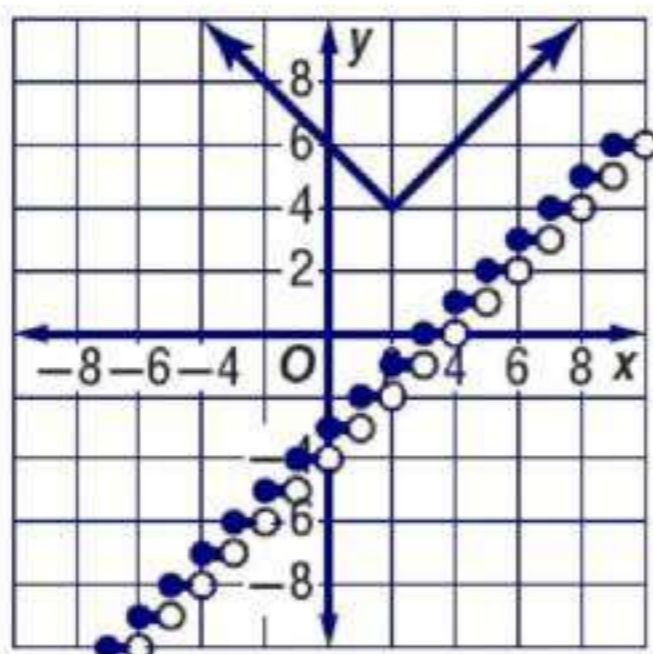
$$\begin{aligned} 3y &\geq -2x + 6 \\ y &\geq -\frac{2}{3}x + 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 8x + 4y &< 10 \\ y &> |2x - 1| \end{aligned}$$

32

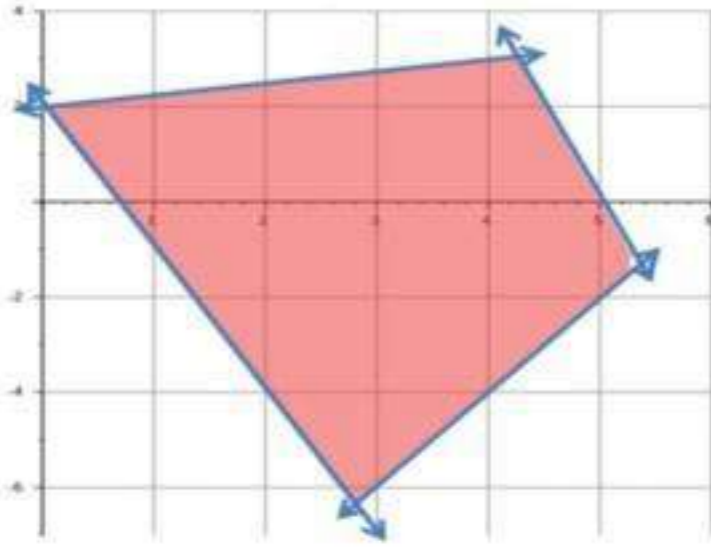
$$\begin{aligned} 4y &< -8x + 10 \\ y &< -2x + 2.5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &\geq |x - 2| + 4 \\ y &\leq \square x \square - 3 \end{aligned}$$

33

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:



$$y \geq 2x - 12$$

$$y \leq -4x + 20$$

$$4y - x \leq 8$$

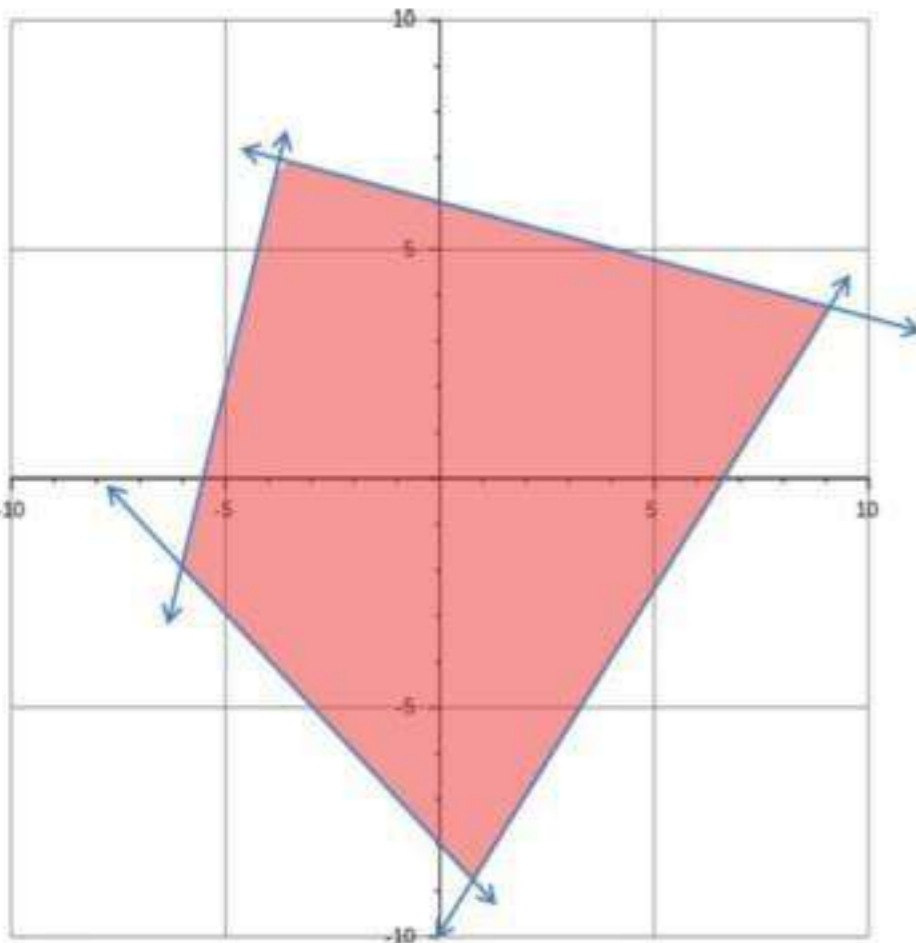
$$y \geq -3x + 2$$

$$4y \leq x + 8$$

$$y \leq \frac{1}{4}x + 2$$

34

$$(0, 2), \left(5\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right), \left(4\frac{4}{17}, 3\frac{1}{17}\right), (2.8, -6.4)$$



$$y \geq -x - 8$$

$$2y \geq 3x - 20$$

$$4y + x \leq 24$$

$$y \leq 4x + 22$$

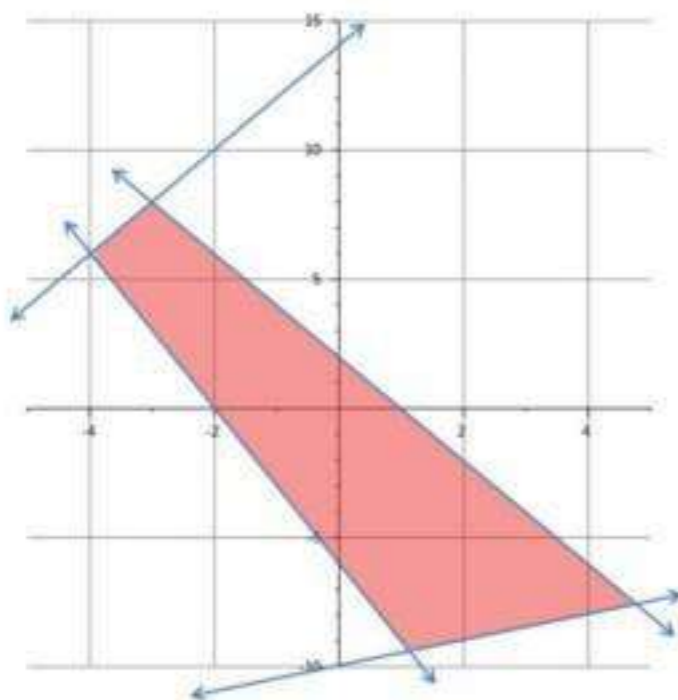
35

$$y > \frac{3}{2}x - 10$$

$$4y \leq -x + 24$$

$$y \leq -\frac{1}{4}x + 6$$

$$(-6, -2), \left(-3\frac{13}{17}, 6\frac{16}{17}\right), \left(9\frac{1}{7}, 3\frac{5}{7}\right), (0.8, -8.8)$$



$$2y - x \geq -20$$

$$y \geq -3x - 6$$

$$y \leq -2x + 2$$

$$y \leq 2x + 14$$

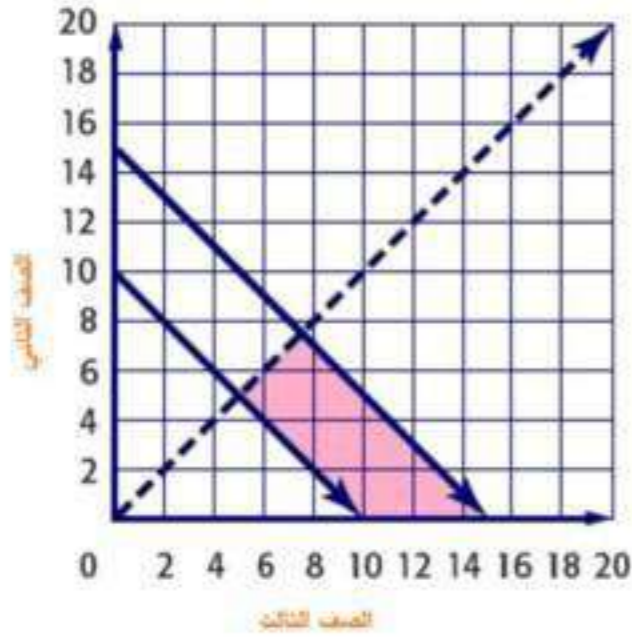
36

$$2y \geq x - 20$$

$$y \geq \frac{1}{2}x - 10$$

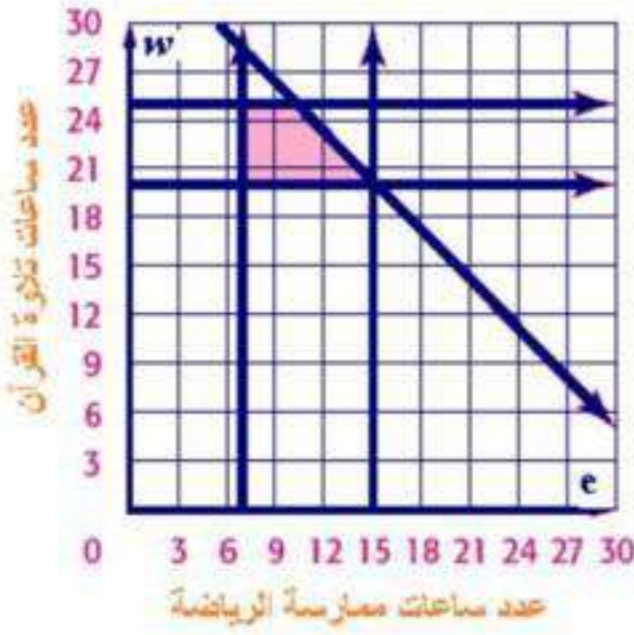
$$(-4, 6), (-3, 8), (4.8, -7.6), \left(1\frac{1}{7}, -9\frac{3}{7}\right)$$

اكتب نظام متباينات يمثل ذلك الموقف، و مثله بيانياً.



$$\begin{aligned} 10 &\leq x + y \leq 15 \\ x &> y \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

افرض أن  $w$  هي عدد ساعات تلاوة القرآن و  $e$  هي عدد ساعات ممارسة الرياضة



$$\begin{aligned} w + e &\leq 20 \\ 4 &\leq e \leq 10 \\ 10 &\leq w \leq 14 \end{aligned}$$

### مسائل مهارات التفكير العليا

39 مسألة مفتوحة: اكتب نظاماً من متباينتين على أن يكون الحل :

a) ربع الثالث فقط  
 $y < -2$  ,  $x < -1$

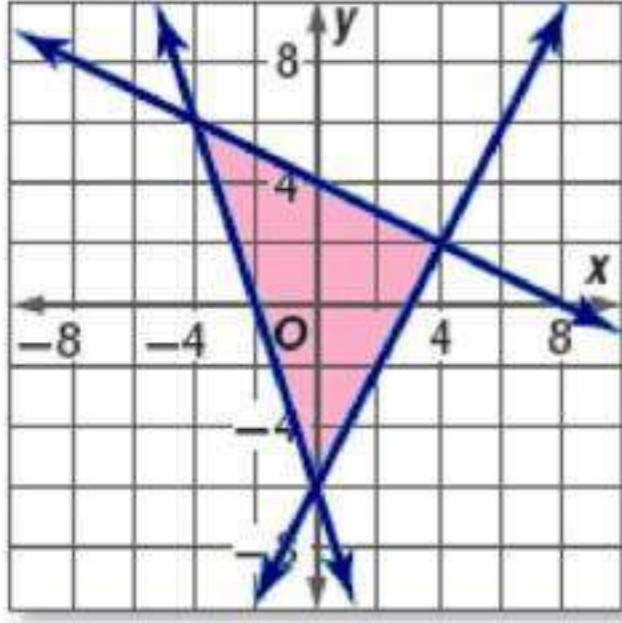
b) غير موجود  
 $y > 2$  ,  $y < -2$

c) على مستقيم  
 $y \geq x$  ,  $y \leq x$

d) واحدة فقط

$$y \geq |x| , y < |x| \text{ ؛ الحل هو النقطة } (0, 0)$$

40 :- تمثل المنطقة المظللة في المستوى الأحداثي المجاور حلاً لنظام من المتباينات. اكتب هذا النظام.



$$\begin{aligned} y &\geq 2x - 6 \\ y &\leq -0.5x + 4 \\ y &\geq -3x - 6 \end{aligned}$$

41 تبرير:

العبارة صحيحة

42 ب:

بتظليل منطقة حل كل متباينة في النظام على أن يتم تظليل المنطقة فوق المستقيم إذا كانت المتباينة  $y >$  والمنطقة تحت المستقيم إذا كانت المتباينة  $y <$

### تدريب على اختبار

43 الإجابة الصحيحة (B)  $y = 3x + 2$

44 ابة قصيرة: إذا كانت  $5y + 6z$  ،  $3x + 2y$  فما قيمة  $x$  بدلالة  $z$ ؟

$$5y = 6z$$

$$y = \frac{6}{5}z$$

$$3x = 2y$$

$$3x = 2\left(\frac{6}{5}z\right) = \frac{12}{5}z$$

$$x = \frac{4}{5}z$$

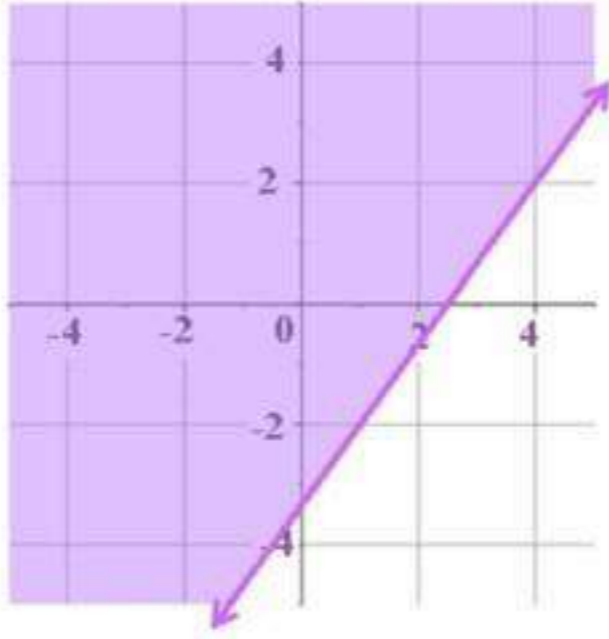
بالتعويض عن قيمة  $y$

بقسمة الطرفين على 3

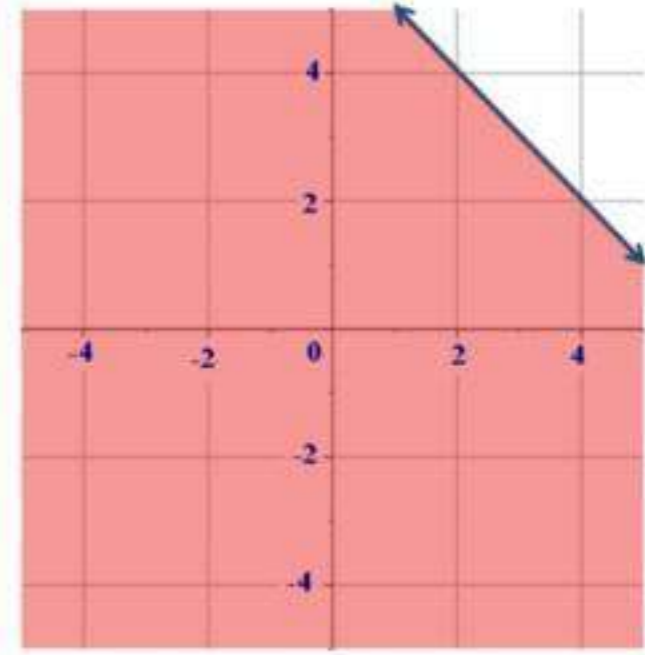
## مراجعة تراكمية

مثل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

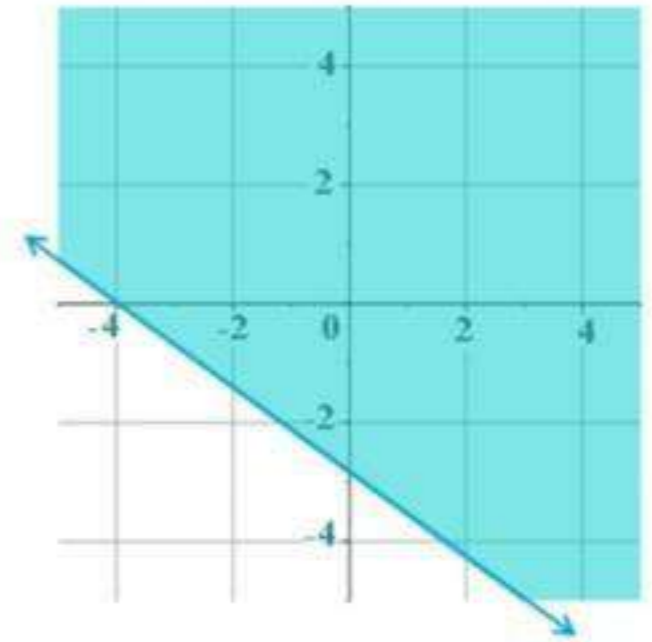
$$4x - 3y < 10 \quad (46)$$



$$x + y \leq 6 \quad (45)$$

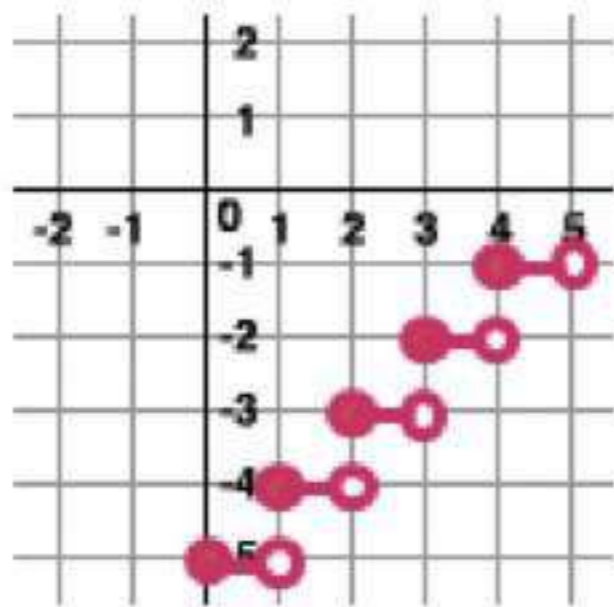


$$5x + 7y \geq -20 \quad (47)$$



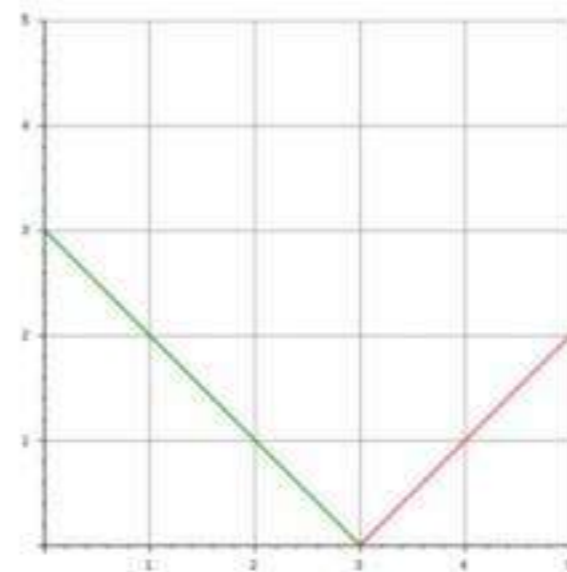
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً ، و حدد كلاً من مجالها و مداها:

$$h(x) = [x] - 5 \quad (49)$$



المجال: جميع الأعداد الحقيقية  
المدى: جميع الأعداد الصحيحة

$$f(x) = |x - 3| \quad (48)$$



المجال:  $(-\infty, \infty)$  ، المدى:  $(-\infty, \infty)$

إذا كان  $g(x) = 3x - 4$  ،  $f(x) = 2x + 5$  ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$$g(-2) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} g(-2) &= 3(-2) - 4 \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$f(-0.25) \quad (51)$$

$$\begin{aligned} f(-0.25) &= 2(-0.25) + 5 \\ &= -0.5 + 5 = 4.5 \end{aligned}$$

$$g(-0.75) \quad (52)$$

$$\begin{aligned} g(-0.75) &= 3(-0.75) - 4 \\ &= -2.25 - 4 = -6.25 \end{aligned}$$

معمل الحاسبة البيانية

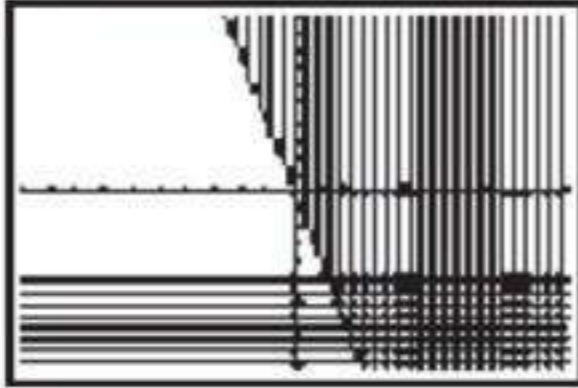
أنظمة المتباينات الخطية

توسيع  
1-5

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل نظام من متباينتين مما يأتي:

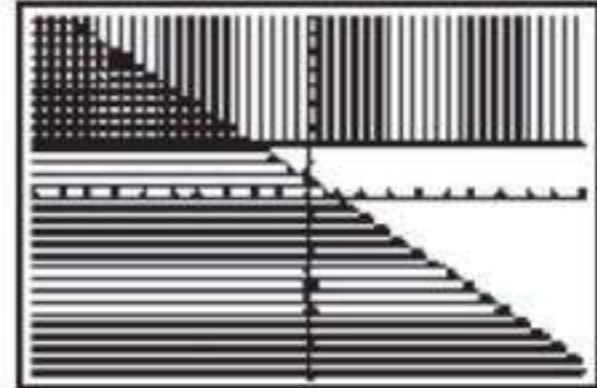
$$\begin{aligned} y &\geq -4x \\ y &\leq -5 \end{aligned}$$

2



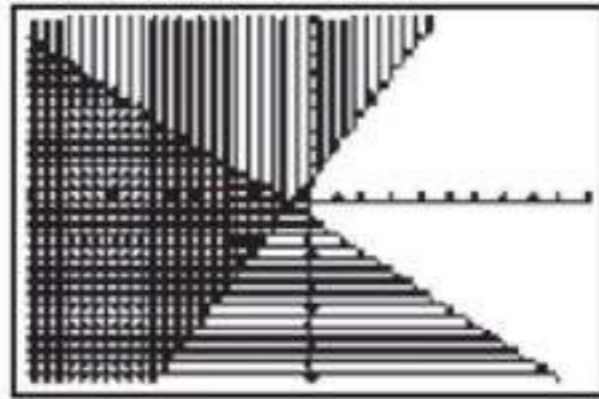
$$\begin{aligned} y &\geq 3 \\ y &\leq -x + 1 \end{aligned}$$

1



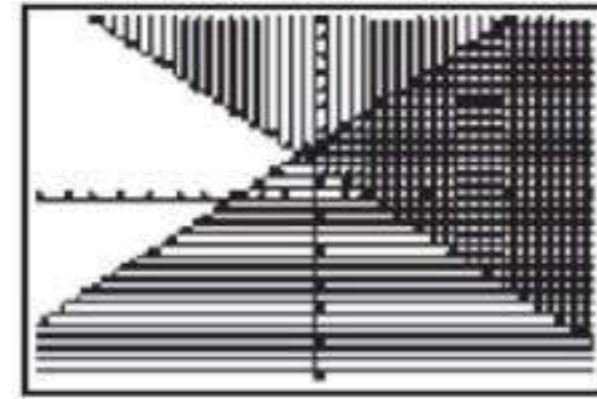
$$\begin{aligned} y &\geq 2x + 1 \\ y &\leq -x - 1 \end{aligned}$$

4



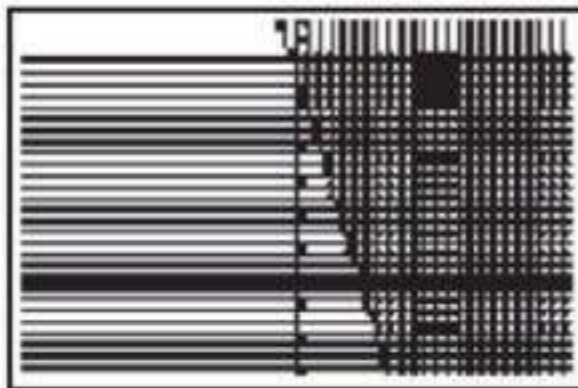
$$\begin{aligned} y &\geq 2 - x \\ y &\leq x + 3 \end{aligned}$$

3



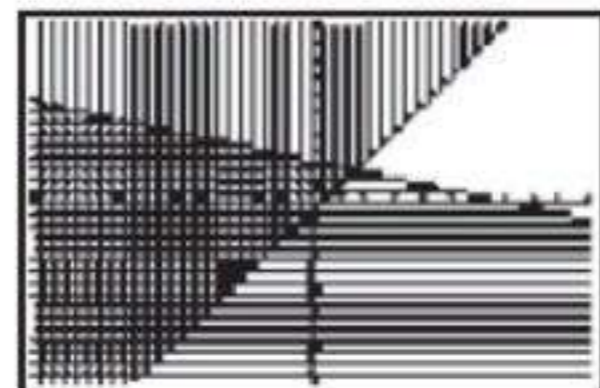
$$\begin{aligned} y + 5x &\geq 12 \\ y - 3 &\leq 10 \end{aligned}$$

6



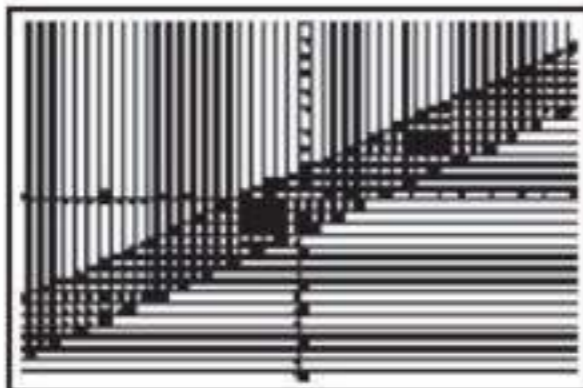
$$\begin{aligned} 2y &\geq 3x - 1 \\ 3y &\leq -x + 7 \end{aligned}$$

5



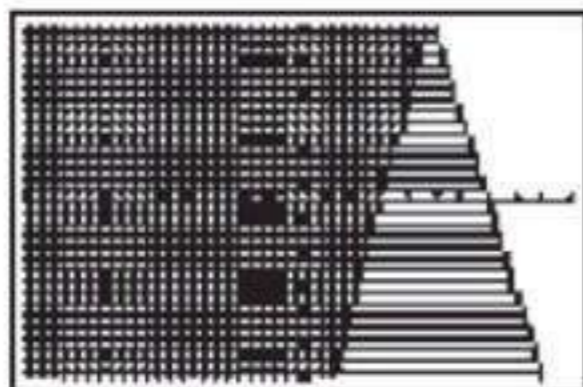
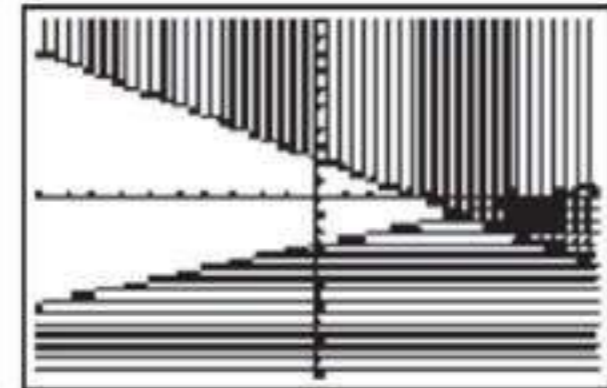
$$\begin{aligned} 10y - 7x &\geq -19 \\ 7y - 5x &\leq 11 \end{aligned}$$

8



$$\begin{aligned} 5y + 3x &\geq 11 \\ 3y - x &\leq -8 \end{aligned}$$

7



$$\begin{aligned} \frac{1}{6}y - x &\geq -3 \\ \frac{1}{5}y + x &\leq 7 \end{aligned}$$

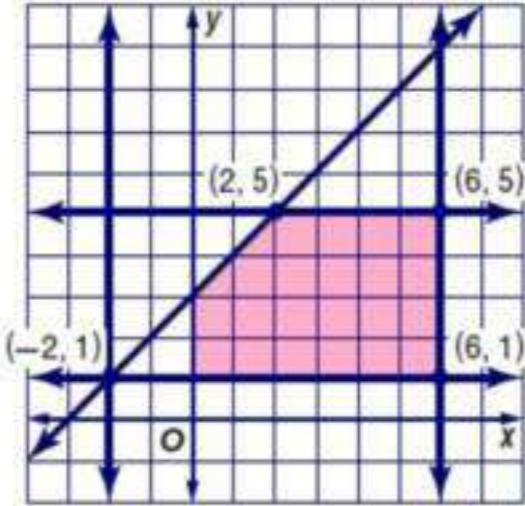
9



6-1

## البرمجة الخطية و التكاليف

## تطبيق



$$-2 \leq x \leq 6$$

$$1 \leq y \leq 5$$

$$y \leq x + 3$$

$$f(x, y) = -5x + 2y$$

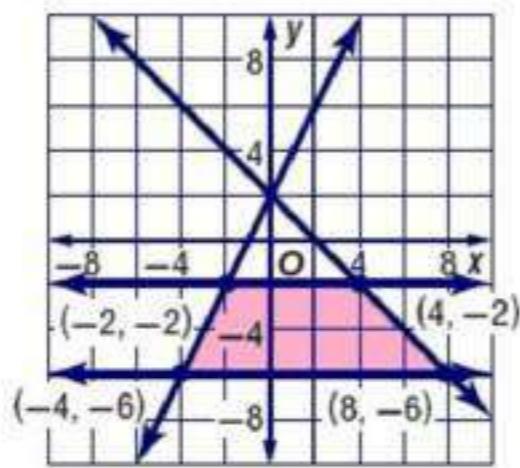
1  
A

$(x, y)$	$-5x+2y$	$f(x, y)$
(2, 5)	$-5(2)+2(5)$	0
(6, 5)	$-5(6)+2(5)$	-20
(-2, 1)	$-5(-2)+2(1)$	12
(6, 1)	$-5(6)+2(1)$	-28

القيمة العظمى

القيمة الصغرى

القيمة الصغرى -28 عند النقطة (6, 1) ؛  
القيمة العظمى 12 عند النقطة (0, 3)



$$-6 \leq y \leq -2$$

$$y \leq -x + 2$$

$$y \leq 2x + 2$$

$$f(x, y) = 6x + 4y$$

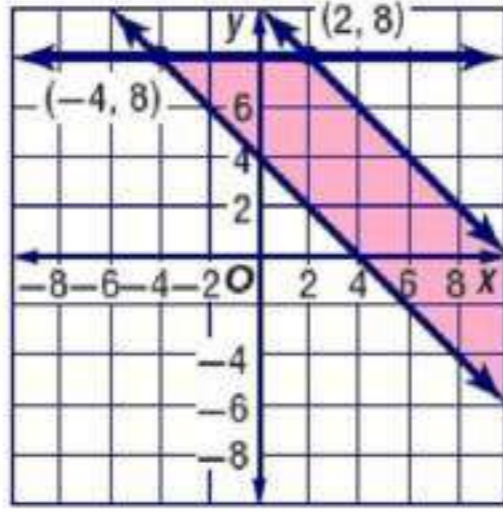
1  
B

$(x, y)$	$6x+4y$	$f(x, y)$
(-2, -2)	$6(-2)+4(-2)$	-20
(-4, -6)	$6(-4)+4(-6)$	-48
(4, -2)	$6(4)+4(-2)$	16
(8, -6)	$6(8)+4(-6)$	24

القيمة الصغرى

القيمة العظمى

القيمة الصغرى -48 عند النقطة (-4, -6)  
القيمة العظمى 24 عند النقطة (8, -6)



$$y \leq 8$$

$$y \geq -x + 4$$

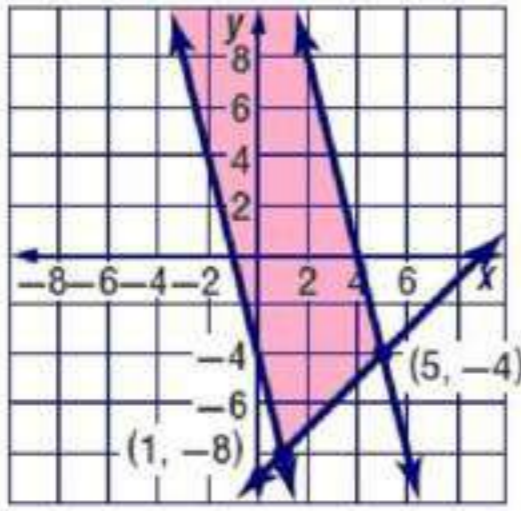
$$y \leq -x + 10$$

$$f(x, y) = -6x + 8y$$

2  
A

$(x, y)$	$-6x+8y$	$f(x, y)$
$(-4, 8)$	$-6(-4)+8(8)$	88
$(2, 8)$	$-6(2)+8(8)$	52

القيمة العظمى 88 عند النقطة  $(-4, 8)$   
لا توجد قيمة صغرى



$$y \geq x - 9$$

$$y \leq -4x + 16$$

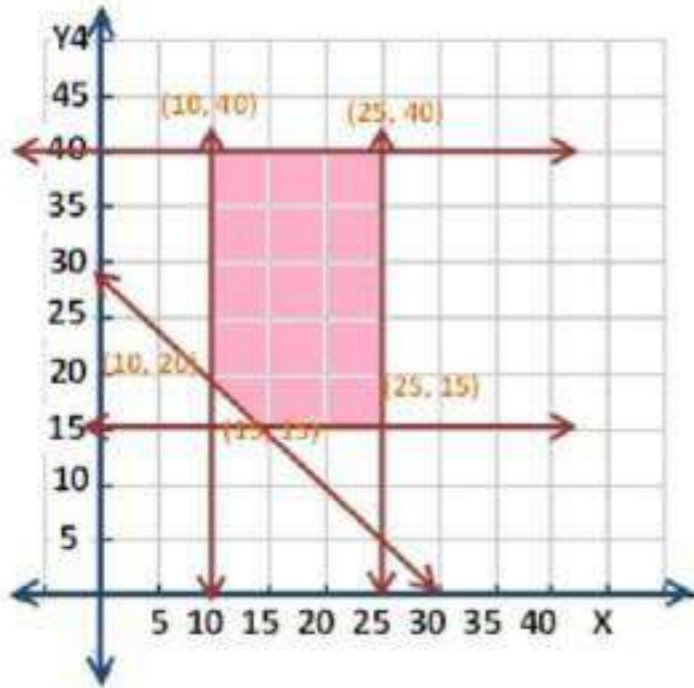
$$y \geq -4x - 4$$

$$f(x, y) = 10x + 7y$$

2  
B

$(x, y)$	$10x+7y$	$f(x, y)$
$(1, -8)$	$10(1)+7(-8)$	-46
$(5, -4)$	$10(5)+7(-4)$	22

القيمة الصغرى -46 عند النقطة  $(1, -8)$   
لا توجد قيمة عظمى



3  
جواهرات:

$$f(x, y) = 5x + 3y$$

$$10 \leq x \leq 25$$

$$15 \leq y \leq 40$$

$$x + y \geq 30$$

$$f(10, 40) = 5(10) + 3(40) = 170$$

$$f(25, 40) = 5(25) + 3(40) = 245$$

$$f(25, 15) = 5(25) + 3(15) = 170$$

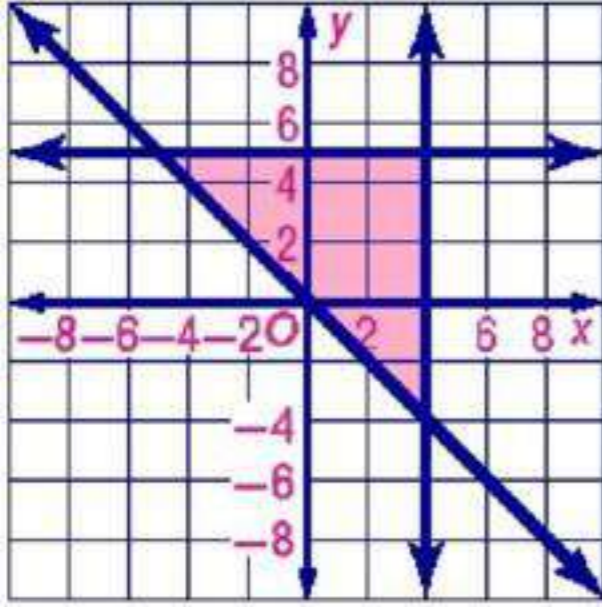
$$f(10, 20) = 5(10) + 3(20) = 110$$

$$f(15, 15) = 5(15) + 3(15) = 120$$

الإجابة المطلوبة: 25 عقداً و 40 سواراً.

## تأكيد

مثل كل نظام مما يأتي بيانياً ، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل ، و أوجد القيمة العظمى و القيمة الصغرى للدالة المعطاه في هذه المنطقة:



$$y \leq 5$$

$$x \leq 4$$

$$y \geq -x$$

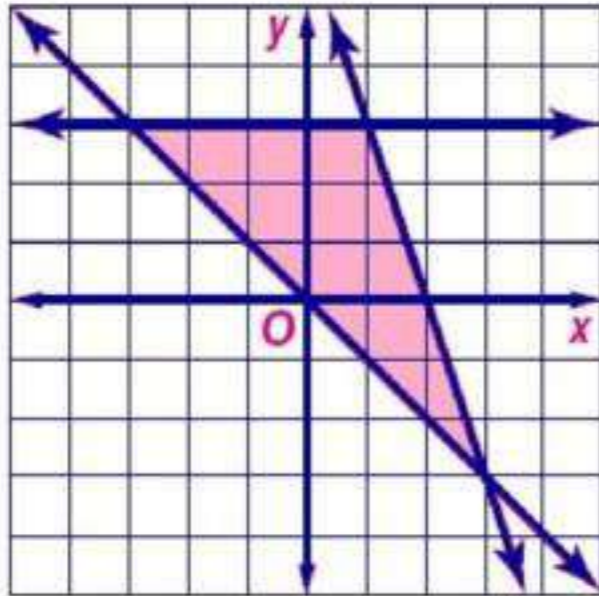
$$f(x, y) = 5x - 2y$$

1

$$(4, 5), (4, -4), (-5, 5)$$

القيمة العظمى هي 28 عند النقطة (4, -4)  
، القيمة الصغرى هي -35 عند النقطة (-5, 5)

$(x, y)$	$5x-2y$	$f(x, y)$
(4, 5)	$5(4)-2(5)$	10
(4, -4)	$5(4)-2(-4)$	28
(-5, 5)	$5(-5)-2(5)$	-35



$$y \leq -3x + 6$$

$$-y \leq x$$

$$y \leq 3$$

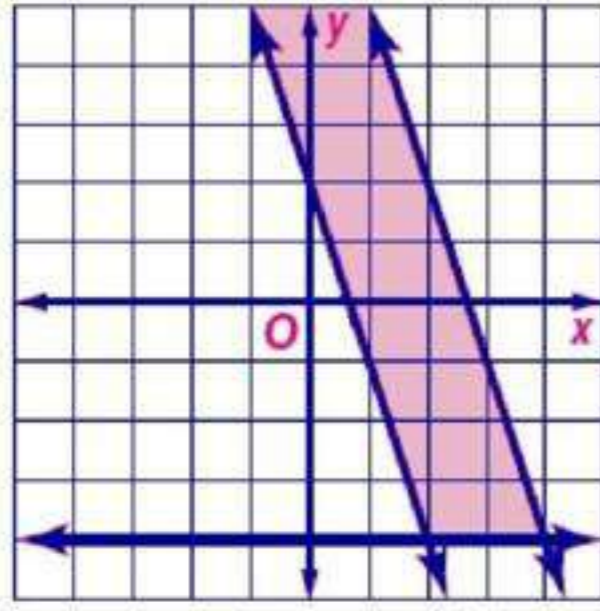
$$f(x, y) = 8x + 4y$$

2

$$(1, 3), (3, -3), (-3, 3)$$

القيمة العظمى هي 20 عند النقطة (1, 3)  
القيمة الصغرى هي -12 عند النقطة (-3, 3)

$(x, y)$	$8x+4y$	$f(x, y)$
(1, 3)	$8(1)+4(3)$	20
(3, -3)	$8(3)+4(-3)$	12
(-3, 3)	$8(-3)+4(3)$	-12



$(x, y)$	$2x+14y$	$f(x, y)$
$(2, -4)$	$2(2)+14(-4)$	-52
$(4, -4)$	$2(4)+14(-4)$	-48

$$y \geq -3x + 2$$

$$9x + 3y \leq 24$$

$$y \geq -4$$

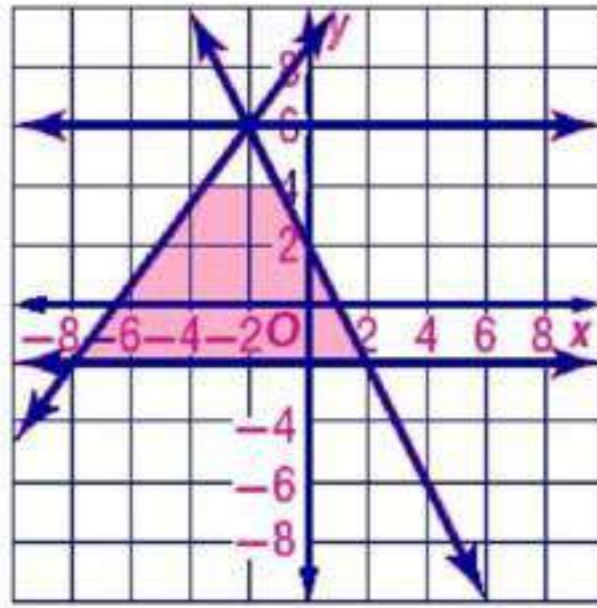
$$f(x, y) = 2x + 14y$$

$$(2, -4), (4, -4)$$

على اعتبار النقطة  $(0, 2)$

$$f(0, 2) = 2(0) + 14(2) = 28$$

اذن لا توجد قيمة عظمى  
القيمة الصغرى هي -52



$(x, y)$	$-3x - 6y$	$f(x, y)$
$(2, -2)$	$-3(2) - 6(-2)$	6
$(-8, -2)$	$-3(-8) - 6(-2)$	36
$(-2, 6)$	$-3(-2) - 6(6)$	-30

$$-2 \leq y \leq 6$$

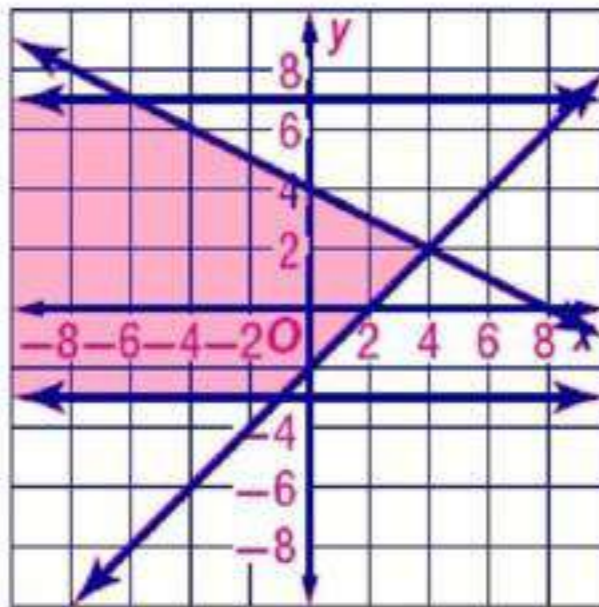
$$3y \leq 4x + 26$$

$$y \leq -2x + 2$$

$$f(x, y) = -3x - 6y$$

$$(2, -2), (-8, -2), (-2, 6)$$

القيمة العظمى هي 36 عند النقطة  $(-8, -2)$   
القيمة الصغرى هي -30 عند النقطة  $(-2, 6)$



$(x, y)$	$-12x + 9y$	$f(x, y)$
$(4, 2)$	$-12(4) + 9(2)$	-30
$(-1, -3)$	$-12(-1) + 9(-3)$	-15
$(-6, 7)$	$-12(-6) + 9(7)$	135

$$-3 \leq y \leq 7$$

$$4y \geq 4x - 8$$

$$6y + 3x \leq 24$$

$$f(x, y) = -12x + 9y$$

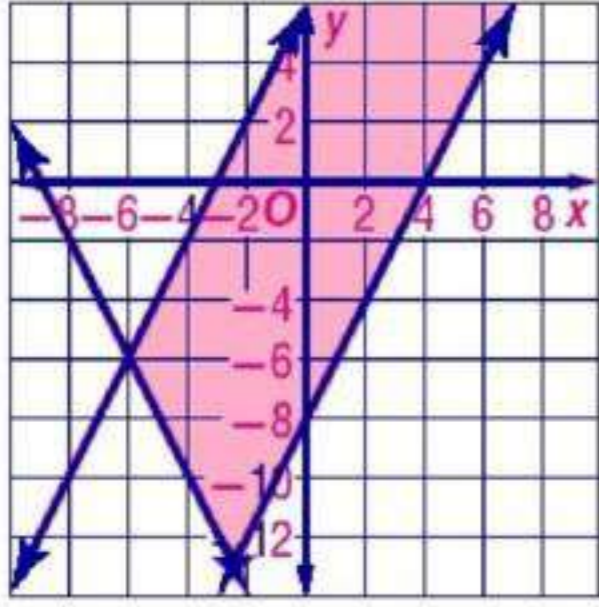
$$(4, 2), (-1, -3), (-6, 7)$$

اعتبر النقطة  $(-20, 1)$

$$f(-20, 1) = 249 \text{ وهي اكبر من } 135$$

اذن لا توجد قيمة عظمى

القيمة الصغرى هي -30 عند النقطة  $(-2, 6)$



$$y \leq 2x + 6$$

$$y \geq 2x - 8$$

$$y \geq -2x - 18$$

$$f(x, y) = 5x - 4y$$

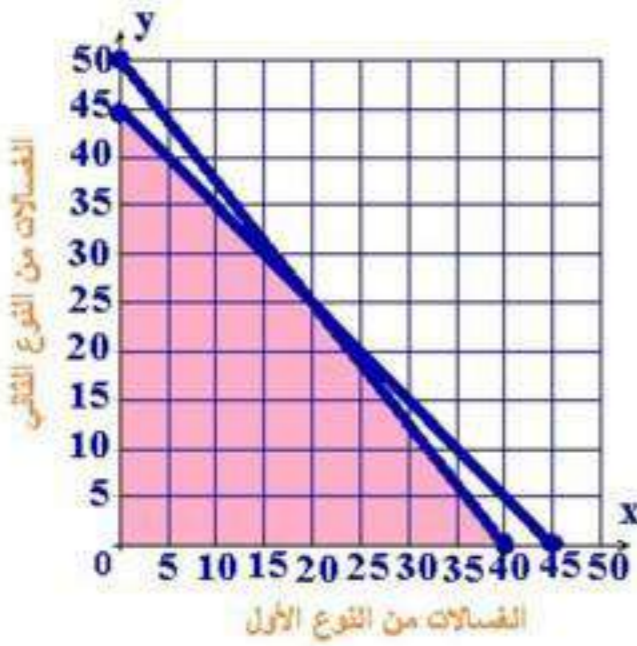
بالمثل

$$(-6, -6), (-2.5, -13)$$

لا توجد قيمة صغرى

القيمة العظمى هي 39.5

6



ثقافة مالية:

7

اكتب نظام متباينات يمثل هذا الموقف.

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$5x + 4y \leq 200$$

$$2x + 2y \leq 90$$

مثل نظام المتباينات بيانياً، وحدد منطقة الحل.

حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل

$$(0, 0), (40, 0), (20, 25), (0, 45)$$

إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 ريالاً، و من النوع الثاني 50

ريالاً. فاكتب دالة تمثل الربح الكلي لكلا النوعين.

$$f(x, y) = 80x + 50y$$

ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح

ممكن. و ما هو هذا الربح؟

عدد الغسالات:

40 من النوع الأول

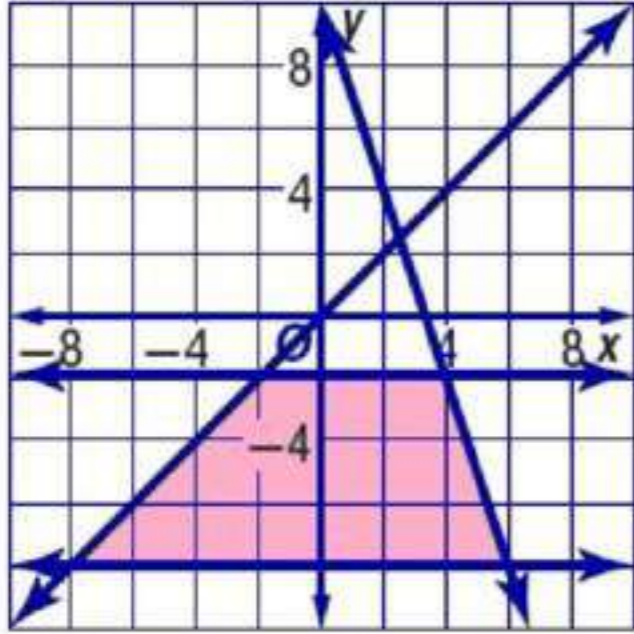
0 من النوع الثاني.

الربح = 3200

$(x, y)$	$80x + 50y$	$f(x, y)$
$(0, 0)$	$80(0) + 50(0)$	0
$(40, 0)$	$80(40) + 50(0)$	3200
$(20, 25)$	$80(20) + 50(25)$	2850

## تدرب وحل المسائل

مثل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، و أوجد القيمة العظمى و القيمة الصغرى للدالة المعطاه في هذه المنطقة:



$$-8 \leq y \leq -2$$

$$y \leq x$$

$$y \leq -3x + 10$$

$$f(x, y) = 5x + 14y$$

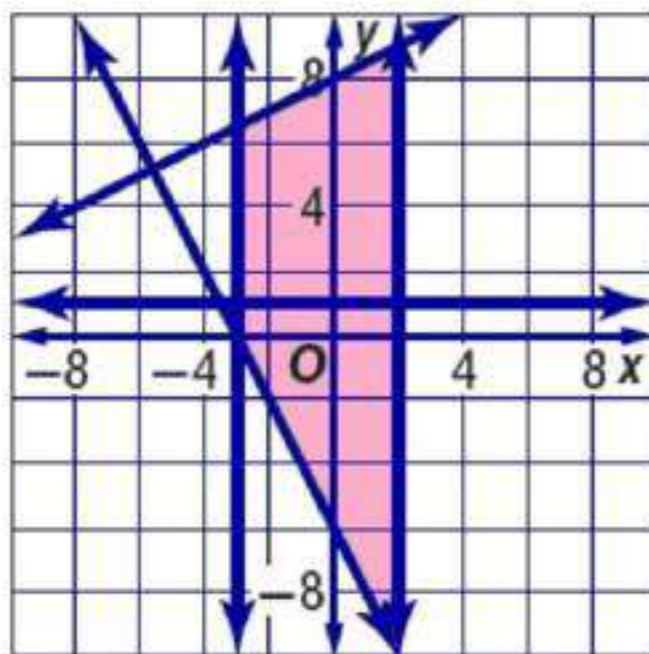
(6, -8), (4, -2), (-2, -2) and (-8, -8)

القيمة العظمى هي -8 عند النقطة (4, -2)

القيمة الصغرى هي -152 عند النقطة (-8, -8)

8

$(x, y)$	$5x + 14y$	$f(x, y)$
(6, -8)	$5(6) + 14(-8)$	-82
(4, -2)	$5(4) + 14(-2)$	-8
(-2, -2)	$5(-2) + 14(-2)$	-38
(-8, -8)	$5(-8) + 14(-8)$	-152



$$2 \geq x \geq -3$$

$$y \geq -2x - 6$$

$$4y \leq 2x + 32$$

$$f(x, y) = -4x - 9y$$

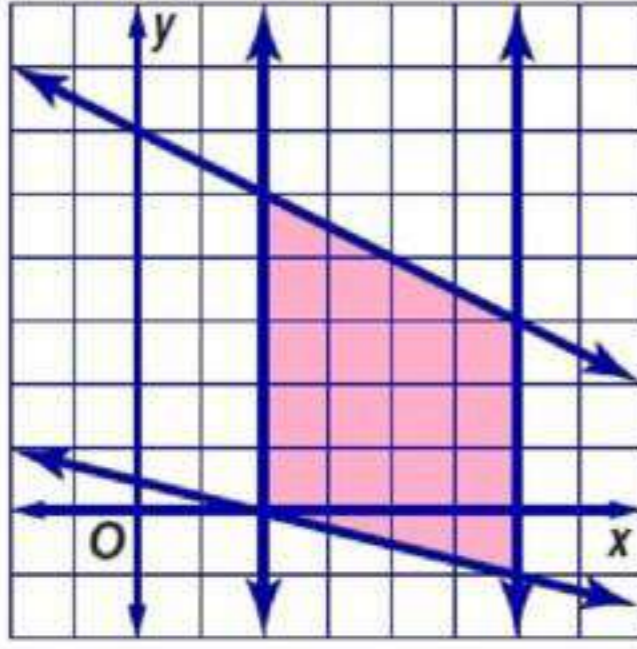
(2, -10), (-3, 0), (-3, 6.5), (2, 9)

القيمة العظمى هي 82 عند النقطة (2, -10)

القيمة الصغرى هي -89 عند النقطة (2, 9)

9

$(x, y)$	$-4x - 9y$	$f(x, y)$
(2, -10)	$-4(2) - 9(-10)$	82
(-3, 0)	$-4(-3) - 9(0)$	12
(-3, 6.5)	$-4(-3) - 9(6.5)$	-46.5
(2, 9)	$-4(2) - 9(9)$	-89



$$\begin{aligned}
 x + 4y &\geq 2 \\
 2x + 4y &\leq 24 \\
 2 \leq x &\leq 6 \\
 f(x, y) &= 6x + 7y
 \end{aligned}$$

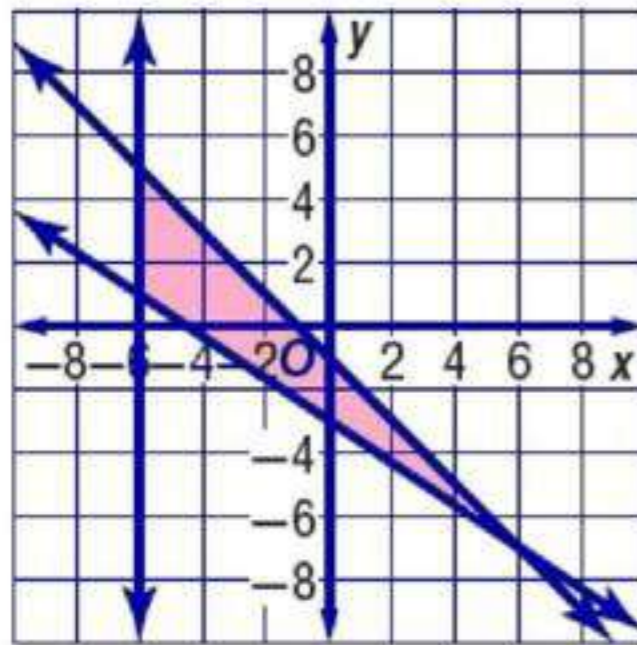
10

$$(2, 0), (6, -1), (6, 3), (2, 5)$$

القيمة العظمى هي 57 عند النقطة (6, 3)

القيمة الصغرى هي 12 عند النقطة (2, 0)

$(x, y)$	$6x + 7y$	$f(x, y)$
(2, 0)	$6(2) + 7(0)$	12
(6, -1)	$6(6) + 7(-1)$	29
(6, 3)	$6(6) + 7(3)$	57
(2, 5)	$6(2) + 7(5)$	47



$$\begin{aligned}
 x &\geq -6 \\
 y + x &\leq -1 \\
 2x + 3y &\geq -9 \\
 f(x, y) &= -10x - 12y
 \end{aligned}$$

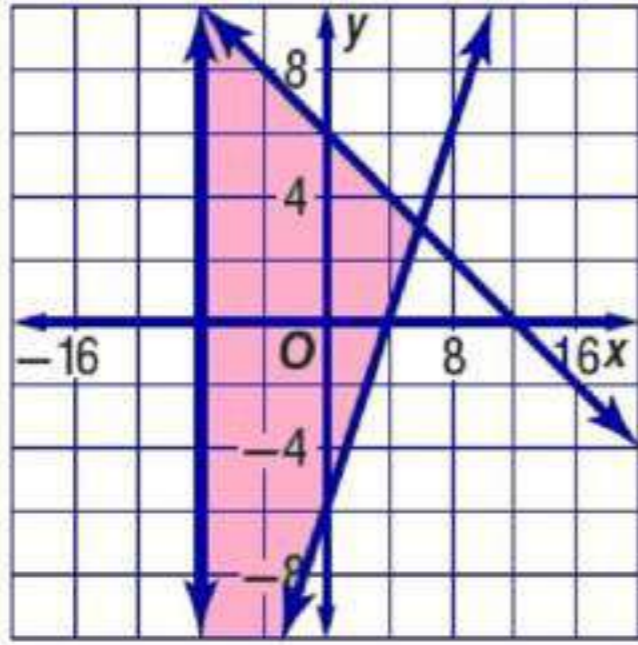
11

$$(-6, 1), (6, -7), (-6, 5)$$

القيمة العظمى هي 48 عند النقطة (-6, 1)

القيمة الصغرى هي 0 عند النقطة (-6, 5)

$(x, y)$	$-10x - 12y$	$f(x, y)$
(-6, 5)	$-10(-6) - 12(5)$	0
(-6, 1)	$-10(-6) - 12(1)$	48
(6, -7)	$-10(6) - 12(-7)$	23



$(x, y)$	$10x - 6y$	$f(x, y)$
$(6, 3)$	$10(6) - 6(3)$	42
$(-8, 10)$	$10(-8) - 6(10)$	-140
$(-8, -18)$	$10(-8) - 6(-18)$	28

$$x \geq -8$$

$$3x + 6y \leq 36$$

$$2y + 12 \geq 3x$$

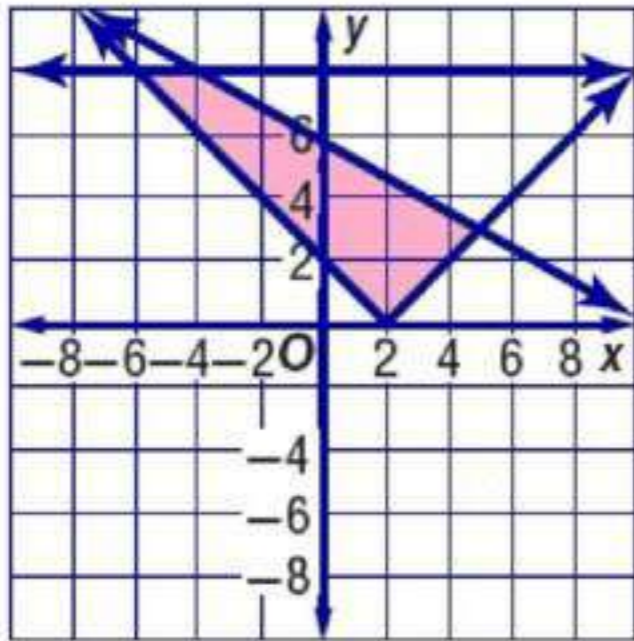
$$f(x, y) = 10x - 6y$$

12

$$(6, 3), (-8, 10), (-8, -18)$$

القيمة العظمى هي 42 عند النقطة  $(6, 3)$   
القيمة الصغرى هي -140 عند النقطة  $(-8, 10)$

13



$(x, y)$	$-5x - 15y$	$f(x, y)$
$(2, 0)$	$-5(2) - 15(0)$	-10
$(5, 3)$	$-5(5) - 15(3)$	-70
$(-3, 8)$	$-5(-3) - 15(8)$	-105
$(-6, 8)$	$-5(-6) - 15(8)$	-90

$$y \geq |x - 2|$$

$$y \leq 8$$

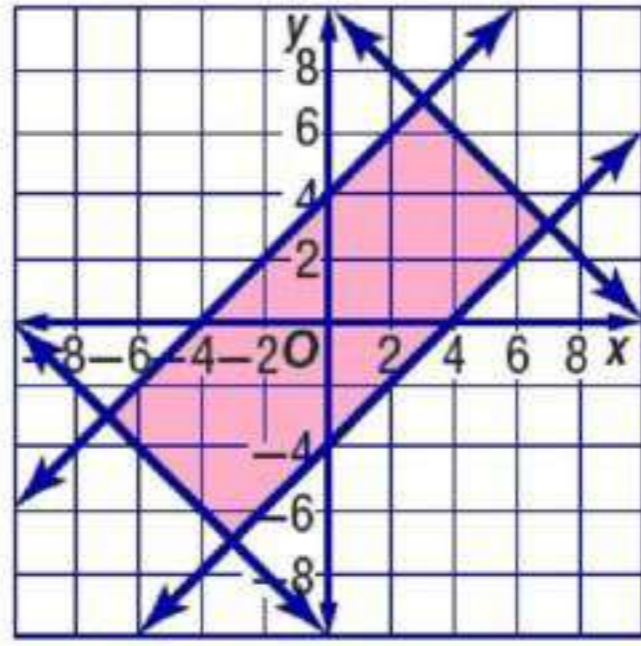
$$8y + 5x \leq 49$$

$$f(x, y) = -5x - 15y$$

$$(2, 0), (5, 3), (-3, 8), (-6, 8)$$

القيمة العظمى هي -10 عند النقطة  $(2, 0)$   
القيمة الصغرى هي -105 عند النقطة  $(-3, 8)$





$$y \leq x + 4$$

$$y \geq x - 4$$

$$y \leq -x + 10$$

$$f(x, y) = -10x + 9y$$

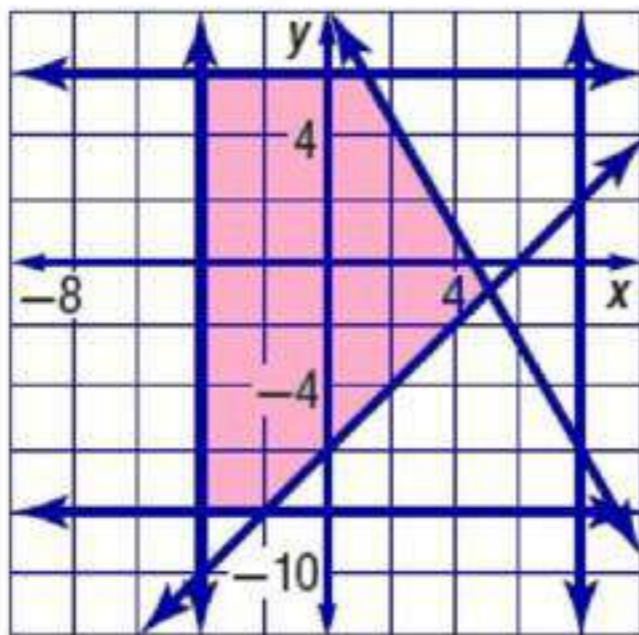
14

$$(3, 7), (7, 3), (-3, -7), (-7, -3)$$

$(x, y)$	$-10x + 9y$	$f(x, y)$
$(3, 7)$	$-10(3) + 9(7)$	33
$(7, 3)$	$-10(7) + 9(3)$	-43
$(-3, -7)$	$-10(-3) + 9(-7)$	33
$(-7, -3)$	$-10(-7) + 9(-3)$	43

القيمة العظمى هي 43 عند النقطة  $(-7, -3)$

القيمة الصغرى هي -43 عند النقطة  $(7, 3)$



$$-4 \leq x \leq 8$$

$$-8 \leq y \leq 6$$

$$y \geq x - 6$$

$$f(x, y) = 12x + 8y$$

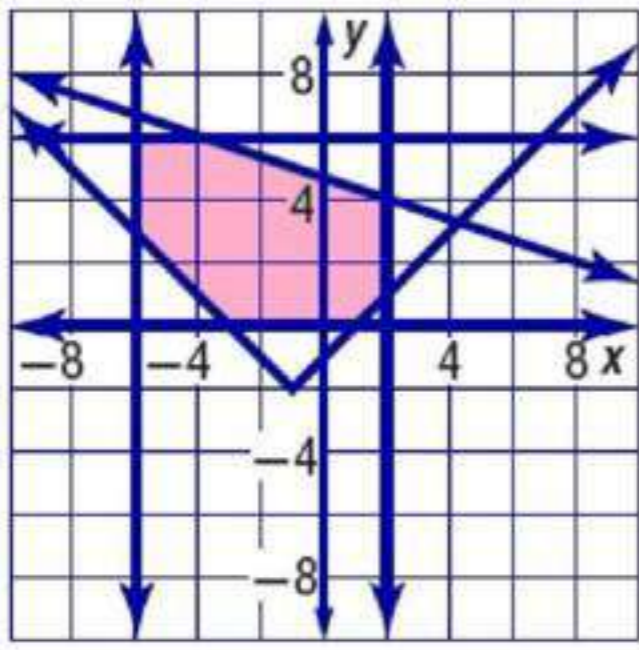
15

$$(5, -1), (1, 6), (-2, -8), (-4, -8), (-4, 6)$$

القيمة العظمى هي 60 عند النقطة  $(1, 6)$

القيمة الصغرى هي -112 عند النقطة  $(-4, -8)$

$(x, y)$	$12x + 8y$	$f(x, y)$
$(5, -1)$	$12(5) + 8(-1)$	52
$(1, 6)$	$12(1) + 8(6)$	60
$(-2, -8)$	$12(-2) + 8(-8)$	-88
$(-4, -8)$	$12(-4) + 8(-8)$	-112
$(-4, 6)$	$12(-4) + 8(6)$	0



16

$$y \geq |x+1| - 2$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$-6 \leq x \leq 2$$

$$x + 3y \leq 14$$

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

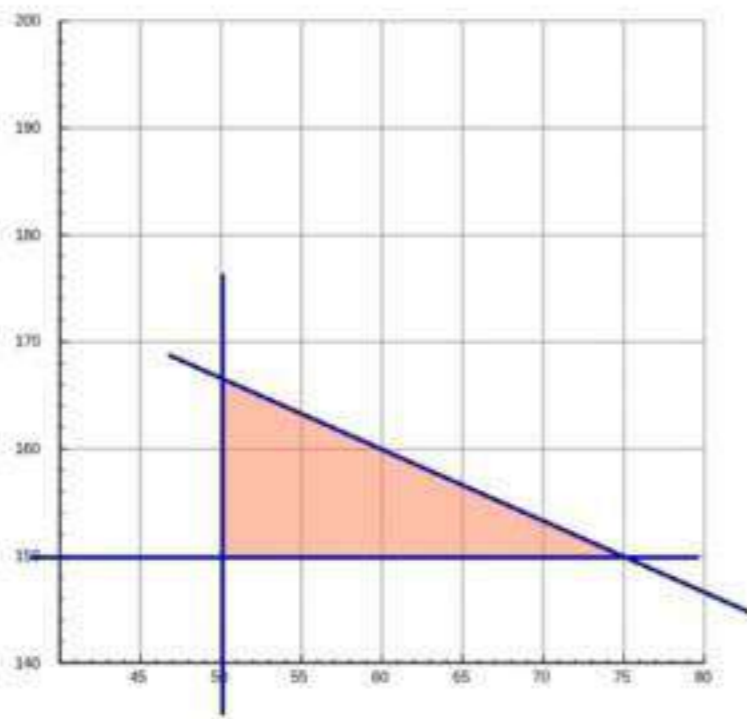
$$(-4, 6), (2, 4), (2, 1), (1, 0), (-3, 0), (-6, 3), (-6, 6)$$

$(x, y)$	$5x+4y$	$f(x, y)$
$(-4, 6)$	$5(-4) + 4(6)$	-4
$(2, 4)$	$5(2) + 4(4)$	26
$(2, 1)$	$5(2) + 4(1)$	14
$(1, 0)$	$5(1) + 4(0)$	5
$(-3, 0)$	$5(-3) + 4(0)$	-15
$(-6, 3)$	$5(-6) + 4(3)$	-18
$(-6, 6)$	$5(-6) + 4(6)$	-6

القيمة العظمى هي 26 عند النقطة  $(2, 4)$

القيمة الصغرى هي -18 عند النقطة  $(-6, 3)$

17 صناعة: نغرض  $x, y$  يمثلان النوع الأول والنوع الثاني



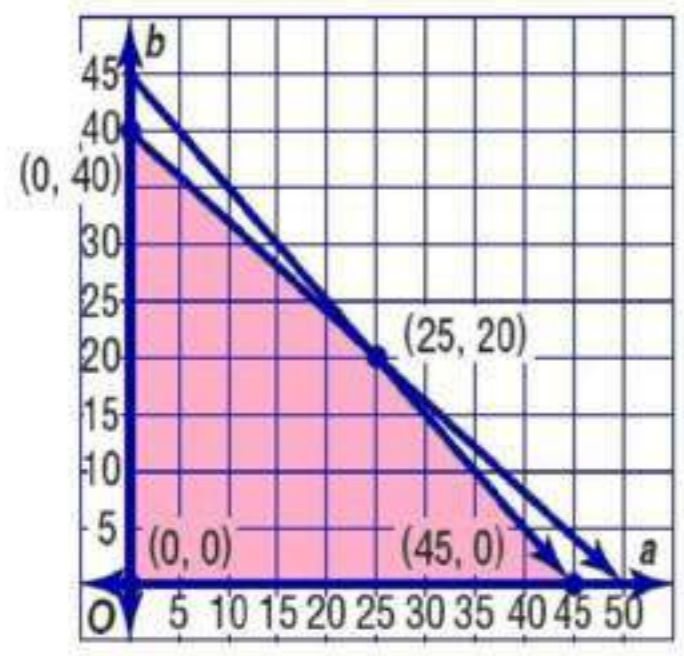
17

$$f(x, y) = 35x + 25y$$

$$200y + 100x \leq 450$$

250 من النوع الأول  
200 من النوع الثاني

نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ،



$$\begin{aligned} a &\geq 0, \\ b &\geq 0, \\ a + b &\leq 45, \\ 4a + 5b &\leq 200 \end{aligned}$$

نظام المتباينات بيانياً ،  
و حدد منطقة الحل و إحداثيات رؤوسها

$$f(a, b) = 26a + 30b$$

ما عدد الجدران و الاسقف التي عليه طلاؤها ليتقاضى أكبر مبلغ ، و ما هو هذا المبلغ؟

$(a, b)$	$26a+30b$	$f(a, b)$
$(0, 0)$	$26(0) + 30(0)$	0
$(0, 40)$	$26(0) + 30(40)$	1200
$(25, 20)$	$26(25) + 30(20)$	1250
$(45, 0)$	$26(45) + 30(0)$	1170

25 جداراً  
20 سقفاً  
1250 ريالاً

عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.



$$\begin{aligned} 25x + 50y &\leq 4200 \\ 3x + 5y &\leq 480 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = 5x + 8y$$

إحداثيات الرؤوس  
 $(0, 0), (0, 84), (160, 0), (120, 24).$

$(x, y)$	$5x+8y$	$f(x, y)$
$(0, 0)$	$5(0) + 8(0)$	0
$(0, 84)$	$5(0) + 8(84)$	672
$(160, 0)$	$5(160) + 8(0)$	800
$(120, 24)$	$5(120) + 8(24)$	792

160 صندوق صغيراً  
• صندوق كبيراً

أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن  
800 ريال

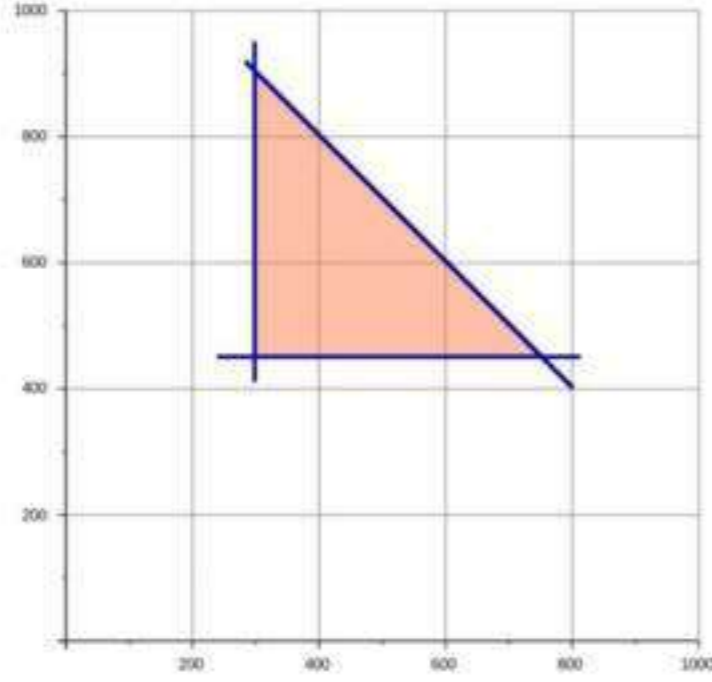
b

عادة التدوير: 20

$$f(x, y) = 175x + 200y$$
$$x + y \leq 1200$$
$$x \geq 300$$
$$y \geq 450$$

رؤوس الإحداثيات:

(750, 450), (300, 450), (300, 900)



$(x, y)$	$175x + 200y$	$f(x, y)$
(300, 450)	$175(300) + 200(450)$	142500
(300, 900)	$175(300) + 200(900)$	232500
(750, 450)	$175(750) + 200(450)$	221250

أكبر ربح = 232500

300 طن لصنع الحاويات الصغيرة

900 طن لصنع الحاويات الكبيرة

### مسائل مهارات التفكير العليا

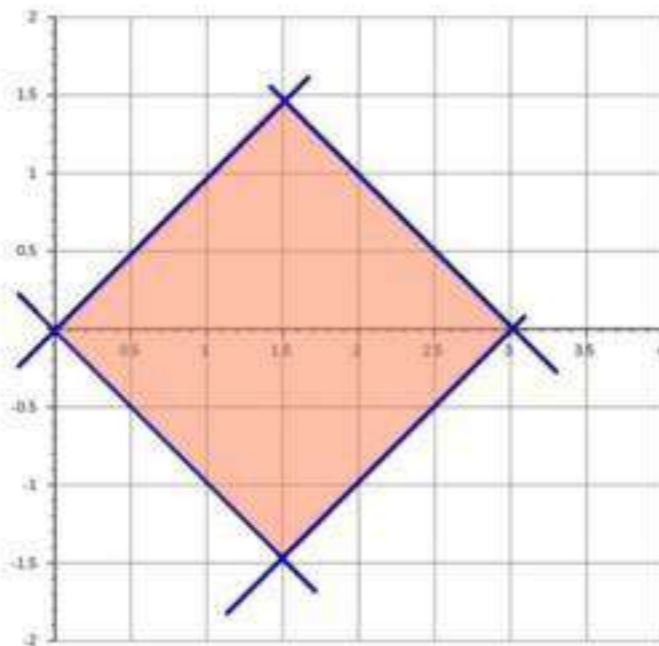
سألة مفتوحة: 21

$$-2 \geq y \geq -6$$
$$4 \leq x \leq 9$$

22

حدد:

المساحة = 4.5 وحدة مربعة



23 نظام المتباينات المختلف : منطقة الحل في الشكل (b) غير مغلقة ، أما في الأشكال الثلاثة الأخرى فهي مغلقة.

تبرير:

24 إذا وجدت قيمة صغرى في منطقة غير مغلقة فلا يمكن أن توجد فيها قيمة عظمى ، لأنه يمكن إيجاد قيمة أكبر من القيمة المقترحة.

### تدريب على اختبار

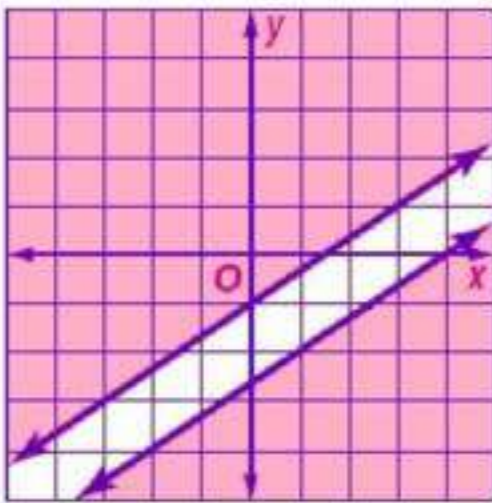
26 الإختيار الصحيح (B)

27 الإختيار الصحيح (D)

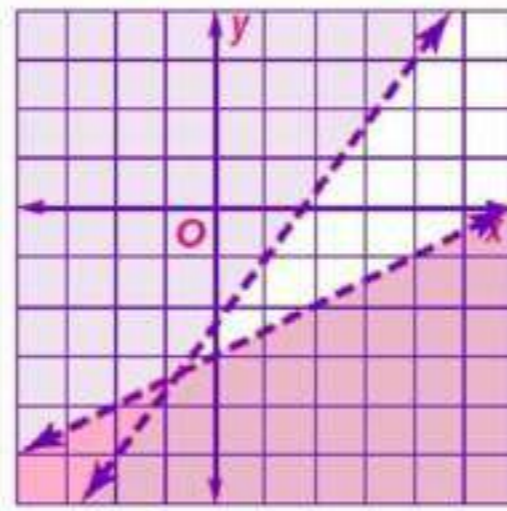
### مراجعة تراكمية

حل كل نظام من متباينتين مما يأتي بيانياً:

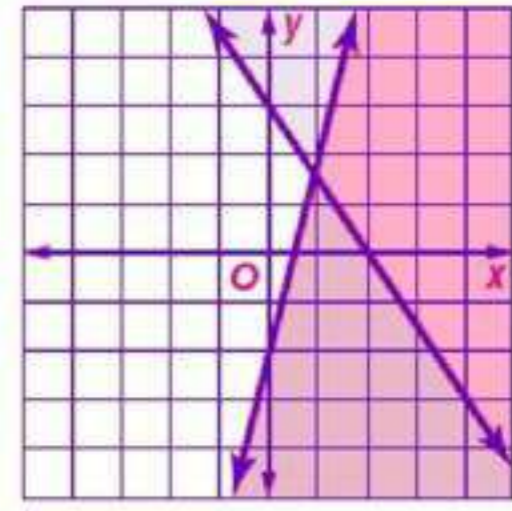
30  $3y \leq 2x - 8$   
 $y \geq \frac{2}{3}x - 1$



29  $4x - 3y < 7$   
 $2y - x < -6$



28  $3x + 2y \geq 6$   
 $4x - y \geq 2$



حدد مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد فيما يأتي:

31  $ZQR -7$

32  $QR -\frac{1}{3}$

33  $RI \sqrt{3}$

## اختبار المفردات

- حدد إذا كانت كل من العبارتين صحيحة أم خاطئة:
- (١) خاطئة ، غير النسبية
  - (٢) صحيحة
- اختر المصطلح المناسب لإكمال كل جملة فيما يأتي
- (٣) متباينة
  - (٤) مجال
  - (٥) متعددة التعريف
- أكمل كل جملة فيما يأتي بالمصطلح المناسب:
- (٦) البرمجة
  - (٧) الحل الأمثل
  - (٨) غير المحدودة

## مراجعة الدروس

## خصائص الأعداد الحقيقية

1-1

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

Q, R (٩)

N, W, Z, Q, R (١٠)

Q, R (١١)

بسّط كل تعبير مما يأتي

$$11x + 2y = 4x - 3y + 7x + 5y \quad (١٢)$$

$$-2a + 8b + 6 = 2(a + 3) - 4a + 8b \quad (١٣)$$

$$5m + 41n = 4(2m + 5n) - 3(m - 7n) \quad (١٤)$$

(١٥) مال:

$$3(2.5 + 2.5) \text{ أو } 3(3.5) + 3(3.5) \quad (a)$$

$$18 = 3 \times 6 \text{ ريالاً} \quad (b)$$

حدد مجال و مدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، و هل هي متباينة أم لا؟

(١٦) المجال = {1, 3, 5, 7}

المدى = {2, 4, 6, 8}

متباينة ، دالة

(١٧) المجال = {-3, 0, 2, 4, 5}

المدى = {0, 2, 4, 5}

شاملة

(١٨) المجال = {-4, -2, 1, 3}

المدى = {-4, 1, 3, 5}

ليست دالة

(١٩) المجال = {-1, 1, 3, 5, 7}

المدى = {-4, -2, 0, 2, 4}

متباينة و دالة

إذا كانت  $f(x) = -3x + 2$  ، أوجد قيمة كل مما يأتي:

(٢٠)  $f(4) = -3(4) + 2 = -10$

(٢١)  $f(-3) = -3(-3) + 2 = 11$

(٢٢)  $f(0) = -3(0) + 2 = 2$

(٢٣)  $f(y) = -3y + 2$

(٢٤)  $f(-a) = 3a + 2$

(٢٥)  $f(2w) = -6w + 2$

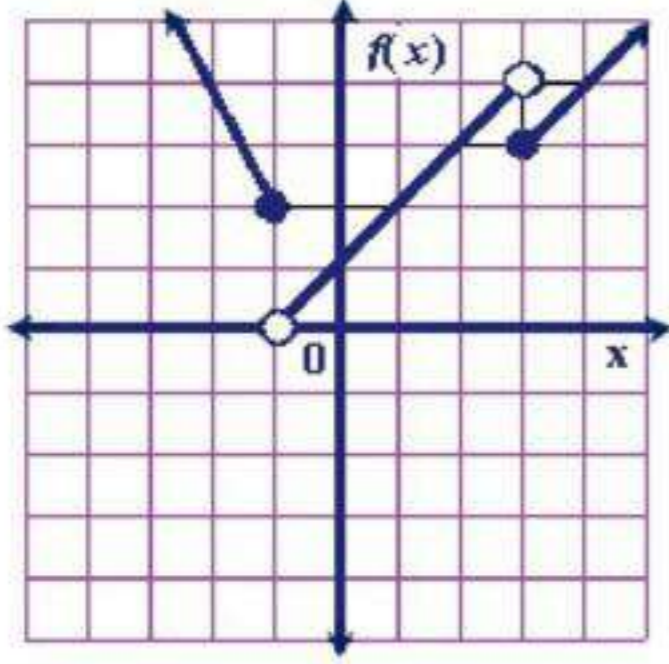
(٢٦) مناسبات:

المجال = مجموعة الأعداد الطبيعية

المدى = {29, 33, 37, 41, .....}

دوال خاصة

1-3

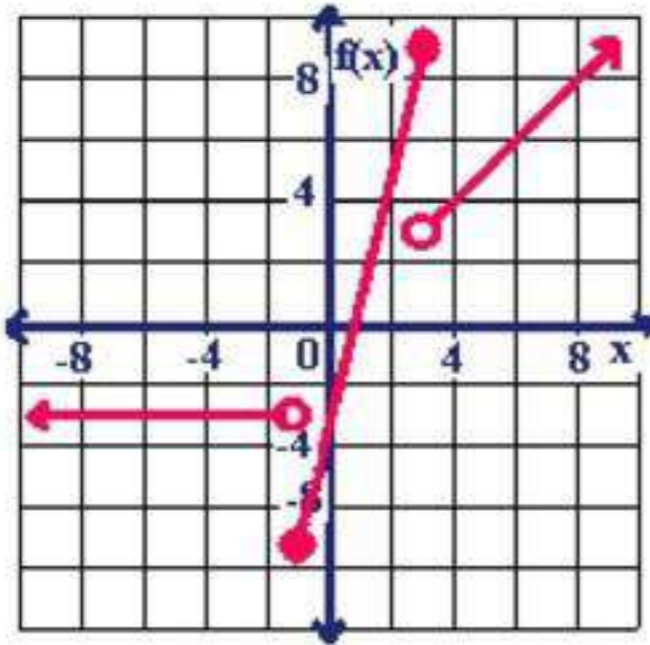


مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد مجالها و مداها:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ x+1, & -1 < x < 3 \\ x, & x \geq 3 \end{cases} \quad (27)$$

المجال = جميع الأعداد الحقيقية

$$\text{المدى} = \{f(x) | f(x) > 0\}$$

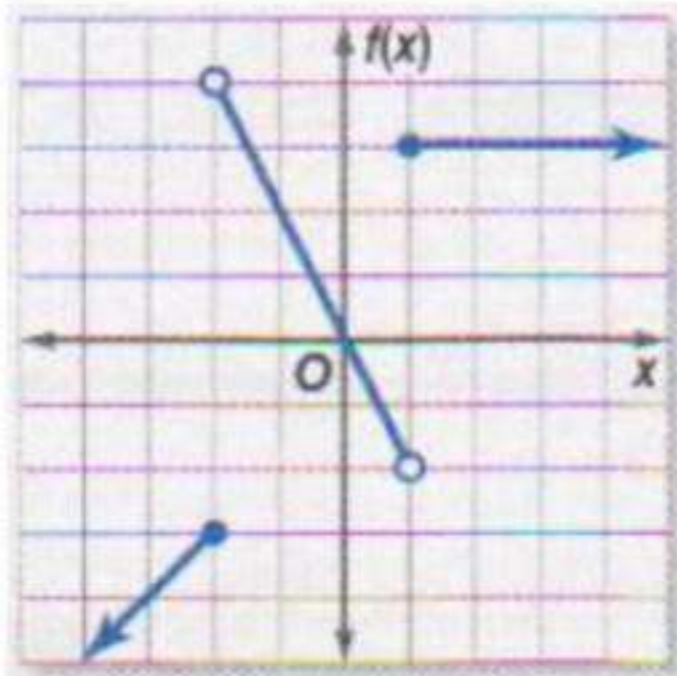


$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ 4x-3, & -1 \leq x \leq 3 \\ x, & 3 \end{cases} \quad (28)$$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية

$$\text{المدى: } \{f(x) | f(x) \geq -7\}$$

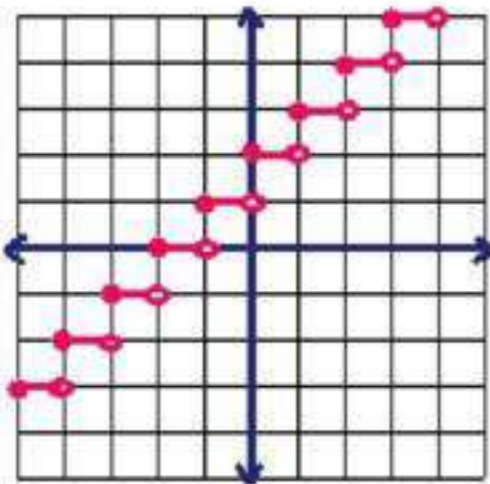
(29) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه



$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq -2 \\ -2x, & -2 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد مجالها و مداها:

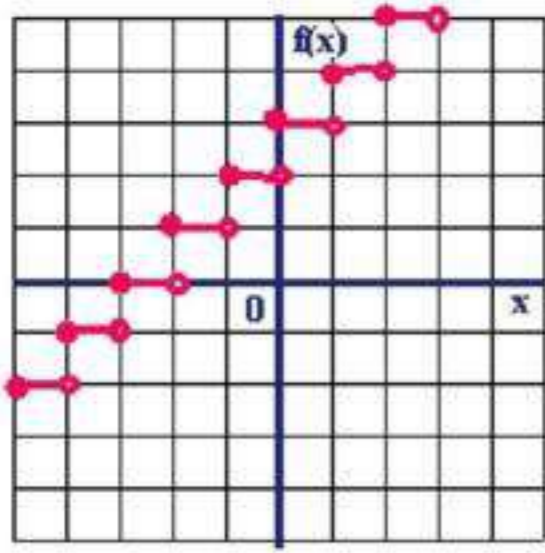
$$f(x) = \lfloor x \rfloor + 2 \quad (30)$$



المجال : جميع الأعداد الحقيقية

المدى: جميع الأعداد الصحيحة





$$f(x) = \lfloor x + 3 \rfloor \quad (31)$$

المجال : جميع الأعداد الحقيقية

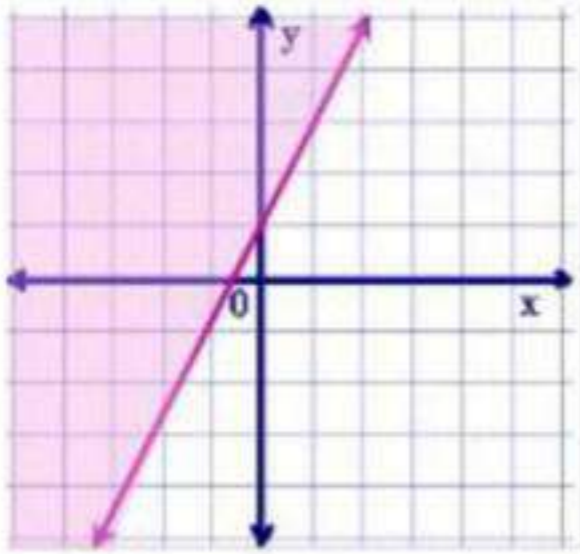
المدى : جميع الأعداد الصحيحة

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

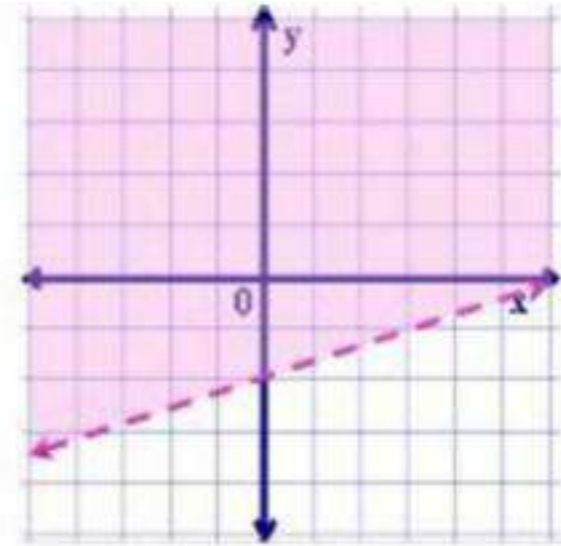
1-4

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً

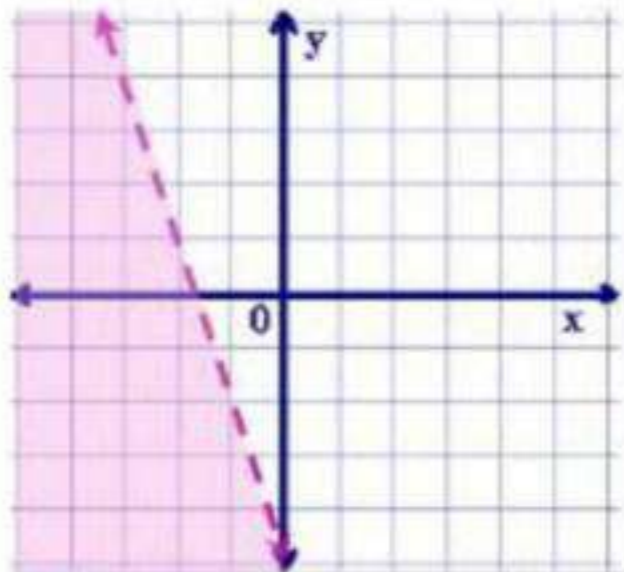
$$y \geq 2x + 1 \quad (33)$$



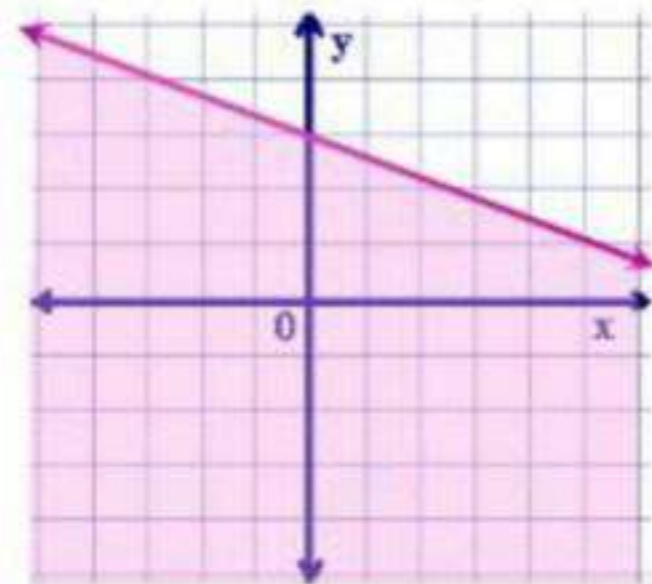
$$x - 3y < 6 \quad (32)$$



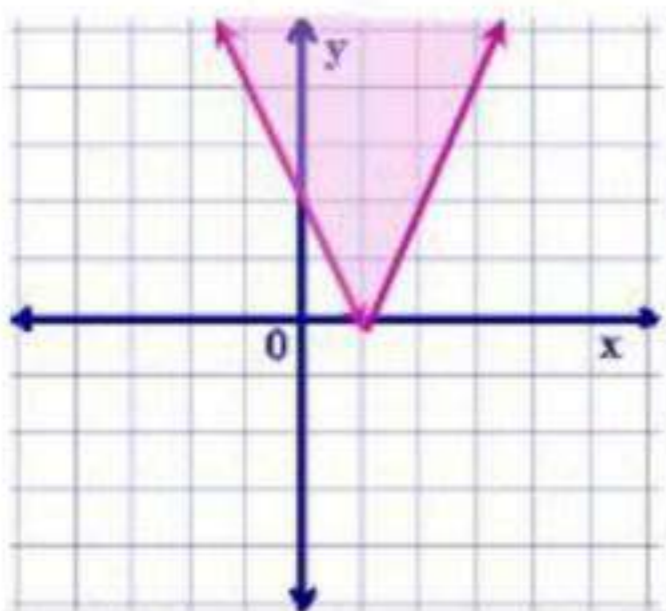
$$y > -3x - 5 \quad (35)$$



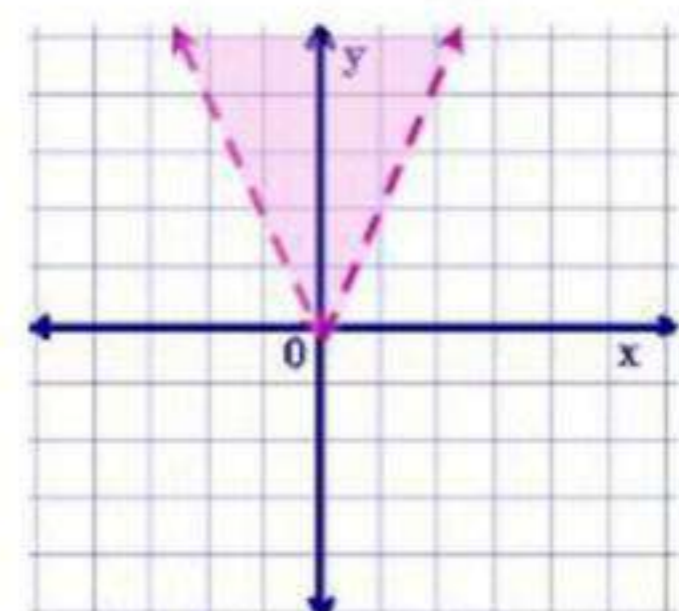
$$2x + 4y \leq 12 \quad (34)$$



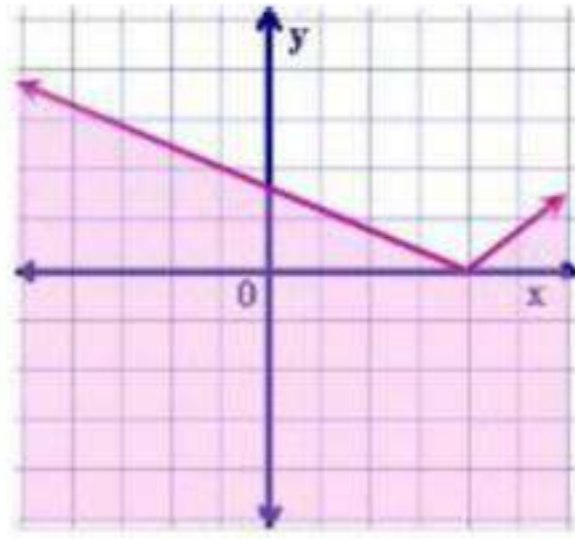
$$y \geq |2x - 2| \quad (37)$$



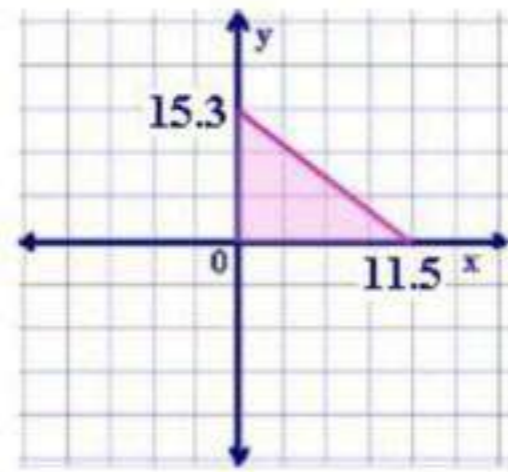
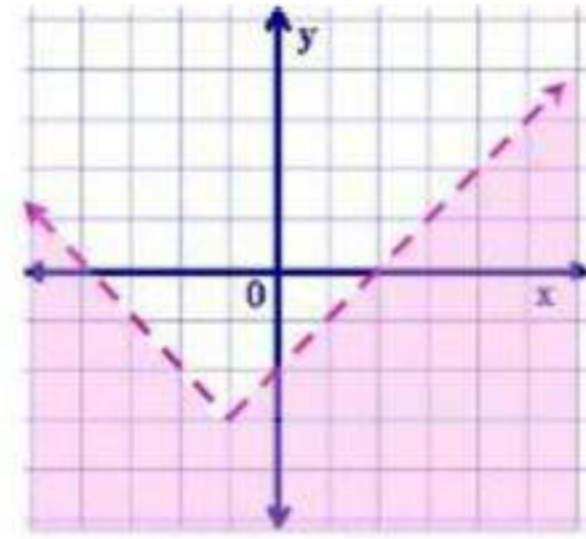
$$y > |2x| \quad (36)$$



$$2y \leq |x - 3| \quad (39)$$



$$y + 3 < |x + 1| \quad (38)$$



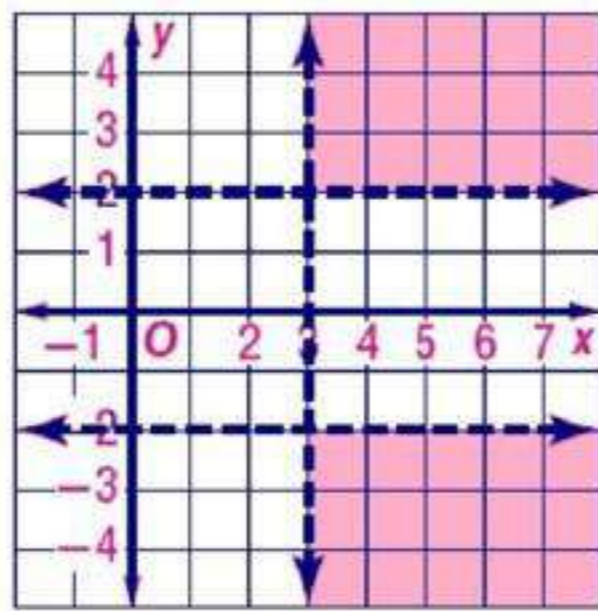
(40) شراء:

$$4x + 3y \leq 46$$

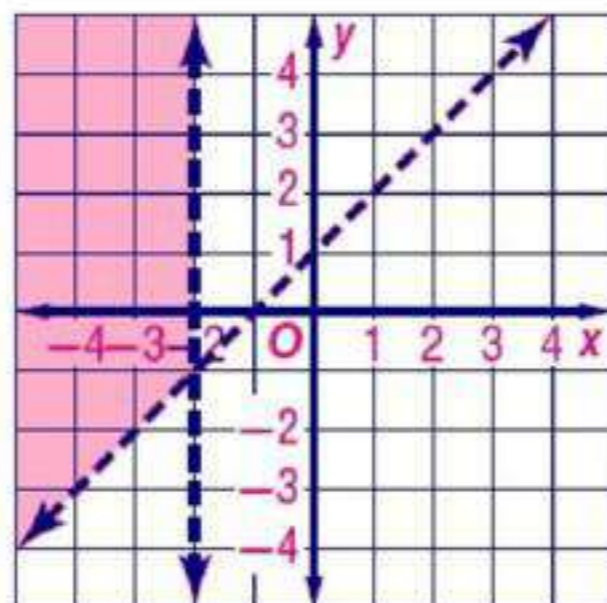
1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

حل كل نظام مما يأتي بيانياً

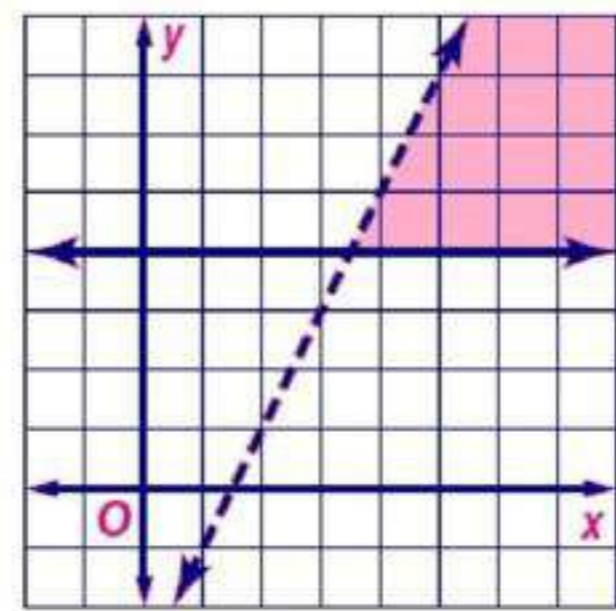
$$\begin{cases} |y| > 2 \\ x > 3 \end{cases} \quad (42)$$



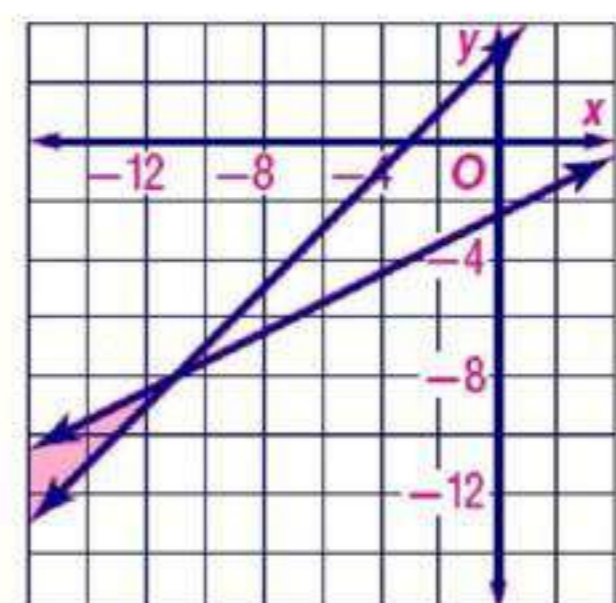
$$\begin{cases} y > x + 1 \\ x < -2 \end{cases} \quad (44)$$



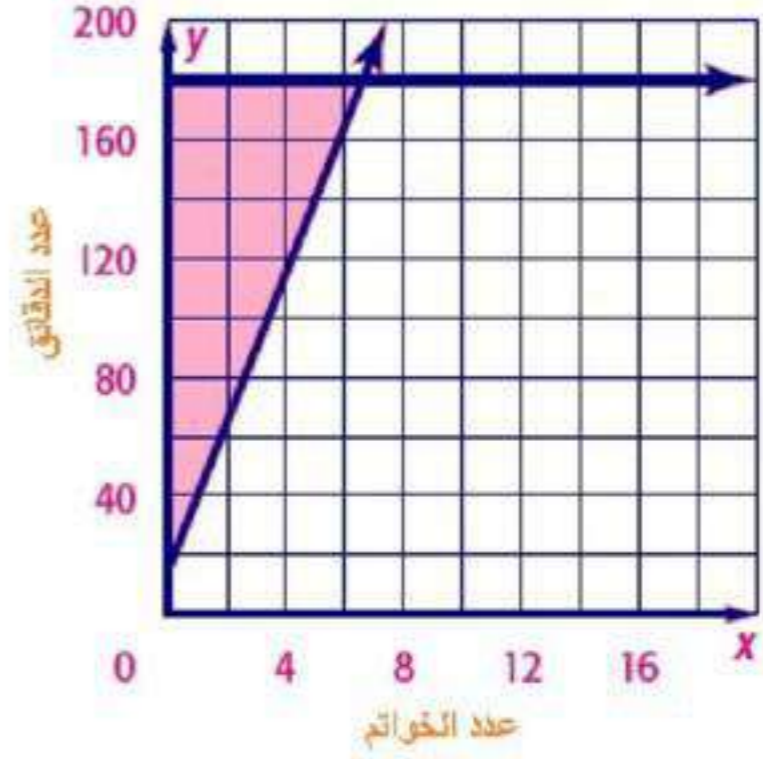
$$\begin{cases} y < 2x - 3 \\ y \geq 4 \end{cases} \quad (41)$$



$$\begin{cases} y \geq x + 3 \\ 2y \leq x - 5 \end{cases} \quad (43)$$



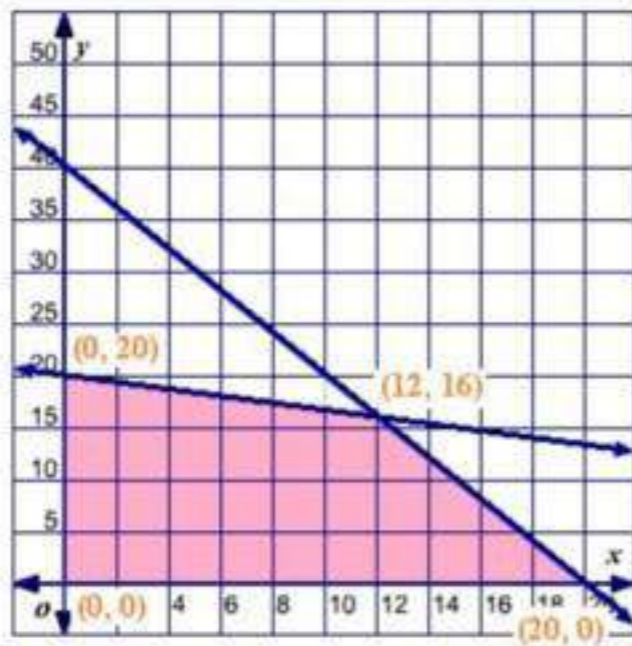
(45) مجوهرات:



البرمجة الخطية والحل الأمثل

1-6

(٤٦) تنسيق أزهار:  
126 من النوع الأول و 63 باقة من النوع الثاني



(٤٧) صناعة:

$$x \leq 0$$

$$y \leq 0$$

$$2x + y \leq 40$$

$$x + 3y \leq 60$$

$$f(x, y) = 20x + 15y$$

$(x, y)$	$20x+15y$	$f(x, y)$
$(0, 0)$	$20(0) + 15(0)$	0
$(0, 20)$	$20(0) + 15(20)$	300
$(20, 0)$	$20(20) + 15(0)$	400
$(12, 16)$	$20(12) + 15(16)$	480

عدد الاحذية: 12 و 16  
اكبر ربح = 480 ريالاً

# الفصل 1 اختبار الفصل

(١) بسط العبارة:

$$\begin{aligned} -12a - 4b - 2a + 10b &= -4(3a + b) - 2(a - 5b) \\ -14a + 6b &= \end{aligned}$$

(٢) اختيار من متعدد:

الإجابة الصحيحة: (C) 9

(٣) بستنة:

$$93 \text{ ft.} = 3(7 + 5 + 7 + 12) = \text{طول السياج}$$

(٤) أوجد قيمة:

$$-\frac{3}{8} = \frac{3\left(\frac{2}{3} + (-2)\right)}{4\left(\frac{2}{3}\right)(-2)^2}$$

(٥) المجال =  $\{-2, 4, 3, 6\}$

المدى =  $\{-2, 4, 3, 6\}$

ليست متباينة

أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$11 = -2(-4) + 3 = f(-4) \quad (٦)$$

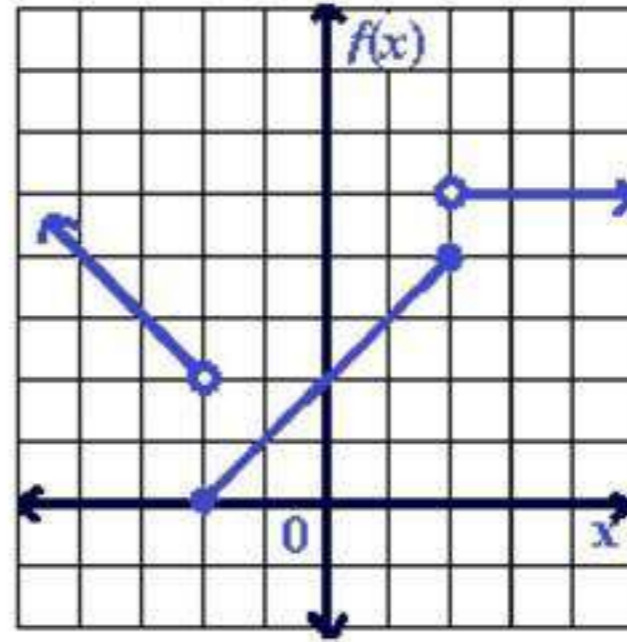
$$-6y + 3 = -2(3y) + 3 = f(3y) \quad (٧)$$

(٨) اختيار من متعدد:

الإجابة الصحيحة: (C) 21.0 ريالاً

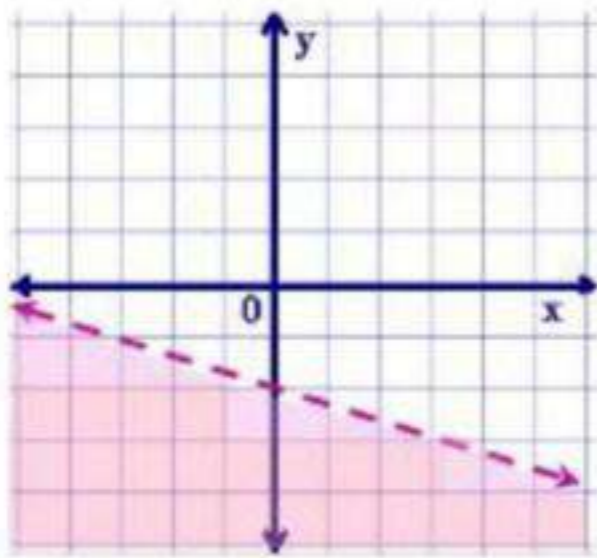
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x+2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

٩) مثل الدالة  $f(x)$  بيانياً

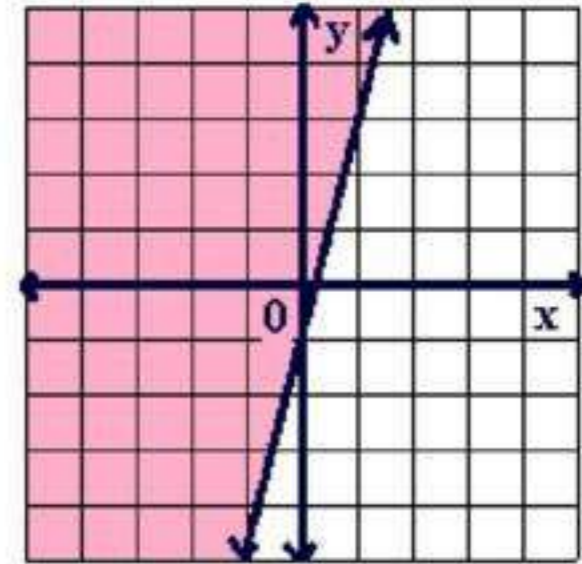


مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

$$2x + 6y < -12 \quad (11)$$

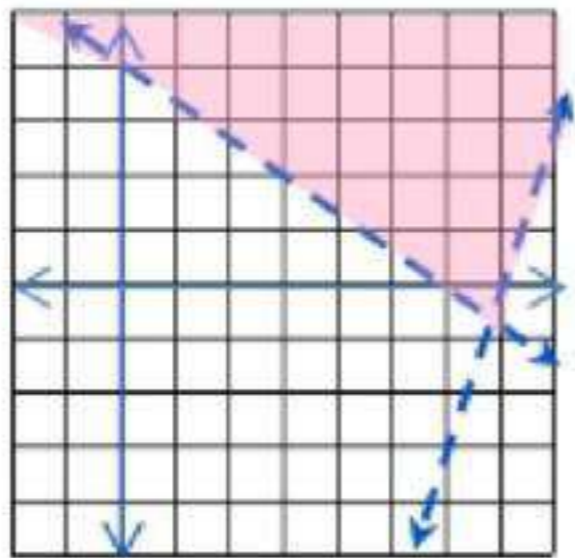


$$y \geq 4x - 1 \quad (10)$$

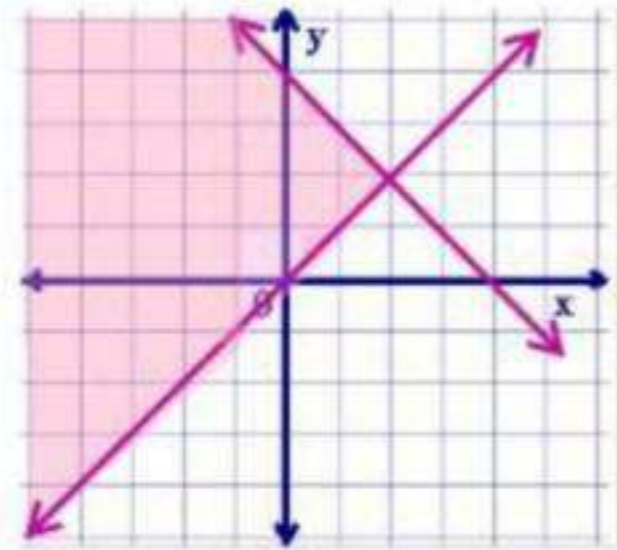


حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

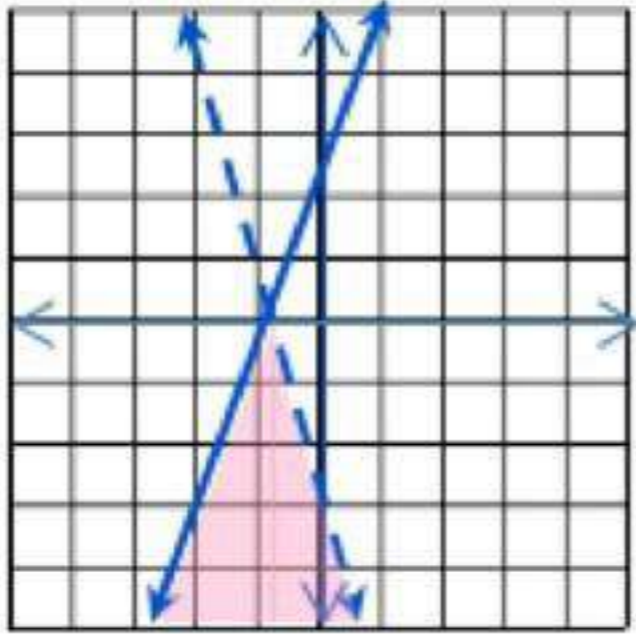
$$\begin{cases} 2x + 3y > 12 \\ 3x - y < 21 \end{cases} \quad (13)$$



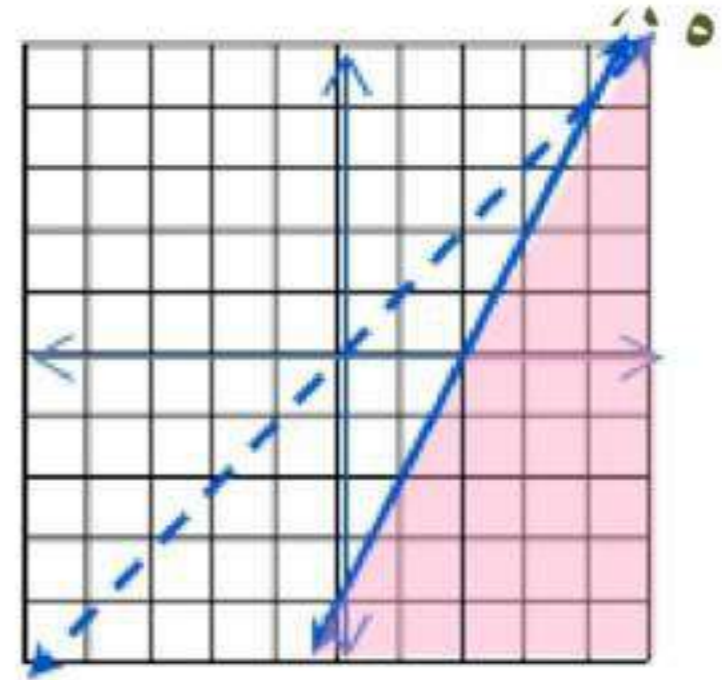
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ y \geq x \end{cases} \quad (12)$$



$$\begin{aligned} 2y - 5x &\leq 6 \\ 4x + y &< -4 \end{aligned} \quad (15)$$



$$\begin{aligned} x - y &> 0 \\ 4 + y &\leq 2x \end{aligned} \quad (14)$$



(١٦) اختيار من متعدد:  
الإختيار الصحيح (B) 50

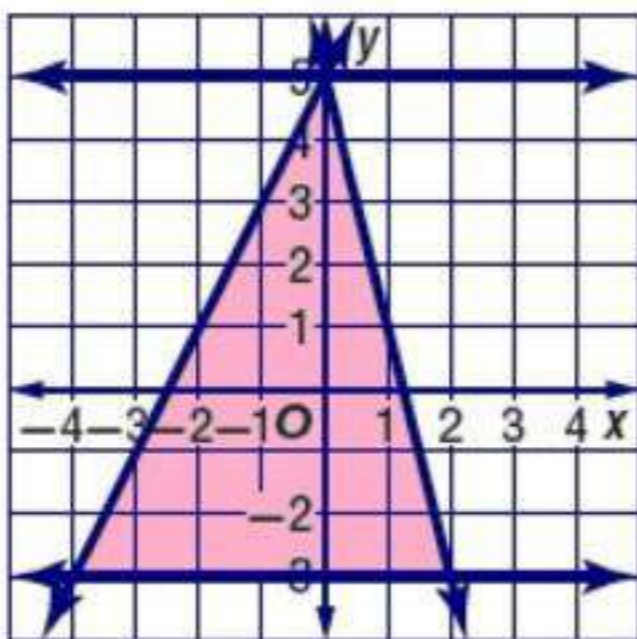
(١٧) نجارة:

$$\begin{aligned} c \geq 0, \quad t \geq 0 \\ 0.5c + t &\leq 20 \quad (a) \\ c + 2t &\leq 108 \end{aligned}$$

(b) بيانياً



(c) 34 مقعداً و 3 طاولات  
قيمة أكبر ربح 955 ريالاً



(١٨)  
الرؤوس  $(-4, -4)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, -3)$   
القيمة العظمى:  $f(2, -3) = 17$   
القيمة الصغرى:  $f(0, 5) = -15$

## الإعداد للاختبارات المعيارية

(1) المبلغ 1400 ريال

أجرة الحديقة الواحدة = 45

البدلات = 10.5

$$45x + 10.5 = 1400$$

$$45x = 1400 - 10.5$$

$$45x = 1398.5$$

$$x \approx 31.$$

تحقيق الربح بعد 32 حديقة

(2) المبلغ 50 ريال

ثمن القلم: 6.5 ريال

ثمن المسطرة: 4.75 ريال

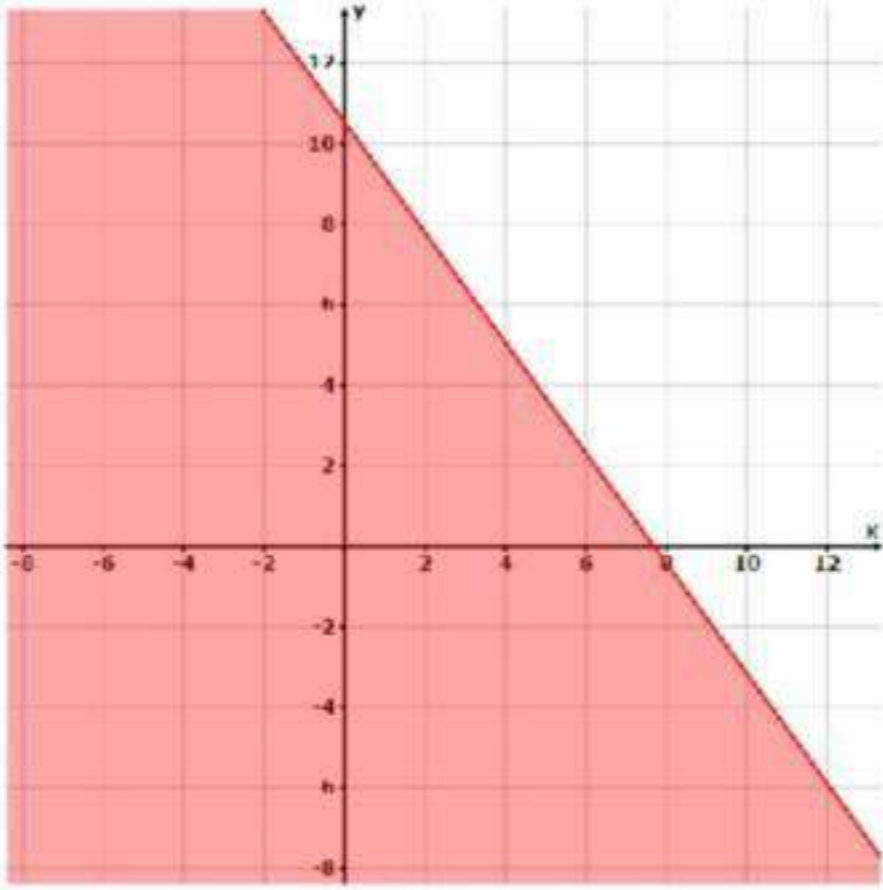
$$6.5x + 4.75y \leq 50$$

$$y \leq -\frac{26}{19}x + \frac{200}{19}$$

1 قلم ، 9 مسطرة

2 قلم ، 7 مسطرة

3 قلم ، 5 مسطرة



أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) الإختيار الصحيح هو (B) -1

(٢) الإختيار الصحيح هو (A)  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

(٣) الإختيار الصحيح هو (D) الأعداد الكلية

(٤) الإختيار الصحيح هو (C)  $\{-3, 1, 2, 6\}$

(٥) الإختيار الصحيح هو (A) -2

(٦) الإختيار الصحيح هو (C) المنطقة III

(٧) الإختيار الصحيح هو (B) (0, 3)

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عم كل مما يأتي:

$$-18a + 19b = -12a + 4b - 6a + 15b \quad (٨)$$

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x < -4 \\ -x - 2, & -4 \leq x \leq 4 \\ 2x - 12, & x \end{cases} \quad (٩)$$

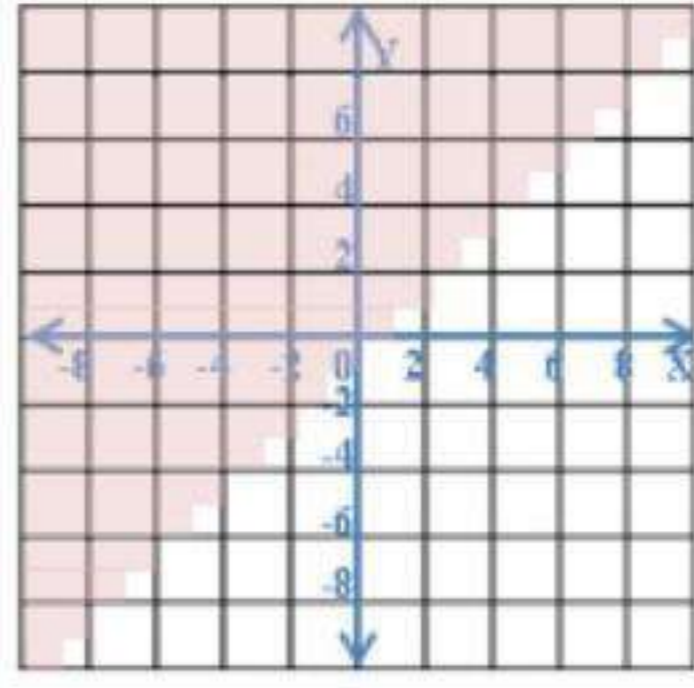
$$f(-3) = \begin{cases} -5, & -4 \leq x \leq 4 \\ -18, & x \end{cases} \quad (١٠)$$



## أسئلة ذات إجابات مطولة

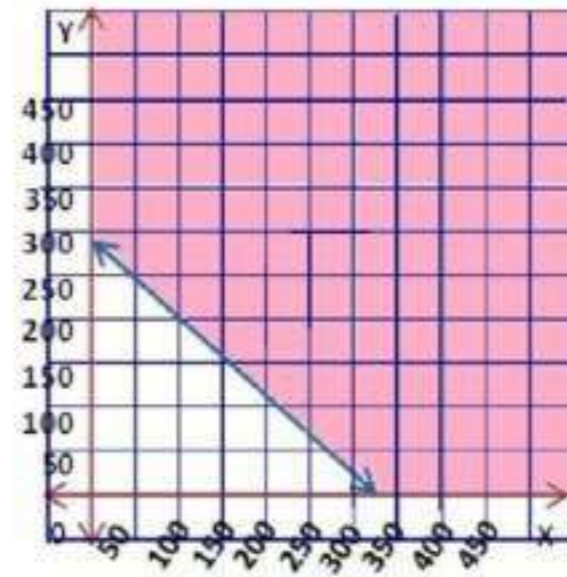
أجب عن كل مما يأتي موضحاً الخطوات:

(١١)



$0.45x + 0.5y \geq 150$  (a) (١٢)

(b)

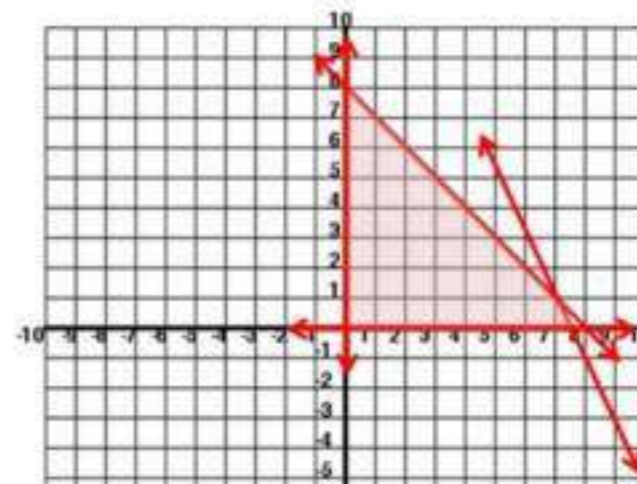


(c) نعم؛ الربح الذي تحقق هو 161 ريالاً

(a) (١٣)

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 5x + 5y &\leq 40 \\ 2x + y &\leq 15 \end{aligned}$$

(b)  $(0, 0), (0, 8), (7.5, 0), (7, 1)$



$$P = 12x + 8y \quad (c)$$

$(x, y)$	$12x+8y$	$f(x, y)$
$(0, 0)$	$12(0) + 8(0)$	0
$(0, 8)$	$12(0) + 8(8)$	64
$(7.5, 0)$	$12(7.5) + 8(0)$	90
$(7, 1)$	$12(7) + 8(1)$	92

(d) أكبر تكلفة هي 92  
إذن 7 أطباق من النوع الأول  
و طبق واحد من النوع الثاني




### فيما سبق،

درست حل نظام من المعادلات .

### والآن،

- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات.
- أحسب المحددات.
- أجد التعبير الضربي لمصفوفة من الرتبة  $2 \times 2$ .
- أستعمل المصفوفات لحل نظام من المعادلات.

### لماذا؟

 **تنظيم البيانات،** غالباً ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلاً إذا نُظِم الطلاب المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلاب المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

### منظم أفكار

## المستويات

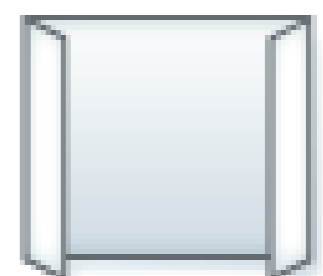
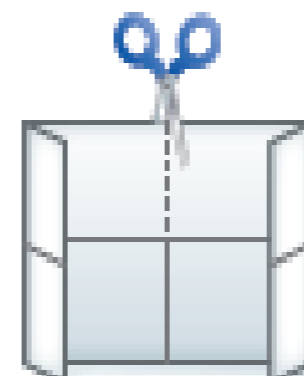
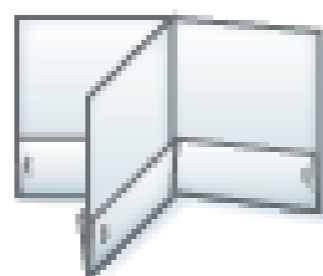
المصفوفات، اعمل هذه المعطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المصفوفات، مبتدئاً بورقة A4.

1 اثنِ حافة الورقة بعرض 2cm بموازية الضلعين القصيرين.

2 اطوِ الورقة الناتجة إلى أربع، ثم قص كما في الشكل.

3 أعد الطي، ثم ثبت الجيوب مستعملاً الدباسة.

4 اكتب على كل جيب عنواناً لدرس من دروس الفصل، وكتب عنوان الفصل.





أوجد كلا من النظير الجمعي و الضربي لكل عدد مما يأتي:

- (1)  $-4, \frac{1}{4}$   
(2)  $15, -\frac{1}{15}$   
(3)  $-0.2, 5$   
(4)  $1.35, -\frac{20}{27}$   
(5)  $\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$   
(6)  $-2\frac{1}{3}, \frac{3}{7}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

- (7)  $6x + 12y$   
(8)  $4x + 17 = 4x + 20 - 3$   
(9)  $-19x + 6 = -12x - 7x + 6$   
(10)  $\frac{26}{3}x - \frac{76}{3} = 10x - 25 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$   
(11)  $17x - 3y - 9 = 12x - 6 - 3y + 3x + 2x - 3$

حل نظام المعادلتين في كل مما يأتي جبرياً

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad (12)$$

$$2x - x - 3 = -1$$

$$x = 2$$

$$y = 2 + 3 = 5$$

$$(2, 5)$$

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -18 \\ 3x + 4y &= 19 \end{aligned} \quad (13)$$

$$2x - 5y = -18 \rightarrow (1)$$

$$3x + 4y = 19 \rightarrow (2)$$

$$3 \times (1) \rightarrow 6x - 15y = -54$$

$$2 \times (2) \rightarrow (-) \begin{array}{r} +6x + 8y = +38 \\ \hline -23y = -92 \end{array}$$

$$\frac{-23y}{-23} = \frac{-92}{-23}$$
$$y = 4$$

$$2x - 5(4) = -18$$

$$2x - 20 = -18$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$(1, 4)$$

$$\begin{aligned} 4y + 6x &= -6 \\ 5y + x &= 35 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{array}{r} 4y + 6x = -6 \\ 30y - 6x = 210 \\ \hline 34y = 204 \end{array}$$

$$\frac{34y}{34} = \frac{204}{34}$$

$$y = 6$$

$$4(6) + 6x = -6$$

$$6x = -6 + (-24)$$

$$x = -5$$

$$(-5, 6)$$

$$4x + 2y = 4 \quad (15)$$

$$x = y - 8$$

$$4(y - 8) + 2y = 4$$

$$4y - 32 + 2y = 4$$

$$6y - 32 = 4$$

$$6y = 36$$

$$y = 6$$

$$x = 6 - 8$$

$$x = -2$$

$$(-2, 6)$$

(16) جوائز:

$$30x + 9y = 534$$

$$25x + 8y = 448$$

$$16 = \text{عدد الحقائب}$$

$$6 = \text{عدد الأقلام}$$

2-1

## مقدم فلي المصفوفات

تلقوا

(1) استعمل المصفوفة  $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$  للإجابة عن كل مما يأتي

(1A) ما رتبة  $B$  ؟  $3 \times 2$

(1B) ما قيمة  $b_{32}$  ؟  $-1$

(2) بيتزا: (A) نظم هذه البيانات في مصفوفة، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديا.

	كبيرة	وسط	صغيرة
الزعر	4	3	2
الجبن	5	3.5	2.5
البيض	5.5	4	3
اللحم	6	5	4

(B) حدد رتبة المصفوفة

$4 \times 3$

(C) ما قيمة العنصر  $a_{21}$  ؟

٣ ريال

(3) محافظات:  
(A) نظم البيانات في مصفوفة.

مكة المكرمة	9	7
الرياض	12	8
المدينة المنورة	4	4
القصيم	5	7

(B) اجمع عناصر كل عمود، و فسر النتائج.  
مجموع عناصر كل من العمودين الأول و الثاني هما 30, 26، و يمثلان عدد المحافظات في كل منهنم الفئتين أ و ب

(C) اجمع عناصر كل صف، و فسر النتائج.  
مجموع عناصر كل من الصفوف الأول و الثاني و الثالث و الرابع هي على الترتيب 16 ثم 20 ثم 8 ثم 12، و تمثل عدد المحافظات من الفئتين أ و ب في كل من مكة المكرمة و الرياض و المدينة المنورة و القصيم على الترتيب.

(D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟  
معدل عناصر كل صف أو كل عمود ليس له معنى.





حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$2 \times 4 \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$4 \times 1 \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 2 \quad (3) \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$$

إذا كانت  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$  فحدد كل عنصر فيما يأتي:

$$-8 = a_{32} \quad (4)$$

$$1 = a_{11} \quad (5)$$

$$2 = a_{33} \quad (6)$$

$$9 = a_{24} \quad (7)$$

(8) زراعة:

(a) نظم البيانات في مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 540 & 570 & 488 & 500 \\ 850 & 1015 & 800 & 820 \end{bmatrix}$$

(b) ما النوع الأقل إنتاجاً؟

الباذنجان

اجمع عناصر كل صف، هل لهذه المجاميع معني. و فسر إجابتك.

- الصف 1: 2098 ، و يمثل إجمالي عدد صناديق الخضروات المذكورة التي تنتجها المزرعة 1.
- الصف 2 : 3485 ، و يمثل إجمالي عدد صناديق الخضروات المذكورة التي تنتجها المزرعة 2 .
- (d) اجمع عناصر كل عمود؟ فسر إجابتك.
- المجاميع هي 1390 ، 1585 ، 1288 ، 1320
- تمثل إجمالي عدد الصناديق التي تنتجها المزرعتان معاً من الخيار و الكوسة و الباذنجان و الطماطم على الترتيب.

## تدرب وحل المسائل

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$1 \times 2 \quad [-9 \ 6] \quad (9)$$

$$2 \times 2 \quad \begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$2 \times 4 \quad \begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$3 \times 3 \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$3 \times 1 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$1 \times 1 \quad [115] \quad (14)$$

إذا كانت،  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$  ،  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$  ، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

$$19 = b_{22} \quad (16) \qquad 9 = a_{21} \quad (15)$$

$$y = a_{12} \quad (18) \qquad 2x = b_{13} \quad (17)$$

نظم البيانات الآتية في مصفوفة:

$$\begin{array}{l} \text{سعود} \\ \text{علي} \\ \text{مروان} \end{array} \begin{bmatrix} 221 & 201 & 185 & 607 \\ 168 & 233 & 159 & 560 \\ 187 & 189 & 211 & 587 \end{bmatrix} \quad (19)$$

(20) تخزين:

(a) نظم البيانات في مصفوفة على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

	المخزن الثالث	المخزن الثاني	المخزن الأول
خلاص	2750	3000	2000
برجي	1500	1175	1200
سكري	1300	2250	500

(b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، و ماذا يمثل هذا المجموع؟

مخزن 1 : 3700

مخزن 2 : 6425

مخزن 3 : 5950

و تمثل عدد الكيلوجرامات من التمر التي يحويها كل مخزن.

(c) أوجد مجموع عناصر كل صف، و ماذا يمثل هذا المجموع؟

مجموع عناصر الصف الأول : 7750

مجموع عناصر الصف الثاني 3375

مجموع عناصر الصف الثالث 4450

و تمثل إجمالي الكيلوجرامات الموجودة في المخازن الثلاثة من كل نوع.

إذا كانت  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$  فحدد كل عنصر مما يأتي:

$$4x = b_{21} \quad (22)$$

$$15 = a_{32} \quad (21)$$

$$x = a_{21} \quad (24)$$

$$-3 = b_{12} \quad (23)$$

(25) حديد تسليح:

(a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاه

$$\begin{bmatrix} 2410 & 2455 \\ 2210 & 2255 \\ 200 & 2245 \end{bmatrix}$$

(b) ما رتبة المصفوفة في فرع A؟

$$3 \times 2$$

إذا كانت  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{A} = \begin{bmatrix} x^2 + 4 & y + 6 \\ x - y & 2 - y \end{bmatrix}$  فحدد كل عنصر مما

يأتي:

$$2 - y = a_{22} \quad (27)$$

$$x^2 + 4 = a_{11} \quad (26)$$

$$-4x = a_{23} \quad (29)$$

$$-y = a_{31} \quad (28)$$

(30) فلك:

(a) نظم المسافات في مصفوفة.

عطارد

الزهرة

المريخ

المشتري

زحل

أورانس

نبتون

36.00	57
67.24	26
141.71	35
483.88	370
887.14	744
1783.98	1607
2796.46	2680

(b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

$7 \times 2$

(c) ما قيمة العنصر  $a_{42}$

370

(31) تمثيلات متعددة:

(a) جدولياً: نظم البيانات في مصفوفة على أن يمثل عدد الأهداف و عدد التمريرات عموداً.

أهداف	تمريرات
8	3
6	5
1	8
4	2

(b) أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

الأهداف 18

التمريرات 19

(c) جدولياً: بدل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف

تمريرات	8	6	1	4
أهداف	3	5	8	2

(d) جبرياً: أوجد مجاميع عناصر كل صف.

الأهداف 18

## التمريرات 19

(e) تحليلياً: هل هناك تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف و الأعمدة. عند تبديل عناصر الصفوف و الأعمدة فإن البيانات لا تتأثر.

### مسائل مهارات التفكير العليا

(32) تبرير:

(المصفوفة  $C$  مربعة و لها أربعة أعمدة، و تحوي العنصر  $c_{53}$  ) عبارة خاطئة ، المصفوفة المربعة التي فيها اربع أعمدة فيها أربعة صفوف ، لذلك لن يكون فيها عنصر في الصف الخامس.

(33) أكتشف الخطأ:

لا؛ العنصر  $b_{32}$  هو العنصر الثاني في الصف الثالث و هو 2.

(34) تحد:

نكون نظام معادلات من الحدود المتناظرة:

$$\begin{cases} 7x - y - 9z = 1 & \leftarrow 2x - y = 9z - 5x + 1 \\ 7x - 3y - 4z = 0 & \leftarrow 7x - 8z = 3y - 4z \\ 5x - 5y + 4z = 0 & \leftarrow 3x + 4z = 5y - 2x \\ -12x + 3y + 12z = 0 & \leftarrow 5y + 12z = 12x + 2y \end{cases}$$

بحل نظام المعادلات باستخدام المصفوفات

$$\underline{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & -9 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & 0 \\ 5 & -5 & 4 & 0 \\ -12 & 3 & 12 & 0 \end{array} \right]$$

$$= \{ \{7, -1, -9, 1\}, \{7, -3, -4, 0\}, \{5, -5, 4, 0\}, \{-12, 3, 12, 0\} \}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

الحل  
(-5, -12, -8)

35) مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة تكون مجاميع عناصر أعمدها ذات معنى، و مجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى.

الطول	الوزن	العمر	
140	53	12	أحمد
150	60	15	محمد
130	45	12	حسن

36) اكتب: اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

يمكن ترتيب البيانات المتعلقة بالتخصصات المختلفة و الجامعات في مصفوفة لتسهيل مقارنة البيانات بعضها ببعض.

### تدريب على اختبار

37) الاختيار الصحيح: (D) عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

### مراجعة تراكمية

38) مجلس الإدارة:

$$\begin{aligned} (1) \quad x + y + z &= 490 \\ (2) \quad 3x + 2y + z &= 878 \\ (3) \quad y &= 2z + 4 \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة  $y$  من المعادلة (3) في المعادلتين (1), (2)

$$\begin{aligned} x + 2z + 4 + z &= 490 & @ & 3x + 2(2z + 4) + z = 878 \\ x + 3z &= 486 & @ & 3x + 4z + 8 + z = 878 \\ & & & 3x + 5z = 870 \end{aligned}$$

بضرب المعادلة  $x + 3z = 486$  في 3 و بالطرح

$$\begin{array}{r} 3x + 5z = 870 \\ (-) 3x + 9z = 1458 \\ \hline -4z = -588 \end{array}$$

بالقسمة على (-4)

$$z = \frac{-588}{-4}$$

$$z = 147$$

بالتعويض عن قيمة  $z$  في المعادلة  $x + 3z = 486$  لإيجاد قيمة  $x$

$$\begin{array}{r} z + 3(147) = 486 \\ x + 441 = 486 \\ x = 45 \end{array}$$

بالتعويض عن قيمة  $z$  في المعادلة (3) لإيجاد قيمة  $y$ .

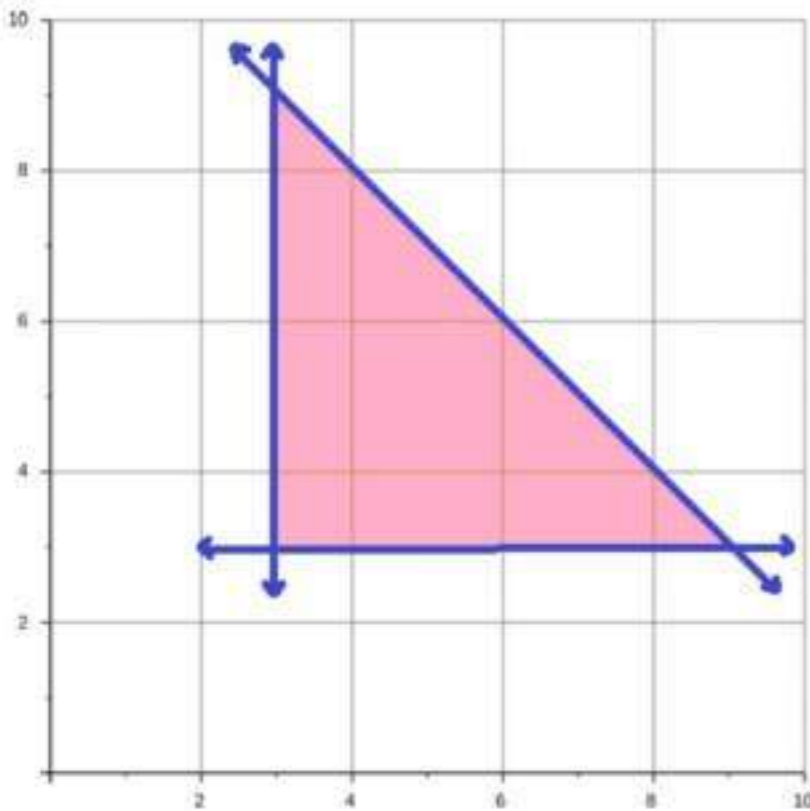
$$\begin{array}{r} y = 2z + 4 \\ y = 2(147) + 4 \\ y = 294 + 4 \\ y = 298 \end{array}$$

أول: 45

ثاني: 298

ثالث: 147

(39) ثقافة مالية:



الربح في كعكة الفواكه  $x = 39 - 13 = 26$   
الربح في كعكة الشوكولاتة  $y = 44 - 19 = 25$

الربح  $26x + 25y =$

$$x + y \geq 6$$

$$x + y \leq 12$$

$$x \geq 3$$

$$y \geq 3$$

$(x, y)$	$26x + 25y$	$f(x, y)$
(3, 9)	$26(3) + 25(9)$	303
(3, 3)	$26(3) + 25(3)$	153
(9, 3)	$26(9) + 25(3)$	309

يكون الربح أكبر ما يمكن 309

3 كعكات شوكولاتة و 9 كعكات فواكه



احسب قيمة كل عبارة مما يأتي إذا كان  $w = 3$  ،  $x = -2$  ،  $y = 4$  ،  $z=0.5$

$$\begin{aligned} & 4x - 6y + 2z \quad (40) \\ & 4(-2) - 6(4) + 2(0.5) \\ & -8 - 24 + 1 \\ & -31 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5w + 2(x - z) + 2y \quad (41) \\ & 5(3) + 2(-2 - 0.5) + 2(4) \\ & 15 + 2(-2.5) + 8 \\ & 15 - 5 + 8 \\ & 18 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4[3(2z + y) - 2(w + x)] \quad (42) \\ & 4(3(2(0.5) + 4) - 2(3 + (-2))) \\ & 4(3(5) - 2) \\ & 4(15 - 2) \\ & 52 = \end{aligned}$$

معمل الجداول الإلكترونية  
تنظيم البيانات

قوس  
2-1

- (1) يدخل الطالب البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية.
- (2) كلاهما يستعمل الصفوف والأعمدة لكن في برنامج الجداول الإلكترونية تتميز الصفوف باستعمال الأعداد على حين تتميز الأعمدة باستعمال الحروف. أما في المصفوفة تتميز كل من الصفوف والأعمدة باستعمال الأعداد.
- (3a) مجاميع عناصر الأعمدة 223, 234, 236, 346 وتمثل إجمالي ما بيع من التمور في الأسابيع الأربعة.
- (3b) خلاص 73 ومكتومي 116 و خضري 231 و سلج 214 و عجوة 115 وسكري 76 ومنيفي 102 وصقعي 112 ، تمثل مجاميع الصفوف إجمالي ما بيع بالكيلو جرام من كل نوع من أنواع التمور في الأسابيع الأربعة.
- (3c) المجموع في كلتا المجموعتين هو 1039 ومجموع حاصل جمع الصفوف يساوي مجموع حاصل جمع الأعمدة لأن كلا منهما تمثل مجموع ما بيع من كل أنواع التمور في جميع الأسابيع.

2-2

## العمليات على المصفوفات

تلق

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -17 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} \quad (1A)$$

$$\begin{bmatrix} -13 & 5 & 9 \\ -11 & -1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix} \quad (1B)$$

(2) إذا كانت  $\underline{T} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$  ، فأوجد  $-4\underline{T}$

$$-4\underline{T} = \begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 & 8 \\ 4 & 16 & 8 & -36 \end{bmatrix}$$

(3) إذا كانت  $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$  ، فأوجد  $-6\underline{B} + 7\underline{A}$  ،  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

$$7\underline{A} = \begin{bmatrix} -35 & 21 \\ 42 & -56 \\ 14 & 63 \end{bmatrix} , \quad -6\underline{B} = \begin{bmatrix} -72 & -30 \\ -30 & 24 \\ -24 & 42 \end{bmatrix}$$

$$-6\underline{B} + 7\underline{A} = \begin{bmatrix} -107 & -9 \\ 12 & -32 \\ -10 & 105 \end{bmatrix}$$

	النفقات	المبيعات	
(1) المعرض	241800	19578000	(4)
(2) المعرض	312000	26286000	
(3) المعرض	327600	31226000	



أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$[3 \quad -5 \quad 7] = [-8 \quad 2 \quad 6] + [11 \quad -7 \quad 1] \quad (1)$$

$$[9 \quad -8 \quad 4] + [12 \quad 2] = \text{غير ممكن.} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 11 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 31 & -14 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 \\ -6 & 42 & -24 \\ -12 & -18 & 21 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} -90 & 54 & -12 & -18 \\ -36 & 66 & -84 & 12 \\ -24 & 48 & 60 & -162 \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad @ \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad @ \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} \text{ إذا كان}$$

فأوجد ناتج كل مما يأتي:

$$4\underline{B} - 2\underline{A} \quad (7)$$

$$4 \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = 4\underline{B} - 2\underline{A}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot 8 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 & 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-5) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 32 & -4 \\ -8 & 28 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 6 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 32 - 12 & (-4) - (-8) \\ (-8) - 6 & 28 - (-10) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ -14 & 38 \end{bmatrix} =$$

$$-8\underline{C} + 3\underline{A} \quad (8)$$

$$-8 \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = -8\underline{C} + 3\underline{A}$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 48 \\ -96 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ 9 & -15 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 50 & 36 \\ -87 & 41 \end{bmatrix} =$$

(9) درجات حرارة:

الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى و الصغرى = H-L

$$\begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.8 & 17.5 & 19.4 \\ 21 & 20.4 & 20.1 \\ 19.5 & 19.7 & 20.2 \\ 20.5 & 17.2 & 15.9 \end{bmatrix}$$

### تدرب وحل المسائل

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً

$$\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 12 + (-6) & -5 + 11 \\ -8 + (-7) & -3 + 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -15 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

غير ممكن

(12) مشروبات:

(a) اكتب المصفوفة  $\underline{C}$  التي تمثل الأسعار الحالية.

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة  $\underline{C}$  فيه لإيجاد المصفوفة  $\underline{N}$  التي تمثل الأسعار الجديدة؟

$$1.1 = 1 + 0.1$$

(c) جد المصفوفة  $\underline{N}$ .

$$\underline{N} = 1.1 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3 & 4.4 & 5.5 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 4.4 & 5.5 & 6.6 \end{bmatrix}$$

(d) جد المصفوفة  $\underline{N} - \underline{C}$ . ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

$$\begin{bmatrix} 3.3 & 4.4 & 5.5 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 4.4 & 5.5 & 6.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \underline{N} - \underline{C}$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} =$$

تمثل هذه المصفوفة الزيادة في سعر كل صنف.



أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، و إذا تعذر ذلك فأكتب "لا يمكن"  
مع ذكر السبب:

(13)

$$\begin{bmatrix} 24 \\ -10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(14)

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 3 & 17 & -2 \\ 1 & -23 & 14 \\ 13 & -40 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix}$$

(15) لا يمكن لإختلاف رتبة المصفوفتين

(16)

$$\begin{bmatrix} -6 & 13 & 14 \\ -11 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5+(-3) \\ -9+(-7) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 2-9 \\ -16-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -32 \end{bmatrix} =$$

18) لا يمكن لإختلاف رتب المصفوفات.

19) كتب:

(a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، و ارمز إليها بالرموز  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$

$$\begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} \underline{A} \text{ مكتبة}$$

$$\begin{bmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 2500 \end{bmatrix} \underline{B} \text{ مكتبة}$$

$$\begin{bmatrix} 4000 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix} \underline{C} \text{ مكتبة}$$

(b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاثة و عبر عن ذلك بمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 2500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4000 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10000 + 15000 + 4000 \\ 5000 + 10000 + 700 \\ 5000 + 2500 + 800 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 29000 \\ 15700 \\ 8300 \end{bmatrix} =$$

يوجد 29000 كتاب علمي ، 15700 كتاب تاريخي، كتاب تاريخي، 8300 كتاب أدبي

(c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C ؟

$$\begin{bmatrix} 10000 - 4000 \\ 5000 - 700 \\ 5000 - 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4000 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6000 \\ 4300 \\ 4200 \end{bmatrix} =$$

(d) أوجد المصفوفة A + B . هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة؟ فسر إجابتك.

$$\begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 2500 \end{bmatrix} = \underline{A} + \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} 10000 + 15000 \\ 5000 + 10000 \\ 5000 + 2500 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 25000 \\ 15000 \\ 7500 \end{bmatrix} =$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، و إذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب.

(20)

$$\begin{bmatrix} 18 \cdot (-3) & (-6) \cdot (-3) & (-8) \cdot (-3) \\ (-5) \cdot (-3) & (-3) \cdot (-3) & 12 \cdot (-3) \\ 0 \cdot (-3) & 3x \cdot (-3) & (-y) \cdot (-3) \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -54 & 18 & 24 \\ 15 & 9 & -36 \\ 0 & -9x & 3y \end{bmatrix} =$$

(21)

$$= -4 \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 \\ -16 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 \\ 9x \\ -27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ -5x+30 \\ -60 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 28 + (-24) + (-20) \\ -16 + 9x + (-5x + 30) \\ 12 + (-27) + (-60) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -16 \\ 4x + 14 \\ -75 \end{bmatrix} =$$

(22)

$$= -5 \left( \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \right)$$

باستخدام خاصية التوزيع

$$-5 \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -5(4) & -5(-8) \\ -5(8) & -5(-9) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5(4) & 5(-2) \\ 5(-3) & 5(-6) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -20 & 40 \\ -40 & 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -15 & -30 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -40 & 50 \\ -25 & 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 - 20 & 40 + 10 \\ -40 + 15 & 45 + 30 \end{bmatrix} =$$

(23)

$$= -6 \left( \begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix} \right)$$

$$-6 \left( \begin{bmatrix} 6 + (-5) & 3y + (-6) \\ 4x + 1 + 8 & -2 + (-7) \\ -9 + (x + 2) & xy + 2x \end{bmatrix} \right) =$$

$$-6 \left( \begin{bmatrix} 1 & 3y - 6 \\ 4x + 9 & -9 \\ x - 7 & xy + 2x \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 1(-6) & (3y-6)(-6) \\ (4x+9)(-6) & -9(-6) \\ (x-7)(-6) & (xy+2x)(-6) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -18y+36 \\ -24x-54 & 54 \\ -6x+42 & -6xy-12x \end{bmatrix} =$$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، و إذا تعذر ذلك فأكتب "لا يمكن"  
مع ذكر السبب.

(24)

$$= -2 \begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18.4 & 16.8 \\ -11.2 & 8.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16.4 & -15.6 \\ 28.8 & -32.8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 32.4 \\ -40 & 41.4 \end{bmatrix} =$$

(25)

$$-\frac{3}{4} \begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ -\frac{45}{4} & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ \frac{8}{3} & -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ -\frac{103}{12} & -10 \end{bmatrix} =$$

## مسائل مهارات التفكير العليا

(26) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع  $2 \times 2$  تبديلية.

افرض أن  $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$  لتوضيح أن خاصية الإبدال على جمع المصفوفات صحيحة للمصفوفة من النوع  $2 \times 2$  ،

بين أن  $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

البرهان:

بالتعويض  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \underline{A} + \underline{B}$

تعريف الجمع على المصفوفات  $\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} =$

خاصية الإبدال على جمع الأعداد الحقيقية  $\begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix} =$

تعريف الجمع على المصفوفات  $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$

بالتعويض  $\underline{B} + \underline{A} =$

(27) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع  $2 \times 2$  تجميعية.

افرض أن  $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ,  $\underline{C} = \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$  لإثبات أن خاصية التجميع صحيحة على جميع المصفوفات من النوع  $2 \times 2$

بين أن  $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$

$$\text{بالتعويض} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$$

$$\text{تعريف الجمع على المصفوفات} \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف الجمع على المصفوفات} \begin{bmatrix} a+e+j & b+f+k \\ c+g+m & d+h+n \end{bmatrix} =$$

$$\text{خاصية التجميع على الجمع على الأعداد الحقيقية} \begin{bmatrix} a+(e+j) & b+(f+k) \\ c+(g+m) & d+(h+n) \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف الجمع على المصفوفات} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+j & f+k \\ g+m & h+n \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف الجمع على المصفوفات} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} \right) =$$

$$\text{بالتعويض} \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) =$$



(28) تحد: إذا كانت

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad 3\underline{A} - 4\underline{B} + 6\underline{C} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة  $\underline{C}$ .

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \text{ نفرض أن}$$

$$3 \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & -12 \\ 24 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ 8 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6c_1 & 6c_2 \\ 6c_3 & 6c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -9 - 20 + 6c_1 & -12 - (-4) + 6c_2 \\ 24 - 8 + 6c_3 & 18 - (-16) + 6c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -29 + 6c_1 & -8 + 6c_2 \\ 16 + 6c_3 & 34 + 6c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان فقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متساوية

$$\begin{array}{lll} c_1 = 7 & \leftarrow & 6c_1 = 42 \quad \leftarrow \quad -29 + 6c_1 = 13 \\ c_2 = 5 & \leftarrow & 6c_2 = 30 \quad \leftarrow \quad -8 + 6c_2 = 22 \\ c_3 = -1 & \leftarrow & 6c_3 = -6 \quad \leftarrow \quad 16 + 6c_3 = 10 \\ c_4 = -5 & \leftarrow & 6c_4 = 30 \quad \leftarrow \quad 34 + 6c_4 = 4 \end{array}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

(29) تبرير:

(a) إذا كانت  $\underline{A} + \underline{B}$  معرفة، فإن  $\underline{A} - \underline{B}$  معرفة.  
دائماً؛ إذا كانت  $\underline{A} + \underline{B}$  معرفة، فإن  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  لهما نفس الرتبة. و إذا كانت  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  لهما نفس الرتبة، فإن  $\underline{A} - \underline{B}$  معرفة.

(b) إذا كان  $k$  عدداً حقيقياً، فإن  $k\underline{A}$ ,  $k\underline{B}$  معرفتان.  
دائماً

(c) إذا كانت  $\underline{A} - \underline{B}$  غير معرفة، فإن  $\underline{B} - \underline{A}$  غير معرفة.  
دائماً؛ يجب أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها حتى يمكن إجراء عملية الجمع عليهما

(d) إذا كانت  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  لهما عدد العناصر نفسه، فإن  $\underline{A} + \underline{B}$  معرفة.  
أحياناً؛ يجب أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها حتى يمكن إجراء عملية الجمع عليهما.

(e) إذا كانت  $k\underline{A}$ ,  $k\underline{B}$  معرفتين، فإن  $k\underline{A} + k\underline{B}$  معرفة.  
أحياناً؛ يجب أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها حتى يمكن إجراء عملية الجمع عليهما.

(30) مسألة مفتوحة: أعط مثالا على مصفوفتين  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ، على أن تكون

$$4\underline{B} - 3\underline{A} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \underline{A}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \underline{B}$$

(31) اكتب: اشرح كيف تجد  $4D - 3C$  لأي مصفوفتين  $C, D$  لهما الرتبة نفسها.

أولاً: نضرب كل عنصر في  $D \times 4$   
ثانياً: نضرب كل عنصر في  $C \times 3$   
نطرح عناصر  $3C$  من العناصر المناظرة في  $4D$   
النتيجة هي المصفوفة المكافئة لـ  $4D - 3C$

### تدريب على اختيار

(32) حل النظام:  
الإختيار الصحيح: (C)  $(-2, 0.25)$

(33) رتبة المصفوفة:  
الإختيار الصحيح: (B)  $5 \times 3$

### مراجعة تراكمية

إذا كانت  $\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ x & -2 \\ 9 & y \end{bmatrix}$ ,  $\underline{C} = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

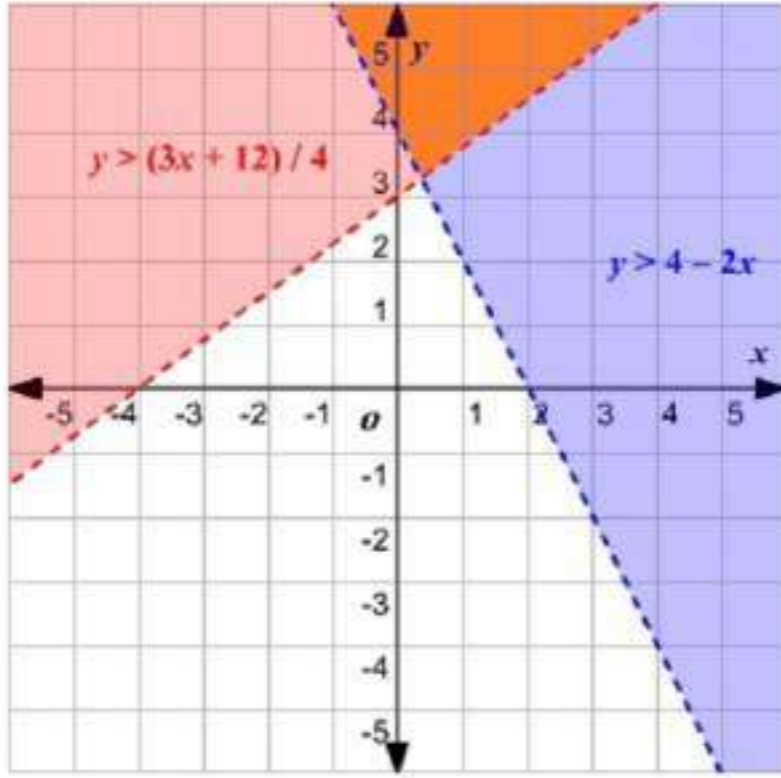
فحدد كل عنصر مما يأتي:

$4y$   $a_{32}$  (34)

3  $c_{13}$  (35)

غير موجودة  $b_{32}$  (36)

(37) حل بيانياً النظام أدناه:



$$4x + 2y > 8$$

$$4y - 3x \leq 12$$

منطقة الحل هي الملونة باللون البرتقالي

(38) سكان:

$$474059 - x = 115393$$

$$474059 - 115393 = x$$

$$358666 = x$$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$4(2x - 3y) + 2(5x - 6y) \quad (39)$$

$$8x - 12y + 10x - 12y =$$

$$18x - 24y =$$

$$-3(2a - 5b) - 4(4b + a) \quad (40)$$

$$-6a + 15b - 16b - 4a =$$

$$-10a - b =$$

$$-7(x - y) + 5(y - x) \quad (41)$$

$$-7x + 7y + 5y - 5x =$$

$$-12x + 12y =$$

2-3

## ضرب المصفوفات

تلقوا

 $\underline{A}_{3 \times 2}$  ,  $\underline{B}_{3 \times 2}$  (1B)  
غير معرفة $\underline{A}_{4 \times 6}$  ,  $\underline{B}_{6 \times 2}$  (1A)  
 $4 \times 2$ (2) إذا كانت  $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$  ، فأوجد  $\underline{UV}$  .

$$\begin{bmatrix} 5(2)+9(6) & 5(-1)+9(-5) \\ (-3)(2)+(-2)(6) & (-3)(-1)+(-2)(-5) \end{bmatrix} = \underline{UV}$$

$$\begin{bmatrix} 64 & -50 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} =$$

(3) مبيعات:

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = [273 \quad 527 \quad 422 \quad 433]$$

شهر المحرم 237

شهر صفر 527

شهر ربيع اول 422

شهر ربيع ثان 433

(4) إذا كانت  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$  فهل  $\underline{AB} = \underline{BA}$  ؟

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} -8 & 19 \\ -7 & 20 \end{bmatrix} , \quad \underline{BA} = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}$$

(5) إذا كان  $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

فحدد ما

إذا كان  $(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{SR} + \underline{TR}$  أم لا.

$$(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \begin{bmatrix} 15 & 38 \\ 1 & 45 \end{bmatrix}$$

$$\underline{SR} + \underline{TR} = \begin{bmatrix} 15 & 38 \\ 1 & 45 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{SR} + \underline{TR}$$

نعم



حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا، و إن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة.

$$(1) \quad \underline{A}_{2 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 3} \quad \text{معرفة؛} \quad 2 \times 3$$

$$(2) \quad \underline{C}_{5 \times 4} \cdot \underline{D}_{5 \times 4} \quad \text{غير معرفة}$$

$$(3) \quad \underline{E}_{8 \times 6} \cdot \underline{F}_{6 \times 10} \quad \text{معرفة،} \quad 8 \times 10$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً.

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2(-6) + 1(-2) & 2(3) + 1(-4) \\ 7(-6) + (-5)(-2) & 7(3) + (-5)(-4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -14 & 2 \\ -32 & 41 \end{bmatrix} =$$

$$(5) \quad \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10(1) + (-2)(5) & 10(4) + (-2)(-2) \\ (-7)(1) + 3(5) & (-7)(4) + 3(-2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 44 \\ 8 & -34 \end{bmatrix} =$$

$$[9 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[-30 \quad 50] =$$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [-1 \quad -10 \quad 1] \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} (-9)(-1) & (-9)(-10) & (-9)(1) \\ (6)(-1) & (6)(-10) & (6)(1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 90 & -9 \\ -6 & -60 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

غير معرفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 2(6) + 8(-7) \\ 3(6) + (-1)(-7) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -44 \\ 25 \end{bmatrix} =$$



$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} (-4)2 + 3(8) + 2(5) & (-4)(1) + 3(4) + 2(3) & (-4)6 + 3(-1) + 2(-2) \\ (-1)2 + (-5)8 + 4(5) & (-1)(1) + (-5)(4) + 4(3) & (-1)6 + (-5)(-1) + 4(-2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 14 & -31 \\ -22 & -9 & -9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 2(6) + 5(-7) + 3(2) + (-1)(-1) & 2(-3) + 5(1) + 3(0) + (-1)(0) \\ (-3)(6) + 1(-7) + 8(2) + (-3)(-1) & (-3)(-3) + 1(1) + 8(0) + (-3)(0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -16 & -1 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} =$$

(12) لياقة بدنية:

$$[110 \quad 156 \quad 439] \cdot \begin{bmatrix} 35 & 28 \\ 32 & 17 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} = (a)$$

$$110(35 + 28) + 156(32 + 17) + 439(18 + 12) = \text{المبلغ الكلي (b)}$$

$$= 28185 \text{ ريالاً}$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \underline{Z} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \text{ إذا كانت}$$

فحدد إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

$$\underline{XY} = \underline{YX} \quad (13)$$

لا؛

$$\begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} = \underline{XY}$$

$$\begin{bmatrix} (-10)(-5) + (-3)(-1) & (-10)6 + (-3)9 \\ 2(-5) + (-8)(-1) & 2(6) + (-8)9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 53 & -87 \\ -2 & -60 \end{bmatrix} = \underline{XY}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \underline{YX}$$

$$\begin{bmatrix} (-5)(-10) + 6(2) & (-5)(-3) + 6(-8) \\ (-1)(-10) + 9(2) & (-1)(-3) + 9(-8) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 62 & -33 \\ 28 & -69 \end{bmatrix} = \underline{YX}$$

واضح أن  $\underline{XY} \neq \underline{YX}$

$$\underline{X}(\underline{Y}\underline{Z}) = (\underline{X}\underline{Y})\underline{Z} \quad (14)$$

نعم

$$\begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix} = \underline{X}(\underline{Y}\underline{Z})$$

$$\begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix} = (\underline{X}\underline{Y})\underline{Z}$$

### تدرب وحل المسائل

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي، و إن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة.

$$\underline{M}_{3 \times 1} \cdot \underline{N}_{2 \times 3} \quad (17)$$

$$\underline{A}_{5 \times 5} \cdot \underline{B}_{5 \times 5} \quad (16)$$

$$\underline{P}_{2 \times 3} \cdot \underline{Q}_{3 \times 4} \quad (15)$$

غير معرفة  $5 \times 5$

معرفة؛  $2 \times 4$  معرفة؛

$$\underline{S}_{5 \times 2} \cdot \underline{T}_{2 \times 4} \quad (20)$$

$$\underline{J}_{2 \times 1} \cdot \underline{K}_{2 \times 1} \quad (19)$$

$$\underline{X}_{2 \times 6} \cdot \underline{Y}_{6 \times 3} \quad (18)$$

معرفة؛  $5 \times 4$

غير معرفة

معرفة؛  $2 \times 3$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$[1 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[1(-10) + 6(6)] =$$

$$[26] =$$

(22)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad -7] \\ & \begin{bmatrix} 6(2) & 6(-7) \\ (-3)(2) & (-3)(-7) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} (-3)4 + (-7)9 & (-3)4 + (-7)(-3) \\ (-2)4 + (-1)9 & (-2)4 + (-1)(-3) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -75 & 9 \\ -17 & -5 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

(24)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} (-1)6 + 0(7) & (-1)(-3) + 0(-2) \\ 5(6) + 2(7) & 5(-3) + 2(-2) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 44 & -19 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \quad (25)$$

غير معرفة

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} 6(7) + 4(2) + (-9)4 \\ 2(7) + 8(2) + 7(4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -70 \\ 58 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} 2(4) + 9(-6) + (-3)(-2) & 2(2) + 9(7) + (-3)(1) \\ 4(4) + (-1)(-6) + 0(-2) & 4(2) + (-1)7 + 0(1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{bmatrix} =$$

(28)

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-4)(-3) & (-4)(-1) \\ 8(-3) & 8(-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -24 & -8 \end{bmatrix} =$$

(29) أجنحة فندقية:

(a) أكتب مصفوفة تمثل تقسيمات الأبنية، ثم أكتب مصفوفة أسعار الغرف.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 220 \\ 250 \\ 360 \end{bmatrix}$$

(b) اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

$$\begin{bmatrix} 3(220) + 2(250) + 2(360) \\ 2(220) + 3(250) + 1(360) \\ 4(220) + 3(250) + 0(360) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{ريالاً} \\ \text{ريالاً} \\ \text{ريالاً} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1880 \\ 1550 \\ 1630 \end{bmatrix} =$$

(c) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

$$5060 = 1880 + 1550 + 1630 \text{ ريالاً}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, k = 2 \quad \text{إذا كان}$$

فحدد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

$$k(\underline{PQ}) = \underline{P}(k\underline{Q}) \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} = k(\underline{PQ})$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} = \underline{P}(k\underline{Q})$$

صحيحة؛

$$\underline{PQR} = \underline{RQP} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 21 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(6) + (-1)(-2) & 4(4) + (-1)(-5) \\ 1(6) + 2(-2) & 1(4) + 2(-5) \end{bmatrix} = \underline{PQ}$$

$$\begin{bmatrix} -22 & 240 \\ 44 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26(4) + 21(-6) & 26(6) + 21(4) \\ 2(4) + (-6)(-6) & 2(6) + (-6)4 \end{bmatrix} = \underline{PQR}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -14 \\ -44 & -44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(6) + 6(-2) & 4(4) + 6(-5) \\ (-6)6 + 4(-2) & (-6)4 + 4(-5) \end{bmatrix} = \underline{RQ}$$

$$\begin{bmatrix} 34 & -40 \\ -220 & -44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12(4) + (-14)(1) & 12(-1) + (-14)2 \\ (-44)4 + (-44)(1) & (-44)(-1) + (-44)2 \end{bmatrix} = \underline{RPQ}$$

غير صحيحة

$$\underline{PR} + \underline{QR} = (\underline{P} + \underline{Q})\underline{R} \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix} = \underline{PR} + \underline{QR}$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix} = (\underline{P} + \underline{Q})\underline{R}$$

صحيحة

$$\underline{R}(\underline{P} + \underline{Q}) = \underline{PR} + \underline{QR} \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6 & -1+4 \\ 1+(-2) & 2+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \underline{P} + \underline{Q}$$

$$\begin{bmatrix} 4(10)+6(-1) & 4(3)+6(-3) \\ (-6)10+4(-1) & (-6)3+4(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \underline{R}(\underline{P} + \underline{Q})$$

$$\begin{bmatrix} 34 & -6 \\ -64 & -20 \end{bmatrix} = \underline{R}(\underline{P} + \underline{Q})$$

$$\begin{bmatrix} 4(4)+(-1)(-6) & 4(6)+(-1)4 \\ 1(4)+2(-6) & 1(6)+2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \underline{PR}$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 20 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6(4)+4(-6) & 6(6)+4(4) \\ (-2)4+(-5)(-6) & (-2)6+(-5)4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \underline{QR}$$



$$\begin{bmatrix} 22+0 & 20+52 \\ -8+22 & 14+(-32) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 20 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 52 \\ 22 & -32 \end{bmatrix} = \underline{PR} + \underline{QR}$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix} = \underline{PR} + \underline{QR}$$

غير صحيحة

(34) تنسيق زهور:

(a) استخدم ضرب المصفوفات؛ لإستخدام ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

$$525 = [525] = [200(0.5) + 150(1.5) + 100(2)] = \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور.

$$2200 = [2200] = [200(3) + 150(6) + 100(7)] = \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(c) استعمل العمليات على المصفوفات لإيجاد ربح المحل من بيع الزهور.

$$1675 = [525] - [2200] = \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ربح المحل = 1675 ريالاً

استعمل المصفوفات  $\underline{X} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x+2 & y \\ 13 & 1.2 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{Z} = \begin{bmatrix} -3 \\ x+y \end{bmatrix}$   
لإيجاد ناتج الضرب في كل مما يأتي إذا كان ممكناً.

$XY$  (35) غير معرفة

$YX$  (36)

$$\begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x+2 & y \\ 13 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix} = \underline{YX}$$

$$\begin{bmatrix} (-5)2 + (-1.5)(3y) & (-5)(-6) + (-1.5)(-4.5) \\ (x+2)2 + 3(3y) & (x+2)(-6) + y(-4.5) \\ 13(2) + 1.2(3y) & 13(-6) + 1.2(-4.5) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 - 4.5y & 36.75 \\ 2x + 4 + 9y^2 & -6x - 4.5y - 12 \\ 3.6y + 26 & -83.4 \end{bmatrix} =$$

$ZY$  (37) غير معرفة

$YZ$  (38)

$$\begin{bmatrix} (-5)(-3) + (-1.5)(x+y) \\ (x+2)(-3) + y(x+y) \\ 13(-3) + 1.2(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x+2 & y \\ 13 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ x+y \end{bmatrix} = \underline{YZ}$$

$$\begin{bmatrix} -1.5x - 1.5y + 15 \\ y^2 + xy - 3x - 6 \\ 1.2x + 1.2y - 39 \end{bmatrix} =$$

غير معرفة  $(\underline{XZ})\underline{X}$  (40)

غير معرفة  $\underline{X}(\underline{ZZ})$  (41)

$(\underline{XX})\underline{Z}$  (42)

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix} = \underline{XX}$$

$$\begin{bmatrix} 2(2) + (-6)3y & 2(-6) + (-6)(-4.5) \\ (3y)2 + (-4.5)(3y) & (3y)(-6) + (-4.5)(-4.5) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -18y + 4 & 15 \\ -7.5y & -18y + 20.25 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -18y + 4 & 15 \\ -7.5y & -18y + 20.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ x+y \end{bmatrix} = (\underline{XX})\underline{Z}$$

$$\begin{bmatrix} (-18y + 4)(-3) + 15(x+y) \\ (-7.5y)(-3) + (-18y + 20.25)(x+y) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 45y - 12 + 15x + 15y \\ 22.5y + 18xy - 18y^2 + 20.25x + 20.25y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 15x + 69y - 12 \\ -18y^2 - 18xy + 20.25x + 42.75y \end{bmatrix} =$$

### مسائل مهارات التفكير العليا

(43) تبرير: إذا كانت رتبة المصفوفة  $AB$  هي  $5 \times 8$  ، و رتبة المصفوفة  $A$  هي  $5 \times 6$  ، فما رتبة المصفوفة  $B$  ؟  
 $6 \times 8$

(44) برهان: بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من النوع  $2 \times 2$  (a) خاصية التوزيع للضرب في عدد.

$$\text{بالتعويض} \quad c \left( \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right) = c(A + B)$$

$$\text{تعريف جمع المصفوفات} \quad c \begin{bmatrix} a+w & b+x \\ d+y & e+z \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف ضرب المصفوفات في ثابت} \quad \begin{bmatrix} ca + cw & cb + cx \\ cd + cy & ce + cz \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف جمع المصفوفات} \quad \begin{bmatrix} ca & cb \\ cd & ce \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cw & cx \\ cy & cz \end{bmatrix} =$$

$$\text{بالتعويض} \quad cA + cB =$$

(b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع

$$\text{بالتعويض} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} \right) = \underline{C}(\underline{A} + \underline{B})$$

$$\text{تعريف جمع المصفوفات} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e+j & f+k \\ g+m & h+n \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف ضرب المصفوفات} \begin{bmatrix} a(e+j)+b(g+m) & a(f+k)+b(h+n) \\ c(e+j)+d(g+m) & c(f+k)+d(h+n) \end{bmatrix} =$$

$$\text{خاصية التوزيع} \begin{bmatrix} ea+ja+gb+mb & fa+ka+hb+nb \\ ec+jc+gd+md & fc+kc+hd+nd \end{bmatrix} =$$

$$\text{خاصية الإبدال على الجمع} \begin{bmatrix} ea+gb+ja+mb & fa+hb+ka+nb \\ ec+gd+jc+md & fc+hd+kc+nd \end{bmatrix} =$$

$$\text{خاصية جمع المصفوفات} \begin{bmatrix} ea+gb & fa+hb \\ ec+gd & fc+hd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ja+mb & ka+nb \\ jc+md & kc+nd \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف جمع المصفوفات} \quad \underline{CA} + \underline{CB} =$$

$$\underline{AC} + \underline{BC} = (\underline{A} + \underline{B})\underline{C} \text{ و بالمثل}$$

(c) خاصية التجميع للضرب

$$\text{بالتعويض} \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = (\underline{AB})\underline{C}$$

$$\text{تعريف ضرب المصفوفات} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} =$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{bmatrix} =$$

خاصية التوزيع

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix} =$$

خاصية الإبدال على الجمع

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix} =$$

تعريف جمع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف ضرب} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

المصفوفات

$$\text{تعريف ضرب المصفوفات} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\text{بالتعويض} \underline{A}(\underline{BC}) =$$

(d) خاصية التجميع للضرب في عدد

$$\text{بالتعويض} c \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) = c(\underline{AB})$$

$$\text{تعريف ضرب المصفوفات} c \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\text{تعريف الضرب في عدد} \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} =$$

ثابت

$$\text{خاصية التوزيع} \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix} =$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

تعريف الضرب في عدد ثابت

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

بالتعويض

$$(cA)B =$$

و بالمثل  $c(AB) = A(cB)$

(45) مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين  $A, B$  على أن تكون  $AB = BA$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = B$$

(46) تحد: جد قيم  $a, b, c, d$  التي تجعل العبارة

$$\text{صحيحة} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 10 \\ 3a + 5b &= 11 \end{aligned}$$

5 و المعادلة الثانية في 2 و بالطرح

بضرب المعادلة الاولى في

بقسمة الطرفين على 14

$$\begin{aligned} 20a + 10b &= 50 \\ -6a - 10b &= -22 \\ \hline 14a &= 28 \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة  $a$  في المعادلة الاولى

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ 4(2) + 2b &= 10 \\ 2b &= 2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

$$4c + 2d = 20$$

$$3c + 5d = 29$$

5 و المعادلة الثانية في 2 و بالطرح

بضرب المعادلة الاولى في

$$20c + \cancel{10d} = 100$$

$$- 6c - \cancel{10d} = -58$$

$$\hline 14c = 42$$

بقسمة الطرفين على 14

c في المعادلة الاولى

بالتعويض عن قيمة c = 3

$$4(3) + 2d = 20$$

$$2d = 8$$

$$d = 4$$

(47)

اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات المبيعات للمكتبة.

### تدريب على اختبار

(48) الإختيار الصحيح (A) 6012 ريالاً

(49) الإختيار الصحيح (C) 4×1

### مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$4 \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot 8 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-3) & 4 \cdot (-4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 6 & 5 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$



$$\begin{bmatrix} 32 & -4 \\ -12 & -16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 20 \\ 30 & 15 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 32 - (-10) & (-4) - 20 \\ (-12) - 30 & (-16) - 15 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 42 & -24 \\ -42 & -31 \end{bmatrix} =$$

$$5 \left( 2 \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \right) \quad (51)$$

$$5 \left( \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -18 & -12 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -20 \\ -100 & -30 \end{bmatrix} = 5 \left( \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -20 & -6 \end{bmatrix} \right) =$$

$$-4 \left( \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \right) \quad (52)$$

$$-4 \left( \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & -2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \right) =$$

$$-4 \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ -17 & -1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 8 - (-12) & 9 - (-2) \\ -5 - 12 & 5 - 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (-4) \cdot 20 & (-4) \cdot 11 \\ (-4) \cdot (-17) & (-4) \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -80 & -44 \\ 68 & 4 \end{bmatrix} =$$

الفصل  
**2**  
اختبار منتصف الفصل  
الدروس 2-1 إلى 2-3

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$1 \times 5$$

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(2)

$$3 \times 4$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$  فحدد:

(3)  $a_{21} = -5$       (4)  $b_{22} = 10$

(5) مبيعات:

(a) اكتب مصفوفة مبيعات كل اسبوع

$$\begin{bmatrix} 25 & 14 & 18 & 5 \\ 44 & 10 & 13 & 8 \end{bmatrix} \text{ الأسبوع الأول:}$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 26 & 15 & 4 \\ 18 & 38 & 17 & 2 \end{bmatrix} \text{ الأسبوع الثاني:}$$

(b) جد مجموع مبيعات الأسبوعين باستخدام جمع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 57 & 40 & 33 & 9 \\ 62 & 48 & 30 & 10 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 25 & 14 & 18 & 5 \\ 44 & 10 & 13 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 32 & 26 & 15 & 4 \\ 18 & 38 & 17 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 15 \\ -3 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-8 & 15-0 \\ -6-(-3) & -10-5 \end{bmatrix} =$$

$$-3 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -9 & -15 & -36 \\ 0 & 3 & -9 \\ -27 & -18 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 3 & -3 \cdot 5 & -3 \cdot 12 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot -1 & -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 9 & -3 \cdot 6 & -3 \cdot -5 \end{bmatrix} =$$

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -2-12x-3x-(-6) \\ 10+8-9 \\ -12+4x-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot -1 \\ 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \cdot -3x \\ 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \cdot (x-2) \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4-15x \\ 9 \\ 4x-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-12x-3x-(-6) \\ 10+8-9 \\ -12+4x-3 \end{bmatrix} =$$

(9) اختيار من متعدد: أوجد ناتج:

$$\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{الإختيار الصحيح (A)}$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 17 & -26 \\ 3 & 29 & -32 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ليس ممكناً

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -39 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(-2) + (-2)5 + (-7)3 \\ 6(-2) + 3(5) + 5(3) \end{bmatrix} =$$

(13) اختيار من متعدد:

الإختيار الصحيح (D)  $4 \times 2$

(14) مبيعات:

(a) اكتب مصفوفة  $\underline{A}$  تمثل عدد القمصان و البناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$$

(b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة  $\underline{A}$  لإيجاد المصفوفة  $\underline{M}$  التي تمثل عدد القمصان و البناطيل بعد مضاعفته؟ جد  $\underline{M}$ .

$$\underline{M} = 2\underline{A} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 30 \\ 50 & 70 & 90 \end{bmatrix}$$

(c) ماذا تمثل المصفوفة  $\underline{M} - \underline{A}$  في هذه الحالة؟

$$\underline{M} - \underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$$

عدد القمصان الإضافية التي هو بحاجة إلى تخزينها.

(15) اختيار من متعدد

الاختيار الصحيح (A) [8 -12]

2-4

## المحددات وقاعدة كرامر

تلق

$$\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -48 + 70 = 22 \quad (1a)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = -28 - 45 = -73 \quad (1b)$$

جد قيمة كل محددة فيما يأتي:

(2a)

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(-5)(-1)(2) = 10$$

$$(9)(5)(-4) = -180$$

$$(4)(-2)(6) = -48$$

$$(-4)(-1)(4) = 16$$

$$(6)(5)(-5) = -150$$

$$(2)(-2)(9) = -36$$

$$10 + (-180) + (-48) = -218$$

$$16 + (-150) + (-36) = -170$$

قيمة المحددة

$$-218 - (-170) = -48$$

(2b)

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(-8)(-5)(1) = 40$$

$$(-4)(-8)(3) = 96$$

$$(4)(0)(4) = 0$$

$$40 + 96 + 0 = 136$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(3)(-5)(4) = -60$$

$$(4)(-8)(-8) = 256$$

$$(1)(0)(-4) = 0$$

$$-60 + 256 + 0 = 196$$

$$136 - 196 = -60$$

قيمة المحددة

(3)

$$\begin{vmatrix} 11 & 9 & 1 & 11 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 15 & 1 & 3 & 15 \end{vmatrix}$$

$$44 + 27 + 90 = 161$$

$$\begin{vmatrix} 11 & 9 & 1 & 11 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 15 & 1 & 3 & 15 \end{vmatrix}$$

$$12 + 165 + 54 = 231$$

قيمة المحددة =

$$161 - 231 = -70$$

= المساحة

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 11 & 9 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 3 & 15 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \times -70 = -35$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leftarrow \frac{1}{2} km = \text{كل وحدة على الخريطة}$$

$$A = \frac{-35}{4} = 8.75 km^2$$

حقق كل نظام فيما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:



$$\begin{aligned} 7x + 3y &= 37 \\ -5x - 7y &= -41 \end{aligned} \quad (4a)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 7(-7) - 3(-5) = -49 - (-15) = -34$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 37 & 3 \\ -41 & -7 \end{vmatrix}}{-34} = \frac{37(-7) - 3(-41)}{-34} = \frac{-136}{-34} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 37 \\ -5 & -41 \end{vmatrix}}{-34} = \frac{7(-41) - 37(-5)}{-34} = \frac{-102}{-34} = 3$$

$$(x, y) = (4, 3)$$

$$\begin{aligned} 8x - 5y &= 70 \\ 9x + 7y &= 3 \end{aligned} \quad (4b)$$

$$|C| = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = 8(7) - (-5)9 = 56 + 45 = 101$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{101} = \frac{70(7) - 3(-5)}{101} = \frac{505}{101} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 70 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{101} = \frac{8(3) - 70(9)}{101} = \frac{-606}{101} = -6$$

$$(x, y) = (5, -6)$$

حل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= -7 \\ -4x + 3y - 5z &= -19 \\ 5x + 4y - 7z &= -15 \end{aligned} \quad (5a)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 330$$

$$\begin{aligned} &= \{3 \times 3 \times -7 + 5 \times -5 \times 5 + 2 \times -4 \times 4\} - \{2 \times 3 \times 5 + 3 \times -5 \times 4 + 5 \times -4 \times -7\} \\ &= -220 - 110 = -330 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 & 2 \\ -19 & 3 & -5 \\ -15 & 4 & -7 \end{vmatrix}}{-330} = \frac{370 - 715}{-330} = \frac{-237}{-330} = \frac{23}{22}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -4 & -19 & -5 \\ 5 & -15 & -7 \end{vmatrix}}{-330} = \frac{694 + 161}{-330} = \frac{855}{-330} = -\frac{57}{22}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -4 & 3 & -19 \\ 5 & 4 & -15 \end{vmatrix}}{-330} = \frac{-498 - (-33)}{-330} = \frac{-465}{-330} = \frac{31}{22}$$

$$(x, y, z) = \left( \frac{23}{22}, -\frac{57}{22}, \frac{31}{22} \right)$$

$$\begin{aligned}
 6x + 5y + 2z &= -1 \\
 -x + 3y + 7z &= 12 \\
 5x - 7y - 3z &= -52
 \end{aligned}
 \tag{5b}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 135 - (-249) = 384$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \cancel{-1} & \cancel{5} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{5} \\ 12 & 3 & 7 & 12 & 3 \\ \cancel{-52} & \cancel{-7} & \cancel{-3} & \cancel{-52} & \cancel{-7} \end{vmatrix}}{384} = \frac{-1979 - (-443)}{384} = \frac{-1536}{384} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & \cancel{-1} & \cancel{2} & 6 & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & 12 & 7 & \cancel{-1} & 12 \\ 5 & \cancel{-52} & \cancel{-3} & 5 & \cancel{-52} \end{vmatrix}}{384} = \frac{-147 - (-2067)}{384} = \frac{1920}{384} = 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & \cancel{-1} & 6 & \cancel{5} \\ \cancel{-1} & \cancel{3} & 12 & \cancel{-1} & 3 \\ 5 & \cancel{-7} & \cancel{-52} & 5 & \cancel{-7} \end{vmatrix}}{384} = \frac{-643 - (-259)}{384} = \frac{-384}{384} = -1$$

$$(x, y, z) = (-4, 5, -1)$$



أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (8)(7) - (5)(6) = 56 - 30 = 26$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = (-6)(10) - (-6)(8) = -60 + 48 = -12$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = (-4)(5) - (9)(12) = -20 - 108 = -128$$

$$\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = (16)(5) - (-10)(-8) = 80 - 80 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -5 & | & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & | & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (3)(2)(4) &= 24 \\ (-2)(-5)(-3) &= -30 \\ (2)(-4)(1) &= -8 \end{aligned}$$

$$24 + (-30) + (-8) = -14$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -5 & | & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & | & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-3)(2)(2) &= -12 \\ (1)(-5)(3) &= -15 \\ (4)(-4)(-2) &= 32 \end{aligned}$$

$$(-12) + (-15) + (32) = 5$$

$$-14 - 5 = -19$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & | & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -2 & | & -4 & 6 \\ 4 & -1 & -6 & | & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (2)(6)(-6) &= -72 \\ (-3)(-2)(4) &= 24 \\ (5)(-4)(-1) &= 20 \end{aligned}$$

$$(-72) + (24) + (20) = -28$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & | & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -2 & | & -4 & 6 \\ 4 & -1 & -6 & | & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (4)(6)(5) &= 120 \\ (-1)(-2)(2) &= 4 \\ (-6)(-4)(-3) &= -72 \end{aligned}$$

$$120 + 4 + (-72) = 52$$

$$-28 - 52 = -80$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 & | & 8 & 4 \\ -2 & -6 & -1 & | & -2 & -6 \\ 5 & -3 & 6 & | & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(8)(-6)(6) = -288$$

$$(4)(-1)(5) = -20$$

$$(0)(-2)(-3) = 0$$

$$(-288) + (-20) + (0) = -308$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 & | & 8 & 4 \\ -2 & -6 & -1 & | & -2 & -6 \\ 5 & -3 & 6 & | & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(5)(-6)(0) = 0$$

$$(-3)(-1)(8) = 24$$

$$(6)(-2)(4) = -48$$

$$0 + 24 + (-48) = -24$$

$$-308 - (-24) = -284$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 & | & -5 & -3 \\ -2 & -4 & -3 & | & -2 & -4 \\ 8 & -2 & 4 & | & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(-5)(-4)(4) = 80$$

$$(-3)(-3)(8) = 72$$

$$(4)(-2)(-2) = 16$$

$$80 + 72 + 16 = 168$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 & | & -5 & -3 \\ -2 & -4 & -3 & | & -2 & -4 \\ 8 & -2 & 4 & | & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(8)(-4)(4) = -128$$

$$(-2)(-3)(-5) = -30$$

$$(4)(-2)(-3) = 24$$

$$-128 + (-30) + 24 = -134$$

$$168 - (-134) = 302$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{8} & \cancel{3} & \cancel{4} & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & \cancel{1} & \cancel{6} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (8)(4)(5) &= 160 \\ (3)(2)(1) &= 6 \\ (4)(2)(6) &= 48 \end{aligned}$$

$$160 + 6 + 48 = 214$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 & \cancel{8} & \cancel{3} \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{5} & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1)(4)(4) &= 16 \\ (6)(2)(8) &= 96 \\ (5)(2)(3) &= 30 \end{aligned}$$

$$16 + 96 + 30 = 142$$

$$214 - 142 = 72$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{-4} & \cancel{3} & \cancel{0} & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & -8 & -3 & \cancel{-1} & \cancel{-8} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-4)(5)(-3) &= 60 \\ (3)(-2)(-1) &= 6 \\ (0)(1)(-8) &= 0 \end{aligned}$$

$$60 + 6 + 0 = 66$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 & \cancel{-4} & \cancel{3} \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ \cancel{-1} & \cancel{-8} & \cancel{-3} & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-1)(5)(0) &= 0 \\ (-8)(-2)(-4) &= -64 \\ (-3)(1)(3) &= -9 \end{aligned}$$

$$0 + (-64) + (-9) = -73$$

$$66 - (-73) = 139$$

(11) جغرافيا:

(a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

رؤوس المثلث هي (4, 4) , (9, 1) , (9.5, 7)

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \\ 9.5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 & | & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & | & 9 & 1 \\ 9.5 & 7 & 0 & | & 9.5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (4)(1)(1) &= 4 \\ (4)(1)(9.5) &= 38 \\ (1)(9)(7) &= 63 \end{aligned}$$

$$4 + 38 + 63 = 105$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 & | & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & | & 9 & 1 \\ 9.5 & 7 & 0 & | & 9.5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (9.5)(1)(1) &= 9.5 \\ (7)(1)(4) &= 28 \\ (1)(9)(4) &= 36 \end{aligned}$$

$$9.5 + 28 + 36 = 73.5$$

$$A = \frac{1}{2}(31.5) = 15.75$$

$$\leftarrow 105 - 73.5 = 31.5$$

المساحة = 15.75 وحدة مربعة

(b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلاً في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.

$$1 \text{ وحدة مربعة} = 175^2 \text{ ميلاً مربعاً} = 30625$$

$$15.75 \times 30625 = 482243.75$$



مساحة مثلث برمودا الحقيقية = 482243.75 ميلاً مربعاً.  
استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

(12)

$$4x - 5y = 39$$

$$3x + 8y = -6$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 32 - (-15) = 47$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 39 & -5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}}{47} = \frac{(39)(8) - (-6)(-5)}{47} = \frac{312 - 30}{47} = \frac{282}{47} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 39 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}}{47} = \frac{(4)(-6) - (3)(39)}{47} = \frac{-24 - 117}{47} = \frac{-141}{47} = -3$$

$$x = 6$$

$$y = -3$$

(13)

$$10c - 7d = -59$$

$$6c + 5d = -63$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 50 - (-42) = 92$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -59 & -7 \\ -63 & 5 \end{vmatrix}}{92} = \frac{5(-59) - (-7)(-63)}{92} = \frac{-736}{92} = -8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -59 \\ 6 & -63 \end{vmatrix}}{92} = \frac{10(-63) - 6(-59)}{92} = \frac{-630 - (-354)}{92} = \frac{-376}{92} = -3$$

$$x = 6$$

$$y = -3$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

(14)

$$4x - 2y + 7z = 26$$

$$5x + 3y - 5z = -50$$

$$-7x - 8y - 3z = 49$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{7} & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -5 & 5 & 3 \\ -7 & -8 & -3 & -7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$-36 + (-70) + (-280) = -386$$

$$|C| = -386 - 43 = -429$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 & \cancel{4} & \cancel{-2} \\ 5 & 3 & -5 & 5 & 3 \\ -7 & -8 & -3 & -7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$-147 + 160 + 30 = 43$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & -2 & 7 \\ -50 & 3 & -5 \\ 49 & -8 & -3 \end{vmatrix}}{-429} = \frac{3056 - 1769}{-429} = \frac{1287}{-429} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 26 & 7 \\ 5 & -50 & -5 \\ -7 & 49 & -3 \end{vmatrix}}{-429} = \frac{3225 - 1080}{-429} = \frac{2145}{-429} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 26 \\ 5 & 3 & -50 \\ -7 & -8 & 49 \end{vmatrix}}{-429} = \frac{-1152 - 564}{-429} = \frac{-1716}{-429} = 4$$

$$\begin{aligned} 6x - 5y + 2z &= -49 \\ -5x - 3y - 8z &= -22 \\ -3x + 8y - 5z &= 55 \end{aligned} \quad (15)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 & 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 & -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 & -3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 & 6 & -5 \\ -5 & -3 & -8 & -5 & -3 \\ -3 & 8 & -5 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

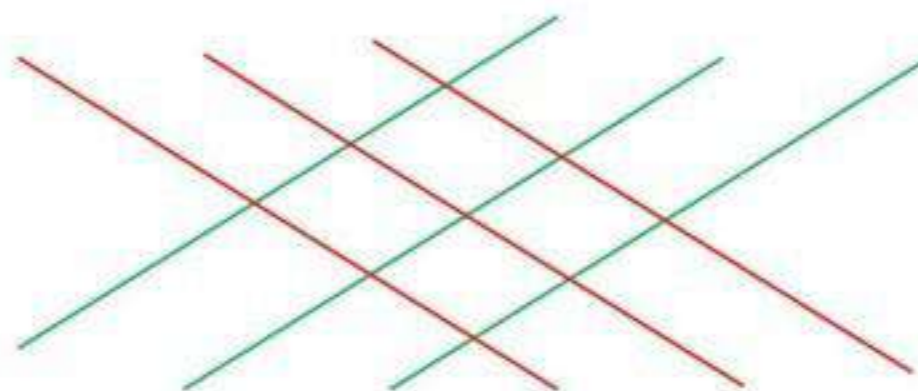
$$\begin{aligned} 90 + (-120)(80) &= -110 \\ 18 + (-384) + (-125) &= -491 \\ |C| &= -110 - (-491) = 381 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -49 & -5 & 2 \\ -22 & -3 & -8 \\ 55 & 8 & -5 \end{vmatrix}}{381} = \frac{\begin{vmatrix} -49 & -5 & 2 \\ -22 & -3 & -8 \\ 55 & 8 & -5 \end{vmatrix}}{381}$$

$$x = \frac{113 - 2256}{381} = \frac{-1143}{381} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -49 & 2 \\ -5 & -22 & -8 \\ -3 & 55 & -5 \end{vmatrix}}{381} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -49 & 2 \\ -5 & -22 & -8 \\ -3 & 55 & -5 \end{vmatrix}}{381}$$

$$y = \frac{-1066 - (-3733)}{381} = \frac{2667}{381} = 7$$



$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -49 \\ -5 & -3 & -22 \\ -3 & 8 & 55 \end{vmatrix}}{381} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -49 \\ -5 & -3 & -22 \\ -3 & 8 & 55 \end{vmatrix}}{381} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}}{381}$$

$$z = \frac{640 - (-122)}{381} = \frac{762}{381} = 2$$

### تدرب وحل المسائل

أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

$$\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$(-7)(6) - (12)(5) = -102$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} \quad (17)$$

$$(-8)(12) - (11)(-9) = 3$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$(-5)(-7) - (-6)(8) = 83$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{-2} & | & \cancel{3} & \cancel{5} \\ \cancel{-1} & \cancel{-4} & \cancel{6} & | & \cancel{-1} & \cancel{-4} \\ \cancel{-6} & \cancel{-2} & \cancel{5} & | & \cancel{-6} & \cancel{-2} \end{vmatrix}$$

$$(-60) + (-180) + (-4) = -224$$

$$(-48) + (-36)(-25) = -109$$

$$(-224) - (-109) = -115$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-6} & | & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{-3} & \cancel{-4} & \cancel{-5} & | & \cancel{-3} & \cancel{-4} \\ \cancel{-2} & \cancel{5} & \cancel{8} & | & \cancel{-2} & \cancel{5} \end{vmatrix}$$

$$(-64) + (0)(90) = 26$$

$$(-48) + (-50) + (0) = -98$$

$$26 - (-98) = 124$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$-360 + 0 + 12 = -348$$

$$0 + 120 + -9 = -111$$

$$-348 + (-111) = -459$$

(22) علم الآثار:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(0)(7)(1) = 0$$

$$(3)(1)(5) = 15$$

$$(1)(4)(9) = 36$$

$$0 + 15 + 36 = 51$$

$$51 - 47 = 4$$

$$A = \frac{1}{2}(4) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(5)(7)(1) = 35$$

$$(9)(1)(0) = 0$$

$$(1)(4)(3) = 12$$

$$35 + 0 + 12 = 47$$

مساحة المثلث =  $2 \text{ m}^2$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

$$\begin{aligned} 6x - 5y &= 73 \\ -7x + 3y &= -71 \end{aligned} \quad (23)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 35 = -17$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 73 & -5 \\ -71 & 3 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{(73)(3) - (-71)(-5)}{-17} = \frac{219 - 355}{18 - 35} = \frac{-136}{-17} = 8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 73 \\ -7 & -71 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{(6)(-71) - (-7)(73)}{-17} = \frac{-426 + 511}{-17} = \frac{85}{-17} = -5$$

$$\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10a - 3b &= -34 \\ 3a + 8b &= -28 \end{aligned} \quad (24)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 80 - (-9) = 89$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -34 & -3 \\ -28 & 8 \end{vmatrix}}{89} = \frac{(-34)(8) - (-28)(-3)}{89} = \frac{-356}{89} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -34 \\ 3 & -28 \end{vmatrix}}{89} = \frac{(10)(-28) - (3)(-34)}{89} = \frac{-178}{89} = -2$$

$$x = -4$$
$$y = -2$$

$$\begin{aligned} 5x - 4y + 6z &= 58 \\ -4x + 6y + 3z &= -13 \\ 6x + 3y + 7z &= 53 \end{aligned} \quad (25)$$



$$|C| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$210 + (-72) + (-72) = 66$$

$$216 + 45 + 112 = 373$$

$$|C| = 66 - 373 = -307$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 58 & -4 & 6 \\ -13 & 6 & 3 \\ 53 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-307} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 58 & -4 & 6 \\ -13 & 6 & 3 \\ 53 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-307}$$

$$x = \frac{\{(2436 + (-636) + (-234)) - (1908 + 522 + 364)\}}{-307}$$

$$x = \frac{1566 - 2794}{-307} = \frac{-1228}{-307} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 58 & 6 \\ -4 & -13 & 3 \\ 6 & 53 & 7 \end{vmatrix}}{-307} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 5 & 58 & 6 \\ -4 & -13 & 3 \\ 6 & 53 & 7 \end{vmatrix}}{-307}$$

$$y = \frac{\{((-455) + 1044 + (-1272)) - ((-468) + 795 + (-1624))\}}{-307}$$

$$y = \frac{(-683) - (-1297)}{-307} = \frac{614}{-307} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 58 \\ -4 & 6 & -13 \\ 6 & 3 & 53 \end{vmatrix}}{-307} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 58 \\ -4 & 6 & -13 \\ 6 & 3 & 53 \end{vmatrix}}{-307}$$

$$z = \frac{\{(1590 + 312 + (-696)) - (2088 + (-195) + 848)\}}{-307}$$

$$z = \frac{1206 - 2741}{-307} = \frac{-1535}{-307} = 5$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y + 7z &= 34 & x &= 4 \\ 5x + 6y + 3z &= -21 & y &= -2 \\ 3x + 7y - 8z &= -85 & z &= 5 \end{aligned} \quad (26)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & -8 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 8 & -4 & 7 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & -8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(-384) + (-36) + 245 = -175$$

$$126 + 168 + 160 = 454$$

$$|C| = -175 - 454 = -629$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 34 & -4 & 7 \\ -21 & 6 & 3 \\ -85 & 7 & -8 \end{vmatrix}}{-629} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 34 & -4 & 7 & 34 & -4 \\ -21 & 6 & 3 & -21 & 6 \\ -85 & 7 & -8 & -85 & 7 \end{vmatrix}}{-629}$$

$$x = \frac{(-1641) - (-3528)}{-629} = \frac{1887}{-629} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 34 & 7 \\ 5 & -21 & 3 \\ 3 & -85 & -8 \end{vmatrix}}{-629} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 8 & 34 & 7 & 8 & 34 \\ 5 & -21 & 3 & 5 & -21 \\ 3 & -85 & -8 & 3 & -85 \end{vmatrix}}{-629}$$

$$y = \frac{(-1325) - (-3841)}{-629} = \frac{2516}{-629} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 34 \\ 5 & 6 & -21 \\ 3 & 7 & -85 \end{vmatrix}}{-629} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 34 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & -21 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & -85 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-629}$$

$$z = \frac{(-2638) - 1136}{-629} = \frac{-3774}{-629} = 6$$

$$x = -3$$

$$y = -4$$

$$z = 6$$

(27) رحلة مدرسية:

بوضع  $x$  المسافة التي يقطعها على الطريق السريع

$y$  المسافة التي يقطعها داخل المدن

$$x + y = 375$$

$$\frac{x}{65} + \frac{y}{25} = 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{65}\right)x + \left(\frac{1}{25}\right)y = 7$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 375 & 1 \\ 7 & \frac{1}{25} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{65} & \frac{1}{25} \end{vmatrix}} = \frac{375\left(\frac{1}{25}\right) - 7(1)}{1\left(\frac{1}{25}\right) - 1\left(\frac{1}{65}\right)} = \frac{8}{\frac{8}{325}} = 8 \text{ mi.}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 375 \\ \frac{1}{65} & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{65} & \frac{1}{25} \end{vmatrix}} = \frac{(1)(7) - (375)\left(\frac{1}{65}\right)}{(1)\left(\frac{1}{25}\right) - (1)\left(\frac{1}{65}\right)} = \frac{\frac{16}{13}}{\frac{8}{325}} = 50 \text{ mi.}$$

$x = 325 \text{ mi}$  بمعدل سرعة  $65 \text{ mi / h}$ .

$$5 \text{ ساعات} = \frac{325 \text{ mi}}{65 \text{ mi / h}}$$

$y = 50 \text{ mi}$  بمعدل سرعة  $25 \text{ mi / h}$ .

$$2 \text{ ساعة} = \frac{50 \text{ mi}}{25 \text{ mi / h}}$$

4 ساعات على الطريق السريع ، ساعتان داخل المدن

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

$$\begin{aligned} 3a - 5b - 9c &= 17 \\ 4a - 3c &= 31 \\ -5a - 4b - 2c &= -42 \end{aligned} \quad (28)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 4 & 0 & -3 \\ -5 & -4 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5 & -9 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & -2 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 + (-75) + 144 &= 69 \\ 0 + 36 + 40 &= 76 \end{aligned}$$

$$|C| = 69 - 76 = -7$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 17 & -5 & -9 \\ 31 & 0 & -3 \\ -42 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{-7} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 17 & -5 & -9 & 17 & -5 \\ 31 & 0 & -3 & 31 & 0 \\ -42 & -4 & -2 & -42 & -4 \end{vmatrix}}{-7}$$

$$\begin{aligned} 0 + (-360) + 1116 &= 486 \\ 0 + 204 + 310 &= 514 \end{aligned}$$

$$a = \frac{486 - 514}{-7} = \frac{-28}{-7} = 4$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 17 & -9 \\ 4 & 31 & -3 \\ -5 & -42 & -2 \end{vmatrix}}{-7} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 3 & 17 & -9 & 3 & 17 \\ 4 & 31 & -3 & 4 & 31 \\ -5 & -42 & -2 & -5 & -42 \end{vmatrix}}{-7}$$

$$\begin{aligned} -186 + 255 + 1512 &= 1581 \\ 1395 + 378 + (-136) &= 1637 \end{aligned}$$

$$b = \frac{1581 - 1637}{-7} = \frac{-56}{-7} = 8$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 & 17 \\ 4 & 0 & 31 \\ -5 & -4 & -42 \end{vmatrix}}{-7} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 & 17 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 31 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & -42 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{-7}$$

$$\begin{aligned} 0 + 775 + (-272) &= 503 \\ 0 + (-372) + 840 &= 468 \end{aligned}$$

$$c = \frac{503 - 468}{-7} = \frac{35}{-7} = -5$$

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 8 \\ c &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x + 8y + 9z &= -149 \\ -6x + 7y - 5z &= 54 \\ 4x + 5y - 2z &= -44 \end{aligned}$$

(29)

$$|C| = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -6 & 7 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ -6 & 7 & -5 & -6 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-98) + (-160) + (-270) &= -528 \\ 252 + (-175) + 96 &= 173 \end{aligned}$$

$$|C| = -528 - 173 = -701$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -149 & 8 & 9 \\ 54 & 7 & -5 \\ -44 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{-701} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} -149 & 8 & 9 & -149 & 8 \\ 54 & 7 & -5 & 54 & 7 \\ -44 & 5 & -2 & -44 & 5 \end{vmatrix}}{-701}$$

$$\begin{aligned} 2086 + 1760 + 2430 &= 6276 \\ -2772 + 3725 + (-864) &= 89 \end{aligned}$$

$$x = \frac{6276 - 89}{-701} = \frac{6187}{-701}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -149 & 9 \\ -6 & 54 & -5 \\ 4 & -44 & -2 \end{vmatrix}}{-701} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 7 & -149 & 9 & 7 & -149 \\ -6 & 54 & -5 & -6 & 54 \\ 4 & -44 & -2 & 4 & -44 \end{vmatrix}}{-701}$$

$$\begin{aligned} -756 + 2980 + 2376 &= 4600 \\ 1944 + 1540 + (-1788) &= 1696 \end{aligned}$$

$$y = \frac{4600 - 1696}{-701} = \frac{2904}{-701}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 8 & -149 \\ -6 & 7 & 54 \\ 4 & 5 & -44 \end{vmatrix}}{-701} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 7 & 8 & -149 & 7 & 8 \\ -6 & 7 & 54 & -6 & 7 \\ 4 & 5 & -44 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{-701}$$

$$\begin{aligned} -2159 + 1728 + 4470 &= 4042 \\ -4172 + 1890 + 2112 &= -170 \end{aligned}$$

$$z = \frac{4042 - (-170)}{-701} = \frac{4212}{-701}$$

$$\left( -\frac{6187}{701}, -\frac{2904}{701}, -\frac{4212}{701} \right)$$

حل النظام هو

(30 صناعة: a) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي انتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1385 \\ x = 2y &\rightarrow x - 2y = 0 \\ 1.15x + 1.75y + 2.25z &= 2238.75 \end{aligned}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1.15 & 1.75 & 2.25 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1.15 & 1.75 & 2.25 & 1.15 & 1.75 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-4.5) + 0 + 1.75 &= 2.75 \\ (-2.3) + 0 + 2.25 &= -0.05 \end{aligned}$$

$$|C| = -2.75 - (-0.05) = -2.7$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1385 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2238.75 & 1.75 & 2.25 \end{vmatrix}}{-2.7} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 1385 & 1 & 1 & 1385 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2238.75 & 1.75 & 2.25 & 2238.75 & 1.75 \end{vmatrix}}{-2.7}$$

$$\begin{aligned} -6232.5 + 0 + 0 &= -6232.5 \\ -4477.5 + 0 + 0 &= -4477.5 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-6232.5 - (-4477.5)}{-2.7} = \frac{-1755}{-2.7} = 650$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1385 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1.15 & 2238.75 & 2.25 \end{vmatrix}}{-2.7} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1385 & 1 & 1 & 1385 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1.15 & 2238.75 & 2.25 & 1.15 & 2238.75 \end{vmatrix}}{-2.7}$$

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 2238.75 &= 2238.75 \\ 0 + 0 + 3116.25 &= 3116.25 \end{aligned}$$

$$y = \frac{2238.75 - 3116.25}{-2.7} = \frac{-877.5}{-2.7} = 325$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1385 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1.15 & 1.75 & 2238.75 \end{vmatrix}}{-2.7} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1385 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1.15 & 1.75 & 2238.75 & 1.15 & 1.75 \end{vmatrix}}{-2.7}$$

$$\begin{aligned} -4477.5 + 0 + 2423.75 &= -2053.75 \\ -3185.5 + 0 + 2238.75 &= 2238.75 \end{aligned}$$

$$z = \frac{-2053.75 - 2238.75}{-2.7} = \frac{-1107}{-2.7} = 410$$

حجم العلب صغير: 650 ، وسط: 325 ، كبير: 410

$$\begin{aligned}
 &= \text{تكلفة الإنتاج في اليوم التالي} \quad (b) \\
 &= 1.25(650 - 140) + 1.75(325 + 125) + 2.25(410 + 35) \\
 &= 1.25(510) + 1.75(450) + 2.25(445) \\
 &= 637.5 + 787.5 + 1001.25 \\
 &= 2426.25
 \end{aligned}$$

(31) بستنة:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(-6) + (28) + (-6) = 16$$

$$24 + 3 + 14 = 41$$

$$16 - 41 = -25$$

$$A = \frac{1}{2}(-25) = -12.5$$

$$= |-12.5| = 12.5m^2$$

## مسائل مهارات التفكير العليا

(32) تحد:

أوجد قيمة محددة مصفوفة من النوع  $3 \times 3$  ، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{nm} = \begin{cases} 0 \\ m+n \end{cases}$$

إذا كان  $m+n$  زوجياً  
إذا كان  $m+n$  فردياً

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} (0)(0)(0) &= 0 \\ (3)(7)(0) &= 0 \\ (0)(5)(9) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0+0+0 &= 0 \\ 0-0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} (0)(0)(0) &= 0 \\ (9)(7)(0) &= 0 \\ (0)(5)(3) &= 0 \end{aligned}$$

$$0+0+0=0$$

(33) مسألة مفتوحة:

أعط مثلاً لمصفوفة من الرتبة  $2 \times 2$  تحقق الشرط المذكور في كل مما يأتي:  
(a) المحددة تساوي صفراً.

$$\left| \begin{array}{cc} 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{array} \right| = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 7 = 0 \quad \leftarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) المحددة تساوي 25.

$$\left| \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{array} \right| = 16 - (-9) = 16 + 9 = 25 \quad \leftarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) جميع العناصر أعداد سالبة و المحددة تساوي -32 .

$$\left| \begin{array}{cc} -4 & -6 \\ -8 & -4 \end{array} \right| = (-4)(-4) - (-8)(-6) = 16 - 48 = -32 \quad \leftarrow \quad \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

(34) أكتب: صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين إذا كانت محددة مصفوفة المعاملات تساوي صفراً.

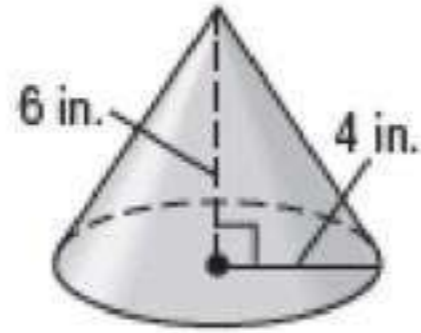
إذا كانت المحددة لمصفوفة المعاملات لنظام معطي  $2 \times 2$  تساوي 0 ، فلا يوجد حل وحيد للنظام .



يمكن ألا يكون للنظام حل ، ويكون المستقيمان في هذه الحالة متوازيين، أو يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول حيث يكون المستقيمان منطبقين.

### تدريب على اختيار

(35) إجابة قصيرة:



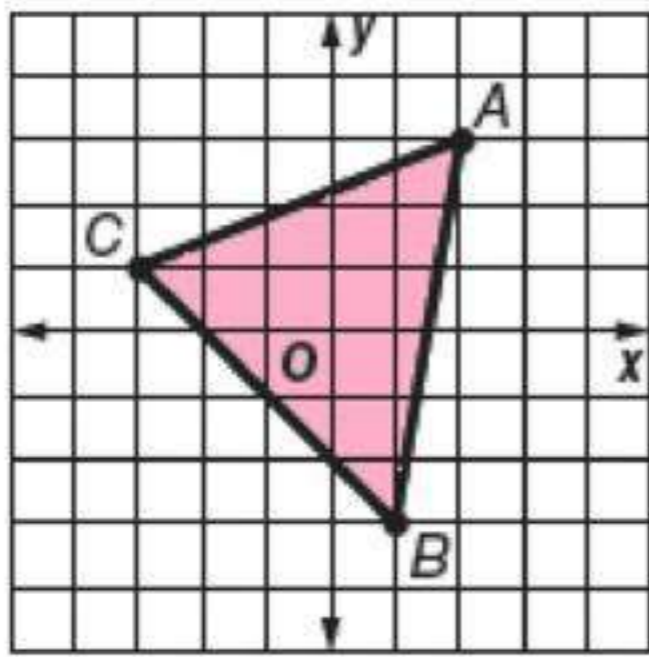
$$l = \sqrt{36 + 16}$$
$$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ in.}$$

المساحة الجانبية للمخروط =  $\pi(4)(2\sqrt{13})$

$$8\sqrt{13} \pi \text{ in}^2 =$$

(36) جد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.

$$A(2, 3) , B(1, -3) , C(-3, 1)$$



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(-6) + (-9) + (1) = -14$$

$$9 + 2 + 3 = 14$$

$$-14 - 14 = -28$$

$$A = \frac{1}{2}(-28) = -14$$

$$|A| = |-14|$$

$$= 14$$

**الإختيار الصحيح B**

## مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت مصفوفة الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا، و إذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$\text{معرفة ، } 4 \times 6 \quad \underline{A}_{4 \times 2} \cdot \underline{B}_{2 \times 6} \quad (37)$$

$$\text{غير معرفة} \quad \underline{C}_{5 \times 4} \cdot \underline{D}_{5 \times 3} \quad (38)$$

$$\text{معرفة ، } 2 \times 1 \quad \underline{E}_{2 \times 7} \cdot \underline{F}_{7 \times 1} \quad (39)$$

حل كل نظام مما يأتي:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -26 \\ 5x + 3y = -34 \end{cases} \quad (40)$$

$$|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-25) = 6 + 25 = 31$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -26 & -5 \\ -34 & 3 \end{vmatrix}}{31} = \frac{(-26)(3) - (-34)(-5)}{31} = \frac{-278}{31} = -8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -26 \\ 5 & -34 \end{vmatrix}}{31} = \frac{(2)(-34) - (5)(-26)}{31} = \frac{62}{31} = 2$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y + 6x = 10 \\ 2x - 7y = 22 \end{cases} \quad (41)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 8 = -50$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 22 & -7 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{-70 - 88}{-50} = \frac{79}{25}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 22 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{132 - 20}{-50} = \frac{112}{-50} = -\frac{56}{25}$$

$$x = \frac{79}{25}$$

$$y = -\frac{56}{25}$$

## النظير الضربي للمصفوفة و أنظمة المعادلات الخطية

تلقوا

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{X} \cdot \underline{Y} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{-1}{3} & \frac{-4}{6} + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} & \frac{-2}{6} + \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{-1}{3} & \frac{-4}{6} + \frac{4}{6} \\ \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} & \frac{-2}{6} + \frac{8}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} \underline{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{-2}{6} & \frac{-1}{3} + \frac{2}{6} \\ \frac{4}{3} + \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{6} + \frac{-2}{6} & \frac{-1}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} + \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن  $\underline{X} \cdot \underline{Y} = \underline{Y} \cdot \underline{X}$  ، فإن كلا من المصفوفتين  $\underline{X}$ ,  $\underline{Y}$  نظير ضربى للأخرى

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (2A)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 1(7) = -12 - 7 = -19 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \underline{D}^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-19} \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{-3}{19} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (2B)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \underline{Q}^{-1} &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 112.5 \\ 3x + 10y &= 157.5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{30 - 12} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3\left(\frac{5}{9}\right) + 3\left(\frac{-2}{9}\right) & 4\left(\frac{5}{9}\right) + 10\left(\frac{-2}{9}\right) \\ 3\left(\frac{-1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) & 4\left(\frac{-1}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{6}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.5\left(\frac{5}{9}\right) + 157.5\left(\frac{-2}{9}\right) \\ 112.5\left(\frac{-1}{6}\right) + 157.5\left(\frac{1}{6}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{55}{2} \\ \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{55}{2} \\ \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{55}{2} = 27.5$$

سعر الكتاب العلمي 27.5 ريالاً



حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيراً ضربياً للأخرى فيما يأتي:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+2 & 4+1 \\ -1+0 & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \neq \underline{I} \end{aligned}$$

الإجابة لا

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \underline{F} \cdot \underline{G} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0 & 1+(-1) \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{I} \end{aligned}$$

الإجابة نعم



أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(6)(0) - (-1)(-3)} \begin{bmatrix} 0 & -(-3) \\ -(-1) & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot -\frac{1}{3} & 3 \cdot -\frac{1}{3} \\ 1 \cdot -\frac{1}{3} & 6 \cdot -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-3)(-2) - (5)(0)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{6} & 0 \cdot -\frac{1}{6} \\ -5 \cdot -\frac{1}{6} & -3 \cdot -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(5) نقود:

نفرض ان  $x$  عدد النصف ريال ،  $y$  عدد الربع ريال

$$x + y = 25$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 8.5$$

$$[C] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{1} = 9$$

$$y = 1 \cdot \frac{16}{1} = 16$$

مع أحمد 16 ربعاً و 9 أنصاف

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

$$\begin{aligned} -2x + y &= 9 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -2x + y \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(-2)(1) - (1)(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 1 & -\frac{1}{3} \cdot (-1) \\ -\frac{1}{3} \cdot (-1) & -\frac{1}{3} \cdot (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 1 \\ 3 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 22 \\ 6x + 9y &= -3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 4x - 2y \\ 6x + 9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(4)(9) - (6)(-2)} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{48} \cdot 9 & \frac{1}{48} \cdot (2) \\ \frac{1}{48} \cdot (-6) & \frac{1}{48} \cdot (4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{16} + \frac{6}{24} & \frac{-6}{16} + \frac{9}{24} \\ -\frac{4}{8} + \frac{6}{12} & \frac{2}{8} + \frac{9}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x + y &= -4 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -2x + y \\ 3x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-2)(1) - (3)(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} + \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= 1 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

## تدرب وحل المسائل

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيراً ضربياً للأخرى فيما يأتي:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{K} \cdot \underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4 & 1-2 \\ 0+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq \underline{I}$$

لا تمثل نظيراً ضربياً

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{M} \cdot \underline{N} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 4+0 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N} \cdot \underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4 & 2+5 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لا تمثل نظيراً ضربياً

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{R} \cdot \underline{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+(-\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}+(-2) & 1+(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \neq \underline{I}$$

لا تمثل نظيراً ضربياً

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

$$\underline{P}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(3)(2) - (0)(0)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(2)(2) - (3)(3)} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(15)

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 16 = 6$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \\ -\frac{4}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$



(16) مشتريات:

$$5x + 6y = 250$$

$$3x + 3y = 120$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 18 = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 250 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 + 6 & -6 + 6 \\ 5 - 5 & 6 - 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250 + 240 \\ 250 - 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$x = -10, \quad y = 50$$

(17) سكان:

$$\begin{matrix} \text{المدينة} & \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \\ \text{الضواحي} & \end{matrix}$$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام إن أمكن فيما يأتي:

$$\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ -x + y &= -4 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -x + y \\ -x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(-1)(1) - (-1)(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ليس لها حل

$$\begin{aligned} -x + y &= 3 \\ -2x + y &= 6 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -x+y \\ -2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(-1)(1) - (-2)(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\ -4x + y &= 9\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} x + y \\ -4x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{(1)(1) - (-4)(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5} & \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5} & \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} - \frac{9}{5} \\ \frac{16}{5} + \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}x &= -1 \\ y &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ 5x + 3y &= 6 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{9-5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} y - x &= 5 \\ 2y - 2x &= 8 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} -x + y &= 5 \\ -2x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -x + y \\ -2x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-2+2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{0} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ليس لها حل

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 6 \\ 6x - 3y &= 9 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-12-12} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{3}{2}, y = 0$$

$$\begin{aligned} 1.6y - 0.2x &= 1 \\ 0.4y - 0.1x &= 0.5 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 1.6 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(-0.2)(0.4) - (-0.1)(1.6)} \begin{bmatrix} 0.4 & -1.6 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.08} \begin{bmatrix} 0.4 & -1.6 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0.4}{0.08} & \frac{-1.6}{0.08} \\ \frac{0.1}{0.08} & \frac{-0.2}{0.08} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -20 \\ 1.25 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -20 \\ 1.25 & -2.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.2 & 1.6 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -20 \\ 1.25 & -2.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1+2 & 8-8 \\ -0.25+0.25 & 2-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-10 \\ 1.25-1.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = -5, \quad y = 0$$

$$\begin{aligned} 4y - x &= -2 \\ 3y - x &= 6 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-3 - (-4)} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$x = -30, \quad y = -8$$

$$\begin{aligned} 2y - 4x &= 3 \\ 4x - 3y &= -6 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(-4)(-3) - (4)(2)} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 3 \end{bmatrix} \quad x = \frac{3}{4}, \quad y = 3$$

### مسائل مهارات التفكير العليا

(27) أكتشف الخطأ:

**هاجر؛** لقد وضعت فاطمة 3 للمتغير  $x$  بدلاً من 4.

(28) تحد: صف المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين بمتغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

النظام يجب أن يحتوي على معادلتين إحداهما هي حاصل ضرب عدد في المعادلة الأخرى.

(29) تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً، وفسر إجابتك. "المصفوفة المربعة ليس لها حل" **أحياناً؛** يكون لمصفوفة مربعة نظير ضربي إذا كام محدها لا يساوي صفر.

(30) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$



- 31) أكتب: كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات.  
 أولاً: رتب كل المعاملات للنظام في مصفوفة معاملات  
 ثانياً: رتب المتغيرات في مصفوفة متغيرات.  
 ثالثاً: رتب الثوابت في مصفوفة ثوابت.  
 رابعاً: جد معكوس مصفوفة المعاملات.  
 خامساً: اضرب طرفي المعادلة المصفوفية في معكوس المصفوفة.  
 سادساً: تحقق من الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية.

### تدريب على اختيار

(32)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 52 \\y &= x + 7 \\x + 1.5y + 2z &= 75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + (x + 7) + z &= 52 && \rightarrow 2x + z = 45 \\x + 1.5(x + 7) + 2z &= 75 && \rightarrow 2.5x + 2z = 64.5\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2.5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 64.5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{4 - 2.5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2.5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2.5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ 64.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$y = x + 7 = 17 + 7 = 24$$

$$x = 17, y = 24, z = 11$$

الجواب الصحيح (C) عدد الدفاتر المباعة من الحجم المتوسط 24

## مراجعة تراكمية

جد قيمة كل محددة فيما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = (8)(-9) - (6)(-3) = -72 - (-18) = -54$$

$$\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = (9)(-3) - (-5)(-7) = -27 - 35 = -62$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 & 8 & 6 \\ -4 & 5 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & -2 & 9 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(8)(5)(9) = 360$$

$$(6)(1)(-3) = -18$$

$$(-1)(-4)(-2) = -8$$

$$360 + (-18) + -8 = 334$$

$$(-3)(5)(-1) = 15$$

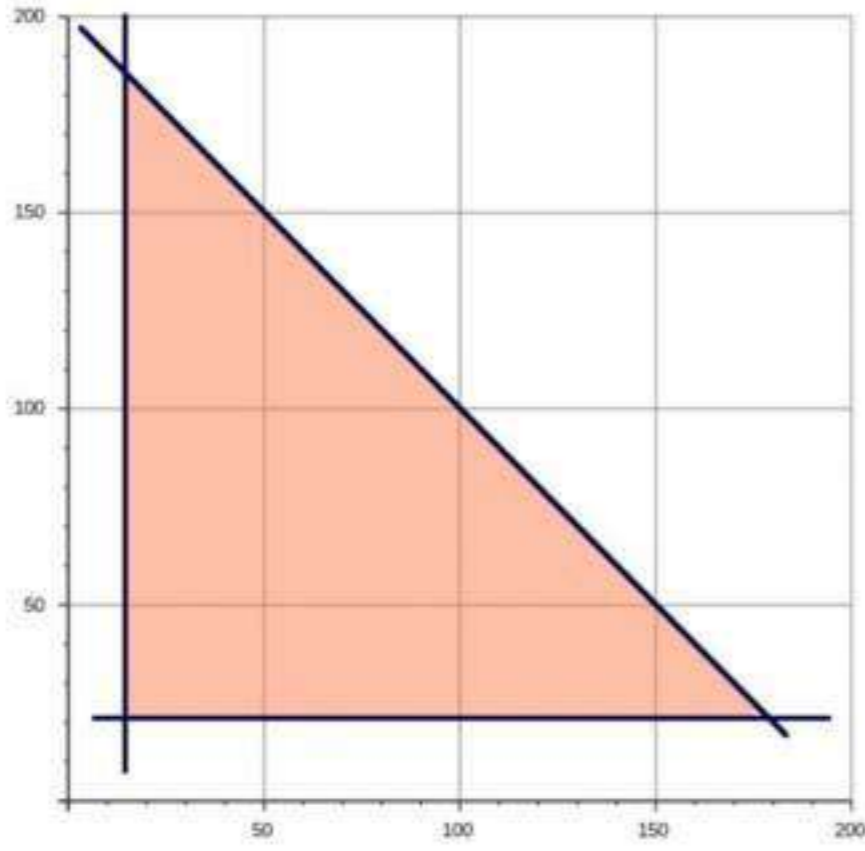
$$(-2)(1)(8) = -16$$

$$(9)(-4)(6) = -216$$

$$15 + (-16) + (-216) = -217$$

$$334 - (-217) = 551$$

(36) حليب:



$$x + y \leq 200$$

$$x \geq 15$$

$$y \geq 21$$

$$P = 8.2x + 7.5y$$

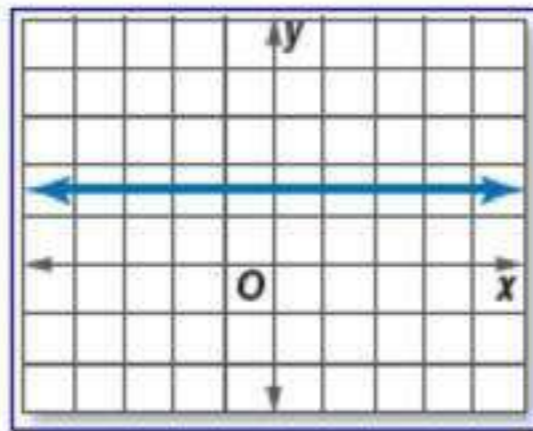
179 جالوناً من الحليب المبستر

21 جالوناً من الحليب الطازج

$(x, y)$	$8.2x + 7.5y$	$f(x, y)$
(15, 189)	$8.2(15) + 7.5(189)$	1540.5
(15, 21)	$8.2(15) + 7.5(21)$	280.5
(179, 21)	$8.2(179) + 7.5(21)$	1625.3

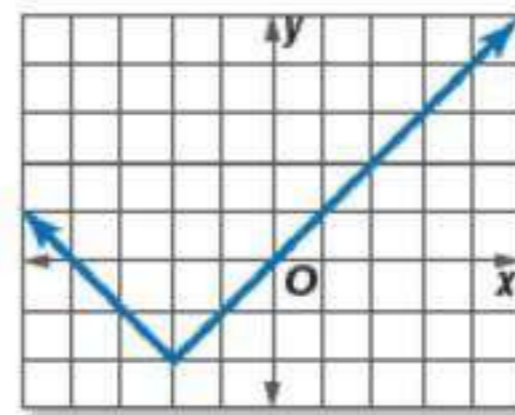
حدد نوع الدالة الممثلة بيانياً في كل مما يأتي:

(39)



(38)

دالة قيمة مطلقة ثابتة



معمل الحاسبة البيانية **توسع**  
**2-5** المصفوفات الموسعة



أكتب مصفوفة موسعة لكل نظام معادلات فيما يأتي ، ثم حله باستخدام الحاسبة البيانية:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -4 \\ 4x + 7y &= 13 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 7 & 13 \end{array} \right]; \left( -\frac{54}{13}, \frac{55}{13} \right)$$

$$\begin{aligned} 4x - 6y &= 0 \\ 8x - 2y &= 7 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 0 \\ 8 & -2 & 7 \end{array} \right]; \left( \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= -4 \\ 2x - 2y + 6z &= 10 \\ 2x + 2y + 2z &= -2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right]; (-2, -1, 2)$$

## اختبر مفرداتك:

اختر الكلمة المناسبة من المفردات أعلاه لتكمل كل جملة فيما يأتي:

- (1) المصفوفة.
- (2) الضرب في عدد ثابت
- (3) مصفوفة الثوابت
- (4) عنصراً
- (5) رتبة
- (6) مصفوفة الوحدة
- (7) المصفوفة الصفرية
- (8) محددة
- (9) نظيراً ضربياً

# مراجعة الدروس

## 2-1 مقدمة في المصفوفات

(10) ناد رياضي:

(a) نظم بيانات الجدول في المصفوفة  $A$

$$\begin{bmatrix} 64 & 108 & 31 \\ 42 & 9 & 68 \end{bmatrix}$$

(b) ما رتبة المصفوفة

$$2 \times 3$$

(c) ما قيمة العنصر  $a_{23}$  ؟

$$68$$

(d) ما قيمة العنصر  $a_{11}$  ؟

$$64$$

(e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول و الثاني، و فسر النتائج.

$$\begin{bmatrix} 203 \\ 119 \end{bmatrix}$$

تمثل إجمالي المشتركين في جميع الرياضات شهرياً و سنوياً.

## 2-2 العمليات على المصفوفات

جد الناتج في كل مما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \leftarrow 3 \left( \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \right) \quad (12)$$

جد ناتج كل مما يأتي ، إذا كان ذلك ممكناً:

$$[62] \leftarrow [3 \ -7] \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (13)$$

غير ممكن  $\leftarrow [2 \ 11] \cdot [0 \ 8 \ -5] \quad (14)$

(15) مشتريات:  
إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [15 \ 10 \ 3 \ 25] = [114]$$

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 28 = -34 \quad \leftarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$24 + (-24) + 0 = 0$$

$$(4) + (40) + (0) = 44$$

$$0 - 44 = -44$$



استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ 5x + 2y &= 22 \end{aligned} \quad (18)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-5) = 11$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 22 & 2 \end{vmatrix}}{11} = \frac{22}{11} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 22 \end{vmatrix}}{11} = \frac{66}{11} = 6$$

$$x = 2$$

$$y = 6$$

$$\begin{aligned}
 5x + 2y &= 4 \\
 3x + 4y + 2z &= 6 \\
 7x + 3y + 4z &= 29
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(5)(4)(4) = 80$$

$$(2)(2)(7) = 28$$

$$(0)(3)(3) = 0$$

$$(7)(4)(0) = 0$$

$$(3)(2)(5) = 30$$

$$(4)(3)(2) = 24$$

$$80 + 28 + 0 = 108$$

$$0 + 30 + 24 = 54$$

$$108 - 54 = 54$$

$$x = \frac{\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{2} & \\ \hline 6 & 4 & 2 & 6 & 4 & \\ \hline \cancel{29} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{29} & \cancel{3} & \\ \hline \end{array}}{54}$$

$$= \frac{\{(64 + 116 + 0) - (0 + 24 + 48)\}}{54} = \frac{180 - 72}{54}$$

$$x = \frac{108}{54} = 2$$

$$y = \frac{\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{4} & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & \\ \hline \cancel{7} & \cancel{29} & \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{29} & \\ \hline \end{array}}{54}$$

$$= \frac{\{(120 + 56 + 0) - (0 + 290 + 48)\}}{54} = \frac{176 - 338}{54}$$

$$y = \frac{-162}{54} = -3$$

$$z = \frac{\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline \cancel{5} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{2} & \\ \hline 3 & 4 & 6 & 3 & 4 & \\ \hline \cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{29} & \cancel{7} & \cancel{3} & \\ \hline \end{array}}{54}$$

$$= \frac{\{(580 + 84 + 36) - (112 + 90 + 174)\}}{54} = \frac{700 - 376}{54}$$

$$z = \frac{324}{54} = 6$$

**(2, -3, 6)**

(20) حرف يدوية:

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 85 \\2x + 4y &= 110\end{aligned}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 85 & 2 \\ 110 & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{(85)(4) - (110)(2)}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 85 \\ 2 & 110 \end{vmatrix}}{8} = \frac{(3)(110) - (2)(85)}{8} = \frac{160}{8} = 20$$

العقد 20 ريالاً و السوار 15 ريالاً

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

2-5

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(7)(2) - (3)(4)} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{vmatrix} = (2)(-13) - (-5)(5) = -1$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -13 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 24 - (24) = 0$$

لا يوجد نظير ضربي.

حل المعادلة المصفوفية في كل مما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$x = 8$$

$$y = -12$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{(3)(2) - (1)(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

## الفصل 2 اختبار الفصل

إذا كانت:  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$  فحدد قيمة كل عنصر مما يأتي:

$$a_{22} = 1 \quad (1)$$

$$a_{31} = 8 \quad (2)$$

أوجد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً:

$$-3 \begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -12a \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12-8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -28 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot -2 \\ -3 \cdot 3 + 5 \cdot -2 \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -19 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

غير ممكن

(7) مبيعات:

(a) نظم البيانات في مصفوفتين، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية

$$\begin{bmatrix} 20 & 32 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 130 \end{bmatrix} = [2000 + 2880 + 1820] \\ = [6700] \\ = 6700$$

(b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

$$\begin{bmatrix} 20 & 32 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 110 \\ 150 \end{bmatrix} = [(20 \cdot 120) + (32 \cdot 110) + (14 \cdot 150)] \\ = [2400 + 3520 + 2100] = [8020] \\ = 8020$$

(c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة.

$$8020 - 6700 = 1320$$

ربح المكتبة = 1320 ريالاً



(8) إذا كان  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  فأوجد ناتج  $\underline{AB} - \underline{AC}$

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -21 + 40 & 15 + (-32) \\ 21 + (-20) & -15 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -17 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AC} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 + 16 & 21 + 0 \\ 12 + (-8) & -21 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 21 \\ 4 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} - \underline{AC} = \begin{bmatrix} 19 & -17 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 21 \\ 4 & -21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -38 \\ -3 & 22 \end{bmatrix}$$

(9) استعمل المحددات لإيجاد مساحة  $\Delta XYZ$  الذي رؤوسه

$$x(1, 2), y(3, 6), z(-1, 4)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (6 + (-2) + (12)) - (-6 + 4 + 6 = 4) \}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

المساحة = 6 وحدات مربعة

(10) اختيار من متعدد:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & -2 & 5 \end{array} \right|$$

$$24 + (-24) + 0 = 0$$

$$4 + 40 + 0 = 44$$

$$0 - 44 = -44$$

الإختيار الصحيح (A) -44

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

لا يوجد

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{0} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

**لا يوجد**  $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{0} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

استعمل معادلة مصفوفيه لحل نظام المعادلتين الآتي:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 9 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned} \quad (15)$$

$$|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

$$\begin{aligned}
 x - y + 2z &= 0 \\
 3x + z &= 11 \\
 -x + 2y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\underline{C} = \left| \begin{array}{ccc|cc}
 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
 -1 & 2 & 0 & -1 & 2
 \end{array} \right|$$

$$0 + 1 + 12 = 13$$

$$0 + 2 + 0 = 2$$

$$13 - 2 = 11$$

$$x = \frac{\left| \begin{array}{ccc|cc}
 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\
 11 & 0 & 1 & 11 & 0 \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 2
 \end{array} \right|}{11} = \frac{\{(0 + 0 + 44) - (0 + 0 + 0)\}}{11}$$

$$x = \frac{44}{11} = 4$$

$$y = \frac{\left| \begin{array}{ccc|cc}
 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
 3 & 11 & 1 & 3 & 11 \\
 -1 & 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \right|}{11} = \frac{-22}{11} = -2$$

$$z = \frac{\left| \begin{array}{ccc|cc}
 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
 3 & 0 & 11 & 3 & 0 \\
 -1 & 2 & 0 & -1 & 2
 \end{array} \right|}{11} = \frac{11 - 22}{11} = \frac{-11}{11} = -1$$

$$x = 4$$

$$y = 2$$

$$z = -1$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 2 \\ 3x + 4y - 8z &= -3 \\ -3x - 6y + 12z &= 5 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} |C| &= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & | & 6 & 2 \\ 3 & 4 & -8 & | & 3 & 4 \\ -3 & -6 & 12 & | & -3 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \{(288 + 48 + (-72)) - (-48 + 288 + 72)\} = 264 - 312 = -48 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 2 & 2 \\ -3 & 4 & -8 & | & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 12 & | & 5 & -6 \end{vmatrix}}{-48} = \frac{(96 + (-80) + 72) - (80 + 96 + (-72))}{-48}$$

$$x = \frac{88 - 104}{-48} = \frac{-16}{-48} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 & | & 6 & 2 \\ 3 & -3 & -8 & | & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 12 & | & -3 & 5 \end{vmatrix}}{-48} = \frac{(-216 + 48 + 60) - (36 + (-240) + 72)}{-48}$$

$$y = \frac{-108 - (-132)}{-48} = \frac{24}{-48} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 6 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & | & 3 & 4 \\ -3 & -6 & 5 & | & -3 & -6 \end{vmatrix}}{-48} = \frac{(120 + 18 + (-36)) - (-24 + 108 + 30)}{-48}$$

$$z = \frac{102 - 114}{-48} = \frac{-12}{-48} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{3} \quad , \quad y = -\frac{1}{2} \quad , \quad z = \frac{1}{4}$$

## الإعداد للاختبارات المعيارية

### تمارين ومسائل

			8-
.	.	.	.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

(1) أوجد محددة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 20 \end{vmatrix} = (-1)(20) - (-3)(4) \\ = -20 + 12 = -8$$

	2	3	4
.	.	.	.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

(2) أوجد محددة المصفوفة

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ -5 & -7 & -1 & -5 & -7 \\ 4 & -8 & 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 134 - (-100) = 234$$

الفصل  
اختبار تراكمي  
للفصلين 1 - 2

2

اختيار من متعدد

(1) إذا كانت  $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  فما قيمة  $2\underline{A} + 3\underline{B}$  ؟

$$2\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad 3\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2\underline{A} + 3\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 15 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

الإختيار الصحيح (D)

(2) جد ناتج  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$  إذا كان ممكناً.

الإختيار الصحيح (B)  $[(3)(2) + (1)(5)] = [11]$

(3) في أي من الدوال الآتية يكون  $f\left(\frac{-1}{3}\right) \neq 0$  ؟

الإختيار الصحيح (C)

4) النقاط  $D(-6,2)$ ,  $E(3,5)$ ,  $F(8,-7)$  هي رؤوس  $\triangle DEF$  أحسب مساحة هذا المثلث

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (-35 - 88)$$

$$A = \frac{-123}{2} = 61.5$$

الإختيار الصحيح (D)

5) ما النظام الذي تمثله حل المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟

الإختيار الصحيح (A)

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \text{ (6) ما رتبة المصفوفة}$$

الإختيار الصحيح (A)  $4 \times 2$

7) أي من الدوال الآتية يكون مداها :  $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

الإختيار الصحيح (B)  $f(x) = |-x + 1|$



## إجابة قصيرة

(8) هل يوجد للمصفوفة  $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$  نظير ضربى؟ فسر إجابتك.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$$

لا؛ لأن محدة المصفوفة تساوي صفر.

(9) احسب قيمة محدة المصفوفة  $W = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|W| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$$

## إجابة مطولة

(10) أجب عن كل مما يأتي موضعا خطوات الحل :



نحل بيانيا المتباينات

من الرسم البياني نقسم المنطقة المظللة

التي تمثل الحل الى جزئين

الجزء الأول مربع طول ضلعه

شبه المنحرف قاعدتيه 16 , 12 و ارتفاعه 4

$$\text{مساحة الشكل} = 16^2 + \left( \frac{12 + 16}{2} \right) \times 4 =$$

$$256 + 56 =$$

$$312 =$$

312 قدم مربع

مساحة الشكل =

(11) نقود:

$$\begin{aligned} d + q &= 14 \\ d + 0.5q &= 10.5 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10.5 \end{bmatrix} \quad (b)$$

(c)

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.5 - 1 = -0.5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 10.5 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.5} = \frac{(14)(0.5) - (10.5)(1)}{-0.5} = 7$$

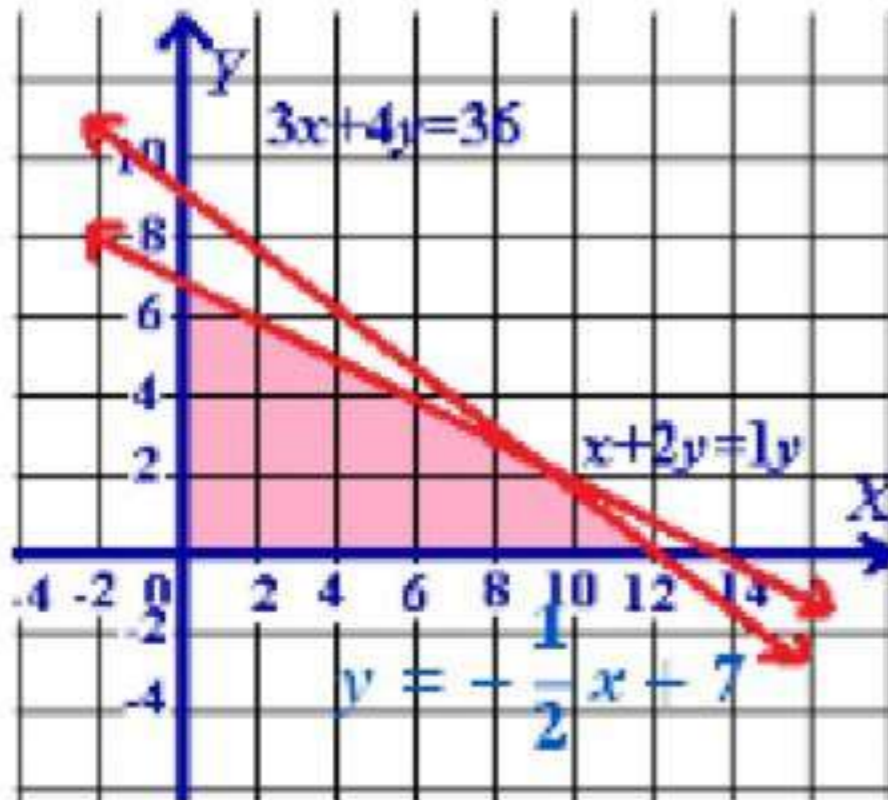
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 10.5 \end{vmatrix}}{-0.5} = \frac{10.5 - 14}{-0.5} = 7$$

$$\begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

(12)

الرؤوس هي

$$(0,0) \text{ @ } (0,7) \text{ @ } (12,0) \text{ @ } (8,3)$$



$(x, y)$	$8x+12y$	$f(x, y)$
$(0,0)$	$8(0)+12(0)$	0
$(0,7)$	$8(0)+12(7)$	84
$(12,0)$	$8(12)+12(0)$	96
$(8,3)$	$8(8)+12(3)$	100

القيمة العظمى = 100

(13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، و متى لا يمكن ضربهما، و اعط مثالاً على ذلك

إذا كانت رتبة المصفوفة  $A$  هي  $m \times n$ ، و رتبة المصفوفة  $B$  هي  $c \times d$ ، فإن  $AB$  موجودة إذا و فقط إذا كان  $n = c$ .

## كثيرات الحدود ودوالها

## Polynomials and Polynomial Functions


## فيما سبق:

درست تمثيل الدوال التربيعية بيانياً، وحل المعادلات التربيعية.

## والآن:

- أتعرف الأعداد المركبة، وأجري العمليات عليها.
- أحل معادلات تربيعية.
- أجمع كثيرات الحدود وأطرحها وأضربها وأقسمها.
- أحل دوال كثيرات الحدود.
- أصف التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود، وأحل معادلات كثيرات الحدود.
- أجد عوامل دوال كثيرات الحدود وأصفاها.
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.

## لماذا؟

 **مواصلات:** يمكن استعمال دوال كثيرات الحدود لتحديد جداول انطلاق الحافلات، والطاقة الاستيعابية للطرق السريعة، والأنماط المرورية، ومتوسط تكاليف الوقود. وأسعار كل من السيارات الجديدة والمستعملة.

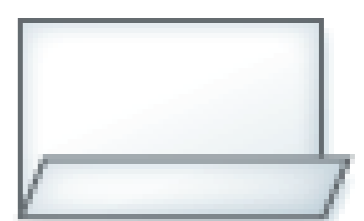
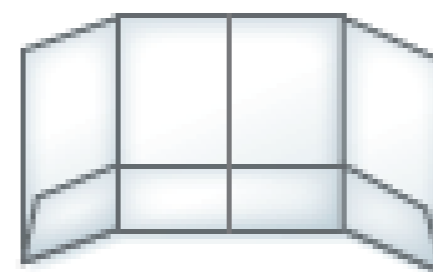
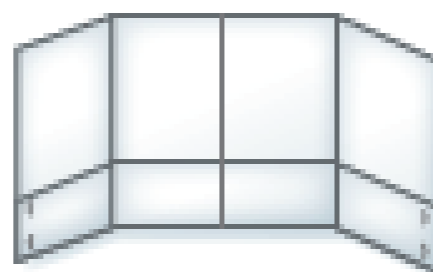


## منظم أفكار

## المستويات

كثيرات الحدود ودوالها، اعمل المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود ودوالها، ابدأ بورقة A4.

- 1 اثن الورقة بعرض 5cm بصورة موازية للضلع الأطول.
- 2 اثن الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.
- 3 هبّت الحافتين الطرفيتين للشئيه كما يظهر في الشكل أدناه.
- 4 هنون الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.



# التهيئة

أعد كتابة كل من العبارات الآتية على صورة جمع:

$$(1) \quad -5 + (-13) = -5 - 13$$

$$(2) \quad 5 + (-3y) = 5 - 3y$$

$$(3) \quad 5mr + (-7mp) = 5mr - 7mp$$

$$(4) \quad 3x^2y + (-14xy^2) = 3x^2y - 14xy^2$$

(5) محاضرات:

$$20 + (-2x)$$

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس:

$$(6) \quad -4a - 20 = 14(a + 5)$$

$$(7) \quad -3b^2 - 2b + 1 = -1(3b^2 + 2b - 1)$$

$$(8) \quad -m + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(2m - 5)$$

$$(9) \quad -\frac{9}{4}z - \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}(3z + 5)$$

(10) هدايا:

$$15(8 + 18)$$

$$390 = 15 \times 8 + 15 \times 18 \text{ ريال}$$

حل كل معادلة فيما يأتي:

(11)

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$-4 = x$$

$$2 = x$$

$$(12) \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$3 = x$$

$$2 = x$$

$$x^2 - x - 20 = 0 \quad (13)$$
$$(x - 5)(x + 4) = 0$$
$$5 = x$$
$$-4 = x$$

$$x^2 - x = 0 \quad (14)$$
$$x(x - 1) = 0$$
$$0 = x$$
$$1 = x$$

(15) فيزياء

$$h = -16t^2 + 50$$
$$0 = -16t^2 + 50$$
$$50 = 16t^2$$
$$\sqrt{\frac{50}{16}} = t$$
$$1.77 \approx t$$

الأعداد المركبة  
Complex Numbers

3-1

تلقوا

$$3i\sqrt{2} = \sqrt{-9 \times 2} = \sqrt{-18} \quad (1A)$$

$$5i\sqrt{5} = \sqrt{-25 \times 5} = \sqrt{-125} \quad (1B)$$

$$-12 = 3i \cdot 4i \quad (2A)$$

$$-4\sqrt{15} = \sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12} \quad (2B)$$

$$-i = i^{31} \quad (2C)$$

$$4x^2 = -100 \quad (3A)$$

$$x^2 = -25$$

$$x = \sqrt{-25}$$

$$x = \pm 5i$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad (3B)$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm 2i$$

الجزء التخيلي  $3 + 2y = y - 6$

ب طرح  $y$  من الطرفين  $3 + y = -6$

ب طرح  $3$  من الطرفين  $y = -9$

الجزء الحقيقي  $5x + 1 = 2x - 2 \quad (4)$

ب طرح  $2x$  من الطرفين  $3x + 1 = -2$

ب طرح  $1$  من الطرفين  $3x = -3$

قسمة الطرفين على  $3$   $x = -1$

$$\begin{aligned} &(-2+5i)+(1-7i) \quad (5A) \\ &-2+5i+1-7i= \\ &-1-2i= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(4+6i)-(-1+2i) \quad (5B) \\ &4+6i+1-2i= \\ &5+4i= \end{aligned}$$

كهرباء:

$$V = C \cdot I \quad (6) \quad \text{الصيغة الرياضية}$$

$$C = 2 - 4i \quad @ I = 3 - 2i$$

$$V = (2 - 4i)(3 - 2i)$$

$$V = 6 - 4i - 12i + 8i^2$$

$$V = -2 - 16i$$

باستخدام طريقة التوزيع بالضرب  
بالجمع،  $i^2 = -1$

$$\text{فرق الجهد} = -2 - 16i$$

$$\begin{aligned} &\frac{-2i}{3+5i} \quad (7A) \\ &\frac{-2i}{3+5i} = \frac{-2i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} \end{aligned}$$

مترافقان مركبان  $3-5i$ ،  $3+5i$

$$\frac{-2i}{3+5i} = \frac{-6i+10i^2}{9-25i^2}$$

بالضرب

$$\frac{-2i}{3+5i} = \frac{-6i-10}{9+25} = \frac{2(-3i-5)}{34} = \frac{(-3i-5)}{17}$$

بالتبسيط  $i^2 = -1$

$$\frac{-2i}{3+5i} = \frac{-3}{17}i + \frac{-5}{17}$$

كتابة الناتج على الصورة  $a + bi$

$$\frac{2+i}{1-i} \quad (7B)$$

مترافقان مركبان  $1+i$ ،  $1-i$

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

بالضرب

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2}$$

$$i^2 = -1 \text{ بالتبسيط}$$

كتابة الناتج على الصورة  $a + bi$

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{1+3i}{2}$$

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}i$$



أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$9i = \sqrt{-81} \quad (1)$$

$$4i\sqrt{2} = \sqrt{-32} \quad (2)$$

$$12 = -12i^2 = (4i)(-3i) \quad (3)$$

$$3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18} \quad (4)$$

$$6\sqrt{-6} \cdot 6\sqrt{-2} =$$

$$36i^2\sqrt{12} =$$

$$-72\sqrt{3} =$$

$$1 = i^{40} \quad (5)$$

$$-1 = i^{63} \quad (6)$$

حل كل معادلة مما يأتي

$$4x^2 + 32 = 0 \quad (7)$$

$$4x^2 = -32$$

$$x^2 = -8$$

$$x = \sqrt{-8}$$

$$x = \pm 2i\sqrt{2}$$

$$2x^2 + 24 = 0 \quad (8)$$

$$2x^2 = -24$$

$$x^2 = -12$$

$$x = \sqrt{-12}$$

$$x = \pm 2i\sqrt{3}$$



في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي  $a, b$  الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة:

$$3a + (4b + 2)i = 9 - 6i \quad (9)$$

$$4b + 2 = -6$$

$$4b = -8$$

$$b = -2$$

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

$$4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i \quad (10)$$

$$-a - 3 = -8$$

$$a + 3 = 8$$

$$a = 5$$

$$4b - 5 = 7$$

$$4b = 12$$

$$b = 3$$

بسّط كلا مما يأتي

$$(-1 + 5i) + (-2 - 3i) \quad (11)$$

$$-1 + 5i - 2 - 3i =$$

$$-3 + 2i =$$

$$(7 + 4i) - (1 + 2i) \quad (12)$$

$$7 + 4i - 1 - 2i =$$

$$6 + 2i =$$

$$(6 - 8i)(9 + 2i) \quad (13)$$

$$54 + 12i - 72i - 16i^2 =$$

$$70 - 60i =$$

$$(3 + 2i)(-2 + 4i) \quad (14)$$

$$-6 + 12i - 4i + 8i^2 =$$

$$-14 + 8i =$$

$$\frac{3 - i}{4 + 2i} \quad (15)$$

$$\frac{3 - i}{4 + 2i} \cdot \frac{4 - 2i}{4 - 2i} =$$

$$\frac{12 - 6i - 4i + 2i^2}{16 - 4i^2} =$$

$$\frac{1-i}{2} = \frac{10(1-i)}{20} = \frac{10-10i}{20}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i =$$

$$\frac{2+i}{5+6i} \quad (16)$$

$$\frac{2+i}{5+6i} \cdot \frac{5-6i}{5-6i} =$$

$$\frac{10-12i+5i-6i^2}{25-36i^2} =$$

$$\frac{16-7i}{61} =$$

$$\frac{16}{61} - \frac{7}{61}i =$$

(17) كهرباء:  
شدة التيار الكلية =  $5 - 3i + 7 + 9i =$   
 $12 + 6i =$  أمبير

### تدرب وحل المسائل

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$11i = \sqrt{-121} \quad (18)$$

$$13i = \sqrt{-169} \quad (19)$$

$$10i = \sqrt{-100} \quad (20)$$

$$9i = \sqrt{-81} \quad (21)$$

$$-42i = (-3i)(-7i)(2i) \quad (22)$$

$$-144i = 4i \times 36i^2 = 4i(-6i)^2 \quad (23)$$

$$-i = i^{11} \quad (24)$$

$$i = i^{25} \quad (25)$$

$$\sqrt{-10} \square \sqrt{-24} \quad (26)$$

$$i\sqrt{10} - 2i\sqrt{6}$$
$$2i^2\sqrt{60} = 4i^2\sqrt{15}$$

(27)

$$4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$$

$$4i\left(\frac{1}{4}i^2\right)(4i^2)$$

$$i^3 \times 4i^2$$

$$4i^5$$

حل كل معادلة مما يأتي

$$4x^2 + 4 = 0 \quad (28)$$

$$4x^2 = -4$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$3x^2 + 48 = 0 \quad (29)$$

$$3x^2 = -48$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \pm 4i$$

$$2x^2 + 10 = 0 \quad (30)$$

$$2x^2 = -10$$

$$x^2 = -5$$

$$x = \pm i\sqrt{5}$$

$$6x^2 + 108 = 0 \quad (31)$$

$$6x^2 = -108$$

$$x^2 = -18$$

$$x = \pm 3i\sqrt{2}$$

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي  $x$  ،  $y$  الحقيقتين اللتين تجعلانها صحيحة:

$$x+1+2yi=3-6i \quad (32)$$

$$\begin{aligned} 2y &= -6 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+1 &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$2x+7+(3-y)i=-4+6i \quad (39)$$

$$\begin{aligned} 3-y &= 6 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+7 &= -4 \\ 2x &= -11 \\ x &= -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$5+y+(3x-7)i=9-3i \quad (40)$$

$$\begin{aligned} 3x-7 &= -3 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5+y &= 9 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$(2x-4y)i+x+5y=15+58i \quad (41)$$

$$2x-4y=58$$

$$\begin{aligned} x+5y &= 15 \\ 2x-4y &= 58 \\ 2x+10y &= 30 \\ \hline -14y &= 28 \\ y &= -2 \\ x+5(-2) &= 15 \\ x-10 &= 15 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

بسط كلا مما يأتي

$$-4\sqrt{15} = \sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24} \quad (42)$$

$$4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2 (-2i)^2 \quad (43)$$

$$4i \cdot \frac{1}{4}i^2 \cdot 4i^2 =$$

$$4i = 4i^5 =$$

$$i = i^{41} \quad (44)$$

$$(4 - 6i) + (4 + 6i) \quad (45)$$

$$8 = 4 - 6i + 4 + 6i =$$

$$(8 - 5i) - (7 + i) \quad (46)$$

$$1 - 6i = 8 - 5i - 7 - i =$$

$$(-6 - i)(3 - 3i) \quad (47)$$

$$-21 + 15i = -18 + 18i - 3i + 3i^2 =$$

$$(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i) \quad (48)$$

$$(1 + i)(8 - 6i + 12i - 9i^2) =$$

$$(1 + i)(17 + 6i) =$$

$$11 + 23i = 17 + 6i + 17i + 6i^2 =$$

$$\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}} \quad (49)$$

$$\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}} \cdot \frac{4 - i\sqrt{2}}{4 - i\sqrt{2}} =$$

$$\frac{16 - 8i\sqrt{2} + 2i^2}{16 - 2i^2} =$$

$$\frac{14 - 8i\sqrt{2}}{18} =$$

$$\frac{7}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9}i =$$

$$\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} \quad (50)$$

$$\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} \cdot \frac{2 - i\sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}} =$$

$$\frac{4 - 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 3i^2}{4 - 3i^2} =$$

$$\frac{1 - 4i\sqrt{3}}{7} =$$

$$\frac{1}{7} - \frac{4\sqrt{3}}{7}i =$$

(51) كهرباء:

$$(13 - 4i) + (7 + 8i) = \text{المعاوقة الكلية}$$

$$20 + 4i = 13 - 4i + 7 + 8i =$$

كهرباء:

$$(3 + 6i)(5 - i) \quad (52) \text{ فرق الجهد}$$

$$15 - 3i + 30i - 6i^2 =$$

$$21 + 27i = \text{فولت}$$

$$\frac{(20 - 12i)}{(6 - 4i)}$$

$$(53) \text{ شدة التيار} =$$

$$\frac{20 - 12i}{6 - 4i} \cdot \frac{6 + 4i}{6 + 4i} =$$

$$\frac{120 + 80i - 72i - 48i^2}{36 - 16i^2} =$$

$$\frac{168 + 8i}{52} =$$

$$\frac{42}{13} + \frac{2}{13}i =$$

أوجد ناتج جمع

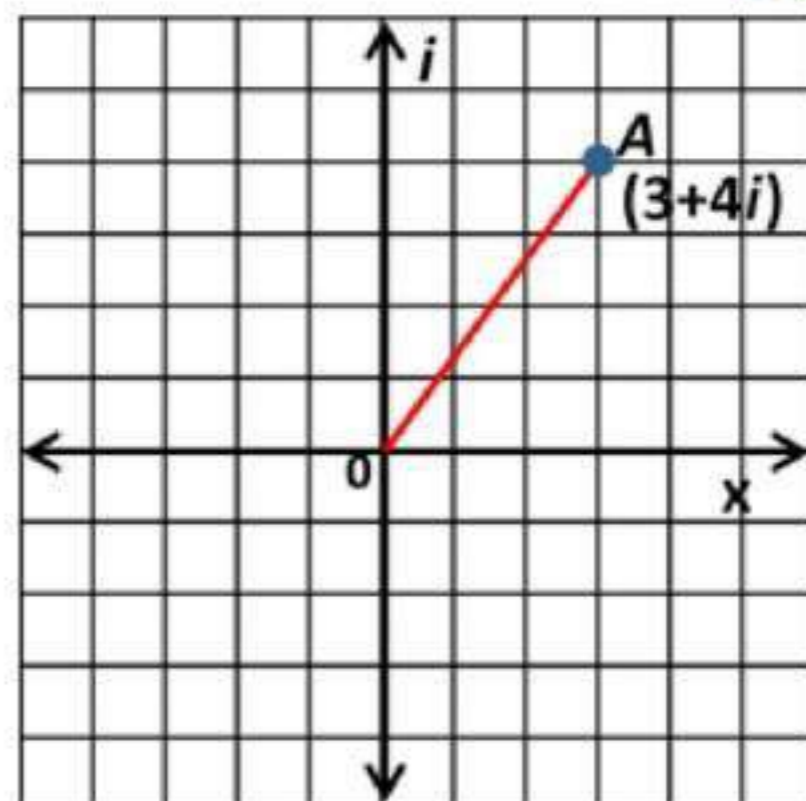
$$\begin{array}{l} ix^2 - 4x - 5ix + 7 \\ \underline{3x^2 + 2x + 6ix - 8i} \end{array} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} ix^2 - (4 + 5i)x + 7 \quad (54) \\ \underline{3x^2 + (2 + 6i)x - 8i} \end{array}$$

$$(3 + i)x^2 - (2 + i)x - 8i + 7 =$$

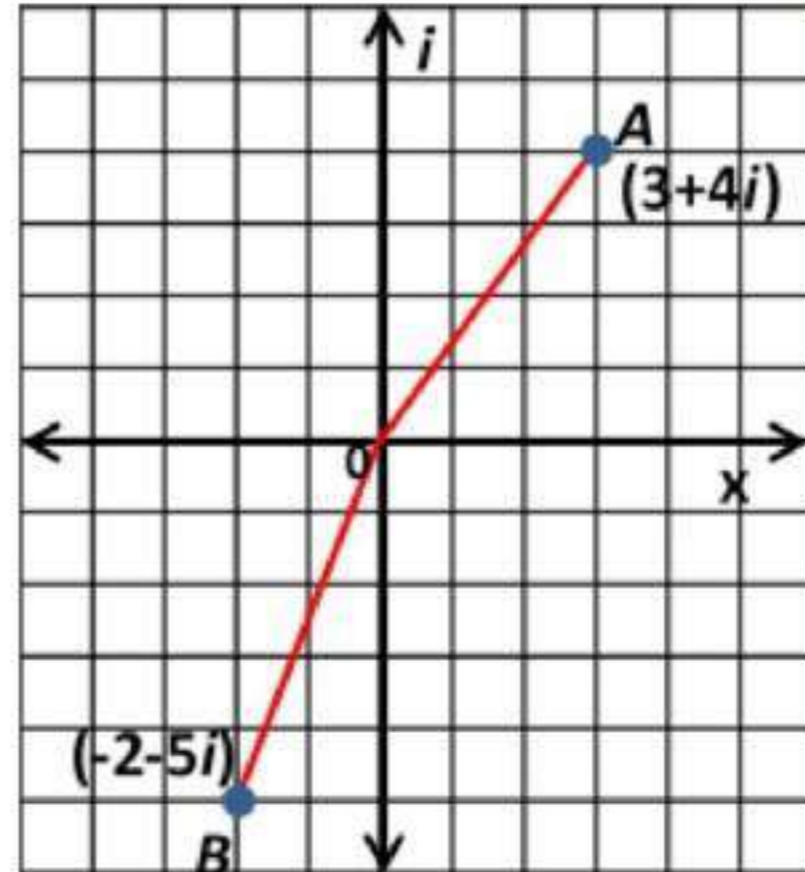
بسط العبارة

$$\begin{aligned} & [(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6] \quad (55) \\ & 2x^2 + ix^2 - ix + 5 + i + 3x^2 - 4ix^2 - 5x + 5ix + 6 = \\ & (2 + i + 3 - 4i)x^2 + (-i - 5 + 5i)x + i + 11 = \\ & (5 - 3i)x^2 + (-5 + 4i)x + i + 11 = \end{aligned}$$

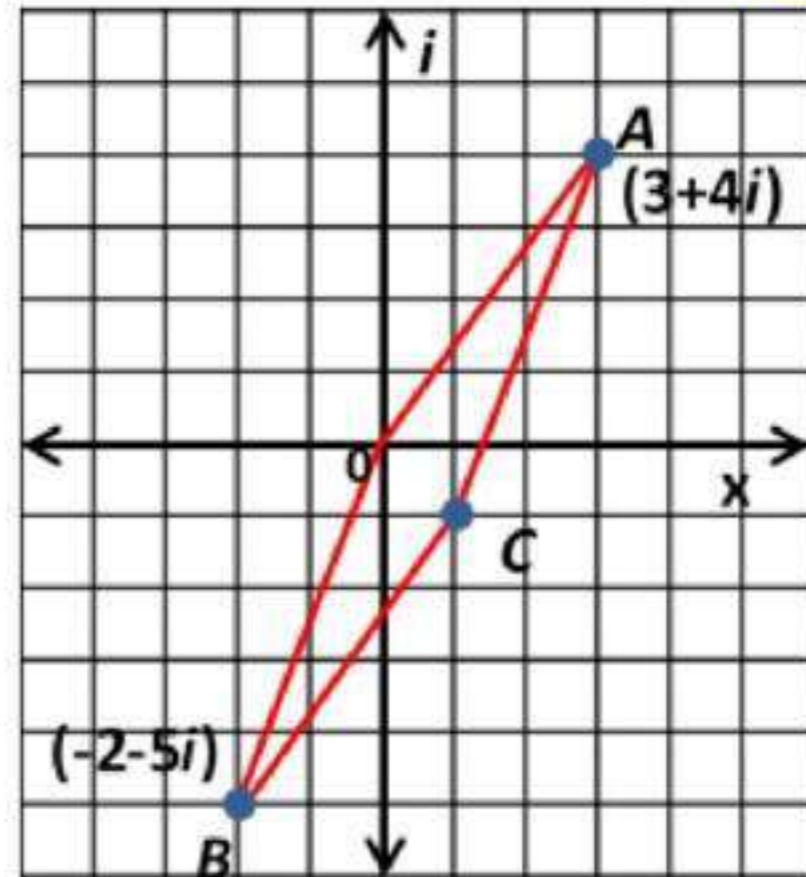
(56)  
(a) بيانياً:



(b) بيانيا:



(c) بيانيا:



(d) تحليلياً:

$1 - i$  ؛ النقطة C تمثل ناتج جمع العددين المركبين الممثلين بالنقطتين A, B (57) اكتشف الخطأ:

صفاة؛ لأن  $i^3 = -i$  وليس  $-1$

(58) تحد:

$$\begin{aligned}(1+2i)^3 &= (1+2i) \cdot (1+2i) \cdot (1+2i) \\(1+2i) \cdot (1+2i) &= 1+2i+2i+4i^2 \\&= 1+4i+4i^2 \\&= 1+4i-4 \\&= -3+4i\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(-3 + 4i) \cdot (1 + 2i) &= -3 - 6i + 4i + 8i^2 \\
&= -3 - 2i + 8^2 \\
&= -3 - 2i - 8 \\
&= -11 - 2i
\end{aligned}$$

(59) تبرير:

صحيحة دائماً؛ فالعدد 5 يمكن أن يمثل بالعدد المركب  $5 + 0i$  و العدد  $3i$  يمكن أن يمثل بالعدد المركب  $0 + 3i$ .

(60) مسألة مفتوحة:

$$(4 + 2i) \cdot (4 - 2i)$$

(61) أكتب:

لبعض المعادلات التربيعية حلول مركبة ولا يمكن حلها بالأعداد الحقيقية فقط، و عندما لا يقطع منحنى الدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X فإن للمعادلة التربيعية حلولاً مركبة فقط.

### تدريب على اختبار

$$5 + 4i - x - yi = -1 - 3i \quad (62)$$

$$\begin{aligned}
4 - y &= -3 \\
y &= 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5 - x &= -1 \\
x &= 6
\end{aligned}$$

الاختيار الصحيح هو (A)  $x = 6$  ,  $y = 7$

$$(3 + 6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
&= 9 + 36i - 36 \\
&= -27 + 36i
\end{aligned}$$

الاختيار الصحيح هو (A)  $-27 + 36i$

## مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي مستعملاً التحليل إلى العوامل:

$$2x^2 + 7x - 15 = 0$$

$$(2x - 3)(x + 5) = 0 \quad (64)$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = -5$$

$$4x^2 - 22x - 12 = 0 \quad (65)$$

$$2x^2 - 11x - 6 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 6) = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 6$$

$$6x^2 - 5x - 4 = 0 \quad (66)$$

$$(3x - 4)(2x + 1) = 0$$

$$3x = 4$$

$$2x = -1$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

نظرية الأعداد

(67) مجموعهما -3 و ناتج ضربهما -40 ← 5 ، -8

(68) مجموعهما -21 و ناتج ضربهما 108 ← -12 ، -9

هل تمثل كل من ثلاثيات الحدود الآتية مربعاً كاملاً ام لا؟

$$x^2 + 16x + 64 \quad (69)$$

$$(x + 8)^2$$

نعم

$$x^2 - 12x + 36 \quad (70)$$

$$(x - 6)^2$$

نعم

$$\text{لا} \quad x^2 + 8x - 16 \quad (71)$$

$$x^2 + 5x + 6.25 \quad (72)$$

$$\text{نعم} \quad (x + 2.5)^2$$

3-2

## القانون العام والمميز

### The Quadratic Formula and the Discriminant



حل كلاً من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

$$x^2 + 6x = 16 \quad (1A)$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = -3 \pm 5$$

$$x = -3 + 5 = 2$$

$$x = -3 - 5 = -8$$

$$2x^2 + 25x + 33 = 0 \quad (1B)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 4(2)(33)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-25 - 19}{4} = -\frac{44}{4}$$

$$x = -11$$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 264}}{4}$$

$$x = \frac{-25 \pm 19}{4}$$

$$x = \frac{-25 + 19}{4} = \frac{-6}{4}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0 \quad (2A)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4(1)(64)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{2}$$

$$x = \frac{16}{2} = 8$$

$$x^2 + 34x + 289 = 0 \quad (2B)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{1156 - 4(1)(289)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{1156 - 1156}}{2}$$

$$x = \frac{-34}{2} = -17$$

$$3x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (3A)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x^2 - 8x + 9 = 0 \quad (3B)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{7}$$

$$3x^2 + 5x + 4 = 0 \quad (4A)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(3)(4)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (4B)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$x = 2 \pm 3i$$

$$-5x^2 + 8x - 1 = 0 \quad (5A)$$

$$a = -5, \quad b = 8, \quad c = -1$$

$$b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-5)(-1)$$

$$= 64 - 20 = 44$$

جذران حقيقيان غير نسبيين حيث  $44 > 0$  ، 44 ليست مربع كامل

$$15x^2 - 7x - 4 = 0 \quad (5B)$$

$$a = 15, \quad b = -7, \quad c = -4$$

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(15)(-4)$$

$$= 49 + 240 = 289$$

جذران حقيقيان نسبيان حيث  $289 > 0$  ، 289 مربع كامل جذره 17



حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

$$x^2 + 12x - 9 = 0 \quad (1)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 36}}{2}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{180}}{2}$$

$$x = \frac{-12 \pm 6\sqrt{5}}{2}$$

$$x = -6 \pm 3\sqrt{5}$$

$$x^2 + 8x + 5 = 0 \quad (2)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$x = \frac{-8 \pm 2\sqrt{11}}{2}$$

$$x = -4 \pm \sqrt{11}$$

$$4x^2 - 5x - 2 = 0 \quad (3)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(4)(-2)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{8}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{8}$$

$$9x^2 + 6x - 4 = 0 \quad (4)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(9)(-4)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 144}}{18}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{180}}{18}$$



$$x = \frac{-6 \pm 6\sqrt{5}}{18}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{3}$$

$$10x^2 - 13x - 3 = 0 \quad (5)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4(10)(-3)}}{2(10)}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{20}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{20}$$

$$x = \frac{13 \pm 17}{20}$$

$$x = \frac{13 - 17}{20} = \frac{-4}{20} = -\frac{1}{5}$$

$$x = \frac{13 + 17}{20} = \frac{30}{20} = 1\frac{1}{2}$$

$$12x^2 - 22x + 6 = 0 \quad (6)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 4(12)(6)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 288}}{24}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{196}}{24} = \frac{22 \pm 14}{24}$$

$$x = \frac{22 - 14}{24} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{22 + 14}{24} = 1\frac{1}{2}$$

$$-3x^2 + 4x + 8 = 0 \quad (7)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-3)(8)}}{2(-3)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 96}}{-6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{112}}{-6} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{7}}{-6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{-3}$$

$$x^2 + 6x - 5 = 0 \quad (8)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{56}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{14}$$

(9) ترفييه:

بالتعويض عن  $h=0$

$$0 = -16t^2 - 64t + 60$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 - 4(-16)(60)}}{2(-16)}$$

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{4096 + 3840}}{-32}$$

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{7936}}{-32} = \frac{64 \pm 16\sqrt{31}}{-32}$$

$$t = \frac{4 \pm 1\sqrt{31}}{-2}$$

$$t = \frac{4 - 1\sqrt{31}}{-2} \approx -0,78$$

$$t = \frac{4 + 1\sqrt{31}}{-2} \approx 4,78$$

حيث انه هبوط، نأخذ الإشارة السالبة، حوالي 0.78 ثانية تقريباً

اجب عن الفرعين  $a, b$  لكل معادلة مما يأتي:

$$3x^2 - 8x + 2 = 0 \quad (10)$$

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(3)(2) \quad (a)$$

$$= 64 - 24 = 40$$

(b) جذران غير نسبيين

$$2x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (11)$$

$$b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(2)(9) \quad (a)$$

$$= 36 - 72 = -36$$

(b) جذران مركبان

$$-16x^2 + 8x - 1 = 0 \quad (12)$$

$$b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(-16)(-1) \quad (a)$$
$$= 64 - 64 = 0$$

(b) 1 نسبي

$$5x^2 + 2x + 4 = 0 \quad (13)$$

$$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(5)(4) \quad (a)$$
$$= 4 - 80 = -76$$

(b) جذران مركبان

### تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

$$x^2 + 45x + 200 = 0 \quad (14)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{-45 \pm \sqrt{(45)^2 - 4(1)(200)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-45 \pm \sqrt{2025 - 800}}{2}$$

$$x = \frac{-45 \pm \sqrt{1225}}{2}$$

$$x = \frac{-45 + 35}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x = \frac{-45 - 35}{2} = \frac{-80}{2} = -40$$

$$4x^2 + 12x - 6 = 0 \quad (15)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 96}}{8}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{240}}{8} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{15}}{8}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

$$5x^2 - 11x - 9 = 0 \quad (16)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-9)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 180}}{10}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{301}}{10}$$

$$12x^2 + 9x + 15 = 0 \quad (17)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4(12)(15)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 720}}{24}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{-639}}{24} = \frac{-9 \pm 3i\sqrt{71}}{24}$$

$$x = \frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$$

(18) سباحة:

$$\{t | 0 \leq t \leq 2\} = \text{المجال} \quad (a)$$

$$h(t) = -4.9t^2 + 3t + 10$$

$$t = -\frac{b}{2a}$$

$$t = -\frac{3}{2(-4.9)} \approx 0.3$$

$$h(0.3) = -4.9(0.3)^2 + 3(0.3) + 10 \approx 10$$

$$\{h | 0 \leq h \leq 10\} = \text{المدى}$$

(b)

$$0 = -4.9t^2 + 3t + 10$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(-4.9)(10)}}{2(-4.9)}$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{205}}{-9.8}$$

$$t = \frac{-3 + \sqrt{205}}{-9.8} \approx -1.15$$

$$t = \frac{-3 - \sqrt{205}}{-9.8} \approx 1.77$$

يصل المتسابق إلى سطح الماء عند 1.77 ثانية تقريباً

أجب عن الفروع  $a, b$  لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

$$2x^2 + 3x - 3 = 0 \quad (19)$$

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -3 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-3) \\ = 9 + 24 = 33$$

$$33 > 0 \quad \text{و ليس مربعاً كاملاً} \quad (b) \\ \text{جذران غير نسبيين}$$

$$\text{القانون العام} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}, \quad x = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4}$$

$$3x^2 - 3x + 8 = 0 \quad (20)$$

$$a = 3, \quad b = -3, \quad c = 8 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(3)(8) \\ = 9 - 96 = -87$$

$$-87 < 0 \quad \text{جذران مركبان} \quad (b)$$

$$\text{القانون العام} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-87}}{2(3)} = \frac{3 \pm \sqrt{-87}}{6}$$

$$x = \frac{3 + i\sqrt{87}}{6}, \quad x = \frac{3 - i\sqrt{87}}{6}$$

$$2x^2 + 4x + 7 = 0 \quad (21)$$

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 7 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(7) \\ = 16 - 56 = -40$$

$$-40 < 0 \quad \text{جذران مركبان} \quad (b)$$

$$\text{القانون العام} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-40}}{2(2)} = \frac{-4 \pm 2i\sqrt{10}}{4}$$

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$$

$$x = \frac{-2 + i\sqrt{10}}{2}, \quad x = \frac{-2 - i\sqrt{10}}{2}$$

$$-5x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (22)$$

$$a = -5, \quad b = 4, \quad c = 1 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-5)(1) \\ = 16 + 20 = 36$$

$$36 > 0, \quad 36 \text{ مربع كامل} \quad (b) \\ \text{جذران نسبيين}$$

$$\text{القانون العام} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2(-5)} = \frac{-4 \pm 6}{-10}$$



$$x = \frac{-4+6}{-10} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5} , \quad x = \frac{-4-6}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (23)$$

$$a = 1 , \quad b = -6 , \quad c = 9 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) \\ = 36 - 36 = 0$$

جذر نسبي واحد (b)

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad (24)$$

$$a = 1 , \quad b = -2 , \quad c = 5 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) \\ = 4 - 20 = -16$$

جذران مركبان  $-16 < 0$  (b)

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$x = 1 \pm 2i$$

$$6x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (25)$$

$$a = 6 , \quad b = -4 , \quad c = 3 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(6)(3) \\ = 16 - 72 = -56$$

$$-56 < 0 \quad \text{جذران مركبان} \quad (b)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{القانون العام} \quad (c)$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-56}}{2(6)} = \frac{4 \pm 2i\sqrt{14}}{12}$$

$$x = \frac{2 \pm i\sqrt{14}}{6}$$

$$5x^2 + 8x = 0 \quad (26)$$

$$a = 5, \quad b = 8, \quad c = 0 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(5)(0) \\ = 64$$

$$64 > 0, \quad 64 \text{ مربع كامل} \quad (b) \\ \text{جذران نسبيان}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{القانون العام} \quad (c)$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64}}{2(5)} = \frac{-8 \pm 8}{10}$$

$$x = \frac{-8 - 8}{10} = \frac{-16}{10} = -\frac{8}{5}$$

$$x = \frac{-8 + 8}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

$$8x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (27)$$

$$a = 8, \quad b = 2, \quad c = -1 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(8)(-1) \\ = 36$$

$$36 > 0, \quad 36 \text{ مربع كامل} \quad (b) \\ \text{جذران نسبيان}$$

القانون العام  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (c)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2(8)} = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

$$x = \frac{-2 - 6}{16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$12x^2 + 4x - 3 = 0 \quad (28)$$

$$a = 12, \quad b = 4, \quad c = -3 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(12)(-3) \\ = 16 + 144 = 160$$

$160 > 0$  و ليس مربعاً كاملاً  
جذران غير نسبيين (b)

القانون العام  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (c)

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{160}}{2(12)} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{10}}{24}$$

$$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{10}}{24} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{6}$$

$$0.8x^2 + 2.6x + 3.2 = 0 \quad (29)$$

$$a = 0.8, \quad b = 2.6, \quad c = 3.2 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (2.6)^2 - 4(0.8)(3.2) \\ = 6.76 - 10.24 = -3.48$$

$-3.48 < 0$  جذران مركبان (b)

$$\text{القانون العام} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{-2.6 \pm \sqrt{-3.48}}{2(0.8)} = \frac{-2.6 \pm 1.87}{1.6}$$

$$x = \frac{-2.6 - 1.87}{1.6} \approx -2.79 \quad x = \frac{-2.6 + 1.87}{1.6} \approx -0.46$$

$$0.6x^2 + 1.4x - 4.8 = 0 \quad (30)$$

$$a = 0.6, \quad b = 1.4, \quad c = -4.8 \quad (a)$$

$$b^2 - 4ac = (1.4)^2 - 4(0.6)(-4.8)$$

$$= 1.96 + 11.52 = 13.48$$

$$13.48 > 0 \text{ و ليس مربعاً كاملاً} \quad (b)$$

جذران غير نسبيين

$$\text{القانون العام} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (c)$$

$$x = \frac{-1.4 \pm \sqrt{13.48}}{2(0.6)} = \frac{-1.4 \pm 2\sqrt{3.37}}{1.2}$$

$$x = \frac{-0.7 - 1.8}{0.6} = -4.2$$

$$x = \frac{-0.7 + 1.8}{0.6} = 1.8$$

(31) التدخين:

(a) عدد السنوات بعد سنة 2000، سنة 2010 هي 10 سنوات بعد سنة 2000 نعوض

$$\text{عن } x = 10$$

$$y = -0.26(10)^2 - 0.55(10) + 91.81$$

$$y = -26 - 5.5 + 91.81 = 60.31$$

عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عام 2010 هو 60.31 شخص

$$\text{عند } x = 15$$

$$y = -0.26(15)^2 - 0.55(15) + 91.81$$

$$y = -58.5 - 8.25 + 91.81 = 25.05$$

عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عام 2015 هو 25.05 شخص

(b) عند  $y = 50$

$$50 = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$

$$-0.26x^2 - 0.55x + 41.81 = 0$$

$$a = -0.26 \quad , \quad b = -0.55 \quad , \quad c = 41.81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = \frac{0.55 \pm \sqrt{(0.55)^2 - 4(-0.26)(41.81)}}{2(-0.26)}$$

$$x = \frac{0.55 \pm \sqrt{43.78}}{-0.52}$$

$$x \approx \frac{0.55 \pm 6.62}{-0.52}$$

$$x \approx \frac{0.55 - 6.62}{-0.52} \approx 11.67$$

$$x \approx \frac{0.55 + 6.62}{-0.52} \approx -13.79$$

حيث لا يوجد سنوات بالسالب، إذن  $x \approx 11.67$

(c) يصبح معدل الإصابة صفر، إذن  $y = 0$

$$0 = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$$

$$a = -0.26 \quad , \quad b = -0.55 \quad , \quad c = 91.81$$

$$x = \frac{0.55 \pm \sqrt{(0.55)^2 - 4(-0.26)(91.81)}}{2(-0.26)}$$

$$x = \frac{0.55 \pm \sqrt{0.3025 + 95.4824}}{-0.52}$$

$$x = \frac{0.55 \pm \sqrt{95.7849}}{-0.52} \approx \frac{0.55 \pm 9.79}{-0.52}$$

$$x \approx \frac{0.55 - 9.79}{-0.52} \approx 17.78$$

$$x \approx \frac{0.55 + 9.79}{-0.52} \approx -19.88$$

حيث لا يوجد سنوات بالسالب، إذن  $x \approx 17.78$

يصبح معدل الإصابة 0 سنة 2017،

التوقع غير معقولا، لأن معدل الإصابة بالسرطان لن يصبح صفرًا إلا إذا وجد علاج ناجح لهذا المرض، وهذا لا يمكن التنبؤ به.

(32) نظرية الأعداد:

$$666 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1332 = n^2 + n$$

$$n^2 + n - 1332 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1332)}}{2(1)}$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+5328}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5329}}{2}$$

$$n = \frac{-1 \pm 73}{2}$$

$$n = \frac{-1-73}{2} = -37$$

$$n = \frac{-1+73}{2} = 36$$

جمع الاعداد الموجبة هو عدد موجب، إذن الإجابة هي جمع الاعداد الموجبة هو عدد موجب، إذن الإجابة هي 36

### مسائل مهارات التفكير العليا

(33) اكتشف الخطأ:

هدى، على لولوة أن تكتب المعادلة على الصورة:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ أولا لإيجاد } a, b, c \text{ لذا فإن قيمة } c \text{ هي } -7 \text{ و ليس } 7$$

(34) تحدد:

بقسمة المعادلة على  $i$

$$4ix^2 - 4ix + 5i = 0$$

$$4x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(5)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-80}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{8}$$

$$x = \frac{4 \pm 8i}{8} = \frac{1 \pm 2i}{2}$$

(35) تبرير:

(a) دائماً، عندما تكون إشارتا  $a, c$  مختلفتين فإن المميز يكون موجبا و لن تكون الحلول أعداد مركبة.

(b) أحيانا، فمثلاً تكون الجذور غير نسبية إذا كانت:  $b^2 - 4ac$  ليست مربعاً كاملاً

(36) اكتب:

• التحليل إلى عوامل:

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

• إكمال المربع:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 2x = 15$$

$$x^2 - 2x + 1 = 15 + 1$$

$$(x - 1)^2 = 16$$

$$x - 1 = \pm 4 \rightarrow x = 5 \text{ أو } -3$$

• القانون العام:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{2} \rightarrow x = 5 \text{ أو } -3$$

تدريب على اختيار

(37)

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

الاختيار الصحيح (D)

(38)

$$x \cdot \frac{60}{100} = 88 \cdot \frac{75}{100}$$

$$x = \frac{88 \cdot 75}{60} = 110$$

الاختيار الصحيح (D)

مراجعة تراكمية

$$x^2 + 13x + c \quad (39)$$

$$\frac{13}{2}$$

نجد نصف معامل  $x$

نحسب المربع له

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4} = 42.25$$

$$c = 42.25$$

$$(x + 6.5)^2$$

$$x^2 + 2.4x + c \quad (40)$$

$$\frac{2.4}{2} = 1.2$$

نجد نصف معامل  $x$

نحسب المربع له

$$(1.2)^2 = 1.44$$

$$c = 1.44$$

$$(x + 1.2)^2$$



$$x^2 + \frac{4}{5}x + c \quad (41)$$

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$c = \frac{4}{25}$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2$$

بسٹ کلا مما یاتی:

$$-1 = i^{26} \quad (42)$$

$$4i = \sqrt{-16} \quad (43)$$

$$-120 = 4\sqrt{-9} \cdot 2\sqrt{-25} \quad (44)$$



اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

$$(1) \quad -\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$$

$$-\frac{4}{32} \approx -\frac{1}{8} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$-\frac{15}{32} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 32, b = 4, c = -15$$

$$32x^2 + 4x - 15 = 0$$

$$(2) \quad -7, \frac{2}{3}$$

$$-\frac{19}{3} = -7 + \frac{2}{3} = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$-\frac{14}{3} = -7 \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 3, b = 19, c = -14$$

$$3x^2 + 19x - 14 = 0$$

$$(3) \quad \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}$$

$$0 = \frac{2}{5} + \frac{-2}{5} = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$-\frac{4}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{-2}{5} = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 25, b = 0, c = -4$$

$$25x^2 - 4 = 0$$

$$4 \pm \sqrt{3} \quad (4)$$

$$8 = 4 + \sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$13 = 16 - 3 = (4 + \sqrt{3}) \cdot (4 - \sqrt{3}) = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 1, b = -8, c = 13$$

$$x^2 - 8x + 13 = 0$$

$$1 \pm \sqrt{6} \quad (5)$$

$$2 = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$-5 = 1 - 6 = (1 + \sqrt{6}) \cdot (1 - \sqrt{6}) = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 1, b = -2, c = -5$$

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7} \quad (6)$$

$$-\frac{28}{49} = \frac{-4}{7} = \frac{-2 + 3\sqrt{5}}{7} + \frac{-2 - 3\sqrt{5}}{7} = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$-\frac{41}{49} = \frac{4 - 45}{49} = \left(\frac{-2 + 3\sqrt{5}}{7}\right) \cdot \left(\frac{-2 - 3\sqrt{5}}{7}\right) = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 49, b = 28, c = -41$$

$$49x^2 + 28x - 41 = 0$$

$$7 \pm 3i \quad (7)$$

$$14 = 7 + 3i + 7 - 3i = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$58 = 49 - 9i^2 = (7 + 3i) \cdot (7 - 3i) = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 1, b = -14, c = 58$$

$$x^2 - 14x + 58 = 0$$

$$\sqrt{5} \pm 8i \quad (8)$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{5} + 8i + \sqrt{5} - 8i = \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ مجموع الجذرين}$$

$$69 = 5 - 64i^2 = (\sqrt{5} + 8i) \cdot (\sqrt{5} - 8i) = \left(\frac{c}{a}\right) \text{ حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\text{بما أن } a = 1, b = -2\sqrt{5}, c = 69$$

$$x^2 - 2\sqrt{5}x + 69 = 0$$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلا مما يأتي:

$$(9) \text{ مجموع جذريها } \frac{48}{12} = 4, \text{ حاصل ضربهما } \frac{13}{12}$$

$$\text{بما أن } a = 12, b = -48, c = 13$$

$$12x^2 - 48x + 13 = 0$$

$$(10) \text{ مجموع جذريها } \frac{7}{42} = \frac{1}{6}, \text{ حاصل ضربهما } \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

$$\text{بما أن } a = 42, b = -7, c = 10$$

$$42x^2 - 7x + 10 = 0$$



$$(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6}) \quad (1A)$$

$$2(-7)x^{-3+5}y^{3-6}$$

$$-14x^2y^{-3}$$

$$-\frac{14x^2}{y^3}$$

$$\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7} \quad (1B)$$

$$\frac{\cancel{15}^5 c^{5-2}d^{3-7}}{\cancel{-3}}$$

$$-\frac{5c^3}{d^4}$$

$$\frac{64}{a^3} = \frac{a^{-3}}{4^{-3}} = \left(\frac{a}{4}\right)^{-3} \quad (1C)$$

$$(-2x^3y^2)^5 \quad (1D)$$

$$(-2^5x^{3 \cdot 5}y^{2 \cdot 5})$$

$$(-32x^{15}y^{10})$$

$$\frac{x}{y} + 3x^2 \quad (2A)$$

لا ؛ لأن  $y$  ليست وحيدة حد

$$x^2y + 9x^4y^3 - 2xy \quad (2B)$$

نعم؛  $7 = (3+4)$

$$(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5) \quad (3A)$$
$$-x^2 - 3x + 4 - x^2 - 2x - 5$$
$$-2x^2 - 5x - 1$$

$$(3x^2 - 6) + (-x + 1) \quad (3B)$$
$$3x^2 - 6 - x + 1$$
$$3x^2 - x - 5$$

أوجد ناتج

$$\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12) \quad (4A)$$

$$\frac{4}{3}x^2(6x^2) + \frac{4}{3}x^2(9x) - \frac{4}{3}x^2(12)$$
$$8x^4 + 12x^3 - 16x^2$$

$$-2a(-3a^2 - 11a + 20) \quad (4B)$$
$$-2a(-3a^2) - 2a(-11a) - 2a(20)$$
$$6a^3 + 22a^2 - 40a$$

$$\frac{42}{100}x + \frac{18}{100} \times (90000 - x) \quad (5)$$

$$\frac{42}{100}x + 16200 - \frac{18}{100}x$$
$$\left(\frac{42-18}{100}\right)x + 16200$$

$$0.24x + 16200$$

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(x^2 + 4x + 16)(x - 4) \quad (6A)$$

$$\begin{aligned} x^2(x) + x^2(-4) + 4x(x) + 4x(-4) + 16(x) + 16(-4) \\ x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 16x - 64 \\ x^3 - 64 \end{aligned}$$

$$(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1) \quad (6B)$$

$$\begin{aligned} 2x^2(3x) + 2x^2(-1) - 4x(3x) - 4x(-1) + 5(3x) + 5(-1) \\ 6x^3 - 2x^2 - 12x^2 + 4x + 15x - 5 \\ 6x^3 - 14x^2 + 19x - 5 \end{aligned}$$



بسّط كلا مما يأتي مفترضاً أياً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$(1) \quad (2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$$
$$-8a^{3+2}b^{-2+4}$$
$$-8a^5b^2$$

$$(2) \quad \frac{12x^4y^2}{2xy^5}$$
$$\frac{6x^3}{y^3} = 6x^{4-1}y^{2-5}$$

$$(3) \quad \left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$$
$$\frac{2^3 a^{2 \cdot 3}}{3^3 b^3}$$
$$\frac{8a^6}{27b^3}$$

$$(4) \quad (6g^5h^{-4})^3$$
$$216g^{15}h^{-12} = 6^3 g^{5 \cdot 3} h^{-4 \cdot 3}$$
$$\frac{16g^{15}}{h^{-12}}$$

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، و إن كانت فاذكر درجتها:

$$(5) \quad 3x + 4y$$

نعم؛ الدرجة: 1

$$(6) \quad \frac{1}{2}x^2 - 7y$$

نعم؛ الدرجة: 2



$$x^2 + \sqrt{x} \quad (7)$$

$$\frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3} \quad (8)$$

بسط كلا مما يأتي:

$$(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1) \quad (9)$$

$$x^2 - 5x + 2 - 3x^2 - x + 1$$
$$-2x^2 - 6x + 3$$

$$(3a + 4b) + (6a - 6b) \quad (10)$$

$$3a + 4b + 6a - 6b$$
$$9a - 2b$$

$$3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3) \quad (11)$$

$$3x^2(2xy) - 3x^2(3xy^2) + 3x^2(4x^2y^3)$$

$$6x^3y - 9x^3y^2 + 12x^4y^3$$

$$(n - 9)(n + 7) \quad (12)$$

$$n^2 + 7n - 9n - 63$$

$$n^2 - 2n - 63$$

(13) عثمان يمارس الرياضة مدة 75 دقيقة في اليوم،  $x$  دقيقة رفع أثقال، على هذا

سيمارس الركض السريع مدة  $75 - x$  دقيقة في اليوم.

الجري السريع يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، عدد السعرات الحرارية في اليوم

$$(75 - x) \cdot 10 =$$

$$750 - 10x =$$

رفع الأثقال يحرق 7.5 سعرة حرارية في الدقيقة، عدد السعرات الحرارية في اليوم

$$7.5x =$$

$$750 - 2.5x = 750 - 10x + 7.5x =$$

## تمارين ومسائل

بسط كلا مما يأتي مفترضا أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$(14) \quad (5x^3y^{-5})(4xy^3) \\ \frac{20x^4}{y^2} = 20x^4y^{-2}$$

$$(15) \quad \frac{-y^3z^5}{y^2z^3} \\ -y^{3-2}z^{5-3} = \\ -yz^2 =$$

$$(16) \quad \frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2} \\ \frac{-7x^{5-7}y^{5-5}z^{4-2}}{21} = \\ -\frac{z^2}{3x^2} =$$

$$(17) \quad n^{20} = n^{5 \cdot 4} = (n^5)^4$$

حدد إذا ما كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، و إن كانت كذلك فأذكر درجتها:

$$(18) \quad 2x^2 - 3x + 5$$

نعم؛ 2

$$(19) \quad a^3 - 11$$

نعم؛ 3

$$(20) \quad \frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{8}$$

$$(21) \quad \sqrt{m-7}$$

لا

بسط كلاً مما يأتي:

$$(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12) \quad (22)$$

$$6a^2 + 5a + 10 - 4a^2 - 6a - 12$$
$$2a^2 - a - 2$$

$$4x(2x^2 + y) \quad (23)$$

$$8x^3 + 4xy$$

$$(x - y)(x^2 + 2xy + y^2) \quad (24)$$

$$x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2y - 2xy^3 - y^3$$
$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$$

$$(a + b)(a^3 - 3ab - b^2) \quad (25)$$

(26) طلاء:

$$12x + 11(15 - x) = \text{تكلفة طلاء المنزل}$$

$$12x + 165 - 11x =$$

$$x + 165 =$$

بسط كلاً مما يأتي مفترضا أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4 \quad (27)$$

$$\frac{8^4 x^{2 \cdot 4} y^{3 \cdot 4}}{24^4 x^{3 \cdot 4} y^{2 \cdot 4}} =$$

$$\frac{x^8 y^{12}}{3^4 x^{12} y^8} =$$

$$\frac{y^4}{81x^4} =$$

$$\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2} \quad (28)$$

$$\frac{4^{-2}x^4y^{-6}}{x^{-2}y^8} =$$

$$\frac{x^6}{16y^{14}} =$$

$$(a^2b^3)(ab)^{-2} \quad (29)$$

$$(a^2b^3)(a^{-2}b^{-2}) =$$

$$b = a^{2-2}b^{3-2} =$$

$$(-3x^3y)^2(4xy^2) \quad (30)$$

$$(9x^6y^2)(4xy^2) =$$

$$36x^7y^4 =$$

$$\frac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2} \quad (31)$$

$$\frac{6c^5d^6}{15c^4d^2} =$$

$$\frac{2}{5}cd^4 =$$

$$\frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2) \quad (32)$$

$$\frac{1}{4}g^2(8g) + \frac{1}{4}g^2(12h) - \frac{1}{4}g^2(16gh^2) =$$

$$2g^3 + 3g^2h - 4g^3h^2 =$$

$$x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1}) \quad (33)$$

$$x^{-2}(x^4) - x^{-2}(3x^3) + x^{-2}(x^{-1}) =$$

$$x^2 - 3x + \frac{1}{x^3} =$$

$$a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a) \quad (34)$$

$$a^{-3}b^2(ba^3) + a^{-3}b^2(b^{-1}a^2) + a^{-3}b^2(b^{-2}a) =$$

$$b^3 + \frac{b}{a} + \frac{1}{a^2} =$$

$$(n^2 - 7)(2n^3 + 4) \quad (35)$$

$$n^2(2n^3) + n^2(4) - 7(2n^3) - 7(4) =$$

$$2n^5 + 4n^2 - 14n^3 - 28 =$$

$$2n^5 - 14n^3 + 4n^2 - 28 =$$

$$(2x - 2y)^3 \quad (36)$$

$$(2x - 2y)(4x^2 - 8xy + 4y^2) =$$

$$8x^3 - 16x^2y + 8xy^2 - 8x^2y + 16xy^2 - 8y^3 =$$

$$8x^3 - 24x^2y + 24xy^2 - 8y^3 =$$

(37) فلك:

$$\frac{2.367 \times 10^{21}}{3 \times 10^8} = \text{الوقت (a)}$$

$$\frac{2.367 \times 10^{21-8}}{3} =$$

$$\frac{2.367 \times 10^{13}}{3} =$$

$$0.789 \times 10^{13} =$$

$$7.89 \times 10^{12} = \text{ثانية ليصل الأرض}$$

نحول الثواني إلى سنوات، بالقسمة على  $60 \times 60 \times 24 \times 365$

$$\frac{7.890000000000}{60 \times 60 \times 24 \times 365} =$$

$$\approx 250190.26 \text{ سنة}$$

$$\frac{2.28 \times 10^{11}}{3 \times 10^8} =$$

$$\text{الوقت (b)}$$

$$\frac{2.28 \times 10^{11-8}}{3} =$$

$$\frac{2.28 \times 10^3}{3} =$$

$$0.76 \times 10^3 =$$

$$760 = 0.76 \times 1000 =$$

نحولها إلى دقائق بالقسمة على 60

$$\text{الوقت} = \frac{760}{60} \approx 12.67 \text{ دقيقة}$$

$$5^{k+7} = 5^{2k-3} \quad (38)$$

بما أن الأساس متساوي في الطرفين، إذن الأسس متساوية.

$$k + 7 = 2k - 3$$

$$k = 10$$

$$q^{41} = q^{4k} \cdot q^5 \quad (39)$$

$$q^{41} = q^{4k+5}$$

بما أن الأساس متساوي في الطرفين، إذن الأسس متساوية.

$$41 = 4k + 5$$

$$41 - 5 = 4k$$

$$9 = k$$

(40) تمثيلات متعددة:

(a) هندسياً: مساحة المستطيل =  $x^2 + 7x + 12$

(b) جبرياً: مساحة المستطيل =  $(x+4)(x+3)$

$$x^2 + 3x + 4x + 12 =$$

$$x^2 + 7x + 12 =$$

(c) لفظياً: مثل كل حد بمستطيل أو أكثر، بحيث تمثل المساحة في النموذج ناتج حاصل الضرب.

## مسائل مهارات التفكير العليا

(41) برهان:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}$$
$$a^{0-n} =$$
$$a^{-n} =$$

(42) تحد:

قيمة المقدار تقترب من الصفر.

(43) تبرير:

يظهر الصفر في المقام  $0^2$  مما يجعل العبارة غير معرفة

(44) مسألة مفتوحة:

$$x^{12} = x^9 \cdot x^3$$
$$x^{12} = \frac{x^{14}}{x^2}$$
$$x^{12} = (x^6)^2$$

(45) أكتب:

يتعامل الفلكي بأعداد كبيرة بحيث يصعب أحياناً التعامل معها لأنها تحتوي أرقاماً كثيرة. و خواص الأسس تجعل للأعداد الكبيرة و الصغيرة معنى. و لكي تعرف بعد الكواكب عن مصدر الضوء فإنك تقسم المسافة على سرعة الضوء لتحسب كم من الوقت تحتاج.

## تدريب على اختيار

(46) إجابة قصيرة:

$$\frac{2}{3}x^2 = \frac{8x^6}{12x^4} = \frac{(2x^2)^3}{12x^4}$$

(47) الإجابة الصحيحة: (C)  $x - 1$

حل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$12ax^3 + 20bx^2 + 32cx \quad (48)$$

$$4x(3ax^2 + 5bx + 8c)$$

$$x^2 + 2x + 6 + 3x \quad (49)$$

$$x^2 + 5x + 6 \\ (x+3)(x+2)$$

$$12y^2 + 9y + 8y + 6 \quad (50)$$

$$12y^2 + 17y + 6 \\ (3y+2)(4y+3)$$

$$2my + 7x + 7m + 2xy \quad (51)$$

$$2my + 2xy + 7x + 7m \\ 2y(x+m) + 7(x+m) \\ (x+m)(2y+7)$$

$$8ax - 6x - 12a + 9 \quad (52)$$

$$8ax - 12a - 6x + 9 \\ 4a(2x-3) - 3(2x-3) \\ (2x-3)(4a-3)$$



$$10x^2 - 14xy - 15x + 21y \quad (53)$$

$$10x^2 - 15x - 14xy + 21y$$

$$2x(5x - 7y) - 3(5x - 7y)$$

$$(5x - 7y)(2x - 3)$$



بسّط كل مقدار فيما يأتي:

$$(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf) \quad (1A)$$

$$\frac{20c^4d^2f}{4cdf} - \frac{16cdf^2}{4cdf} + \frac{4cdf}{4cdf} =$$
$$5c^3d - 4f + 1 =$$

$$(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1} \quad (1B)$$

$$\frac{18x^2y}{3xy} + \frac{27x^3y^2z}{3xy} =$$
$$6x + 9x^2yz =$$

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد الناتج في كل مما يأتي:

$$(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3) \quad (2A)$$

$$\begin{array}{r} x + 10 \\ x - 3 \overline{) x^2 + 7x - 30} \\ \underline{(-) x^2 - 3x} \phantom{- 30} \\ 0 + 10x - 30 \\ \underline{(-) 10x - 30} \\ 0 \phantom{- 30} \\ \underline{\phantom{0} 0} \phantom{- 30} \\ 0 \phantom{- 30} \end{array}$$

$$(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1) \quad (2B)$$

$$\begin{array}{r} x-12 \\ x-1 \overline{) x^2 - 13x + 12} \\ \underline{(-) x^2 - x} \phantom{+ 12} \\ 0 - 12x + 12 \\ \underline{(-) -12x + 12} \\ 0 \phantom{+} 0 \end{array}$$

$$-r - 6 + \frac{13}{1-r} = (r^2 + 5r + 7) \div (1-r) \quad (3)$$

$$\begin{array}{r} -r-6 \\ 1-r \overline{) r^2 + 5r + 7} \\ \underline{(-) r^2 - r} \phantom{+ 7} \\ 0 + 6r + 7 \\ \underline{(-) 6r - 6} \\ 0 + 13 \end{array}$$

الاختيار الصحيح: (F)

$$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3) \quad (4A)$$

$$\begin{array}{r} -3 \overline{) 2 \quad 3 \quad -4 \quad 15} \\ \phantom{-3} \downarrow \\ \phantom{-3} \phantom{3} \phantom{-4} \phantom{15} \\ \phantom{-3} \phantom{3} \phantom{-4} \phantom{15} \\ \phantom{-3} \phantom{3} \phantom{-4} \phantom{15} \\ \hline 2 \square \quad -3 \square \quad 5 \square \quad | \quad 0 \end{array}$$

نتاج القسمة هو  $2x^2 - 3x + 5$  ، و الباقي 0.

$$(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2) \quad (4B)$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 3 \quad -8 \quad 11 \quad -14} \\ \phantom{2} \downarrow \\ \phantom{2} \phantom{-8} \phantom{11} \phantom{-14} \\ \phantom{2} \phantom{-8} \phantom{11} \phantom{-14} \\ \phantom{2} \phantom{-8} \phantom{11} \phantom{-14} \\ \hline 3 \square \quad -2 \square \quad 7 \square \quad | \quad 0 \end{array}$$

نتاج القسمة هو  $3x^2 - 2x + 7$  ، و الباقي 0.

$$(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2) \quad (4C)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 4 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ & \downarrow & & & & \\ & & -8 & 16 & -36 & 80 \\ \hline & 4 & -8 & 18 & -40 & | & 92 \end{array}$$

نتاج القسمة هو  $4a^3 - 8a^2 + 18a - 40 + \frac{92}{a+2}$

$$(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2) \quad (4D)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 6 & -8 & 0 & 12 & -14 \\ & \downarrow & & & & \\ & & 12 & 8 & 16 & 56 \\ \hline & 6 & 4 & 8 & 28 & | & 42 \end{array}$$

نتاج القسمة هو  $6b^3 + 4b^2 + 8b + 28 + \frac{42}{b-2}$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$$(8x^4 - 4x^2 + x + 4)(2x + 1) \quad (5A)$$

$$\frac{(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div 2}{(2x + 1) \div 2} =$$

$$\frac{\left(4x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 2\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{1}{2} & 4 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 2 \\ & \downarrow & & & & \\ & & -2 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline & 4 & -2 & -1 & 1 & | & \frac{3}{2} \end{array}$$

$$4x^3 - 2x^2 - x + 1 + \frac{\frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} \div \left(\frac{2x+1}{2}\right) = \frac{3}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{2x+1} = \frac{3}{2x+1}$$

$$4x^3 - 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{2x+1} = \text{نتاج القسمة}$$

$$(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4)(4y - 1) \quad (5B)$$

$$\frac{(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div 4}{(4y - 1) \div 4} =$$

$$\frac{\left(2y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4y^2 + 1\right)}{\left(y - \frac{1}{4}\right)} =$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{1}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 & 1 \\ & \downarrow & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} \\ \hline & 2 & 0 & 0 & -4 & -1 & \frac{3}{4} \end{array}$$

$$2y^4 - 4y - 1 + \frac{\frac{3}{4}}{y - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{y - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \div \left(y - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{3}{4} \div \left( \frac{4y-1}{4} \right) = \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{4y-1} = \frac{3}{4y-1}$$

$$2y^4 - 4y - 1 + \frac{3}{4y-1} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4) \quad (5C)$$

$$\frac{(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div 5}{(5b - 4) \div 5} =$$

$$\frac{\left( 3b^3 + \frac{8}{5}b^2 - \frac{21}{5}b + \frac{6}{5} \right)}{\left( b - \frac{4}{5} \right)} =$$

$$\begin{array}{r} \frac{4}{5} \overline{) 3 \quad \frac{8}{5} \quad -\frac{21}{5} \quad \frac{6}{5}} \\ \downarrow \\ \frac{12}{5} \quad \frac{16}{5} \quad -\frac{4}{5} \\ \hline 3 \quad 4 \quad -1 \quad \left| \frac{2}{5} \right. \end{array}$$

$$3b^2 + 4b - 1 + \frac{\frac{2}{5}}{b - \frac{4}{5}}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{b - \frac{4}{5}} = \frac{2}{5} \div \frac{5b-4}{5}$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{5b-4}{5} = \frac{2}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{5b-4} = \frac{2}{5b-4}$$

$$3b^2 + 4b - 1 + \frac{2}{5b-4} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4) \quad (5D)$$

$$\frac{(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div 3}{(3c - 4) \div 3} =$$

$$\frac{\left(2c^3 - \frac{17}{3}c^2 + 2c + \frac{8}{3}\right)}{\left(c - \frac{4}{3}\right)} =$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{4}{3} & 2 & -\frac{17}{3} & 2 & \frac{8}{3} \\ & \downarrow & \frac{8}{3} & -4 & -\frac{8}{3} \\ \hline & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$2c^2 - 3c - 2 = \text{ناتج القسمة}$$



بسّط كل عبارة فيما يلي:

$$\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy} \quad (1)$$

$$4y + 2x - 2$$

$$(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1} \quad (2)$$

$$\frac{3a^2b - 6ab + 5ab^2}{ab} =$$

$$\frac{3a^2b - 6ab + 5ab^2}{ab} =$$

$$3a + 5b - 6 =$$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كل مما يأتي:

$$(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2) \quad (3)$$

$$\begin{array}{r} x - 8 \\ x + 2 \overline{) x^2 - 6x - 20} \\ \underline{(-) x^2 + 2x} \phantom{- 20} \\ 0 - 8x - 20 \\ \underline{(-) -8x - 16} \\ -4 \end{array}$$



$$x - 8 - \frac{4}{x+2} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(2a^2 - 4a - 8) \div (a+1) \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} 2a - 6 \\ a+1 \overline{) 2a^2 - 4a - 8} \\ \underline{(-) 2a^2 + 2a} \phantom{- 8} \\ -6a - 8 \\ \underline{(-) -6a - 6} \\ -2 \end{array}$$

$$2a - 6 - \frac{2}{a+1} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z+3) \quad (5)$$

$$\begin{array}{r} -3 \overline{) 3 \quad -6 \quad -9 \quad 3 \quad -6} \\ \downarrow -9 \quad 45 \quad -108 \quad 315 \\ \hline 3 \quad -15 \quad 36 \quad -105 \quad | \quad 309 \end{array}$$

$$3z^3 - 15z^2 + 36z - 105 + \frac{309}{z+3} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y-2) \quad (6)$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad -20} \\ \downarrow 2 \quad 4 \quad 8 \quad 10 \quad 20 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 10 \quad | \quad 0 \end{array}$$

$$y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 5y + 10 = \text{ناتج القسمة}$$

(7) اختيار من متعدد:

$$-x - 7 + \frac{19}{4-x} \quad \text{الاختيار الصحيح (A)}$$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$$(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5) \quad (8)$$

$$\frac{(10x^2 + 15x + 20) \div 5}{(5x + 5) \div 5} =$$

$$\frac{(2x^2 + 3x + 4)}{(x + 1)} =$$

$$\begin{array}{r} \underline{-1} \mid 2 \quad 3 \quad 4 \\ \downarrow -2 \quad -1 \\ \hline 2 \quad 1 \quad | \quad 3 \end{array}$$

$$2x + 1 + \frac{15}{5x + 5} =$$

$$2x + 1 + \frac{3}{x + 1} =$$

$$(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2) \quad (9)$$

$$\frac{(18a^2 + 6a + 9) \div 3}{(3a - 2) \div 3} =$$

$$\frac{(6a^2 + 2a + 3)}{\left(a - \frac{2}{3}\right)} =$$

$$\begin{array}{r} \underline{\frac{2}{3}} \mid 6 \quad 2 \quad 3 \\ \downarrow 4 \quad 4 \\ \hline 6 \quad 6 \quad | \quad 7 \end{array}$$

$$6a + 6 + \frac{7}{a - \frac{2}{3}}$$

ناتج القسمة =  $\frac{7}{a - \frac{2}{3}}$

$$\frac{7}{a - \frac{2}{3}} = 7 \div \frac{3a - 2}{3} \quad \therefore$$

$$7 \times \frac{3}{3a - 2} = \frac{21}{3a - 2}$$

$$6a + 6 + \frac{21}{3a - 2} = \text{نتاج القسمة} \quad \therefore$$

$$\frac{12b^2 + 23b + 15}{3b + 8} \quad (10)$$

$$\frac{(12b^2 + 23b + 15) \div 3}{(3b + 8) \div 3} =$$

$$\frac{\left(4b^2 + \frac{23}{3}b + 5\right)}{\left(b + \frac{8}{3}\right)} =$$

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{8}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 5 \\ & \downarrow & -\frac{32}{3} & 8 \\ \hline & 4 & -3 & | 13 \end{array}$$

$$4b - 3 + \frac{13}{b + \frac{8}{3}}$$

$$\frac{13}{b + \frac{8}{3}} = 13 \div \frac{3b + 8}{3} \quad \therefore$$

$$13 \times \frac{3}{3b + 8} = \frac{39}{3b + 8}$$

$$4b - 3 + \frac{39}{3b + 8} = \text{ناتج القسمة} \therefore$$

$$\frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6} \quad (11)$$

$$\frac{(27y^2 + 27y - 30) \div 9}{(9y - 6) \div 9}$$

$$\frac{\left(3y^2 + 3y - \frac{10}{3}\right)}{\left(y - \frac{2}{3}\right)}$$

$$\begin{array}{r|rr} \frac{2}{3} & 3 & 3 & -\frac{10}{3} \\ & \downarrow & 2 & \frac{10}{3} \\ \hline & 3 & 5 & 0 \end{array}$$

$$3y + 5 = \text{ناتج القسمة}$$

تدرب وحل المسائل

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab} \quad (12)$$

$$\frac{24a^3b^2}{8ab} - \frac{16a^2b^3}{8ab} =$$

$$3a^2b - 2ab^2 =$$

$$\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy} \quad (13)$$

$$\frac{5x^2y}{5xy} - \frac{10xy}{5xy} + \frac{15xy^2}{5xy} =$$

$$x + 3y - 2 =$$

$$\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh} \quad (14)$$

$$\frac{7g^3h^2}{gh} + \frac{3g^2h}{gh} - \frac{2gh^3}{gh} =$$

$$7g^2h + 3g - 2h^2 =$$

$$\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab} \quad (15)$$

$$\frac{4a^3b}{2ab} - \frac{6ab}{2ab} + \frac{2ab^2}{2ab} =$$

$$2a^2 + b - 3 =$$

$$\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2} \quad (16)$$

$$\frac{16c^4d^4}{4c^2d^2} - \frac{24c^2d^2}{4c^2d^2} =$$

$$4c^2d^2 - 6 =$$

$$\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2} \quad (17)$$

$$\frac{9n^3p^3}{3n^2p^2} - \frac{18n^2p^2}{3n^2p^2} + \frac{21n^2p^3}{3n^2p^2} =$$

$$3np + 7p - 6 =$$

(18) مخبز:

$$\frac{-w^2 + 16w + 1000}{w}$$

$$\frac{-w^2}{w} + \frac{16w}{w} + \frac{1000}{w} =$$

$$-w + 16 + \frac{1000}{w} =$$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كل مما يأتي:

$$(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2) \quad (19)$$

$$\begin{array}{r} a - 10 \\ a + 2 \overline{) a^2 - 8a - 26} \\ \underline{(-) a^2 + 2a} \phantom{- 26} \\ -10a - 26 \\ \underline{(-) -10a - 20} \\ -6 \end{array}$$

$$a - 10 - \frac{6}{a+2} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b+1) \quad (20)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ & \downarrow & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & -8 \end{array}$$

$$b^2 - 5b + 6 - \frac{8}{b+1} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z-1)^{-1} \quad (21)$$

$$\frac{(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)}{(z-1)} =$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & 2 & -4 & 4 \\ & \downarrow & 1 & -2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$z^3 - 2z^2 - 4 = \text{ناتج القسمة}$$

$$(x^5 - 4^3x + 4x^2) \div (x-4) \quad (22)$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 52x - 208 \\ x-4 \overline{) x^5 \phantom{+ 4x^4} - 4x^3 + 4x^2} \\ \underline{(-) x^5 - 4x^4} \phantom{+ 4x^2} \\ 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ \underline{(-) 4x^4 - 16x^3} \phantom{+ 4x^2} \\ 12x^3 + 4x^2 + 4x^2 \\ \underline{(-) 12x^3 - 48x^2} \phantom{+ 4x^2} \\ 52x^2 + 4x^2 \\ \underline{(-) 52x^2 - 208x} \phantom{+ 4x^2} \\ -208x + 4x^2 \\ \underline{(-) -208x + 832} \\ 832 \end{array}$$

$$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 52x + 208 + \frac{832}{x-4} = \text{ناتج القسمة}$$

$$\frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y+2} \quad (23)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 11 & -10 & 6 \\ & \downarrow & -2 & -18 & 56 \\ \hline & 1 & 9 & -28 & 62 \end{array} -$$

$$y^2 + 9y - 28 + \frac{62}{y+2} = \text{ناتج القسمة}$$

$$(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2) \quad (24)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & -18 \\ & \downarrow & 2 & 4 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & -14 \end{array}$$

$$g^3 + 2g^2 + g + 2 - \frac{14}{g-2} = \text{ناتج القسمة}$$

$$6a^2 - 3a + 9 \div 3a - 2 \quad (25)$$

$$\frac{(6a^2 - 3a + 9) \div 3}{(3a - 2) \div 3} =$$

$$\frac{(2a^2 - a + 3)}{\left(a - \frac{2}{3}\right)} =$$



$$\begin{array}{r|rrr} \frac{2}{3} & 2 & -1 & 3 \\ & \downarrow & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} \\ \hline & 2 & \frac{1}{3} & \frac{29}{9} \end{array}$$

$$2a + \frac{1}{3} + \frac{\frac{29}{9}}{a - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{\frac{29}{9}}{a - \frac{2}{3}} = \frac{29}{9} \div a - \frac{2}{3}$$

$$\frac{29}{\cancel{9}_3} \times \frac{\cancel{3}}{3a - 2} = \frac{29}{9a - 6}$$

$$2a + \frac{1}{3} + \frac{29}{9a - 6} = \text{نتاج القسمة}$$

$$\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1} \quad (26)$$

$$\frac{(6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x) \div 3}{(3x + 1) \div 3} =$$

$$\frac{\left(2x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x\right)}{\left(x + \frac{1}{3}\right)} =$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 -\frac{1}{3} & 2 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\
 & \downarrow & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\
 \hline
 & 2 & 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & | -\frac{2}{9}
 \end{array}$$

$$2x^4 + x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{9}}{x + \frac{1}{3}}$$

$$\frac{\frac{2}{9}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{2}{9} \div \frac{3x + 1}{3}$$

$$\frac{2}{9} \times \frac{3}{3x + 1} = \frac{2}{9x + 3}$$

$$2x^4 + x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{2}{9x + 3} = \text{نتاج القسمة}$$

(27) هندسة:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 6 & 31 & 53 & 30 \\
 & \downarrow & -12 & -38 & -30 \\
 \hline
 & 6 & 19 & 15 & | 0
 \end{array}$$

∴ مساحة قاعدة متوازي المستطيلات =  $6x^2 + 19x + 15$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{(19)^2 - 4(6)(15)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 360}}{12}$$

$$x = \frac{-19 - 1}{12} = \frac{-20}{12}$$

$$x = \frac{-19 + 1}{12} = -\frac{18}{12}$$

$$3x + 5 = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

الطول و العرض:  $(3x+5)$  ،  $(2x+3)$

(28) فيزياء:

$$\frac{t^3 + 9t^2 + 26t + 24}{t + 4} = \text{فرق الجهد}$$

$$\begin{array}{r} -4 \overline{) 1 \quad 9 \quad 26 \quad 24} \\ \underline{\downarrow -4 \quad -20 \quad -24} \\ 1 \quad 5 \quad 6 \quad | \quad 5 \end{array}$$

$$\text{فرق الجهد} = t^2 + 5t + 6$$

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$(x^4 - y^4) \div (x - y) \quad (29)$$

$$(x^4 - y^4) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$$

$$\frac{(x^4 - y^4)}{(x - y)} = \frac{(x^2 + y^2)(x + y)(\cancel{x - y})}{(\cancel{x - y})} = (x^2 + y^2)(x + y)$$

$$(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd) \quad (30)$$

$$\frac{28c^3d^2}{14cd} - \frac{21cd^2}{14cd} =$$

$$2c^2d - \frac{3}{2}d =$$

$$(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1} \quad (31)$$

$$\frac{a^3b^2}{-ab} - \frac{a^2b}{-ab} + \frac{2b}{-ab} =$$

$$-a^2b + a - \frac{2}{a} =$$

$$\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4} \quad (32)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 3 & -5 & -4 \\ & \downarrow & -4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

نتاج القسمة =  $n^2 - n - 1$

$$\frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3} \quad (33)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & -7 & -21 \\ & \downarrow & -3 & 3 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & -9 \end{array}$$

$$p^2 - p - 4 - \frac{9}{p+3} = \text{ناتج القسمة}$$

$$\frac{3z^5 + 5z^4 + z + 5}{z+2} \quad (34)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ & \downarrow & -6 & 2 & -4 & 8 & -18 \\ \hline & 3 & -1 & 2 & -4 & 9 & -13 \end{array}$$

$$3z^4 - z^3 + 2z^2 - 4z + 9 - \frac{13}{z+2}$$

(35) أعمال:  
(a)

$$\begin{array}{r} 3500 \\ a^2 + 100 \overline{) 3500a^2} \\ (-) 3500a^2 + 350000 \\ \hline 350000 \end{array}$$

$$3500 - \frac{350000}{a^2 + 100} =$$

$$3500 - \frac{350000}{a^2 + 100} = 3500 - \frac{350000}{3600000 + 100} \quad (b)$$

$$n = 3500 - \frac{350000}{3600100} \approx 3500$$

3500 نسخة تقريبا

36) تمثيلات متعددة:  
a) حسيًا:

$x^2$	$x$	$x$	$x$
$x^2$	$x$	$x$	$x$
$x$	1	1	1

العرض =  $x + 3$

b) رمزيًا:

$$(2x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1)$$

c) عدديًا:

$$\frac{(2x^2 + 7x + 3) \div 2}{(2x + 1) \div 2} = \frac{x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ & \downarrow & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

نتاج القسمة =  $x + 3$

نعم يتفق

(37) اكتشف الخطأ:

خليفة اجابته صحيحة؛ جمال قسم على  $x + 3$

(38) تحد: ثنائية الحد عامل من عوامل كثيرة الحدود

(39) تبرير: درجة ناتج القسمة + درجة المقسوم عليه = درجة المقسوم.

(40) مسألة مفتوحة:  $\frac{x^2 + 5x + 9}{x + 2}$

(41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسر اجابتك.

$\frac{5}{x^2}$  ؛ لأن مقامها يحوي  $x^2$  ، في حين أن الباقي العبارات كثيرات حدود.

(42) أكتب:

نقسم  $140x^2 + 60x$  على  $10x$  فيكون الناتج  $14x + 6$  و يمثل طول الغلاف كاملاً. ثم نطرح  $14x$  من الناتج فنحصل على 6 نصفها و هو العدد 3 يمثل عرض كل من جزأي الشئ

### تدريب على اختبار

(43) أي مما يأتي يكافئ العبارة:

الاختيار الصحيح: (C)  $-10x^2 + 17x$

(44) أي كثيرات الحدود الآتية درجتها أي كثيرات الحدود الآتية درجتها 3 ؟

الاختيار الصحيح: (D)  $1 + x + x^3$

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$4a(2a-3) + 3a(5a-4) \quad (45)$$

$$8a^2 - 12a + 15a^2 - 12a =$$

$$23a^2 - 24a =$$

$$(xy)^2 (2xy^2z)^3 \quad (46)$$

$$(x^2y^2)(8x^3y^6z^3) =$$

$$8x^5y^8z^3 =$$

$$(3ab^2)^{-2} (2a^2b)^2 \quad (47)$$

$$\frac{(2a^2b)^2}{(3ab^2)^2} = \frac{4a^4b^2}{9a^2b^4}$$

$$\frac{4a^2}{9b^2} =$$

$$f(x) = 4x + 3 \quad (48)$$

$$f(-6) = 4(-6) + 3 = -24 + 3 = -21$$

$$h(x) = -2x^2 - 2x + 4 \quad (49)$$

$$h(3) = -2(3)^2 - 2(3) + 4$$

$$h(3) = -18 - 6 + 4 = -20$$

$$f(x) = 4x + 3 \quad (50)$$

$$f(c) = 4c + 3$$



## دوال كثيرات الحدود Polynomial Functions

3-5

تَحَقِّقْ

$$5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x} \quad (1A)$$

ليست كثيرة حدود لأن أحد الحدود يحتوي متغيراً بالمقام.

$$5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14 \quad (1B)$$

درجتها 6 ، المعامل الرئيسي 5 .

$$8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3 \quad (1C)$$

درجتها 6 ، المعامل الرئيس -1

$$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t \quad (2)$$

$$v(4) = -0.037(4)^3 + 0.152(4)^2 + 0.173(4)$$

$$v(4) = -2.368 + 2.432 + 0.692$$
$$= 0.756$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 8 \quad (3A)$$

$$g(2a) = (2a)^2 - 5(2a) + 8$$

$$3g(2a) = 12a^2 - 30a + 8$$

$$g(5a - 2) = (5a - 2)^2 - 5(5a - 2) + 8$$

$$= 25a^2 - 20a + 4 - 25a + 10 + 8$$

$$= 25a^2 - 45a + 22$$

$$g(5a - 2) + g(2a) = 37a^2 - 75a + 36$$

$$h(x) = 2x^2 + 5x + 3 \quad (3B)$$

$$h(d) = 2d^2 + 5d + 3$$

$$0.5h(d) = 0.5(2d^2) + 0.5(5d) + 0.5(3)$$

$$0.5h(d) = d^2 + 2.5d + 1.5$$

$$h(-4d + 3) = 2(-4d + 3)^2 + 5(-4d + 3) + 3$$

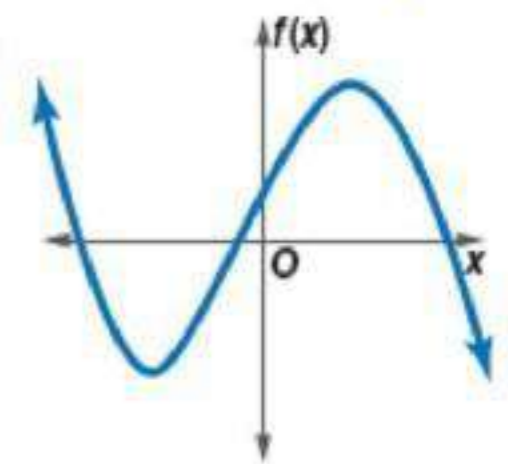
$$h(-4d + 3) = 32d^2 - 48d + 18 - 20d + 15 + 3$$

$$h(-4d + 3) = 32d^2 - 68d + 36$$

$$h(-4d + 3) - 0.5h(d) = 32d^2 - 68d + 36 - (d^2 + 2.5d + 1.5)$$

$$h(-4d + 3) - 0.5h(d) = 31d^2 - 70.5d + 34.5$$

(4A)

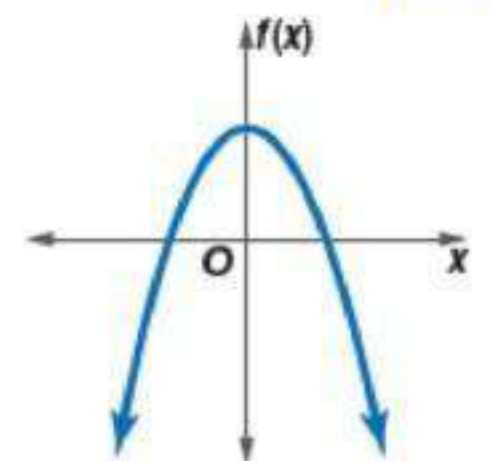


$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة. يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط، لذا يكون للدالة ثلاث اصفار حقيقية

(4B)



$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الإتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة. يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في نقطتين، لذا يكون للدالة صفران حقيقيان.



$$11x^6 - 5x^5 + 4x^2 \quad (1)$$

الدرجة 6 ، المعامل الرئيس 11

$$-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22 \quad (2)$$

الدرجة 7 ، و المعامل الرئيس -10

$$14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y \quad (3)$$

ليست كثيرة حدود بمتغير واحد، فهنا متغيرين هما  $x$  ،  $y$

$$8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5 \quad (4)$$

ليست كثيرة حدود بمتغير واحد، فهنا متغيرين هما  $x$  ،  $y$

أوجد  $w(5)$  ،  $w(-4)$  لكل من الدالتين الآتيتين:

$$w(x) = -2x^3 + 3x - 12 \quad (5)$$

$$w(-4) = -2(-4)^3 + 3(-4) - 12$$

$$w(-4) = 128 - 12 - 12 = 104$$

$$w(5) = -2(5)^3 + 3(5) - 12$$

$$w(5) = -250 + 15 - 12 = -247$$

$$w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8 \quad (6)$$

$$w(-4) = 2(-4)^4 - 5(-4)^3 + 3(-4)^2 - 2(-4) + 8$$

$$w(x) = 512 + 320 + 48 + 8 + 8 = 896$$

$$w(5) = 2(5)^4 - 5(5)^3 + 3(5)^2 - 2(5) + 8$$

$$w(5) = 1250 - 625 + 75 - 10 + 8 = 698$$

إذا كانت  $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$ ,  $d(x) = 3x^2 + 6x - 10$ ، فأوجد كلًا مما يأتي:

$$c(y^3) \quad (7)$$

$$c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$$

$$c(y^3) = 4(y^3)^3 - 5(y^3)^2 + 2$$

$$c(y^3) = 4y^9 - 5y^6 + 2$$

$$-4[d(3z)] \quad (8)$$

$$d(x) = 3x^2 + 6x - 10$$

$$-4[d(3z)] = -4[3(3z)^2 + 6(3z) - 10]$$

$$-4[d(3z)] = -4[27z^2 + 18z - 10]$$

$$-4[d(3z)] = -108z^2 - 72z + 40$$

$$6c(4a) + 2d(3a - 5) \quad (9)$$

$$c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$$

$$d(x) = 3x^2 + 6x - 10$$

$$6c(4a) = 6[4(4a)^3 - 5(4a)^2 + 2]$$

$$6c(4a) = 1536a^3 - 480a^2 + 12$$

$$2d(3a - 5) = 3(3a - 5)^2 + 6(3a - 5) - 10$$

$$2d(3a - 5) = 2[3(9a^2 - 30a + 25) + 6(3a - 5) - 10]$$

$$2d(3a - 5) = 54a^2 - 144a + 70$$

$$6c(4a) + 2d(3a - 5) = 1536a^3 - 480a^2 + 12 + 54a^2 - 144a + 70$$

$$6c(4a) + 2d(3a - 5) = 1536a^3 - 426a^2 - 144a + 82$$

$$-3c(2b) + 6d(4b - 3) \quad (10)$$

$$c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$$

$$d(x) = 3x^2 + 6x - 10$$

$$-3c(2b) = -3[4(2b)^3 - 5(2b)^2 + 2]$$

$$-3c(2b) = -96b^3 + 60b^2 - 6$$

$$6d(4b - 3) = 6[3(4b - 3)^2 + 6(4b - 3) - 10]$$

$$6d(4b - 3) = 6[3(16b^2 - 24b + 9) + 6(4b - 3) - 10]$$

$$6d(4b - 3) = 288b^2 - 288b - 6$$

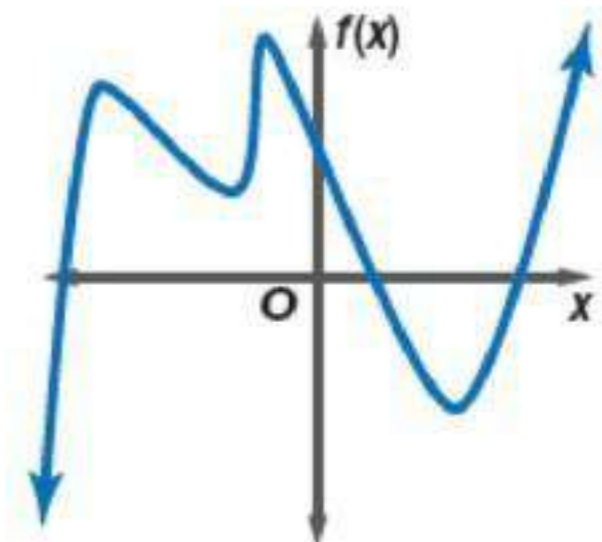
$$-3c(2b) + 6d(4b - 3) = -96b^3 + 60b^2 - 6 + 288b^2 - 288b - 6$$

$$-3c(2b) + 6d(4b - 3) = -96b^3 + 348b^2 - 288b - 12$$

أجب عن الفروع من a-c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

- (a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- (b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- (c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(11)



(a)  $x \rightarrow -\infty$  عندما  $f(x) \rightarrow -\infty$

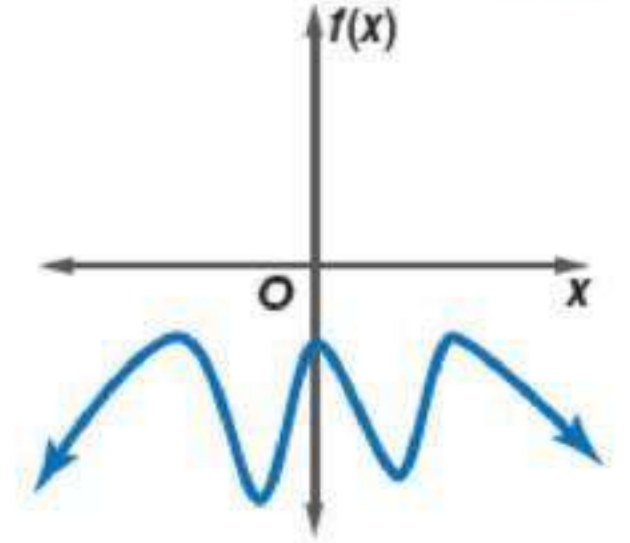
$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty$$

(b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة.

(c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط، لذا يكون للدالة ثلاثة أصفار

حقيقية.

(12)



$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty \quad (a)$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

(b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الإتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة.

(c) لا يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات ، لذا لا يوجد للدالة أصفار حقيقية.

## تمارين ومسائل

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

$$-6x^6 - 4x^5 + 13xy \quad (13)$$

ليست دالة بمتغير واحد، هنالك متغيرين  $x$  و  $y$

$$3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a} \quad (14)$$

ليست كثيرة حدود لأنها تتضمن أساً سالباً أو متغيراً في المقام.

$$8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9 \quad (15)$$

درجتها 6 ، و المعامل الرئيس -12-

$$-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7 \quad (16)$$

درجتها 7 ، و المعامل الرئيس -21-

$$13b^3 - 9b + 3b^5 - 18 \quad (17)$$

درجتها 5 ، و المعامل الرئيس 3

$$(5 - 2y)(4 + 3y) \quad (18)$$

$$20 + 7xy - 6y^2 =$$

درجتها 2 ، و المعامل الرئيس -6-

$$6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2 \quad (19)$$

درجتها 9 ، و المعامل الرئيس 2

$$7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7 \quad (20)$$

درجتها 8 ، و المعامل الرئيس -2-

أوجد  $p(3)$  ,  $p(-6)$  لكل دالة مما يأتي:

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \quad (21)$$

$$p(3) = (3)^4 - 2(3)^2 + 3$$

$$p(3) = 81 - 18 + 3 = 66$$

$$p(-6) = (-6)^4 - 2(-6)^2 + 3$$

$$p(-6) = 1296 - 72 + 3 = 1227$$

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24 \quad (22)$$

$$p(3) = (3)^4 - 4(3)^3 + 3(3)^2 - 5(3) + 24$$

$$p(3) = 81 - 108 + 27 - 15 + 24 = 9$$

$$p(-6) = (-6)^4 - 4(-6)^3 + 3(-6)^2 - 5(-6) + 24$$

$$p(-6) = 1296 + 864 + 108 + 30 + 24 = 2322$$

$$p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5 \quad (23)$$

$$p(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 - 5$$

$$p(3) = -27 + 27 - 5 = -5$$

$$p(-6) = -(-6)^3 + 3(-6)^2 - 5$$

$$p(-6) = 216 + 108 - 5 = 319$$

$$p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 \quad (24)$$

$$p(3) = 2(3)^4 + (3)^3 - 4(3)^2$$

$$p(3) = 162 + 27 - 36 = 153$$

$$p(-6) = 2(-6)^4 + (-6)^3 - 4(-6)^2$$

$$p(-6) = 2592 - 216 - 144 = 2232$$

إذا كانت  $c(x) = 2x^2 - 4x + 3$  ,  $d(x) = -x^3 + x + 1$  فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$$c(3a) \quad (25)$$

$$c(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

$$c(3a) = 2(3a)^2 - 4(3a) + 3$$

$$c(3a) = 18a^2 - 12a + 3$$

$$5d(2a) \quad (26)$$

$$d(x) = -x^3 + x + 1$$

$$5d(2a) = 5[-(2a)^3 + (2a) + 1]$$

$$5d(2a) = -40a^3 + 10a + 5$$



$$c(b^2) \quad (27)$$

$$c(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

$$c(b^2) = 2(b^2)^2 - 4(b^2) + 3$$

$$c(b^2) = 2b^4 - 4b^2 + 3$$

$$d(4a^2) \quad (28)$$

$$d(x) = -x^3 + x + 1$$

$$d(4a^2) = -(4a^2)^3 + (4a^2) + 1$$

$$d(4a^2) = -64a^6 + 4a^2 + 1$$

$$d(4y-3) \quad (29)$$

$$d(x) = -x^3 + x + 1$$

$$d(4y-3) = -(4y-3)^3 + (4y-3) + 1$$

$$(4y-3)^3 = (4y-3)(4y-3)^2$$

$$(4y-3)^3 = (4y-3)(16y^2 - 24y + 9)$$

$$(4y-3)^3 = 64y^3 - 144y^2 + 108y - 27$$

$$d(4y-3) = -64y^3 + 144y^2 - 108y + 27 + 4y - 3 + 1$$

$$d(4y-3) = -64y^3 + 144y^2 - 104y + 25$$

$$c(y^2-1) \quad (30)$$

$$c(y^2-1) = 2(y^2-1)^2 - 4(y^2-1) + 3$$

$$(y^2-1)^2 = (y^2-1)(y^2-1)$$

$$(y^2-1)^2 = y^4 - 2y^2 + 1$$

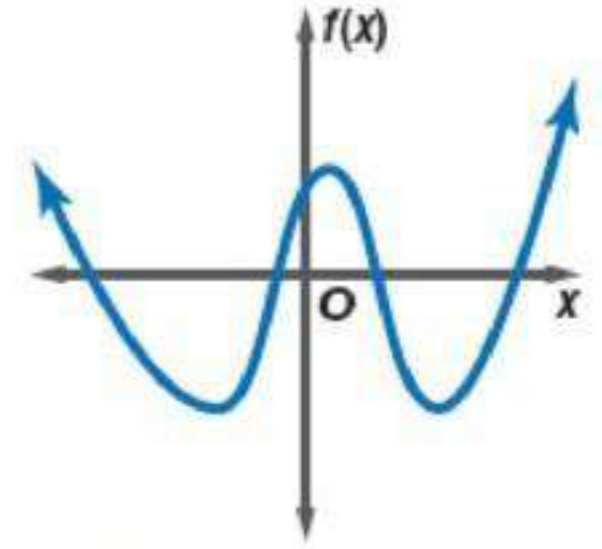
$$c(y^2-1) = 2(y^4 - 2y^2 + 1) - 4(y^2-1) + 3$$

$$c(y^2-1) = 2y^4 - 8y^2 + 9$$

أجب عن الفروع من a-c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

- (a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.  
(b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.  
(c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(31)



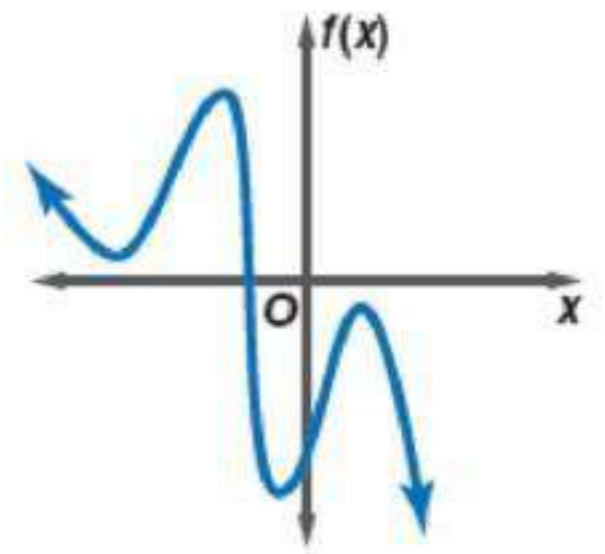
(a)  $f(x) \rightarrow +\infty$  عندما  $x \rightarrow -\infty$

$f(x) \rightarrow +\infty$  عندما  $x \rightarrow +\infty$

(b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الإتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة.

(c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في 4 نقاط، لذا هناك للدالة 4 أصفار حقيقية.

(32)



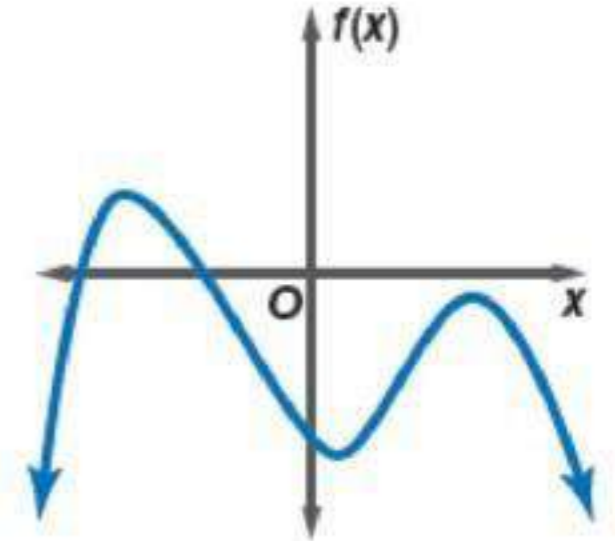
(a)  $f(x) \rightarrow +\infty$  عندما  $x \rightarrow -\infty$

$f(x) \rightarrow -\infty$  عندما  $x \rightarrow +\infty$

(b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة.

(c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في نقطة واحدة، لذا هناك للدالة صفر حقيقي واحد.

(33)



$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty \quad (a)$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

(b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الإتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة.

(c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في نقطتين، لذا هناك للدالة صفران حقيقيان.

(34) فيزياء:

$$KE(11) = 0.5(171)(11)^2$$

$$KE(11) = 10345.5 \text{ جول}$$

أوجد  $f(8)$ ,  $f(-2)$  لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 \quad (35)$$

$$f(8) = \frac{1}{4}(8)^4 + \frac{1}{2}(8)^3 - 4(8)^2$$

$$f(8) = 1024 + 256 - 256 = 1024$$

$$f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{2}(-2)^3 - 4(-2)^2$$

$$f(-2) = 4 - 4 - 16 = -16$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18 \quad (36)$$

$$f(8) = \frac{1}{8}(8)^4 - \frac{3}{2}(8)^3 + 12(8) - 18$$

$$f(8) = 512 - 768 + 96 - 18 = -178$$

$$f(-2) = \frac{1}{8}(-2)^4 - \frac{3}{2}(-2)^3 + 12(-2) - 18$$

$$f(-2) = 2 + 12 - 24 - 18 = -28$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x \quad (37)$$

$$f(8) = \frac{3}{4}(8)^4 - \frac{1}{8}(8)^2 + 6(8)$$

$$f(8) = 3072 - 8 + 48 = 3112$$

$$f(-2) = \frac{3}{4}(-2)^4 - \frac{1}{8}(-2)^2 + 6(-2)$$

$$f(-2) = 12 - \frac{1}{2} - 12 = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10 \quad (38)$$

$$f(8) = \frac{5}{8}(8)^3 - \frac{1}{2}(8)^2 + \frac{3}{4}(8) + 10$$

$$f(8) = 320 - 32 + 6 + 10 = 304$$

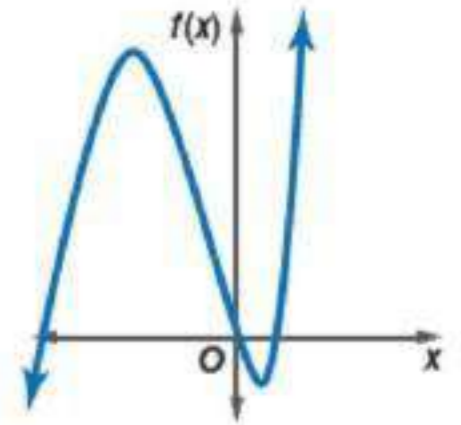
$$f(-2) = \frac{5}{8}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + \frac{3}{4}(-2) + 10$$

$$f(-2) = -5 - 2 - \frac{3}{2} + 10 = \frac{3}{2}$$

حدّد التمثيل البياني المناسب لكل دالة في الأسئلة (39-42) مستعملاً درجة كثيرة الحدود وسلوك طرفي التمثيل البياني لها.

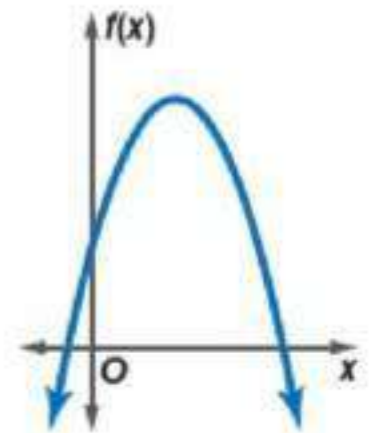
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x \quad (39)$$

الاختيار الصحيح (D)



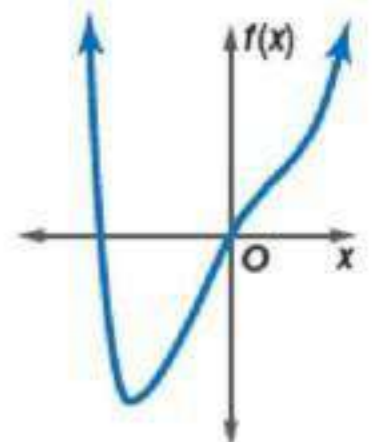
$$f(x) = -2x^2 + 8x + 5 \quad (40)$$

الاختيار الصحيح (B)



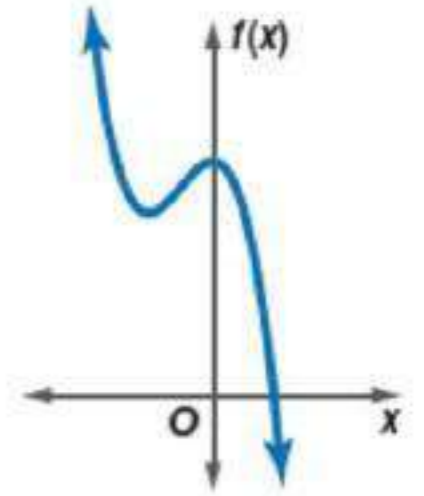
$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x \quad (41)$$

الاختيار الصحيح (A)



$$f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8 \quad (42)$$

الاختيار الصحيح (C)



إذا كانت  $c(x) = x^3 - 2x$ ،  $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$  فأوجد كلاً مما يأتي:

$$3c(a-4) + 3d(a+5) \quad (43)$$

$$c(x) = x^3 - 2x$$

$$d(x) = 4x^2 - 6x + 8$$

$$3c(a-4) = 3[(a-4)^3 - 2(a-4)]$$

$$3c(a-4) = 3[a^3 - 8a^2 + 16a - 4a^2 + 32a - 64 - 2a + 8]$$

$$3c(a-4) = 3a^3 - 36a^2 + 138a - 168$$

$$3d(a+5) = 3[4(a+5)^2 - 6(a+5) + 8]$$

$$3d(a+5) = 3[4(a^2 + 10a + 25) - 6(a+5) + 8]$$

$$3d(a+5) = 12a^2 + 102a + 234$$

$$3c(a-4) + 3d(a+5) = 3a^3 - 36a^2 + 142a - 56 + 12a^2 + 102a + 234$$

$$3c(a-4) + 3d(a+5) = 3a^3 - 24a^2 + 240a + 66$$

$$-2d(2a+3) - 4c(a^2+1) \quad (44)$$

$$c(x) = x^3 - 2x$$

$$d(x) = 4x^2 - 6x + 8$$

$$-2d(2a+3) = -2[4(2a+3)^2 - 6(2a+3) + 8]$$

$$-2d(2a+3) = -2[(16a^2 + 48a + 36) - (12a + 18) + 8]$$

$$-2d(2a+3) = -32a^2 - 72a - 52$$

$$4c(a^2+1) = 4[(a^2+1)^3 - 2(a^2+1)]$$

$$4c(a^2+1) = 4[a^6 + 5a^4 + 2a^2 - 1]$$

$$4c(a^2+1) = 4a^6 + 12a^4 + 4a^2 - 4$$

$$-2d(2a+3) - 4c(a^2+1) = -4a^6 - 12a^4 - 36a^2 - 72a - 48$$

$$5c(a^2) - 8d(6-3a) \quad (45)$$

$$c(x) = x^3 - 2x$$

$$d(x) = 4x^2 - 6x + 8$$

$$5c(a^2) = 5[(a^2)^3 - 2(a^2)] = 5a^6 - 10a^2$$

$$8d(6-3a) = 8[4(36-36a+9a^2) - 6(6-3a) + 8]$$

$$8d(6-3a) = 288a^2 - 1008a + 928$$

$$5c(a^2) - 8d(6-3a) = 5a^6 - 298a^2 + 1008a - 928$$

$$-7d(a^3) + 6c(a^4+1) \quad (46)$$

$$c(x) = x^3 - 2x$$

$$d(x) = 4x^2 - 6x + 8$$

$$-7d(a^3) = -7[4(a^3)^2 - 6(a^3) + 8]$$

$$-7d(a^3) = -28a^6 + 42a^3 - 56$$

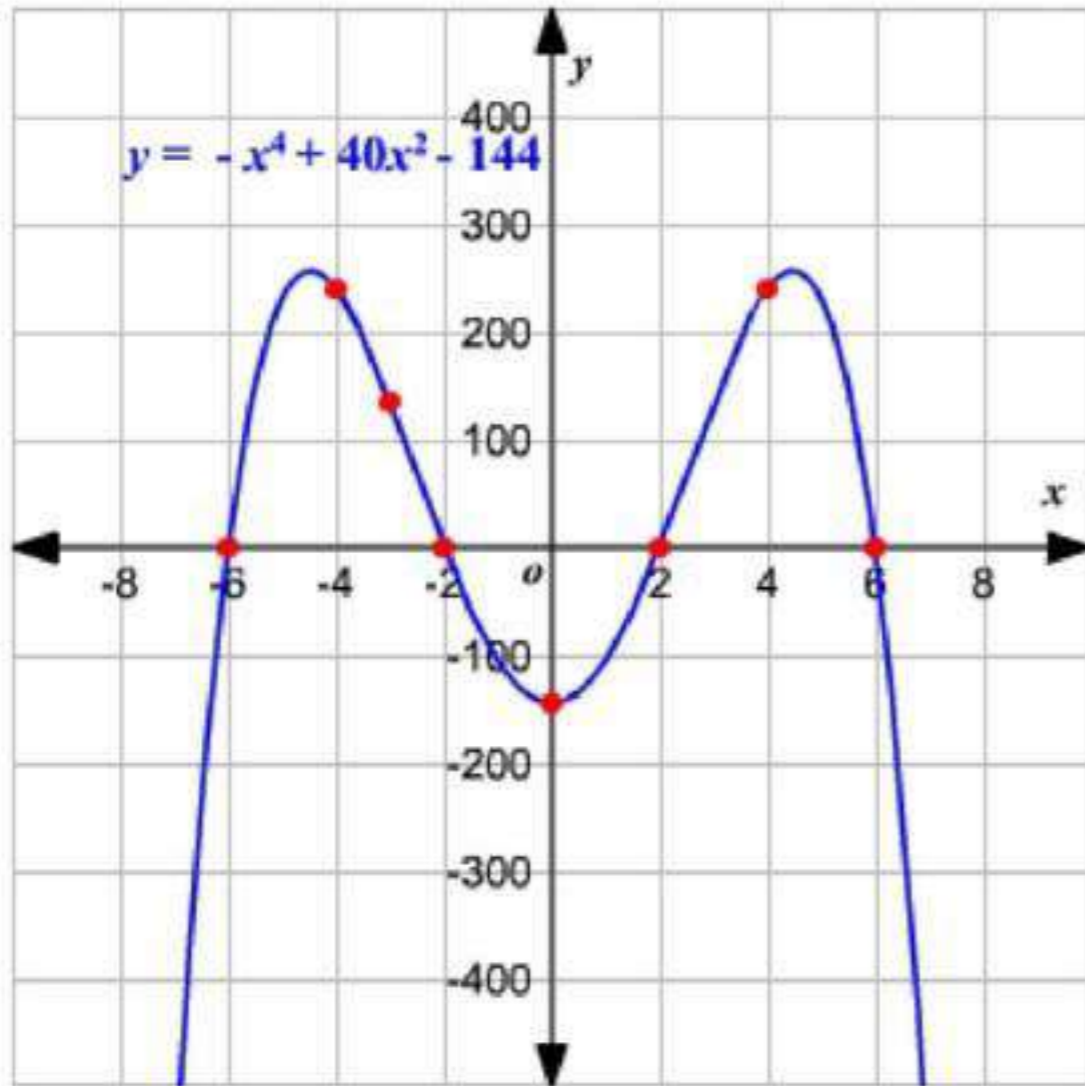
$$6c(a^4+1) = 6[(a^4+1)^3 - 2(a^4+1)]$$

$$6c(a^4+1) = 6a^{12} + 18a^8 + 6a^4 - 6$$

$$-7d(a^3) + 6c(a^4+1) = 6a^{12} + 18a^8 - 28a^6 + 6a^4 + 42a^3 - 62$$

(47) ملابس:

(a)



x	w(x)
-7	-585
-6	0
-4	240
-3	135
-2	0
0	-144
1	-105
2	0
4	240
6	0
7	-585

$$w(x) = -x^4 + 40x^2 - 144 \quad (b)$$

حسب التمثيل البياني يقطع المحور السيني في النقاط  $-6, -2, 2, 6$  ،  
أصفار الدالة هي  $-6, -2, 2, 6$

(c) لتحقيق الربح يجب ان تكون قيمة الدالة أكبر من صفر  
من التمثيل البياني نجد أن الدالة أكبر من صفر من 2000 إلى 6000  
إذن يجب أن أن يبيع المصنع بين 2000 إلى 6000 قطعة ليحقق ربحاً

(d) تحذف الإجابة السالبة؛ لأن المصنع لا ينتج عدداً سالباً من القطع.



(48) تمثيلات متعددة، افترض أن  $g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)(x+4)$   
(a) تحليلياً:

درجتها 4 ، التقاطع مع المحور  $x$  عند  $3, 2, -1, -4$  ،  
و التقاطع مع المحور  $y$  عند 24 ز الجذور  $3, 2, -1, -4$  ،  
سلوك طرفي تمثيلها البياني

عندما  $x \rightarrow -\infty$   $g(x) \rightarrow +\infty$

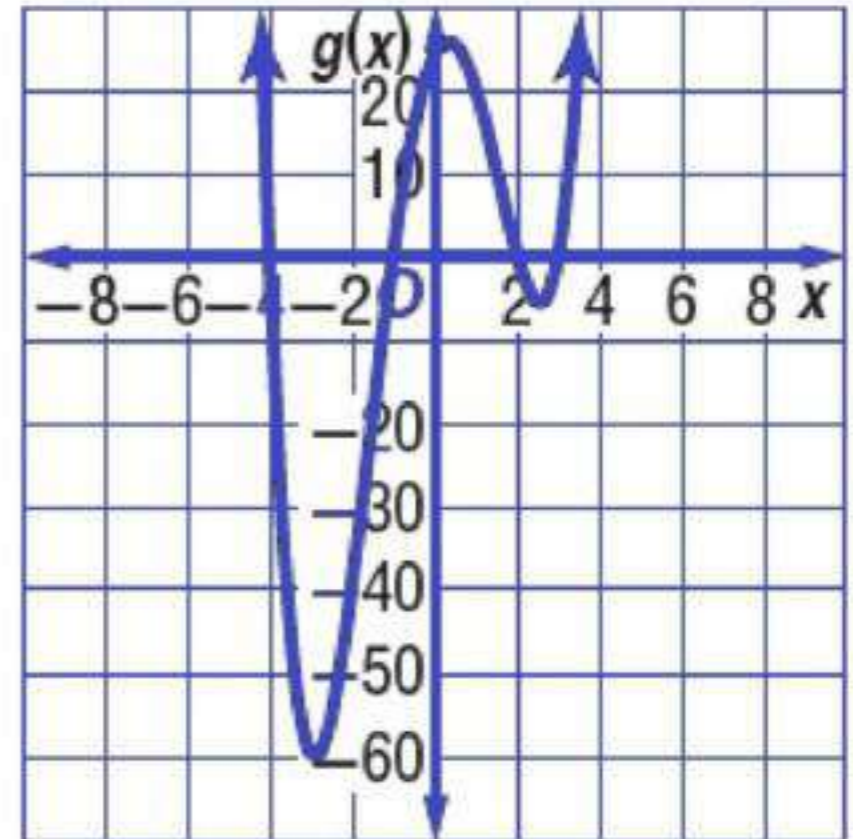
عندما  $x \rightarrow +\infty$   $g(x) \rightarrow +\infty$

(b)  $g(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$

(c)

$x$	$g(x)$
-5	224
-4	0
-3	-60
-2	-40
-1	0
0	24
1	20
2	0
3	0
4	80
5	324

(d)



صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة فيما يلي:

$$f(x) = -5x^4 + 3x^2 \quad (49)$$

الدرجة: 4، الرئيس -5

حيث أن الدرجة عدد زوجي و الرئيس سالب

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$g(x) = 2x^5 + 6x^4 \quad (50)$$

الدرجة: 5، الرئيس 2

حيث أن الدرجة عدد فردي و الرئيس موجب

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } g(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } g(x) \rightarrow +\infty$$

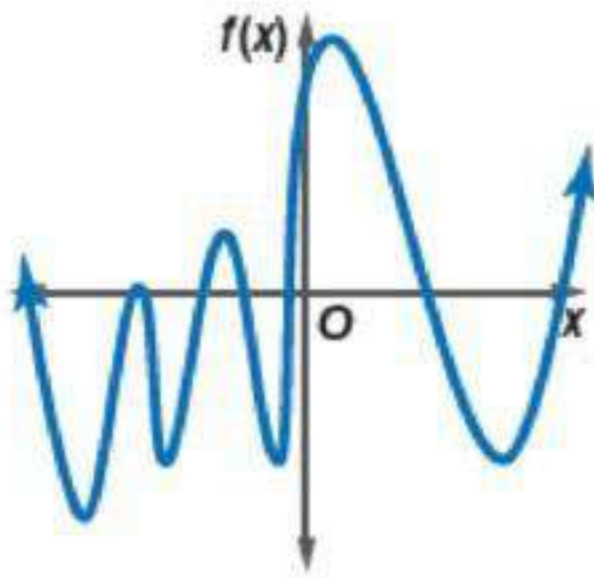
$$h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x \quad (51)$$

الدرجة: 7، الرئيس -4

حيث أن الدرجة عدد فردي و الرئيس سالب

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } h(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } h(x) \rightarrow -\infty$$



(52) اكتشف الخطأ:

ماجد؛ فالدالة الزوجية لها عدد زوجي من الأصفار.  
و الجذر المكرر مرتين يدل على وجود صفرين.

(53) تحد:

● نحدد درجة  $\frac{f(x)}{g(x)}$  :  $f(x)$  درجتها 5 ، و  $g(x)$  درجتها 3 ، لذا درجة  $\frac{f(x)}{g(x)}$  يجب أن تكون 2.

● نحدد إشارة العامل الرئيس : حيث  $f(x)$  موجب ، و  $g(x)$  موجب، لذا إشارة

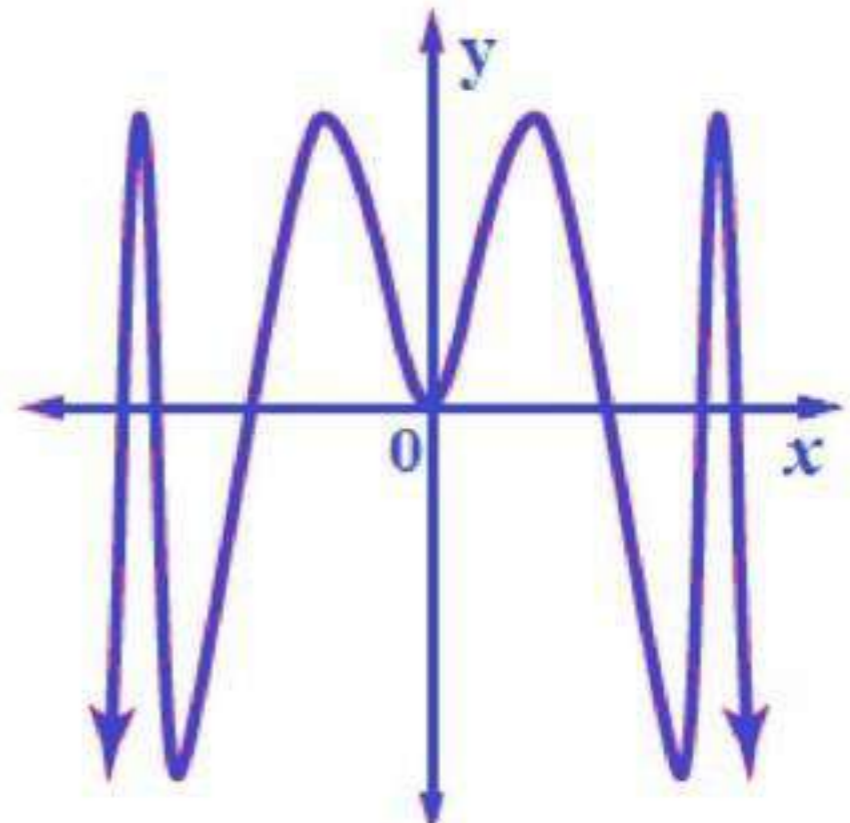
$\frac{f(x)}{g(x)}$  يجب أن تكون سالبة.

● نحدد سلوك  $\frac{f(x)}{g(x)}$  : حيث أن  $g(x)$  درجتها عدد زوجي و العامل الرئيس سالب،  
يكون سلوكها كالتالي:

$f(x) \rightarrow +\infty$  عندما  $x \rightarrow -\infty$

$f(x) \rightarrow +\infty$  عندما  $x \rightarrow +\infty$

(54) مسألة مفتوحة



**(55) أكتب:**

يدل سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود عند النهايتين على القيم التي يقترب منها المنحنى عندما تقترب قيمة المتغير في الدالة من المالا نهاية في الإتجاهين الموجب و السالب.  
و يمكن تحديد هذا السلوك من العامل الرئيس و درجة كثيرة الحدود.

### تدريب على اختيار

**(56) الإجابة الصحيحة: (C) -1**

**(57) الإجابة الصحيحة: (C) -35**

## مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y} \quad (58)$$

$$\frac{\cancel{2}16x^{4-2}y^{3-1} + \cancel{4}32x^{6-2}y^{5-1}z^2}{\cancel{8}} = 2x^2y^2 + 4x^4y^4z^2$$

$$\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2} \quad (59)$$

$$\frac{18a^{1-1}b^{4-1}c^{5-2} - 30a^{4-1}b^{3-1}c^{2-2} + 12a^{5-1}b^{1-1}c^{3-2}}{6} =$$

$$\frac{\cancel{3}18b^3c^3 - \cancel{5}30a^3b^2 + \cancel{2}12a^4c}{\cancel{6}} = 3b^3c^3 - 5a^3b^2 + 2a^4c$$

$$\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2} \quad (60)$$

$$\frac{18c^{5-2}d^{2-2} - 3c^{2-2}d^{2-2} + 12a^5c^{3-2}d^{4-2}}{3} =$$

$$\frac{\cancel{6}18c^3 - \cancel{3} + \cancel{4}12a^5cd^2}{\cancel{3}} = 6c^3 - 1 + 4a^5cd^2$$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها: (الدرس 3-3)

$$8x^2 + 5xy^3 - 6x + 4 \quad (61)$$

نعم؛ درجتها 4

$$9x^4 + 12x^6 - 16 \quad (62)$$

نعم؛ درجتها 6

$$3x^4 + 2x^2 - x^{-1} \quad (63)$$

ليست كثيرة حدود

حل كلاً من المعادلات الآتية مستعملًا القانون العام لحل المعادلة التربيعية: (الدرس 2-3)

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad (64)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x + x^2 + 1 = 0 \quad (65)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x^2 - 13x + 12 = 0 \quad (66)$$

$$(x - 12)(x - 1) = 0$$

$$x - 12 = 0$$

$$x = 12$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

الفصل  
3  
اختبار منتصف الفصل  
الدروس 3-1 إلى 3-5

بسط كلاً مما يأتي:

$$9i \sqrt{-81} \quad (1=$$

$$(15 - 3i) - (4 - 12i) \quad (2$$

$$15 - 3i - 4 + 12i =$$

$$11 + 9i =$$

$$i^{37} \quad (3 \quad i =$$

$$\frac{3-i}{2+5i} \quad (4$$

$$\frac{3-i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} =$$

$$\frac{6 - 2i - 15i + 5i^2}{4 - 25i^2} =$$

$$\frac{1 - 17i}{29} =$$

$$\frac{1}{29} - \frac{17}{29}i =$$

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين:

$$x^2 - 8x - 9 = 0 \quad (5$$

$$(x - 9)(x + 1) = 0$$

$$x - 9 = 0$$

$$x = 9$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$-4.8x^2 + 1.6x + 24 = 0 \quad (6)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1.6 \pm \sqrt{(1.6)^2 - 4(-4.8)(24)}}{2(-4.8)}$$

$$x = \frac{-1.6 \pm \sqrt{463.36}}{-9.6}$$

$$x = \frac{(-1.6 \pm \sqrt{463.36}) \div -1.6}{-9.6 \div -1.8}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{181}}{6}$$

بسط كلًا مما يأتي مفترضًا أن أبا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

$$\begin{aligned} (3x^2y^{-3})(-2x^3y^5) & \quad (7) \\ -6x^{2+3}y^{-3+5} & = \\ -6x^5y^2 & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4t(3rt - r) & \quad (8) \\ 4t(3rt) - 4t(r) & = \\ 12rt^2 - 4rt & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3a^4b^3c}{6a^2b^5c^3} & \quad (9) \\ \frac{1}{2}a^{4-2}b^{3-5}c^{1-3} & = \\ \frac{1}{2}a^2b^{-2}c^{-2} & = \\ \frac{a^2}{2b^2c^2} & = \end{aligned}$$





$$\begin{array}{r}
2r^2 + r - 4 \\
2r - 5 \overline{) 4r^3 - 8r^2 - 13r + 20} \\
\underline{(-) 4r^3 - 10r^2} \phantom{+ 20} \\
+ 2r^2 - 13r + 20 \\
\underline{(-) 2r^2 - 5r} \phantom{+ 20} \\
- 8r + 20 \\
\underline{(-) - 8r + 20} \\
3x^3 - 16x^2 + 9x - 24 \quad (14) \\
x - 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3x^2 - x + 4 \\
x - 5 \overline{) 3x^3 - 16x^2 + 9x - 24} \\
\underline{(-) 3x^3 - 15x^2} \phantom{+ 9x - 24} \\
- x^2 + 9x - 24 \\
\underline{(-) - x^2 + 5x} \phantom{- 24} \\
4x - 24 \\
\underline{(-) 4x - 20} \\
- 4 \\
3x^2 - x + 4 - \frac{4}{x-5} =
\end{array}$$

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلِّ ممَّا يأتي:

$$(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) \div (2x - 1) \quad (15)$$

$$\frac{(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) \div 2}{(2x - 1) \div 2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{3}{2}}{x - \frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2} \overline{) 2 \quad -3 \quad 3 \quad -\frac{3}{2}} \\
\downarrow \phantom{) 2 \quad -3 \quad 3 \quad -\frac{3}{2}} \\
2 \quad -2 \quad 2 \quad -\frac{1}{2}
\end{array}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-1} = -\frac{1}{2x-1}$$

$$2x^2 - 2x + 2 - \frac{1}{2x-1} =$$

$$(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 4x + 10) \div (x + 3) \quad (16)$$

$$\begin{array}{r} -3 \overline{) 1 \quad 3 \quad -2 \quad -4 \quad +10} \\ \underline{\downarrow -3 \quad 0 \quad 6 \quad -6} \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

$$x^3 - 2x + 2 + \frac{4}{x+3} =$$

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:

$$(x^2 + 2x - 24) \div (x - 4) \quad (17)$$

$$\begin{array}{r} x+6 \\ x-4 \overline{) x^2 + 2x - 24} \\ \underline{(-) x^2 - 4x} \quad \quad \quad \\ 6x - 24 \\ \underline{(-) 6x - 24} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

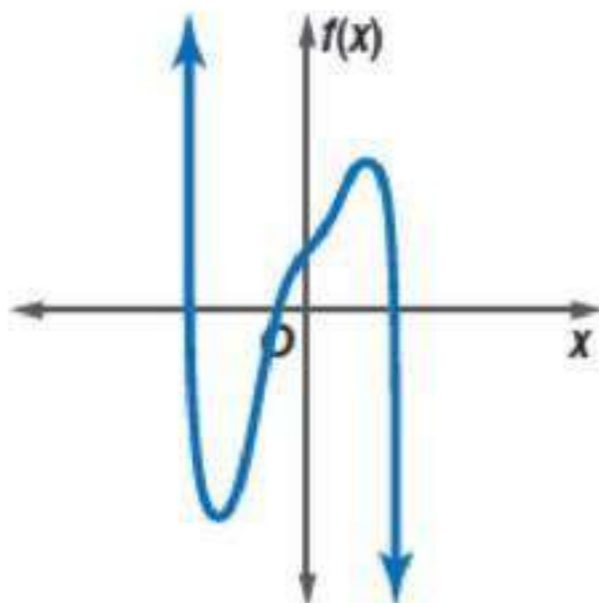
(18)

صف سلوك طرفي التمثيل البياني الآتي، وحدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية. واذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ عندما } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ عندما } x \rightarrow +\infty$$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين



فالدالة فردية الدرجة. يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط، لذا يكون للدالة ثلاث اصفار حقيقية

(19)

اختيار من متعدد: إذا كان  $p(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x$ ، فما قيمة  $p(-3)$ ؟

$$p(-3) = \frac{2}{3}(-3)^3 + \frac{1}{3}(-3)^2 - 5(-3)$$

$$p(-3) = -18 + 3 + 15 = 0$$

الإجابة الصحيحة: (A) 0

(20)

اختيار من متعدد: إذا كانت

$$f(x) = x^2 + 3x, h(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

فإن  $3f(a-4) - 2h(a)$

$$f(x) = x^2 + 3x$$

$$h(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$3f(a-4) = 3[(a-4)^2 + 3(a-4)]$$

$$3f(a-4) = 3[a^2 - 8a + 16 + 3a - 12]$$

$$3f(a-4) = 3a^2 - 15a + 12$$

$$2h(a) = 2[2a^2 - 3a + 5]$$

$$2h(a) = 4a^2 - 6a + 10$$

$$3f(a-4) - 2h(a) = 3a^2 - 15a + 12 - (4a^2 - 6a + 10)$$

$$3f(a-4) - 2h(a) = -a^2 - 9a + 2$$

الإجابة الصحيحة: (D)  $-a^2 - 9a + 2$

(21) بندول:

$$L(t) = \frac{8t^2}{\pi^2}$$

$$L(4) = \frac{8(4)^2}{\pi^2} = \frac{128}{\pi^2} = 12.97 \text{ ft.}$$

(22) طاقة:

$$P(s) = \frac{s^3}{1000}$$

$$P(18) = \frac{18^3}{1000}$$

$$= 5.832 \text{ وحدات}$$

تحقق

$$\begin{aligned}5y^4 - 320yz^3 & \quad (1A) \\5y(y^3 - 4^3z^3) & = \\5y(y - 4z)(y^2 + 4yz + 16z^2) & =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-54w^4 - 250wz^3 & \quad (1B) \\-2w(27w^3 + 125z^3) & = \\-2w(3w + 5z)(9w^2 - 15wz + 25z^2) & =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2 & \quad (2A) \\6x(5a - 4b + c) - y^2(5a + 4b - c) & = \\(5a - 4b + c)(6x - y^2) & =\end{aligned}$$

$$13ax + 18bz - 15by - 14az \quad (2B)$$

كثيرة حدود أولية

$$\begin{aligned}a^6 + b^6 & \quad (3A) \\(a^2)^3 + (b^2)^3 & = \\(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) & =\end{aligned}$$

$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3 \quad (3B)$$

$$x^3(x^2 + 4x + 4) + y^3(x^2 + 4x + 4) =$$

$$(x^3 + y^3)(x^2 + 4x + 4) =$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + 4x + 4) =$$

(4)

إذا كان طول ضلع المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي  $3250\text{cm}^3$ ، فأوجد بُعدي المكعبين.

طول ضلع المكعب الصغير  $x$  و طول ضلع المكعب الكبير  $3x$

$$(3x)^3 - x^3 = 3250$$

$$27x^3 - x^3 = 3250$$

$$x^3 = 125$$

$$3x = 15 \text{ cm}, x = 5 \text{ cm}$$

$$x^4 + 5x + 6 \quad (5A)$$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية

$$8x^4 + 12x^2 + 18 \quad (5B)$$

$$2(2x^2)^2 + 6(2x^2) + 18$$

$$4x^4 - 8x^2 + 3 = 0 \quad (6A)$$

$$(2x^2)^2 - 4(2x^2) + 3 = 0$$

نفرض أن  $2x^2 = u$

$$(u)^2 - 4(u) + 3 = 0$$

$$(u - 3)(u - 1) = 0$$

$$(u - 1) = 0$$

$$u = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$(u - 3) = 0$$

$$u = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$8x^4 + 10x^2 - 12 = 0 \quad (6B)$$

$$2(2x^2)^2 + 5(2x^2) - 12 = 0$$

نفرض أن  $2x^2 = u$

$$2(u)^2 + 5(u) - 12 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$u = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(-12)}}{2(2)}$$

$$u = \frac{-5 - 11}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

$$x^2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x = \pm \sqrt{-2} = \pm \sqrt{2}i$$

$$u = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$





$$3ax + 2ay - az + 3bx \quad (1)$$

كثيرة حدود أولية

$$16g^3 + 2h^3 \quad (2)$$
$$2(2^3g^3 + h^3)$$
$$2(2g + h)(4g^2 - 2gh + h^2)$$

$$12qw^3 - 12q^4 \quad (3)$$
$$12q(w^3 - q^3) =$$
$$12q(w - q)(w^2 + wq + q^2) =$$

$$a^6x^2 - b^6x^2 \quad (4)$$
$$x^2(a^6 - b^6) = x^2 \left[ (a^2)^3 - (b^2)^3 \right]$$
$$x^2(a^6 - b^6) = x^2(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$$
$$x^2(a^6 - b^6) = x^2(a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$$

$$x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3 \quad (5)$$
$$x^3(y^2 - 8y + 16) + y^3(y^2 - 8y + 16) =$$
$$(x^3 + y^3)(y^2 - 8y + 16) =$$
$$(x + y)(x^2 - xy + y^2)(y - 4)^2 =$$

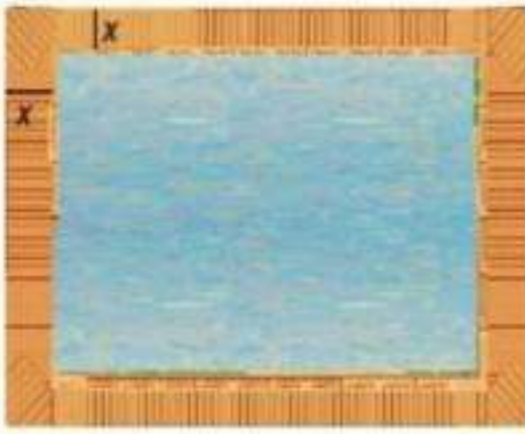
$$8c^3 - 125d^3 \quad (6)$$

$$2^3 c^3 - 5^3 d^3$$

$$(2c - 5d)(4c^2 + 10cd + 25d^2) =$$

(7)

إنشاءات: صنع أنس ممراً خشبياً عرضه  $x$  ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30 ft، ومساحتها مع الممر  $2000ft^2$ ، فما عرض الممر الخشبي؟



$$40 + 2x = \text{طول البركة مع الممر}$$

$$30 + 2x = \text{عرض البركة مع الممر}$$

$$(40 + 2x)(30 + 2x) = 2000$$

$$1200 + 60x + 80x + 4x^2 = 2000$$

$$4x^2 + 140x + 1200 = 2000$$

$$4x^2 + 140x - 800 = 0$$

$$x^2 + 35x - 200 = 0$$

$$(x + 40)(x - 5) = 0$$

$$(x + 40) = 0$$

$$x = -40$$

$$(x - 5) = 0$$

$$x = 5$$

لا توجد مسافة بالسالب

$$\therefore x = 5$$

عرض الممر الخشبي : 5 ft.

اكتب كلاً من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكناً:

$$4x^6 - 2x^3 + 8 \quad (8)$$

$$(2x^3)^2 - 1(2x^3) + 8$$

$$25y^6 - 5y^2 + 20 \quad (9)$$

لا يمكن كتابته على الصورة التربيعية لأن  $y^6 \neq (y^2)^2$

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين:

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2)(x^2 - 4) &= 0 \\
 (x^2 - 2) &= 0 & (x^2 - 4) &= 0 \\
 x^2 &= 2 & x^2 &= 4 \\
 x &= \pm\sqrt{2} & x &= \pm 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^4 - 18y^2 + 72 &= 0 \quad (11) \\
 (y^2 - 6)(y^2 - 12) &= 0 \\
 (y^2 - 12) &= 0 & (y^2 - 6) &= 0 \\
 y^2 &= 12 & y^2 &= 6 \\
 y &= \pm 2\sqrt{3} & y &= \pm\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

### تدريب وحل المسائل

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$\begin{aligned}
 8c^3 - 27d^3 & \quad (12) \\
 2^3c^3 - 3^3d^3 &= \\
 (2c - 3d)(4c^2 + 6cd + 9d^2) &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 64x^4 + xy^3 & \quad (13) \\
 x(4^3x^3 + y^3) &= \\
 x(4x + y)(16x^2 - 4xy + y^2) &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^8 - a^2b^6 & \quad (14) \\
 a^2(a^6 - b^6) &= \\
 a^2[(a^2)^3 - (b^2)^3] &= \\
 a^2(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) &= \\
 a^2(a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) &=
 \end{aligned}$$

$$x^6 y^3 + y^9 \quad (15)$$

$$y^3 (x^6 + y^6) =$$

$$y^3 \left( (x^2)^3 + (y^2)^3 \right) =$$

$$y^3 (x^2 + y^2) (x^4 - x^2 y^2 + y^4) =$$

$$gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2 \quad (16)$$

$$(x^2 - y^2) (6f + g - 3h) =$$

$$(x + y) (x - y) (6f + g - 3h) =$$

$$18x^6 + 5y^6 \quad (17)$$

كثيرة حدود أولية

$$8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2 y^3 + 200x^3 - 10xy^3 \quad (18)$$

$$(8x^3 - y^3) (x^2 + 10x + 25)$$

$$(2x - y) (2x^2 + 2xy + y^2) (x^2 + 10x + 25) =$$

$$(2x - y) (2x^2 + 2xy + y^2) (x + 5)^2 =$$

$$12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2 \quad (19)$$

$$6x^2 (2a - 3b + 4c) - 5y^2 (2a - 3b + 4c) =$$

$$(6x^2 - 5y^2) (2a - 3b + 4c) =$$

حل كل معادلة مما يأتي:

$$x^4 + x^2 - 90 = 0 \quad (20)$$

$$(x^2 + 10) (x^2 - 9) = 0$$

$$(x^2 - 9) = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$(x^2 + 10) = 0$$

$$x^2 = -10$$

$$x = \pm \sqrt{-10}$$

$$x = \pm \sqrt{10}i$$

$$(x^2 - 36) = 0$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

$$(x^2 - 11) = 0$$

$$x^2 = 11$$

$$x = \pm\sqrt{11}$$

$$(x + 6 = 0)$$

$$x = -6$$

$$x^4 - 16x^2 - 720 = 0 \quad (21)$$

$$(x^2 - 36)(x^2 + 20) = 0$$

$$(x^2 + 20) = 0$$

$$x^2 = -20$$

$$x = \pm\sqrt{-20}$$

$$x = \pm 2i\sqrt{5}$$

$$x^4 - 7x^2 - 44 = 0 \quad (22)$$

$$(x^2 - 11)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

$$x = \pm 2i$$

$$x^4 + 6x^2 - 91 = 0 \quad (23)$$

$$(x^2 + 13)(x^2 - 7) = 0$$

$$(x^2 + 13)(x^2 - 7) = 0$$

$$(x^2 + 13) = 0$$

$$x^2 = -13$$

$$x = \pm\sqrt{-13}$$

$$x = \pm i\sqrt{13}$$

$$x^3 + 216 = 0 \quad (24)$$

$$(x + 6)(x^2 + 6x + 36) = 0$$

$$(x^2 + 6x + 36) = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - (4 \times 1 \times 36)}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-108}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm 6i\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -3 \pm 3i\sqrt{3}$$

$$64x^3 + 1 = 0 \quad (25)$$

$$4^3 x^3 + 1 = 0$$

$$(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$(16x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(16)(1)}}{2(16)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{32}$$

$$x = \frac{4 \pm 4\sqrt{-3}}{32}$$

$$x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{8}$$

اكتب كل عبارة مما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

$$x^4 + 12x^2 - 8 \quad (26)$$

$$(x^2)^2 + 12(x^2) - 8$$

$$-15x^4 + 18x^2 - 4 \quad (27)$$

$$-15(x^2)^2 + 18(x^2) - 4$$

$$8x^6 + 6x^3 + 7 \quad (28)$$

$$2(2x^3)^2 + 3(2x^3) + 12$$

$$5x^6 - 2x^2 + 8 \quad (29)$$

غير ممكن

$$9x^8 - 21x^4 + 12 \quad (30)$$

$$(3x^4)^2 - 7(3x^4) + 12$$

$$16x^{10} + 2x^5 \quad (31)$$

غير ممكن

حل كل معادلة مما يأتي:

$$x^4 + 6x^2 + 5 = 0 \quad (32)$$

$$(x^2)^2 + 6(x^2) + 5 = 0$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$u^2 + 6u + 5 = 0$$

$$(u-1)(u+5) = 0$$

$$u = -5$$

$$x^2 = -5$$

$$x = \pm i\sqrt{5}$$

$$u = -1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$x^4 - 3x^2 - 10 = 0 \quad (33)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$u^2 = x^4$$

$$u^2 - 3u - 10 = 0$$

$$(u-5)(u+2) = 0$$

$$(u-5) = 0$$

$$(x^2 - 5) = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$(u+2) = 0$$

$$(x^2 + 2) = 0$$

$$x^2 = -2$$

$$x = \pm i\sqrt{2}$$

$$4x^4 - 14x^2 + 12 = 0 \quad (34)$$

$$(2x^2)^2 - 7(2x^2) + 12 = 0$$

نفرض أن  $2x^2 = u$

$$\begin{aligned}
 & u^2 - 7u + 12 = 0 \\
 & (u-4)(u-3) = 0 \\
 (u-4) &= 0 & (u-3) &= 0 \\
 u &= 4 & u &= 3 \\
 x^2 &= 4 & x^2 &= 3 \\
 x &= \pm 2 & x &= \pm \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$9x^4 - 27x^2 + 20 = 0 \quad (35)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$u^2 = x^4$$

$$9u^2 - 27u + 20 = 0$$

$$9u^2 - 15u - 12u + 20 = 0$$

$$3u(3u-5) - 4(3u-5) = 0$$

$$(3u-5)(3u-4) = 0$$

$$(3u-4) = 0$$

$$(3u-5) = 0$$

$$3u = 4$$

$$3u = 5$$

$$u = \frac{4}{3}$$

$$u = \frac{5}{3}$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x^2 = \frac{5}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$4x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \quad (36)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$u^2 = x^4$$

$$4u^2 - 5u - 6 = 0$$

$$4u^2 - 2u - 3u - 6 = 0$$

$$(u-2)(4u+3) = 0$$



$$(u-2)=0$$

$$u=2$$

$$x^2=2$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

$$(4u+3)=0$$

$$u=-\frac{3}{4}$$

$$x^2=-\frac{3}{4}$$

$$x=\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$24x^4 + 14x^2 - 3 = 0 \quad (37)$$

$$2x^2 = u \text{ نفرض أن}$$

$$u^2 = x^4$$

$$24u^2 + 14u - 3 = 0$$

$$24u^2 + 18u - 4u - 3 = 0$$

$$6u(4u+3) - (4u+3) = 0$$

$$(4u+3)(6u-1) = 0$$

$$(6u-1)=0$$

$$u=\frac{1}{6}$$

$$x^2=\frac{1}{6}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$(4u+3)=0$$

$$u=-\frac{3}{4}$$

$$x^2=-\frac{3}{4}$$

$$x=\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^4 - 625 \quad (38)$$

$$(x^2 + 25)(x^2 - 25) =$$

$$(x^2 + 25)(x - 5)(x + 5) =$$

$$x^6 - 64 \quad (39)$$

$$x^6 - 64 = (x^2)^3 - (4)^3$$

$$(x^2 - 4) \left[ (x^2)^2 + 4(x^2) + (4)^2 \right] =$$

$$(x+2)(x-2)(x^4+4x^2+16) =$$

$$(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4) =$$

$$x^5 - 16x \quad (40)$$

$$x(x^4 - 16) =$$

$$x(x^2 + 4)(x+2)(x-2)$$

$$8x^5y^2 - 27x^2y^5 \quad (41)$$

$$x^2y^2(8x^3 - 27y^3) =$$

$$x^2y^2(2^3x^3 - 3^3y^3) =$$

$$x^2y^2(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) =$$

$$15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz \quad (42)$$

$$(15ax - 10bx + 5cx) + (12ay - 8by + 4cy) + (15az - 10bz + 5cz) =$$

$$5x(3a - 2b + c) + 4y(3a - 2b + c) + 5z(3a - 2b + c) =$$

$$(5x + 4y + 5z)(3a - 2b + c) =$$

$$4b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2 \quad (43)$$

$$(6x^2 - 5y^3 + 2z^2)(a^2 - 4b^2 + 3c^2) =$$

$$6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x \quad (44)$$

$$(6x^5 - 11x^4 - 10x^3) - (54x^3 - 99x^2 - 90x) =$$

$$x^3(6x^2 - 11x - 10) - 9x(6x^2 - 11x - 10) =$$

$$x(x^2 - 9)(6x^2 - 11x - 10) =$$

$$\begin{aligned}
& x(x+3)(x-3)(6x^2-11x-10) = \\
& x(x+3)(x-3)(6x^2-15x+4x-10) = \\
& x(x+3)(x-3)\left[(6x^2+4x)-(15x+10)\right] = \\
& x(x+3)(x-3)\left[2x(3x+2)-5(3x+2)\right] = \\
& x(x+3)(x-3)\left[(2x-5)(3x+2)\right] = \\
& x(x+3)(x-3)(2x-5)(3x+2) =
\end{aligned}$$

$$20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2 \quad (45)$$

$$20x^6 - 7x^5 - 506x^4 + 175x^3 + 150x^2 =$$

$$x^2(20x^4 - 7x^3 - 506x^2 + 175x + 150) =$$

$$x^2(20x^4 - 100x^3 + 93x^3 - 465x^2 - 41x^2 + 205x - 30x + 150) =$$

$$x^2\left[(20x^4 - 100x^3) + (93x^3 - 465x^2) - (41x^2 - 205x) - (30x - 150)\right] =$$

$$x^2\left[20x^3(x-5) + 93x^2(x-5) - 41x(x-5) - 30(x-5)\right] =$$

$$x^2\left[(x-5)(20x^3 + 93x^2 - 41x - 30)\right] =$$

$$x^2(x-5)(20x^3 + 100x^2 - 7x^2 - 35x - 6x - 30) =$$

$$x^2(x-5)\left[(20x^3 + 100x^2) - (7x^2 + 35x) - (6x + 30)\right] =$$

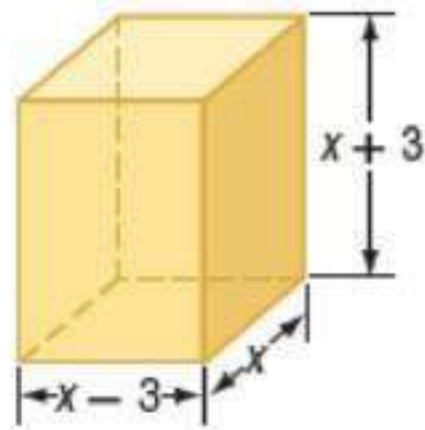
$$x^2(x-5)\left[20x^2(x+5) - 7x(x+5) - 6(x+5)\right] =$$

$$x^2(x-5)(x+5)(20x^2 - 7x - 6) =$$

$$x^2(x-5)(x+5)(4x-3)(5x+2) =$$

(46)

هندسة، إذا كان حجم المجسم المجاور يساوي  $440\text{cm}^3$ ، فأوجد كلاً من قيمة  $x$ ، وطول المجسم، وعرضه، وارتفاعه.



$$(x-3)x(x+3) = 440 = 8 \times 5 \times 11$$

$$x = 8, \quad x-3 = 5, \quad x+3 = 11$$

$$8 = x$$

$$11 = x+3 = \text{الطول}$$

$$5 = x-3 = \text{العرض}$$

حل كل معادلة مما يأتي:

$$8x^4 + 10x^2 - 3 = 0 \quad (47)$$

$$2(2x^2)^2 + 5(2x^2) - 3 = 0$$

نفرض أن  $2x^2 = u$

$$2u^2 + 5u - 3 = 0$$

$$(u+3)(2u-1) = 0$$

$$(u+3) = 0$$

$$(2u-1) = 0$$

$$u = -3$$

$$u = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$6x^4 - 5x^2 - 4 = 0 \quad (48)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$6u^2 - 8u + 3u - 4 = 0$$

$$(6u^2 - 8u) + (3u - 4) = 0$$

$$2u(3u-4) + (3u-4) = 0$$

$$(2u+1)(3u-4) = 0$$

$$(2u+1) = 0$$

$$(3u-4) = 0$$

$$u = -\frac{1}{2}$$

$$u = \frac{4}{3}$$

$$x^2 = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$20x^4 - 53x^2 + 18 = 0 \quad (49)$$

$$20(x^2)^2 - 53(x^2) + 18 = 0$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$20u^2 - 53u + 18 = 0$$

$$(4u-9)(5u-2) = 0$$

$$(4u-9) = 0$$

$$(5u-2) = 0$$

$$u = \frac{9}{4}$$

$$u = \frac{2}{5}$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 = \frac{2}{5}$$

$$x = \pm \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$18x^4 + 43x^2 - 5 = 0 \quad (50)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$18u^2 + 43u - 5 = 0$$

$$18u^2 + 45u - 2u - 5 = 0$$

$$9u(2u+5) - (2u+5) = 0$$

$$(9u-1)(2u+5) = 0$$

$$(9u-1) = 0$$

$$(2u+5) = 0$$

$$u = \frac{1}{9}$$

$$u = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x^2 = -\frac{5}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{3}$$

$$x = \pm i \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$8x^4 - 18x^2 + 4 = 0 \quad (51)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$8u^2 - 18u + 4 = 0$$

$$8u^2 - 16u - 2u + 4 = 0$$

$$(8u^2 - 16u) - (2u - 4) = 0$$

$$8u(u-2) - 2(u-2) = 0$$

$$(8u-2)(u-2) = 0$$

$$(u-2) = 0$$

$$(8u-2) = 0$$

$$u = 2$$

$$u = \frac{2}{8}$$

$$x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{8}$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$3x^4 - 22x^2 - 45 = 0 \quad (52)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$3u^2 - 22u - 45 = 0$$

$$3u^2 - 27u + 5u - 45 = 0$$

$$\begin{aligned}
(3u^2 - 27u) + (5u - 45) &= 0 \\
3u(u - 9) + 5(u - 9) &= 0 \\
(3u + 5)(u - 9) &= 0 \\
(u - 9) = 0 & \qquad (3u + 5) = 0 \\
u = 9 & \qquad u = \frac{5}{3} \\
x^2 = 9 & \qquad x^2 = \frac{5}{3} \\
x = \pm 3 & \qquad x = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}
\end{aligned}$$

$$x^6 - 26x^3 - 27 = 0 \quad (53)$$

نفرض أن  $x^3 = u$

$$\begin{aligned}
u^2 - 26u - 27 &= 0 \\
(u - 27)(u + 1) &= 0 \\
(u - 27) = 0 & \qquad (u + 1) = 0 \\
u = 27 & \qquad u = -1 \\
x^3 = 27 & \qquad x^3 = -1 \\
x = 3 & \qquad x = -1
\end{aligned}$$

$$4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0 \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
(4x^4 - 4x^2) - (x^2 - 1) &= 0 \\
4x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) &= 0 \\
(4x^2 - 1)(x^2 - 1) &= 0 \\
(4x^2 - 1) = 0 & \qquad (x^2 - 1) = 0 \\
x^2 = \frac{1}{4} & \qquad x^2 = 1 \\
x = \pm \frac{1}{2} & \qquad x = \pm 1
\end{aligned}$$

$$x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0 \quad (55)$$

$$(x^6 - 9x^4) - (x^2 - 9) = 0$$

$$x^4(x^2 - 9) - (x^2 - 9) = 0$$

$$(x^4 - 1)(x^2 - 9) = 0$$

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3) = 0$$

$(x - 3) = 0$	$(x + 3) = 0$	$(x - 1) = 0$	$(x + 1) = 0$	$(x^2 + 1) = 0$
$x = 3$	$x = -3$	$x = 1$	$x = -1$	$x^2 = -1$ $x = \pm i$

$$x^4 + 8x^2 + 15 = 0 \quad (56)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$u^2 = x^4$$

$$u^2 + 8u + 15 = 0$$

$$(u + 5)(u + 3) = 0$$

$$(u + 5) = 0$$

$$u = -5$$

$$x^2 = -5$$

$$x = \pm i\sqrt{5}$$

$$(u + 3) = 0$$

$$u = -3$$

$$x^2 = -3$$

$$x = \pm i\sqrt{3}$$

(57)

هندسة : منشور متوازي مستطيلات أبعاده  $x - 2, x - 4, x - 6$ ، وحجمه  $40x$  وحدة مكعبة.

(a) حجم المنشور = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$(x - 2)(x - 4)(x - 6) =$$

$$[(x - 2)(x - 4)](x - 6) =$$

$$(x^2 - 6x + 8)(x - 6) =$$

$$x(x^2 - 6x + 8) + (-6)(x^2 - 6x + 8) =$$



$$\begin{aligned}
 x^3 - 6x^2 + 8x - 6x^2 + 36x - 48 &= \\
 x^3 - 12x^2 + 44x - 48 &= \\
 (x-2)(x-4)(x-6) &= 40x \quad (b) \\
 (x^2 - 6x + 8)(x-6) &= 40x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 - 6x^2 + 8x - 6x^2 + 36x - 48 &= 40x \\
 x^3 - 12x^2 + 44x - 48 - 40x &= 0 \\
 x^3 - 12x^2 + 4x - 48 &= 0 \\
 x^2(x-12) + 4(x-12) &= 0 \\
 (x^2 + 4)(x-12) &= 0
 \end{aligned}$$

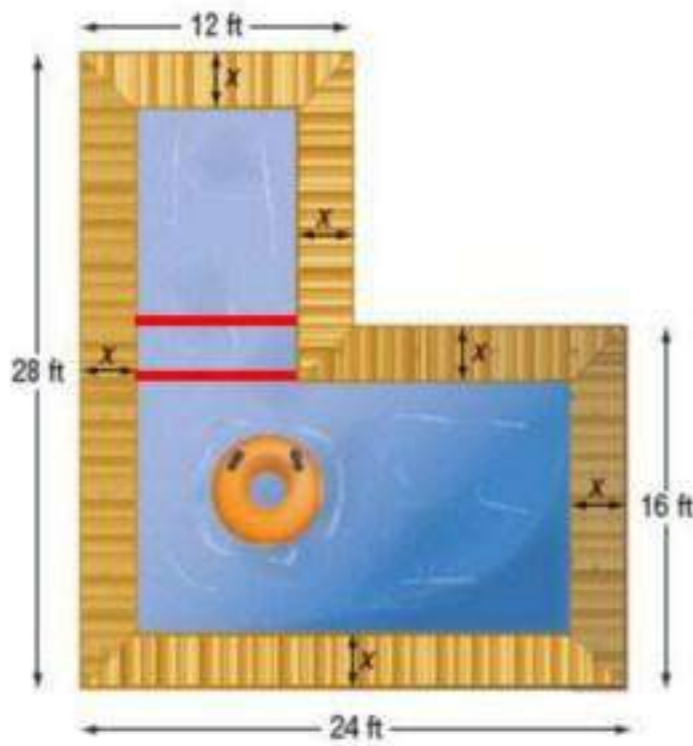
$$\begin{aligned}
 (x^2 + 4) &= 0 & (x-12) &= 0 \\
 x &= \pm 2i & x &= 12
 \end{aligned}$$

(c)  $\pm 2i$  لأنهما عددا تخيليان

$$(12-2) \text{ @ } (12-4) \text{ @ } (12-6) \quad (d)$$

$$(10) \text{ @ } (8) \text{ @ } (6)$$

(58)



تصميم: يريد سليمان أن يبني بركة سباحة وفق التصميم المجاور، حيث يحيط بها ممر خشبي بعرض ثابت.

(a)

مساحة البركة

$$\begin{aligned}
 [(12-2x) \times (12-x)] + [(24-2x) \times (16-2x)] + [x(12-2x)] &= \\
 144 - 12x - 24x + 2x^2 + (384 - 48x - 32x + 4x^2) + (12x - 2x^2) &= 336
 \end{aligned}$$

$$4x^2 - 104x + 192 = 0$$

$$x^2 - 26x + 48 = 0$$

$$(x-24)(x-2) = 0$$

من الرسم لا يمكن أن يكون  $x = 24$

$$x = 2 \text{ ft}$$

$$[(12-2x) \times (12-x)] + [(24-2x) \times (16-2x)] + [x(12-2x)] = \quad (b)$$

$$4 \leftarrow 2x \leftarrow x$$

$$\begin{aligned} [(12-8) \times (12-4)] + [(24-8) \times (16-8)] + [4(12-8)] &= \\ [(4) \times (8)] + [(16) \times (8)] + [16] &= \\ 32 + 128 + 16 &= 176 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

$$[(12-2x) \times (12-x)] + [(24-2x) \times (16-2x)] + [x(12-2x)] = \quad (c)$$

$$1 \leftarrow \frac{x}{2} \leftarrow x$$

$$\begin{aligned} [(12-2) \times (12-1)] + [(24-2) \times (16-2)] + [(12-2)] &= \\ [(10) \times (11)] + [(22) \times (14)] + [(10)] &= \\ 110 + 308 + 10 &= 428 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

(59)

أحياء: قدر مأمون عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة:  
 $P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$ ، حيث  $t$  الزمن بالساعات،  $P(t)$  عدد الفيروسات. فإذا أراد  
 مأمون أن يحدد الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس.

$$8000 = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000 \quad (a)$$

$$-0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t = 0$$

$$12t^3 + 240t^2 - 6300t = 0$$

$$t^3 + 20t^2 - 525t = 0$$

$$t(t^2 + 20t - 525) = 0$$

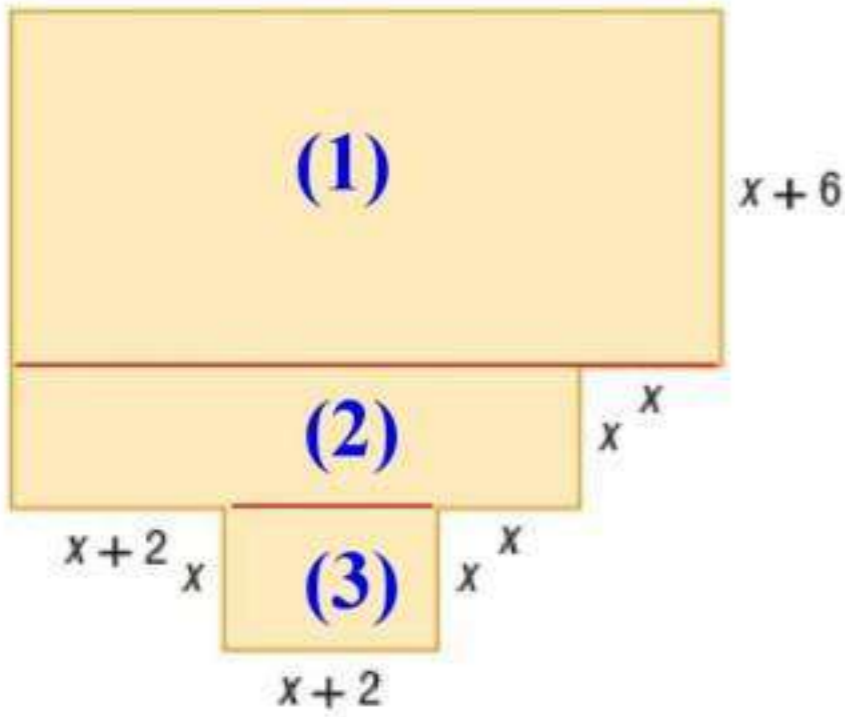
$$t(t-15)(t+35) = 0$$

$$t = 0 \quad @t = 15 \quad @t = -35$$

(b) بطرح 8000 من كل طرف وضربه في العدد 1000 للتخلص من الكسور العشرية وبإخراج العامل المشترك ثم تحليل المقدار الثلاثي

(c) قيم مقبولة للمتغير ولكن  $-35$  غير مقبولة لأنها قيمة سالبة والوقت لا يكون سالباً.

تصميم المباني، يمثل الشكل المجاور مخطط شقة سكنية. (60)



(a) المساحة (1)

$$x+6 = \text{الطول}$$

$$4x+4 = x+x+x+2+x+2 = \text{العرض}$$

$$(x+6)(4x+4) = \text{المساحة}$$

$$4x^2 + 28x + 24 =$$

(2) المساحة

$$x = \text{الطول}$$

$$3x+4 = x+x+2+x+2 = \text{العرض}$$

$$(x)(3x+4) = \text{المساحة}$$

$$3x^2 + 4x =$$

(3) المساحة

$$x = \text{الطول}$$

$$x+2 = \text{العرض}$$

$$(x)(x+2) x^2 + 2x = \text{المساحة}$$

المساحة الكلية =  $4x^2 + 28x + 24 + 3x^2 + 4x + x^2 + 2x =$

$$f(x) = 8x^2 + 34x + 24$$

$$8x^2 + 34x + 24 = 1366 \quad (b)$$

$$8x^2 + 34x - 1342 = 0$$

$$4x^2 + 17x - 671 = 0$$

$$(x-11)(x+ -15.25) = 0$$

حيث لا توجد قيمة للمساحة سالبة

$$x = 11 \text{ ft}$$

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي تحليلًا تامًا. وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$x^6 - 4x^4 - 8x^4 + 32x^2 + 16x^2 - 64 \quad 61$$

$$(x^6 - 4x^4) - (8x^4 - 32x^2) + (16x^2 - 64)$$

$$x^4(x^2 - 4) - 8x^2(x^2 - 4) + 16(x^2 - 4)$$

$$(x^2 - 4)(x^4 - 8x^2 + 16)$$

$$(x+4)(x-4)(x^4-8x^2+16)$$

$$(x^4-8x^2+16)$$

$$x^2 = u \quad \text{نفرض أن}$$

$$x^4 = u^2$$

$$(u^2-8u+16)$$

$$(u-4)(u-4)$$

$$(x^2-4)(x^2-4)$$

$$(x+4)(x-4)(x+4)(x-4)$$

$$(x+4)^2(x-4)^2$$

$$(x+4)(x-4)(x+4)^2(x-4)^2$$

$$(x+4)^3(x-4)^3$$

$$y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1 \quad (62)$$

$$y^9 - 2y^6 + y^3 - y^6 + 2y^3 - 1$$

$$(y^9 - 2y^6 + y^3) - (y^6 - 2y^3 + 1)$$

$$y^3(y^6 - 2y^3 + 1) - (y^6 - 2y^3 + 1)$$

$$(y^3 - 1)(y^6 - 2y^3 + 1)$$

$$(y-1)(y^2 + y + 1)(y^6 - 2y^3 + 1)$$

$$(y^6 - 2y^3 + 1)$$

$$y^3 = u \quad \text{نفرض أن}$$

$$y^6 = u^2$$

$$(u^2 - 2u + 1)$$

$$(u-1)(u-1)$$

$$(y^3 - 1)(y^3 - 1)$$

$$(y-1)^2 (y^2 + y + 1)^2$$

$$(y-1)(y^2 + y + 1)(y-1)^2 (y^2 + y + 1)^2$$

$$(y-1)^3 (y^2 + y + 1)^3$$

$$x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6 \quad (63)$$

$$x^2 = u$$

$$y^2 = v \quad \text{نفرض أن}$$

$$u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$(u - v)^3$$

$$(x^2 - y^2)^3$$

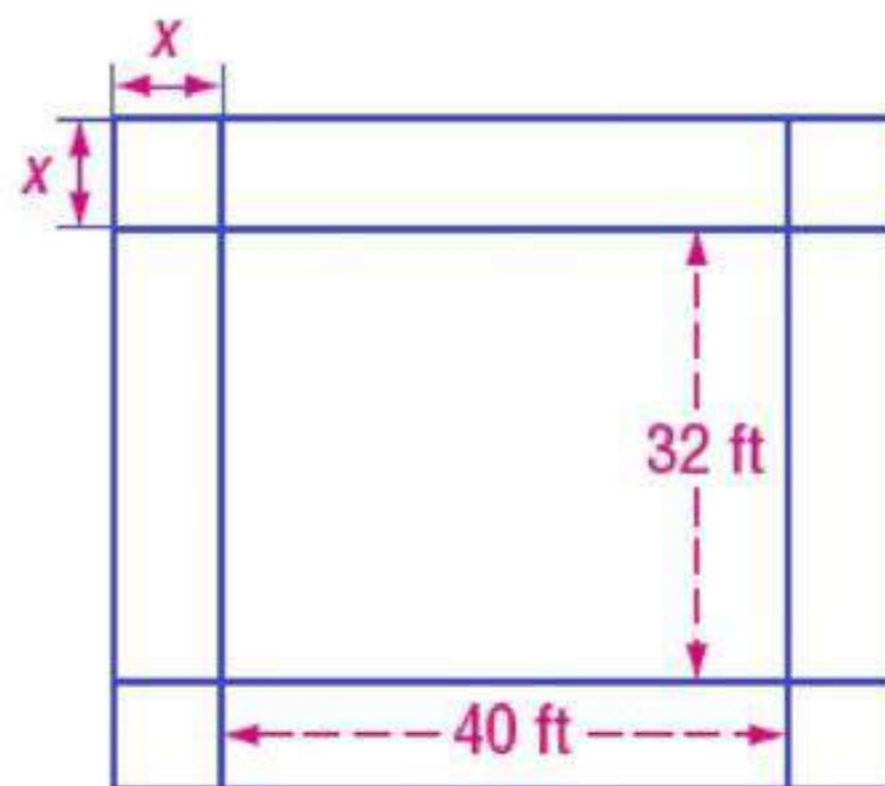
$$[(x + y)(x - y)]^3$$

$$(x + y)^3 (x - y)^3$$

(64)

حدائق: حديقة مستطيلة الشكل بُعدها 32ft و 40ft، تم توسعتها لتصبح مساحتها 4.5 أمثال مساحتها الأصلية بزيادة كل من طولها وعرضها بالمقدار نفسه.

(a)



(b)

$$4x^2 + 144x + 1280 = 5760$$

$$4x^2 + 144x + 1280 - 5760 = 0$$

$$4x^2 + 144x - 4480 = 0$$

$$x^2 + 36x - 1120 = 0$$

$$(x - 20)(x + 56) = 0$$

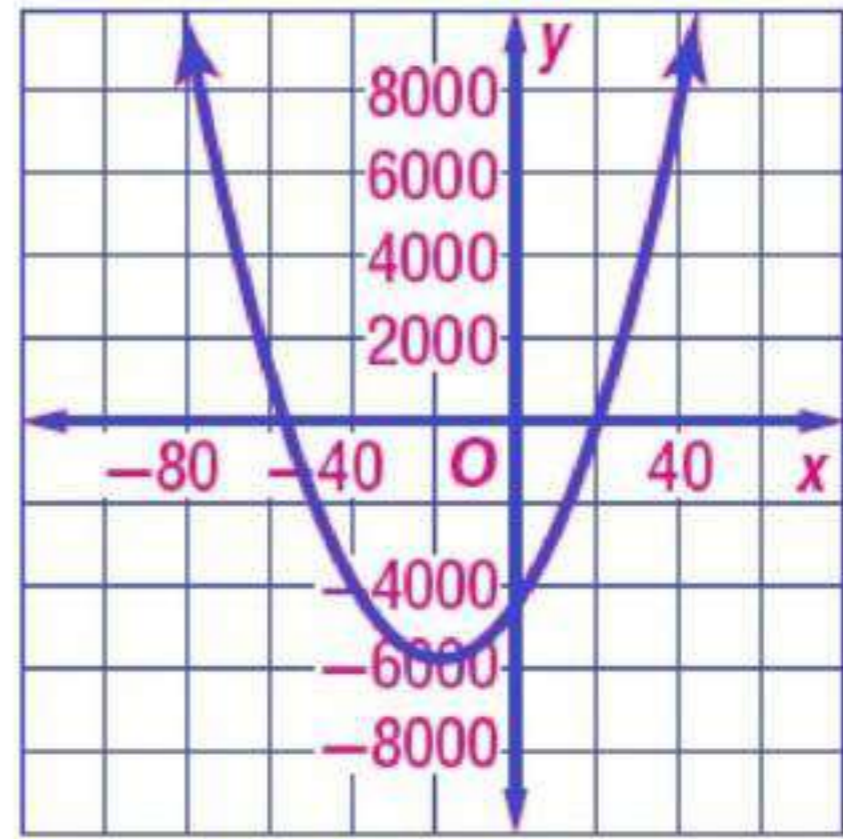
$$(x - 20) = 0$$

$$x = 20$$

$$(x + 56) = 0$$

$$x = -56$$

(c)



(d)

-56 لأن الطول ل يمكن أن يكون سالباً

### مسائل مهارات التفكير العليا

(65) تحدد حلل المقدار  $36x^{2n} + 12x^n + 1$  إلى عوامله.

$$x^n = u$$

$$y^{2n} = u^2 \quad \text{نفرض أن}$$

$$36u^2 + 12u + 1$$

$$36u^2 + 6u + 6u + 1$$

$$(36u^2 + 6u) + (6u + 1)$$

$$6u(6u + 1) + (6u + 1)$$

$$(6u + 1)(6u + 1)$$

$$(6u + 1)^2$$

$$(6x^n + 1)^2$$

تبرير، أعط مثالاً مضاداً للعبارة:  $a^2 + b^2 = (a + b)^2$ . (66)  
 العبارة صحيحة فقط عندما احد المتغيرين  $a$  أو  $b$  يساوي صفر.  
 لذا نأخذ أي عدد غير الصفر  
 نفرض أن  $a = 1$  @  $b = -1$

$$1^2 + (-1)^2 \stackrel{?}{=} (1 + (-1))^2$$

$$1 + 1 \stackrel{?}{=} (1 - 1)^2$$

$$2 = 0 \quad d$$

العبارة خاطئة؛ إذن العددين  $-1$  ,  $1$  مثالاً مضاداً للعبارة

(67)

مسألة مفتوحة، إذا كانت الصورة التكعيبة لمعادلة هي:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  فاكتب معادلة من الدرجة السادسة يمكن كتابتها على الصورة التكعيبة.

$$12x^6 + 6x^4 + 8x^2 + 4$$

$$12(x^2)^3 + 6(x^2)^2 + 8(x^2) + 4$$

اكتب، وضح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانياً على تحليلها؟ (68)  
 يمكن تحديد العوامل من معرفة المقطع  $x$  للتمثيل البياني للدالة، فإذا كان مقطع  $x$  للتمثيل البياني يساوي 5 مثلاً فإن  $(x - 5)$  احد عوامل كثيرة الحدود

## تدريب على اختبار

(69)

إجابة قصيرة حل المعادلة:  $x^3 + 27 = 0$ .

$$x^3 + 27 = 0$$

$$x^3 = -27$$

$$x = -3$$

(70)

إذا كان الفرق الموجب بين العددين  $\frac{1}{2}$ ،  $k$  مساويًا للفرق الموجب بين العددين  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{5}$ ، فما قيمة  $k$ ؟

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15}$$

$$\frac{2}{15} =$$

$$k - \frac{1}{12} = \frac{2}{15}$$

$$k = \frac{2}{15} + \frac{1}{12}$$

$$k = \frac{8+5}{60}$$

$$k = \frac{13}{60}$$

الاختيار الصحيح: (D)



## مراجعة تراكمية

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: (الدرس 3-5)

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x \quad (41)$$

الدرجة: 4 ، و المعامل الرئيس 5

$$f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9 \quad (72)$$

الدرجة: 5 ، و المعامل الرئيس -2

$$f(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7 \quad (73)$$

الدرجة: 7 ، و المعامل الرئيس -1

(74)

كهرباء: دائرة كهربائية تتكون من جزأين موصلين على التوالي؛ معاوقة الأول  $3 + 4j$  أوم، ومعاوقة الثاني  $2 - 6j$  أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتجد المعاوقة الكلية لهذه الدائرة. (الدرس 3-1)

$$(3 + 4j) + (2 - 6j)$$

$$3 + 4j + 2 - 6j$$

$$5 - 2j \text{ ohms}$$

اقسم كلاً مما يأتي: (الدرس 3-4)

$$(x^2 + 6x - 2) \div (x + 4) \quad (75)$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+4 \overline{) x^2 + 6x - 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) x^2 + 4x \\ \hline \end{array}$$

$$2x - 2$$

$$\begin{array}{r} (-) 2x + 8 \\ \hline \end{array}$$

$$-10$$

$$x + 2 - \frac{10}{x + 4}$$

$$(2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1) \quad (76)$$

$$\frac{(2x^2 + 8x - 10) \div 2}{(2x + 1) \div 2}$$

$$\frac{(x^2 + 4x - 5)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2} \overline{) 1 \quad 4 \quad -5} \\ \quad \downarrow -\frac{1}{2} \quad -\frac{7}{4} \\ \hline 1 \quad \frac{7}{2} \quad -\frac{27}{4} \end{array}$$

$$x + 3.5 - \left( \frac{-\frac{27}{4}}{x + \frac{1}{2}} \right)$$

$$\left( \frac{\cancel{-\frac{27}{4}}}{\cancel{2} \frac{2x+1}{\cancel{2}}} \right) = -\frac{13.5}{2x+1}$$

$$x + 3.5 - \frac{13.5}{2x+1}$$

$$(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2) \quad (77)$$

$$\begin{array}{r} -2 \overline{) 8 \quad 4 \quad 0 \quad 6} \\ \quad \downarrow -16 \quad 24 \quad -48 \\ \hline 8 \quad -12 \quad 24 \quad -42 \end{array}$$

$$8x^2 - 12x - \frac{42}{x+2}$$



حل كل متباينة مما يأتي، وقرب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة :

$$(1) \quad \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \geq -9$$

$$2x^3 + 3x^2 - 15x \geq -27$$

$$2x^3 + 3x^2 - 15x + 27 \geq 0$$

باستعمال الحاسبة

$$x \geq -4.12$$

$$(2) \quad x^3 - 9x^2 + 27x \leq 20$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 20 \leq 0$$

باستعمال الحاسبة

$$x \leq 1.09$$

$$(3) \quad x^3 + 1 \geq 4x^2$$

$$x^3 - 4x^2 + 1 \geq 0$$

باستعمال الحاسبة

$$-0.47 \leq x \leq 0.54 \quad \text{أو} \quad x \leq 3.94$$

$$(4) \quad x^6 - 15 \leq 5x^4 - x^2$$

$$x^6 - 5x^4 + x^2 - 15 \leq 0$$

باستعمال الحاسبة

$$-2.31 \leq x \leq 2.31$$

$$(5) \quad \frac{1}{2}x^5 \geq \frac{1}{5}x^2 - 2$$

$$5x^5 \geq 2x^2 - 20$$

$$5x^5 - 2x^2 + 20 \geq 0$$

باستعمال الحاسبة

$$x \geq -1.27$$

$$x^8 < -x^7 + 3 \quad (6)$$

$$x^8 + x^7 - 3 < 0$$

باستعمال الحاسبة

$$-1.36 < x < 1.06$$

$$x^4 - 15x^2 > -24 \quad (7)$$

$$x^4 - 15x^2 + 24 > 0$$

باستعمال الحاسبة

$$-1.35 < x < 1.35 \quad @x > 3.63$$

$$x^3 - 6x^2 + 4x < -6 \quad (8)$$

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 6 < 0$$

باستعمال الحاسبة

$$1.75 < x < 4.95 \quad @x < -0.69$$

$$x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0 \quad (9)$$

باستعمال الحاسبة

جميع الأعداد الحقيقية

نظريتا الباقي والعوامل  
The Remainder and Factor Theorems

3-7

تحقق

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11 \quad (1A)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -6 & 1 & -11 \\ & \downarrow & & & \\ & 3 & 3 & 10 & 19 \end{array}$$

$$f(3) = 19$$

$$g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1 \quad (1B)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ & \downarrow & & & & & \\ & 3 & -3 & 5 & -4 & 4 & -6 \end{array}$$

$$g(-1) = -6$$

(2)

يمكن استعمال الدالة  $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$  لتقدير عدد الطلاب في إحدى محافظات المملكة منذ عام 1420، حيث تمثل  $x$  عدد السنوات،  $C(x)$  عدد الطلاب بالآلاف، قدر عدد طلاب المحافظة عام 1432.

$$\text{عدد السنوات} = 1420 - 1432 = 12$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 12 & 2.4 & -22.3 & 53.8 & 548.2 \\ & \downarrow & & & \\ & 2.4 & 6.5 & 131.8 & 2129.8 \end{array}$$

$$C(12) = 10(2129.8)$$

$$C(12) = 21298$$

(3)

حدد ما إذا كان  $x - 2$  عاملاً من عوامل كثيرة الحدود  $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$  أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -7 & 4 & 12 \\ & \downarrow & & & \\ & & 2 & -10 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$\therefore (x - 2)$  عامل من عوامل كثيرة الحدود

$$(x - 2)(x^2 - 5x - 6)$$

$$(x - 2)(x - 6)(x + 1)$$



أوجد  $f(-2)$ ,  $f(4)$  لكل من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -5 & -1 & 14 \\ & \downarrow & & & \\ & & -4 & 18 & -34 \\ \hline & 2 & -9 & 17 & -20 \end{array}$$

$$f(-2) = -20$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 2 & -5 & -1 & 14 \\ & \downarrow & & & \\ & & 8 & 12 & 44 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 58 \end{array}$$

$$f(4) = 58$$

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10 \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 8 & 1 & -4 & -10 \\ & \downarrow & & & & \\ & & -2 & -12 & 22 & -36 \\ \hline & 1 & 6 & -11 & 18 & -46 \end{array}$$

$$f(-2) = -46$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 1 & 8 & 1 & -4 & -10 \\ & \downarrow & & & & \\ & & 4 & 48 & 196 & 768 \\ \hline & 1 & 12 & 49 & 192 & 758 \end{array}$$

$$f(4) = 758$$

(3)

جوارح: يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة  
 $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$  حيث  $x$  عدد السنوات منذ عام 1390، فما العدد  
التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1438؟

$$\text{عدد السنوات} = 1970 - 2018 = 48$$

$$\begin{array}{r} 48 \overline{) -0.16 \quad 15.83 \quad -154.15 \quad 1147.97} \\ \underline{-0.16 \quad \phantom{15.83} \quad \phantom{-154.15} \quad \phantom{1147.97}} \\ \phantom{-0.16} \quad 8.15 \quad \phantom{-154.15} \quad \phantom{1147.97} \\ \underline{\phantom{-0.16} \quad 8.15 \quad \phantom{-154.15} \quad \phantom{1147.97}} \\ \phantom{-0.16} \quad \phantom{8.15} \quad 237.05 \quad \phantom{1147.97} \\ \underline{\phantom{-0.16} \quad \phantom{8.15} \quad 237.05 \quad \phantom{1147.97}} \\ \phantom{-0.16} \quad \phantom{8.15} \quad \phantom{237.05} \quad 12526.37 \end{array}$$

العدد التقريبي المتوقع لأزواج النسور  $\approx 12526$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 ; x - 1 \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} \overline{1} \overline{) 1 \quad -6 \quad 11 \quad -6} \\ \underline{\phantom{1} \quad 1 \quad -5 \quad 6} \\ \phantom{1} \quad 1 \quad -5 \quad 6 \quad 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$(x-1)(x-3)(x-2)$$

$$x^3 + x^2 - 16x - 16 ; x + 1 \quad (5)$$

$$\begin{array}{r} \overline{-1} \overline{) 1 \quad 1 \quad -16 \quad -16} \\ \underline{\phantom{-1} \quad -1 \quad 0 \quad 16} \\ \phantom{-1} \quad 1 \quad 0 \quad -16 \quad 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2 - 16)$$

$$(x+1)(x+4)(x-4)$$

$$3x^3 + 10x^2 - x - 12 ; x - 1 \quad (6)$$

$$\begin{array}{r} \overline{1} \overline{) 3 \quad 10 \quad -1 \quad -12} \\ \underline{\phantom{1} \quad 3 \quad 13 \quad 12} \\ \phantom{1} \quad 3 \quad 13 \quad 12 \quad 0 \end{array}$$

$$(x-1)(3x^2 + 13x + 12)$$

$$\begin{aligned}
& (x-1)(3x^2 + 9x + 4x + 12) \\
& (x-1)[(3x^2 + 9x) + (4x + 12)] \\
& (x-1)[3x(x+3) + 4(x+3)] \\
& (x-1)(3x+4)(x+3) \\
& 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15 ; x+3 \quad (7) \\
& \begin{array}{r}
-3 \overline{) 2 \quad -5 \quad -28 \quad 15} \\
\quad \downarrow \quad -6 \quad 33 \quad -15 \\
\hline
\quad \quad 2 \quad -11 \quad 5 \quad 0
\end{array} \\
& (x+3)(2x^2 - 11x + 5) \\
& (x+3)(2x^2 - 10x - x + 5) \\
& (x+3)[(2x^2 - 10x) - (x - 5)] \\
& (x+3)[2x(x-5) - (x-5)] \\
& (x+3)(2x-1)(x-5)
\end{aligned}$$

### تمارين ومسائل

أوجد  $f(2)$ ,  $f(-5)$  لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad (8)$$

$$\begin{array}{r}
2 \overline{) 1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\
\quad \downarrow \quad 2 \quad 8 \quad 10 \\
\hline
\quad \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 11
\end{array}$$

$$f(2) = 11$$

$$\begin{array}{r}
-5 \overline{) 1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\
\quad \downarrow \quad -5 \quad 15 \quad -60 \\
\hline
\quad \quad 1 \quad -3 \quad 12 \quad -59
\end{array}$$

$$f(-5) = -59$$



$$f(x) = x^2 - 8x + 6 \quad (9)$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1 \quad -8 \quad 6} \\ \downarrow \quad 2 \quad -12 \\ \hline 1 \quad -6 \quad -6 \end{array}$$

$$f(2) = -6$$

$$\begin{array}{r} -5 \overline{) 1 \quad -8 \quad 6} \\ \downarrow \quad -5 \quad 65 \\ \hline 1 \quad -13 \quad 71 \end{array}$$

$$f(-5) = 71$$

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12 \quad (10)$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 3 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 12} \\ \downarrow \quad 6 \quad 14 \quad 24 \quad 50 \\ \hline 3 \quad 7 \quad 12 \quad 25 \quad 62 \end{array}$$

$$f(2) = 62$$

$$\begin{array}{r} -5 \overline{) 3 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 12} \\ \downarrow \quad -15 \quad 70 \quad -340 \quad 1695 \\ \hline 3 \quad -14 \quad 68 \quad -339 \quad 1707 \end{array}$$

$$f(-5) = 1707$$

$$f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5 \quad (11)$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 2 \quad -8 \quad -2 \quad 5} \\ \downarrow \quad 4 \quad -8 \quad -20 \\ \hline 2 \quad -4 \quad -10 \quad -15 \end{array}$$

$$f(2) = -15$$

$$\begin{array}{r} -5 \overline{) 2 \quad -8 \quad -2 \quad 5} \\ \downarrow \quad -10 \quad 90 \quad -440 \\ \hline 2 \quad -18 \quad 88 \quad -435 \end{array}$$

$$f(-5) = -435$$

$$f(x) = x^3 - 5x + 2 \quad (12)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ & \downarrow & 2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f(2) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ & \downarrow & -5 & 25 & -100 \\ \hline & 1 & -5 & 20 & -98 \end{array}$$

$$f(-5) = -98$$

$$f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15 \quad (13)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 0 & 8 & 0 & 2 & -15 \\ & \downarrow & 2 & 4 & 24 & 48 & 100 \\ \hline & 1 & 2 & 12 & 24 & 50 & 85 \end{array}$$

$$f(2) = 85$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -5 & 1 & 0 & 8 & 0 & 2 & -15 \\ & \downarrow & -5 & 25 & -165 & 825 & -4135 \\ \hline & 1 & -5 & 33 & -165 & 827 & -4150 \end{array}$$

$$f(-5) = -4150$$

$$f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10 \quad (14)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 2 & 1 & 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -10 \\ & \downarrow & 2 & 4 & 0 & 0 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \end{array}$$

$$f(2) = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -5 & 1 & 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -10 \\ & \downarrow & -5 & 25 & -105 & 525 & -2640 & 13200 \\ \hline & 1 & -5 & 21 & -105 & 528 & -2640 & 13190 \end{array}$$

$$f(-5) = 13190$$

$$f(x) = x^4 - 6x - 8 \quad (15)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & -6 & -8 \\ & \downarrow & 2 & 4 & 8 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 2 & -4 \end{array}$$

$$f(2) = -4$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 0 & 0 & -6 & -8 \\ & \downarrow & -5 & 25 & -125 & 655 \\ \hline & 1 & -5 & 25 & -131 & 647 \end{array}$$

$$f(-5) = 647$$

(16)

وقود، يقدر استهلاك سيارة للوفود (بالميل لكل جالون) وفقاً للدالة

$$f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$$

حيث  $x$  سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة. حدد استهلاك السيارة للوفود إذا سارت بالسرعات الآتية 40mi/h, 50mi/h, 60mi/h.

$$f(x) = 0.00000056 x^4 - 0.000018 x^3 - 0.016 x^2 + 1.38x - 0.38$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 40 & 0.00000056 & -0.000018 & -0.016 & 1.38 & -0.38 \\ & \downarrow & 0.0000224 & 0.000176 & -0.63296 & 29.8816 \\ \hline & 0.00000056 & 0.0000044 & -0.015824 & 0.74704 & 29.5016 \end{array}$$

$$f(40) = 29.5$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 50 & 0.00000056 & -0.000018 & -0.016 & 1.38 & -0.38 \\ & \downarrow & 0.000028 & 0.0005 & -0.775 & 30.25 \\ \hline & 0.00000056 & 0.00001 & -0.0155 & 0.605 & 29.87 \end{array}$$

$$f(50) = 29.87$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 60 & 0.00000056 & -0.000018 & -0.016 & 1.38 & -0.38 \\ & \downarrow & 0.0000336 & 0.000936 & -0.90384 & 28.5696 \\ \hline & 0.00000056 & 0.0000156 & -0.015064 & 0.47616 & 28.1896 \end{array}$$

$$f(60) = 28.19$$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى :

$$x^3 - 3x + 2 ; x + 2 \quad (17)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & \downarrow & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 1)$$

$$(x + 2)(x - 1)^2$$

$$x^4 + 2x^3 - 8x - 16 ; x + 2 \quad (18)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 2 & 0 & -8 & -16 \\ & \downarrow & -2 & 0 & 0 & 16 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}$$

$$(x + 2)(x^3 - 8)$$

$$(x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - x^2 - 10x - 8 ; x + 2 \quad (19)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -10 & -8 \\ & \downarrow & -2 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$(x + 2)(x - 4)(x + 1)$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 ; x - 3 \quad (20)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & \downarrow & 3 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(x - 3)(x^2 + 2x + 1)$$

$$(x - 3)(x + 1)^2$$

$$2x^3 + 17x^2 + 23x - 42 ; x - 1 \quad (21)$$

$$\begin{array}{r} 1 \mid 2 \quad 17 \quad 23 \quad -42 \\ \quad \downarrow \quad 2 \quad 19 \quad 42 \\ \hline 2 \quad 19 \quad 42 \quad 0 \end{array}$$

$$(x - 1)(2x^2 + 19x + 42)$$

$$(x - 1)(2x^2 + 12x + 7x + 42)$$

$$(x - 1)[(2x^2 + 12x) + (7x + 42)]$$

$$(x - 1)[2x(x + 6) + 7(x + 6)]$$

$$(x - 1)(2x + 7)(x + 6)$$

$$2x^3 + 7x^2 - 53x - 28 ; x - 4 \quad (22)$$

$$\begin{array}{r} 4 \mid 2 \quad 7 \quad -53 \quad -28 \\ \quad \downarrow \quad 8 \quad 60 \quad 28 \\ \hline 2 \quad 15 \quad 7 \quad 0 \end{array}$$

$$(x - 4)(2x^2 + 15x + 7)$$

$$(x - 4)(2x^2 + x + 14x + 7)$$

$$(x - 4)(x + 7)(2x + 1)$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 ; x - 1 \quad (23)$$

$$\begin{array}{r} 1 \mid 1 \quad 2 \quad 2 \quad -2 \quad -3 \\ \quad \downarrow \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

$$(x - 1)(x^3 + 3x^2 + 5x + 3)$$

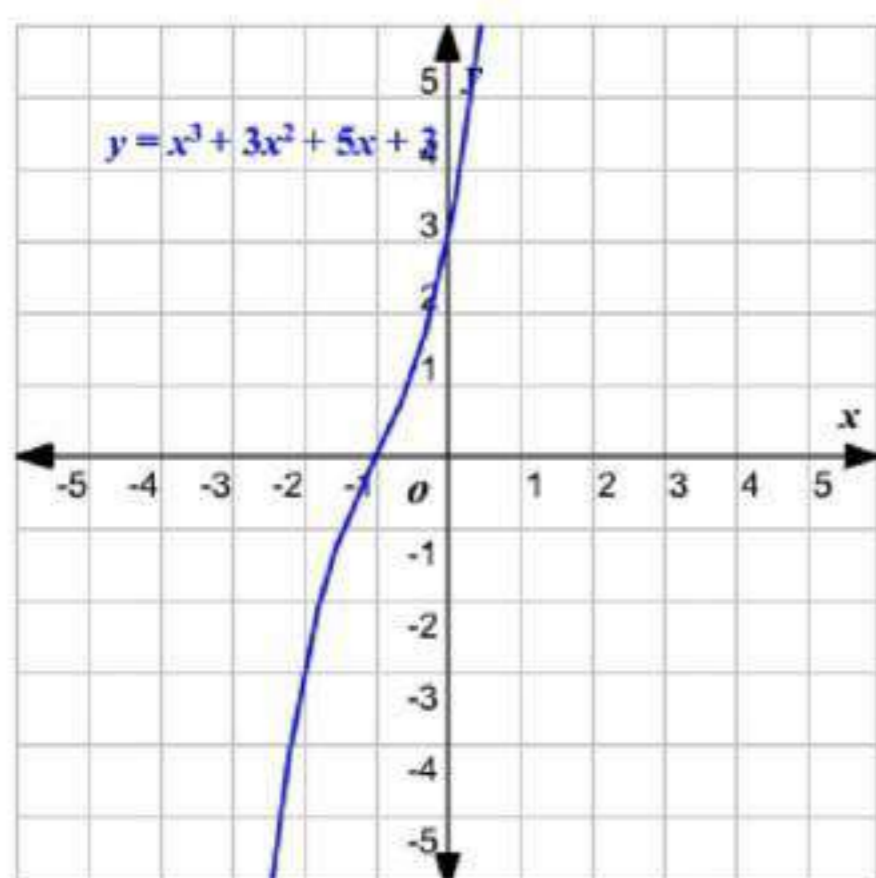
بالاستعانة بالتمثيل البياني للدالة

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

التمثيل البياني يقطع محور السينات في  $(-1)$

حيث  $x = -1$  ،

إذن  $(x + 1)$  عامل من عوامل كثيرة الحدود



$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & \downarrow & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 ; x+2 \quad (24)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & \downarrow & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$(x+2)(x^2-1)$$

$$(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$6x^3 - 25x^2 + 2x + 8 ; 2x+1 \quad (25)$$

$$(2x+1) \div 2 \text{ بقسمة العامل}$$

$$(2x+1) \div 2 = x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 6 & -25 & 2 & 8 \\ & \downarrow & -3 & 14 & -8 \\ \hline & 6 & -28 & 16 & 0 \end{array}$$

$$(2x+1)(6x^2 - 28x + 16)$$

$$(2x+1)[2(3x^2 - 14x + 8)]$$

$$(2x+1)[2(3x^2 - 12x - 2x + 8)]$$

$$(2x+1)[2(3x(x-4) - 2(x-4))]$$

$$(2x+1)[2((3x-2)(x-4))]$$

$$2(2x+1)(3x-2)(x-4)$$

$$16x^5 - 32x^4 - 81x + 162 ; 2x - 3 \quad (26)$$

بقسمة العامل  $(2x - 3) \div 2$

$$(2x - 3) \div 2 = x - \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} \overline{) 16 \quad -32 \quad 0 \quad 0 \quad -81 \quad 162} \\ \underline{\downarrow \quad 24 \quad -12 \quad -18 \quad -27 \quad -162} \\ 16 \quad -8 \quad -12 \quad -18 \quad -108 \quad 0 \\ (2x-3)(16x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 18x - 108) \\ (2x-3)[2(8x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 9x - 54)] \\ 8x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 9x - 54 \\ \text{بفرض } x=2 \\ \underline{2 \overline{) 8 \quad -4 \quad -6 \quad -9 \quad -54}} \\ \downarrow \quad 16 \quad 24 \quad 36 \quad 54 \\ 8 \quad 12 \quad 18 \quad 27 \quad 0 \end{array}$$

إذن  $(x-2)$  عامل من عوامل كثيرة الحدود

$$(2x-3)(x-2)(8x^3 + 12x^2 + 18x + 27)$$

$$(2x-3)(x-2)[2x(4x^2 + 9) + 3(4x^2 + 9)]$$

$$(2x-3)(x-2)[(2x+3)(4x^2 + 9)]$$

$$(2x-3)(x-2)(2x+3)(4x^2 + 9)$$

(27)

زوارق، تحرك زورق بخاري من السكون في اتجاه معاكس للأمواج، فإذا كانت سرعته بالأقدام لكل ثانية تعطى بالذالة  $f = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني.

$$f(x) = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t \quad (a)$$

$$\begin{array}{r} \underline{1 \overline{) -0.04 \quad 0.8 \quad 0.5 \quad -1 \quad 0}} \\ \downarrow \quad -0.04 \quad 0.76 \quad 1.26 \quad 0.26 \\ -0.04 \quad 0.76 \quad 1.26 \quad 0.26 \end{array}$$

$$f(1) = 0.26 \text{ ft/s}$$

$$\begin{array}{r} \underline{2} \mid -0.04 \quad 0.8 \quad 0.5 \quad -1 \quad 0 \\ \quad \downarrow \quad -0.08 \quad 1.44 \quad 3.88 \quad 5.76 \\ \hline -0.04 \quad 0.72 \quad 1.94 \quad 2.88 \quad 5.76 \end{array}$$

$$f(2) = 5.76 \text{ ft/s}$$

$$\begin{array}{r} \underline{3} \mid -0.04 \quad 0.8 \quad 0.5 \quad -1 \quad 0 \\ \quad \downarrow \quad -0.12 \quad 2.04 \quad 7.62 \quad 19.86 \\ \hline -0.04 \quad 0.68 \quad 2.54 \quad 6.62 \quad 19.86 \end{array}$$

$$f(3) = 19.86 \text{ ft/s}$$

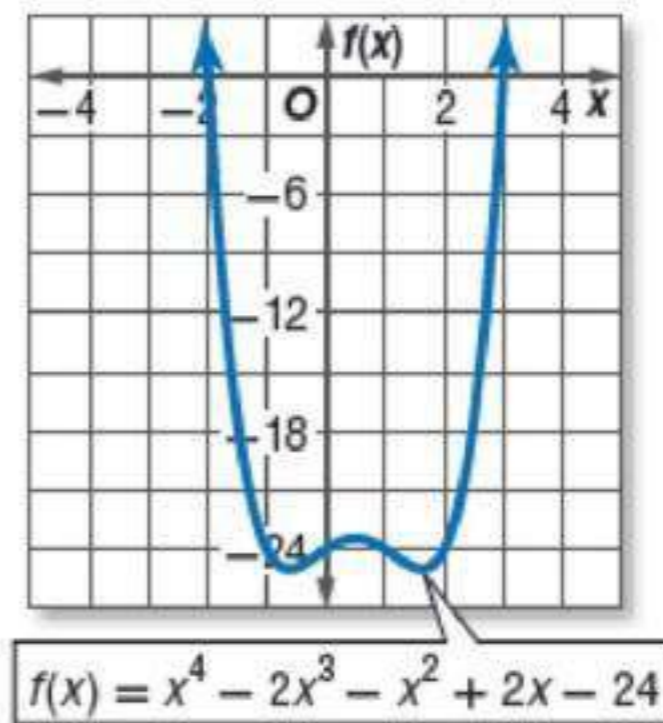
(b)

$$\begin{array}{r} \underline{6} \mid -0.04 \quad 0.8 \quad 0.5 \quad -1 \quad 0 \\ \quad \downarrow \quad -0.24 \quad 3.36 \quad 23.16 \quad 132.96 \\ \hline -0.04 \quad 0.56 \quad 3.86 \quad 22.16 \quad 132.96 \end{array}$$

هذا يعني أن الزورق يسير بسرعة  $132.96 \text{ ft/s}$  عندما مر بالعوامة الثانية

استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

(28)



التمثيل البياني يقطع محور السينات في  $x = -2$  @  $x = 3$

الأصفر هي:  $x = -2$  @  $x = 3$



إذن عوامل للدالة  $(x+2) @ (x-3)$  عوامل للدالة

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -2 & -1 & 2 & -24 \\ & \downarrow & -2 & 8 & -14 & 24 \\ \hline & 1 & -4 & 7 & -12 & 0 \end{array}$$

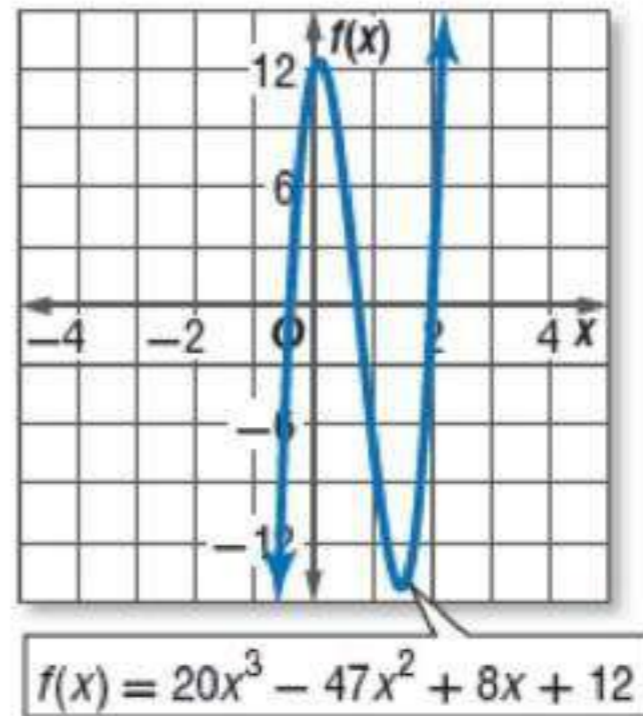
$$\therefore x^3 - 4x^2 + 7x - 12$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 7 & -12 \\ & \downarrow & 3 & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\therefore x^2 - x + 4$$

عوامل الدالة  $(x+2)(x-3)(x^2 - x + 4)$

(29)



التمثيل البياني يقطع محور السينات في 2

أحد عوامل الدالة  $(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 20 & -47 & 8 & 12 \\ & \downarrow & 40 & -14 & -12 \\ \hline & 20 & -7 & -6 & 0 \end{array}$$

$$20x^2 - 7x - 6$$

$$(4x-3)(5x+2)$$

$$(x-2)(4x-3)(5x+2) \text{ عوامل الدالة}$$

تمثيلات متعددة، لتكن الدالة:  $f(x) = x^4 - 4x^2$ .

(30a)

جبرياً، إذا كان  $x - 2$  عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على  $(x - 2)$ .

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & \downarrow & 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$g(x) = x^3 + 2x^2$$

(30b)

جدولياً، كَوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

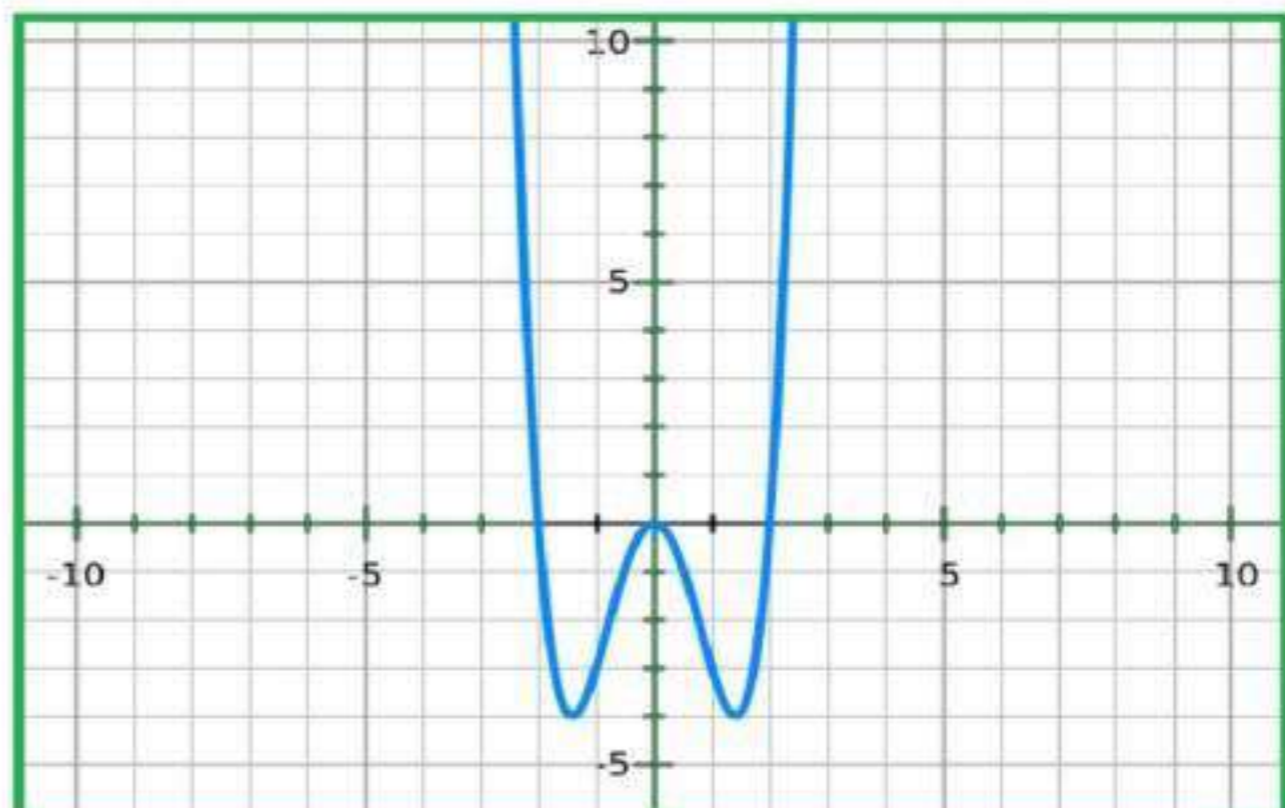
$x$	$g(x)$
-2	0
-1	1
0	0
1	3
2	16

(30c)

تحليلياً، اعتماداً على جدول القيم الذي كوّنته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن نتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  وضع إجابتك.

(30d) عامل من عوامل الدالة،  $x$  عامل من عوامل الدالة

(30d)



أوجد قيم  $k$  التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3:

$$(x^2 - x + k) \div (x - 1) \quad (31)$$

$$\begin{array}{r} \underline{1} \mid 1 \quad -1 \quad k \\ \downarrow \quad 1 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 0 \quad k+0 \end{array}$$

$$k+0=3$$

$$k=3$$

$$(x^2 + kx - 17) \div (x - 2) \quad (32)$$

$$\begin{array}{r} \underline{2} \mid 1 \quad k \quad -17 \\ \downarrow \quad 2 \quad k+2 \\ \hline 1 \quad k+2 \quad k-15 \end{array}$$

$$k-15=3$$

$$k-15+15=3+15$$

$$k=18$$

$$(x^2 + 5x + 7) \div (x - k) \quad (33)$$

$$\begin{array}{r} \underline{k} \mid 1 \quad 5 \quad 7 \\ \downarrow \quad k \quad k(k+5) \\ \hline 1 \quad k+5 \quad k(k+5)+7 \end{array}$$

$$k(k+5)+7=3$$

$$k^2 + 5k + 7 - 3 = 0$$

$$k^2 + 5k + 4 = 0$$

$$(k+4)(k+1) = 0$$

$$k=4 \quad @ \quad k=1$$

$$(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2) \quad (34)$$

$$\begin{array}{r} \underline{-2} \mid 1 \quad 4 \quad 1 \quad k \\ \downarrow \quad -2 \quad -4 \quad 6 \\ \hline 1 \quad 2 \quad -3 \quad k+6 \end{array}$$

$$k+6=3$$

$$k=-3$$

مسائل مهارات التفكير العليا

تحذّر، أوجد حلول كل من المعادلتين:

$$(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0 \quad (35)$$

$$y = x^2 - 4 \text{ نفرض أن}$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$y = 1$$

$$x^2 - 4 = -1$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$y = 2$$

$$x^2 - 4 = 2$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6}$$

$$(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0 \quad (36)$$

$$y = x^2 + 3 \text{ نفرض أن}$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$(y - 3)(y - 4) = 0$$

$$(y - 3) = 0$$

$$y = 3$$

$$x^2 + 3 = 3$$

$$x^2 = 0$$

$$(y - 4) = 0$$

$$y = 4$$

$$x^2 + 3 = 4$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 0$$

$$x = \pm 1$$

(37)

تبرير، إذا قسمت دالة كثيرة الحدود  $f(x)$  على  $x - c$ ، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

(a)  $x - c$  عامل للدالة  $f(x)$

(b)  $x - c$  ليس عامل للدالة  $f(x)$

(c)  $f(x) = x - c$

(38)

مسألة مفتوحة، اكتب دالة تكعيبة يكون باقي قسمتها على  $x - 2$  يساوي 8، وباقي قسمتها على  $x - 3$  يساوي -5.

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 10$$

(39)

اكتب، وضح لماذا تعد نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي؟

يمكن تحديد موقع صفر كثيرة الحدود باستخدام نظرية الباقي و جدول القيم بتحديد متى تكون قيمة الدالة أو الباقي يساوي صفر .

فمثلاً، إذا كان  $f(6)$  يعطي الباقي 2،  $f(7)$  يعطي الباقي -1، نستنتج أن الصفر يقع بين  $x = 6$  و  $x = 7$ .

### تدريب على اختبار

(40)

أي مما يأتي هو تحليل للعبارة  $27x^3 + y^3$  ؟

A  $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B  $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C  $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D  $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

$$27x^3 + y^3$$

$$(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$$

الإختيار الصحيح (B)

(41)

ما حاصل ضرب العددين المركبين  $(4 + i)(4 - i)$ ؟

17 C

15 A

17 - 8i D

16 - i B

$$(4 + i)(4 - i) = 16 - i^2 = 16 + 1 = 17$$

الإختيار الصحيح (C)

### مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي: (الدرس 3-2)

$$x^4 - 4x^2 - 21 = 0 \quad (42)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$x^4 = u^2$$

$$u^2 - 4u - 21 = 0$$

$$(u - 7)(u + 3) = 0$$

$$(u + 3) = 0$$

$$u = -3$$

$$x^2 = -3$$

$$x = \pm\sqrt{-3}$$

$$x = \pm i\sqrt{3}$$

$$(u - 7) = 0$$

$$u = 7$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$$x^4 - 6x^2 = 27 \quad (43)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$x^4 = u^2$$

$$u^2 - 6u = 27$$

$$u^2 - 6u - 27 = 0$$

$$(u - 9)(u + 3) = 0$$

$$(u-9)=0$$

$$u=9$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm\sqrt{9}$$

$$x=\pm 3$$

$$(u+3)=0$$

$$u=-3$$

$$x^2=-3$$

$$x=\pm\sqrt{-3}$$

$$x=\pm i\sqrt{3}$$

$$4x^4 - 8x^2 - 96 = 0 \quad (44)$$

نفرض أن  $x^2 = u$

$$x^4 = u^2$$

$$4u^2 - 8u - 96 = 0$$

$$4(u^2 - 2u - 24) = 0$$

$$u^2 - 2u - 24 = 0$$

$$(u-6)(u+4) = 0$$

$$(u+4) = 0$$

$$u = -4$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

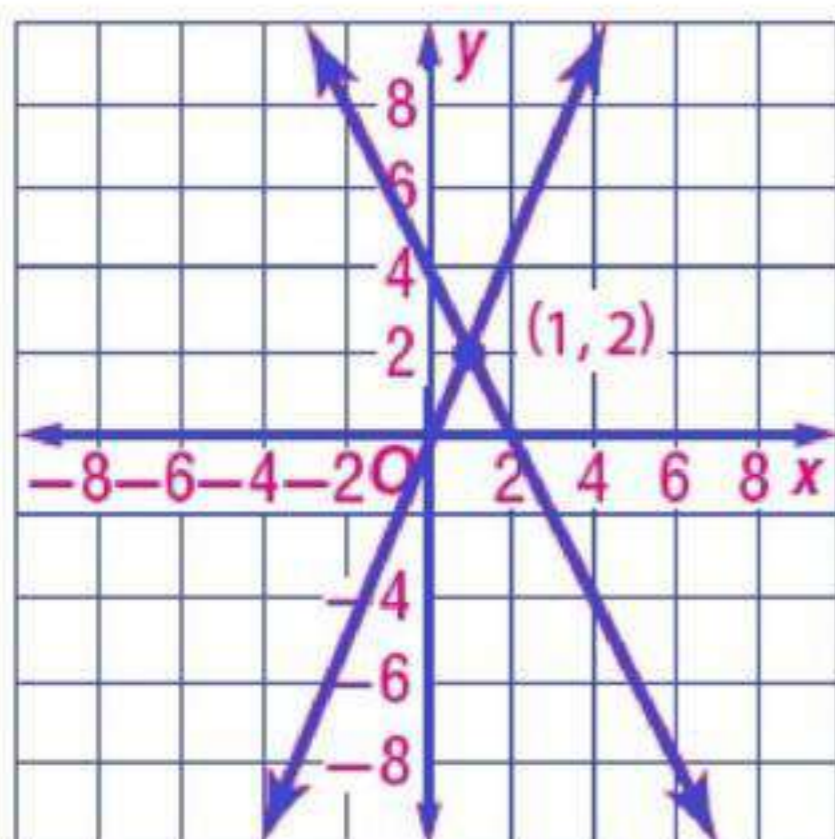
$$x = \pm i\sqrt{4}$$

$$(u-6) = 0$$

$$u = 6$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$



حل كلٍّ من النظامين الآتيين بيانياً: (مهارة سابقة)

$$y = 3x - 1 \quad (45)$$

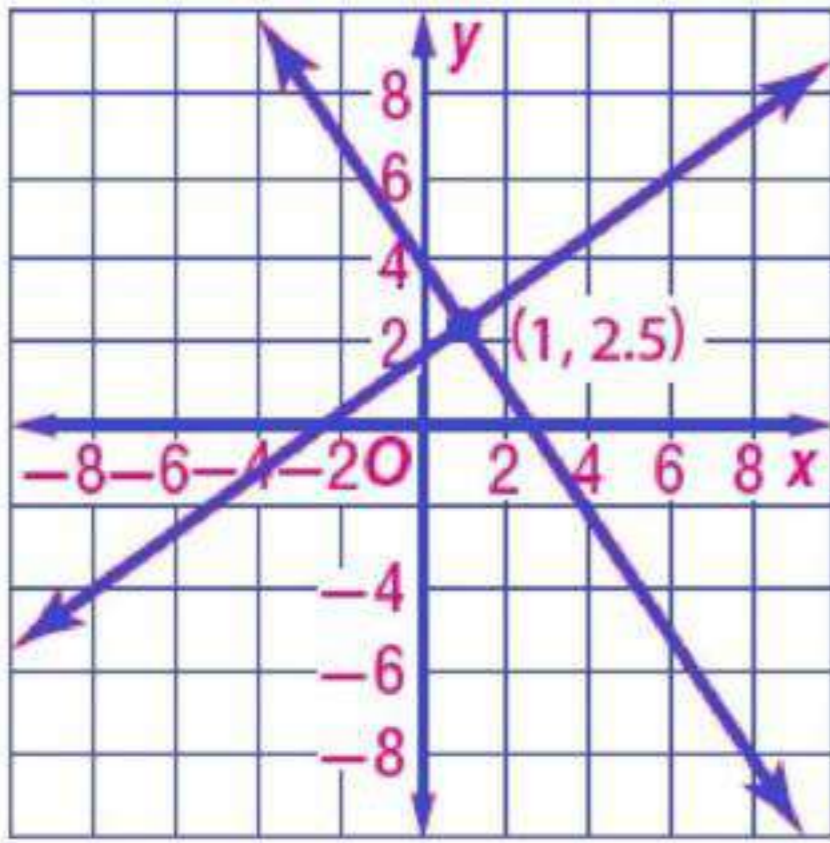
$$y = -2x + 4$$

بالتمثيل البياني للدالتين

$$y = -2x + 4 \quad , \quad y = 3x - 1$$

احداثيات نقطة التقاطع:  $(1, 2)$

حل النظامين هو  $(1, 2)$



$$y = 3x + 2 \quad (46)$$

$$-4x + 6y = 11$$

بالتمثيل البياني للدالتين

$$-4x + 6y = 11 \quad , \quad y = 3x + 2$$

احداثيات نقطة التقاطع:  $(1, 2.5)$

حل النظامين هو  $(1, 2.5)$

إذا كان  $c(x) = x^2 - 2x$ ,  $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$  فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

$$c(a+2) - d(a-4) \quad (47)$$

$$c(a+2) = (a+2)^2 - 2(a+2)$$

$$c(a+2) = a^2 + 4a + 4 - 2a - 4$$

$$c(a+2) = a^2 + 2a$$

$$d(a-4) = 3(a-4)^2 - 6(a-4) + 4$$

$$d(a-4) = 3(a^2 - 8a + 16) - 6(a-4) + 4$$

$$d(a-4) = 3a^2 - 24a + 48 - 6a + 24 + 4$$

$$d(a-4) = 3a^2 - 30a + 76$$

$$c(a+2) - d(a-4) = a^2 + 2a - 3a^2 + 30a - 76$$

$$c(a+2) - d(a-4) = -2a^2 + 32a - 76$$

$$c(a-3) + d(a+1) \quad (48)$$

$$c(a-3) = (a-3)^2 - 2(a-3)$$

$$c(a-3) = (a^2 - 6a + 9) - 2(a-3)$$

$$c(a-3) = a^2 - 6a + 9 - 2a + 6$$

$$c(a-3) = a^2 - 8a + 15$$



$$\begin{aligned}
 d(a+1) &= 3(a+1)^2 - 6(a+1) + 4 \\
 d(a+1) &= 3(a^2 + 2a + 1) - 6(a+1) + 4 \\
 d(a+1) &= 3a^2 + 6a + 3 - 6a - 6 + 4 \\
 d(a+1) &= 3a^2 + 1 \\
 c(a-3) + d(a+1) &= a^2 - 8a + 15 + 3a^2 + 1 \\
 c(a-3) + d(a+1) &= 4a^2 - 8a + 16
 \end{aligned}$$

$$c(-3a) + d(a+4) \quad (49)$$

$$c(-3a) = (-3a)^2 - 2(-3a)$$

$$c(-3a) = 9a^2 + 6a$$

$$d(a+4) = 3(a+4)^2 - 6(a+4) + 4$$

$$d(a+4) = 3(a^2 + 8a + 16) - 6a - 24 + 4$$

$$d(a+4) = 3a^2 + 24a + 48 - 6a - 24 + 4$$

$$d(a+4) = 3a^2 + 18a + 28$$

$$c(-3a) + d(a+4) = 9a^2 + 6a + 3a^2 + 18a + 28$$

$$c(-3a) + d(a+4) = 12a^2 + 24a + 28$$

$$3d(3a) - 2c(-a) \quad (50)$$

$$3d(3a) = 3[3(3a)^2 - 6(3a) + 4]$$

$$3d(3a) = 3[27a^2 - 18a + 4]$$

$$3d(3a) = 81a^2 - 54a + 12$$

$$2c(-a) = 2[(-a)^2 - 2(-a)]$$

$$2c(-a) = 2a^2 + 4a$$

$$3d(3a) - 2c(-a) = 81a^2 - 54a + 12 - (2a^2 + 4a)$$

$$3d(3a) - 2c(-a) = 81a^2 - 54a + 12 - 2a^2 - 4a$$

$$3d(3a) - 2c(-a) = 79a^2 - 58a + 12$$

$$c(a) + 5d(2a) \quad (51)$$

$$c(a) = (a)^2 - 2(a)$$

$$c(a) = a^2 - 2a$$

$$5d(2a) = 5[3(2a)^2 - 6(2a) + 4]$$

$$5d(2a) = 5[12a^2 - 12a + 4]$$

$$5d(2a) = 60a^2 - 60a + 20$$

$$c(a) + 5d(2a) = a^2 - 2a + 60a^2 - 60a + 20$$

$$c(a) + 5d(2a) = 61a^2 - 62a + 20$$

$$-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1) \quad (52)$$

$$4c(a^2 + 1) = 4[(a^2 + 1)^2 - 2(a^2 + 1)]$$

$$4c(a^2 + 1) = 4[(a^2 + 1)((a^2 + 1) - 2)]$$

$$4c(a^2 + 1) = 4[(a^2 + 1)(a^2 - 1)]$$

$$4c(a^2 + 1) = 4(a^4 - 1)$$

$$4c(a^2 + 1) = 4a^4 - 4$$

$$-2d(2a + 3) = -2[3(2a + 3)^2 - 6(2a + 3) + 4]$$

$$-2d(2a + 3) = -2[3(4a^2 + 12a + 9) - 12a - 18 + 4]$$

$$-2d(2a + 3) = -2[12a^2 + 24a + 13]$$

$$-2d(2a + 3) = -24a^2 - 48a - 26$$

$$-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1) = -24a^2 - 48a - 26 - 4a^4 + 4$$

$$-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1) = -4a^4 - 24a^2 - 48a - 22$$

تحقق

$$x^3 + 2x = 0 \quad (1A)$$

$$x(x^2 + 2) = 0$$

$$x^2 = -2$$

$$x = \pm i\sqrt{2}$$

$$x = 0$$

للمعادلة جذر حقيقي واحد، و جذران تخيليان

$$x^4 - 16 = 0 \quad (1B)$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x - 2) = 0$$

$$x = 2$$

$$(x + 2) = 0$$

$$x = -2$$

$$(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm 2i$$

للمعادلة جذران حقيقيان ، و جذران تخيليان

$$3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0 \quad (1C)$$

$$3x(x^2 + 3) - (x^2 + 3) = 0$$

$$(3x - 1)(x^2 + 3) = 0$$

$$(3x - 1) = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$(x^2 + 3) = 0$$

$$x^2 = -3$$

$$x = \pm i\sqrt{3}$$

## للمعادلة جذر حقيقي واحد، و جذران تخيليان

(2)

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة:

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ d^+ & d^+ & c^- & d^- & c^+ & \end{array}$$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة  $h(x)$  : 2 أو 0

$$h(-x) = 2(-x)^5 + (-x)^4 + 3(-x)^3 - 4(-x)^2 - (-x) + 9$$

$$\begin{array}{cccccc} - & \downarrow & \uparrow & \downarrow & - & \downarrow & \uparrow \\ c^- & c^+ & d^- & d^+ & c^- & d^+ & \end{array}$$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة:  $h(-x)$  3 أو 1

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
2	3	0	$2 + 3 + 0 = 5$
1	1	2	$2 + 1 + 2 = 5$
3	3	2	$0 + 3 + 2 = 5$
1	1	4	$0 + 1 + 4 = 5$

(4)

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان  $1 + 2i$ ،  $-1$  من أصفارها.

$$P(x) = (x+1)[(x-1)+2i][(x-1)-2i]$$

$$= (x+1)[(x-1)^2 + 4]$$

$$= (x+1)[x^2 - 2x + 1 + 4]$$

$$= (x+1)[x^2 - 2x + 5]$$

$$= x^3 - 2x^2 + 5x + x^2 - 2x + 5$$

$$= x^3 - x^2 + 3x + 5$$



حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 &= 0 & (1) \\ (x-5)(x+2) &= 0 \\ (x-5) &= 0 & (x+2) &= 0 \\ x &= 5 & x &= -2 \end{aligned}$$

للمعادلة جذران حقيقيان

$$\begin{aligned} x^3 + 12x^2 + 32x &= 0 & (2) \\ x(x^2 + 12x + 32) &= 0 \\ x(x+4)(x+8) &= 0 \\ x &= 0 & @ x &= -4 & @ x &= -8 \end{aligned}$$

للمعادلة ثلاثة جذور حقيقية

$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= 0 & (3) \\ (4x^2 - 9)(4x^2 + 9) &= 0 \\ (2x-3)(2x+3)(4x^2 + 9) &= 0 \\ (2x-3) &= 0 & (2x+3) &= 0 & (4x^2 + 9) &= 0 \\ x &= \frac{3}{2} & x &= -\frac{3}{2} & x^2 &= \frac{-9}{4} \\ & & & & x &= \pm \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$0 = x^3 - 8 \quad (4)$$

$$0 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -1 \pm i\sqrt{3}$$

للمعادلة جذر حقيقي واحد، و جذران تخيليان

$$x = -1 - i\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = 2$$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6 \quad (5)$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \\ \underbrace{\quad}^+ \quad \underbrace{\quad}^- \quad \underbrace{\quad}^+ \quad \underbrace{\quad}^- \end{array}$$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة  $f(x)$  : 3 او 1

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + 2(-x) - 6$$

$$\begin{array}{c} - \quad - \quad - \quad - \\ \underbrace{\quad}^- \quad \underbrace{\quad}^- \quad \underbrace{\quad}^- \quad \underbrace{\quad}^- \end{array}$$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة:  $f(-x)$  : 0

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
3	0	0	$0 + 0 + 3 = 3$
1	0	2	$2 + 0 + 1 = 3$

$$f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7 \quad (6)$$

$\underbrace{\quad}^d \underbrace{\quad}^c \underbrace{\quad}^d \underbrace{\quad}^d$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة  $f(x)$  : **1**

$$f(-x) = 6(-x)^4 + 4(-x)^3 - (-x)^2 - 5(-x) - 7$$

$+ \underbrace{\quad}^c - \underbrace{\quad}^d - \underbrace{\quad}^c + \underbrace{\quad}^c$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة:  $f(-x)$  **3 أو 1**

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
1	3	0	$0 + 3 + 1 = 4$
1	1	2	$2 + 1 + 1 = 4$

$$f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4 \quad (7)$$

$\underbrace{\quad}^c \underbrace{\quad}^c \underbrace{\quad}^c$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة  $f(x)$  : **3 أو 1**

$$f(-x) = 3(-x)^5 - 8(-x)^3 + 2(-x) - 4$$

$- \underbrace{\quad}^c + \underbrace{\quad}^c - \underbrace{\quad}^d -$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة:  $f(-x)$  **2 أو 0**

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
3	2	0	$2 + 3 + 0 = 5$
3	0	2	$2 + 1 + 2 = 5$
1	2	2	$0 + 3 + 2 = 5$
1	0	4	$0 + 1 + 4 = 5$

$$f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5 \quad (8)$$

$\underbrace{\quad}_d \underbrace{\quad}_d \underbrace{\quad}_d$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة  $f(x)$ : 0

$$f(-x) = -2(-x)^4 - 3(-x)^3 - 2(-x) - 5$$

$-\underbrace{\quad}_c^+ \underbrace{\quad}_d^+ \underbrace{\quad}_c^-$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة:  $f(-x)$  2 أو 0

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
0	2	2	$0 + 2 + 2 = 4$
0	0	4	$4 + 0 + 0 = 4$

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

(9) 4, -1, 6

عوامل كثيرة الحدود:  $(x-4)(x+1)(x-6)$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x^2 + x - 4x - 4)(x - 6) \\
 &= (x^2 - 3x - 4)(x - 6) \\
 &= x^3 - 3x^2 - 4x - 6x^2 + 18x + 24 \\
 &= x^3 - 9x^2 + 14x + 24
 \end{aligned}$$

(10) 3, -1, 1, 2

عوامل كثيرة الحدود:  $(x-3)(x+1)(x-1)(x-2)$

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (x-3)(x-2)(x^2-1) \\
 &= (x^2-5x+6)(x^2-1) \\
 &= x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x^2 + 5x - 6 \\
 &= x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6
 \end{aligned}$$



$$-2, 5, -3i \quad (11)$$

عوامل كثيرة الحدود:  $(x+2)(x-5)(x+3i)(x-3i)$

$$P(x) = (x+2)(x-5)(x+3i)(x-3i)$$

$$= (x^2 - 5x + 2x - 10)(x+3i)(x-3i)$$

$$= (x^2 - 3x - 10)[(x+3i)(x-3i)]$$

$$= (x^2 - 3x - 10)[x^2 - (3i)^2]$$

$$= (x^2 - 3x - 10)[x^2 - 9i^2]$$

$$= (x^2 - 3x - 10)(x^2 + 9)$$

$$= x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 9x^2 - 27x - 90$$

$$= x^4 - 3x^3 - x^2 - 27x - 90$$

$$-4, 4+i \quad (12)$$

عوامل كثيرة الحدود:  $(x+4)(x-4-i)(x-4+i)$

$$P(x) = (x+4)[(x-4-i)(x-4+i)]$$

$$= (x+4)[((x-4)-i)((x-4)+i)]$$

$$= (x+4)[(x-4)^2 - i^2]$$

$$= (x+4)[x^2 - 8x + 16 - i^2]$$

$$= (x+4)[x^2 - 8x + 16 + 1]$$

$$= (x+4)[x^2 - 8x + 17]$$

$$= x^3 - 8x^2 + 17x + 4x^2 - 32x + 68$$

$$= x^3 - 4x^2 - 15x + 68$$

## تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$4x^2 + 1 = 0 \quad (13)$$

$$x^2 = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 = -\frac{1}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}i$$

للمعادلة جذران تخيليان

$$2x^2 - 5x + 14 = 0 \quad (14)$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(14)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 112}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-87}}{4}$$

للمعادلة جذران تخيليان

$$-3x^2 - 5x + 8 = 0 \quad (15)$$

$$-3x^2 + 3x - 8x + 8 = 0$$

$$(-3x^2 + 3x) + (-8x + 8) = 0$$

$$-3x(x-1) - 8(x-1) = 0$$

$$(-3x-8)(x-1) = 0$$

$$(-3x-8) = 0$$

$$(x-1) = 0$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

$$x = 1$$

للمعادلة جذران حقيقيان

$$8x^3 - 27 = 0 \quad (16)$$

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0$$

$$(2x - 3) = 0$$

$$(4x^2 + 6x + 9) = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 144}}{8}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-108}}{8}$$

$$x = \frac{-6 \pm 6i\sqrt{3}}{8}$$

$$x = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$$

للمعادلة جذر حقيقي واحد، وجذران تخيليان

$$16x^4 - 625 = 0 \quad (17)$$

$$(2x)^4 - (5)^4 = 0$$

$$\left((2x)^2\right)^2 - \left((5)^2\right)^2 = 0$$

$$\left((2x)^2 - (5)^2\right)\left((2x)^2 + (5)^2\right) = 0$$

$$(2x - 5)(2x + 5)\left((2x)^2 + (5)^2\right) = 0$$

$$(2x + 5) = 0$$

$$(2x - 5) = 0$$

$$\left((2x)^2 + (5)^2\right) = 0$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$x^2 = -\frac{25}{4}$$

$$x = \pm \frac{5}{2}i$$

$$x = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 7x = 0 \quad (18)$$

$$x(x^2 - 6x + 7) = 0$$

$$(x^2 - 6x + 7) = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{2}$$

للمعادلة ثلاثة جذور حقيقية

$$x = -2$$

$$x = -2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 0$$

للمعادلة خمسة جذور حقيقية

$$(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$x^5 + 2x^3 + x = 0 \quad (20)$$

$$x(x^4 + 2x^2 + 1) = 0$$

$$x(x^2 + 1)^2 = 0$$

$$x(x^2 + 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$x = 0$$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7 \quad (21)$$

$$\underbrace{\quad}^c \underbrace{\quad}^c \underbrace{\quad}^d \underbrace{\quad}^d$$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة:  $f(x)$  2 أو 0

$$f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^3 + 2(-x)^2 + 5(-x) + 7$$

$$+\underbrace{\quad}^d +\underbrace{\quad}^d +\underbrace{\quad}^c -\underbrace{\quad}^c+$$

عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة:  $f(-x)$  2 أو 0

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
0	2	2	$2 + 2 + 0 = 4$
0	0	4	$4 + 0 + 0 = 4$
2	2	0	$0 + 2 + 2 = 4$
2	0	2	$2 + 0 + 2 = 4$

(22)

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$$

$$0 \text{ أو } 2$$

$$1$$

$$0 \text{ أو } 2$$

(23)

$$f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$$

$$0 \text{ أو } 2$$

$$1$$

$$2 \text{ أو } 4$$

(24)

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$$

$$0 \text{ أو } 2$$

$$0 \text{ أو } 2$$

$$0 \text{ أو } 2 \text{ أو } 4$$

$$f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24 \quad (25)$$

2 أو 0  
2 أو 0  
6 أو 4 أو 2

$$f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36 \quad (26)$$

2 أو 0  
1  
4 أو 2

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$y = x^3 - 2x^2 - 13x - 10 \quad (27)$$

5, -2, -1

$$y = x^3 + 2x^2 - 23x - 60 \quad (28)$$

-4, -3, 5

$$y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \quad (29)$$

-1, -1, 2i

$$y = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27 \quad (30)$$

-3, 1, -3i

$$y = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27 \quad (31)$$

0, -5, 3 + i

$$y = x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x \quad (32)$$

$$-2, -3, 4 - 3i$$

$$y = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 77x + 150$$

(33)

أرباح، قدر مدير الإنتاج في مصنع للأجهزة الإلكترونية أن الربح الذي يحققه المصنع من إنتاج  $x$  جهاز

$$P(x) = -0.006x^4 + 0.15x^3 - 0.05x^2 - 1.8x.$$

يعطى بالدالة: (a) 0 أو 2

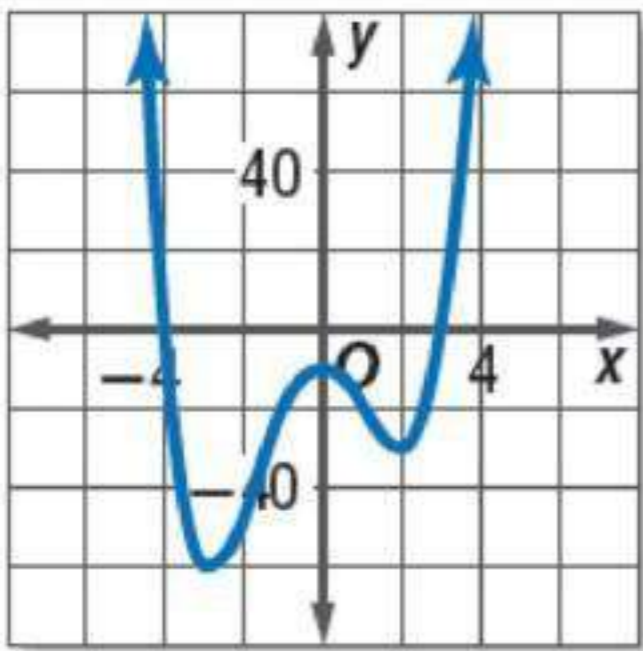
1

3 أو 1

(b) تمثيل الجذور غير السالبة عدد الأجهزة المنتجة يومياً دون أن يحقق المصنع ربحاً.

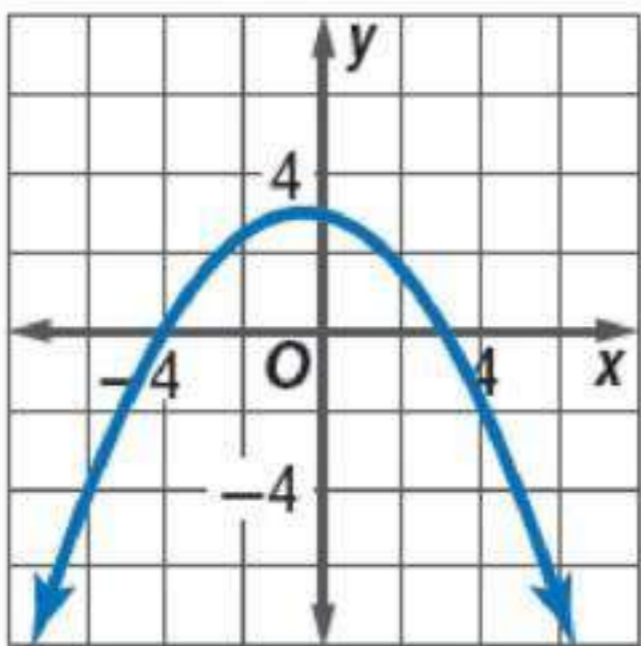
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

(34)

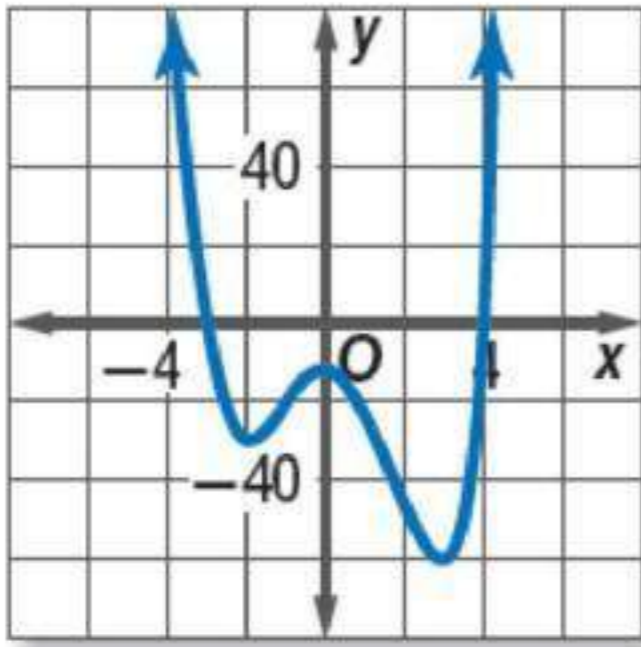


(c)  $-4, 3, i, -1$

(35)



(b)  $-4, 3$

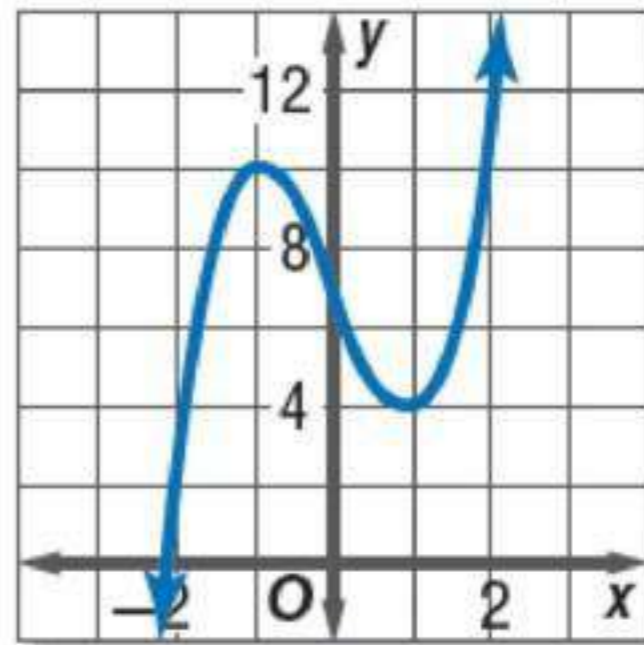


(36)

$-3, 4, i, -i$  (a)

حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الممثلتين بيانياً فيما يأتي، ووضح إجابتك:

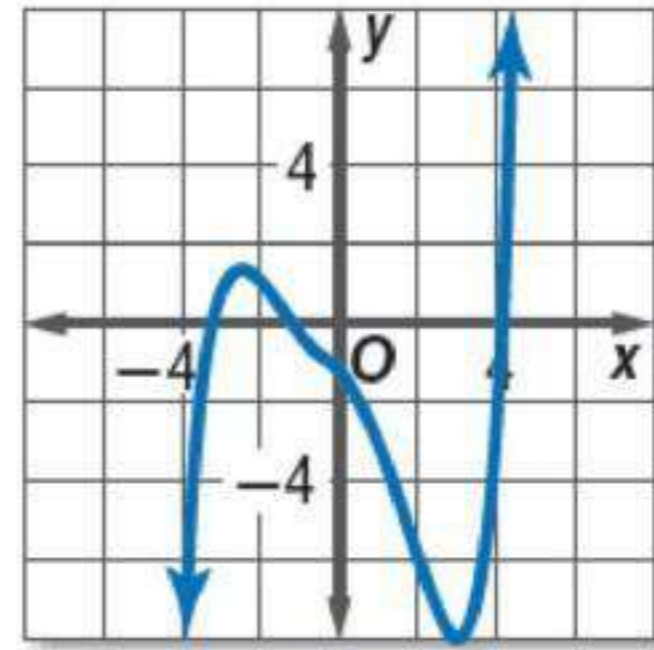
(37)



الدرجة: 3

- ليس هناك جذور حقيقية موجبة؛ هناك جذر حقيقي سالب، وهناك جذران تخيليان.
- لأن التمثيل البياني لا يقطع الجزء الموجب من محور  $X$  ويقطعه مرة واحدة فقط في الجزء السالب.
- و لأن درجة كثيرة الحدود و لأن درجة كثيرة الحدود 3 ، لذا فإن للدالة صفرين تخيليين.





الدرجة: 5

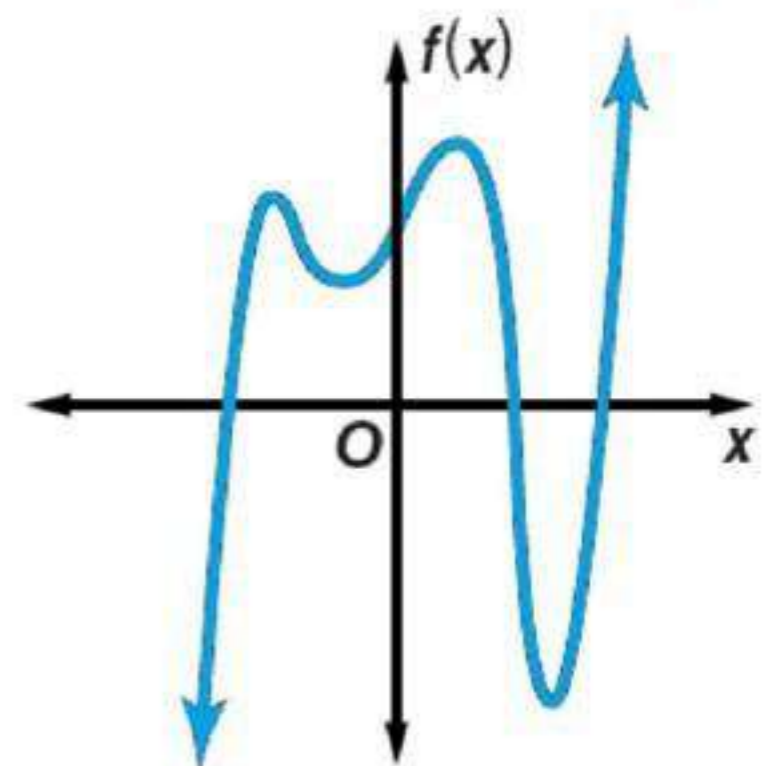
- هناك جذر حقيقي موجب، وجذران حقيقيان سالبان وجذران تخيليان.
- لأن التمثيل البياني يقطع الجزء الموجب من محور  $X$  مرة واحدة ويقطعه مرتان في الجزء السالب.
- و لأن درجة كثيرة الحدود 5 ، لذا فإن للدالة صفرين تخيلين.

### مسائل مهارات التفكير العليا

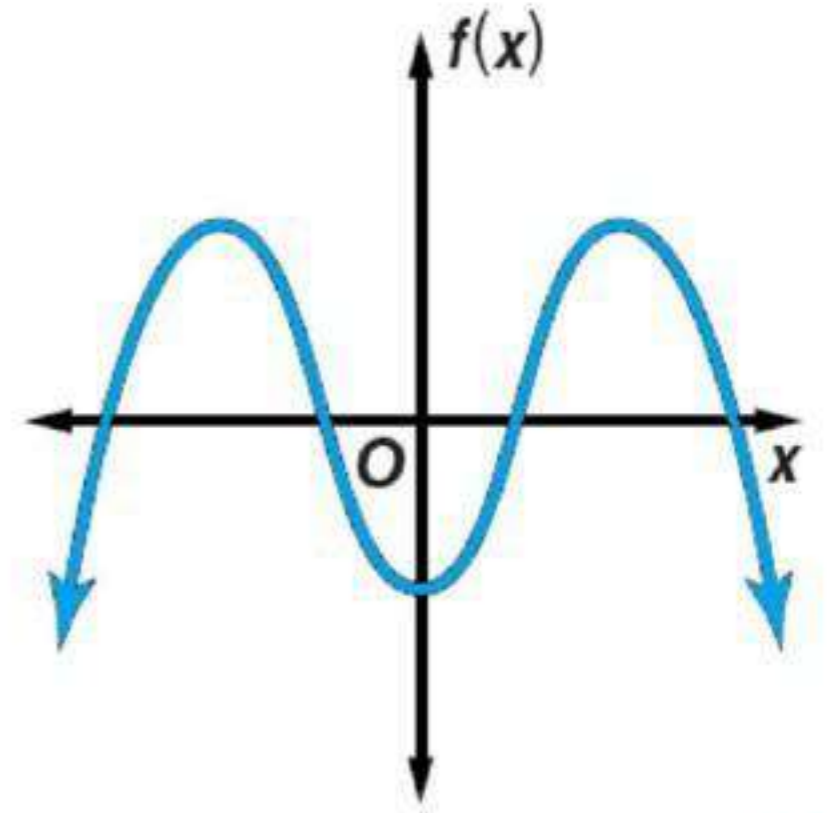
**مسألة مفتوحة:** في كل مما يأتي، مثل بيانياً دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها:

- (a) 3 أصفار حقيقية وصفران تخيليان (b) 4 أصفار حقيقية (c) صفران تخيليان

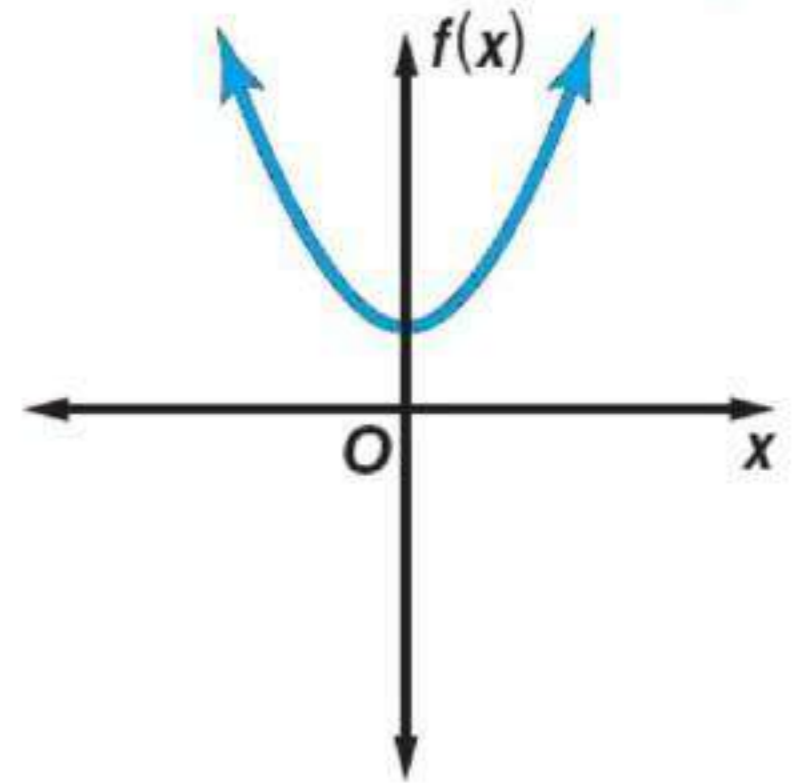
(a)



(b)



(c)



(40)

تحدد: اكتب معادلة على صورة حاصل ضرب عوامل دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، لها صفران تخيليان، وصفر غير صحيح، وصفران غير نسبيين، ووضح إجابتك.

$$f(x) = (x + 2i)(x - 2i)(3x + 5)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$

استعمل المرافقات للتخيلي.

(41)

حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخرى، ووضح إجابتك:

$$r^4 + 1 = 0$$

$$r^3 + 1 = 0$$

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r^3 - 8 = 0$$

جميع حلول هذه المعادلة أعداد تخيلية أما المعادلات البقية فلها حلول حقيقية.

(42)

تبرير، اكتب مثلاً مضاداً لكل عبارة فيما يأتي:

(a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

(b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4 \quad (a)$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x \quad (b)$$

(43)

اكتب، وضح لزميلك كيف تستعمل قانون ديكرت للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$$

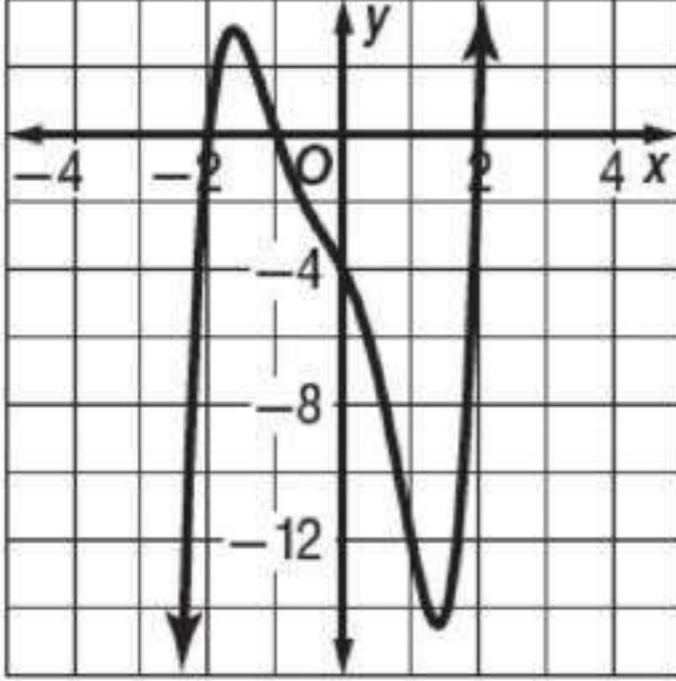
لكي تقرر عدد الجذور الحقيقية الموجبة نقرر عدد مرات تغير إشارات الحدود أثناء التحرك من اليسار إلى اليمين وفي هذه الحالة هناك 3 تغيرات في الإشارة لذا فإن هناك 3 جذور حقيقية موجبة أو جذر واحد حقيقي موجب.

ولتقرر عدد الجذور الحقيقية السالبة أوجد الدالة  $f(-x)$  ثم ابحث عن عدد مرات التغير في إشاراتها أثناء التحرك من اليسار إلى اليمين. وفي هذه الحالة تجد أن هناك تغير واحد ولذا تستنتج وجود جذر حقيقي واحد سالب.

## تدريب على اختبار

(44)

استعمل التمثيل البياني للدالة:  $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$   
وحدد أيًا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود  $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$



$x + 2$  C

$x - 2$  A

$x + 1$  D

$x - 1$  B

الاختيار الصحيح: (B)

## مراجعة تراكمية

أوجد  $f(4)$ ,  $f(-8)$  لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2 \quad (45)$$

$$f(-8) = -1638, \quad f(4) = 342$$

$$f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x \quad (46)$$

$$f(-8) = 21808, \quad f(4) = 1192$$

$$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4 \quad (47)$$

$$f(-8) = -63940, \quad f(4) = 1868$$

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية: (الدرس 3-6)

$$x^6 - y^6 \quad (48)$$

$$(x+y)(x-y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$$

$$4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z \quad (49)$$

$$(x^2 + 2x + 4)(4y - 3z)$$

$$5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b \quad (50)$$

$$(a-4)(a-2)(5a+2b)$$

# نظرية الصفر النسبي Rational Zero Theorem

# 3-9

## تحقق

$$g(x) = 3x^3 - 4x + 10 \quad (1A)$$

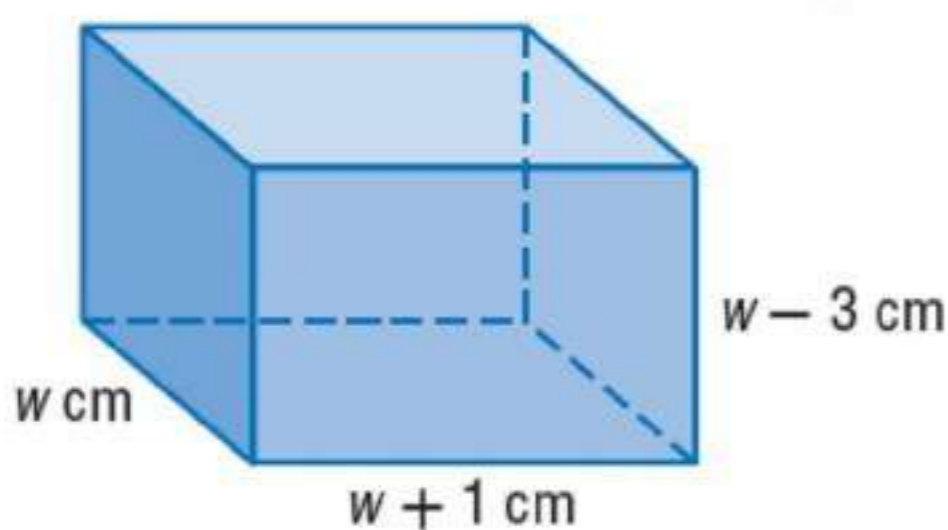
$$\pm \frac{10}{3}, \pm 10, \pm \frac{5}{3}, \pm 5, \pm \frac{2}{3}, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm 1$$

$$h(x) = x^3 + 11x^2 + 24 \quad (1B)$$

$$\pm 24, \pm 12, \pm 8, \pm 6, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$$

(2)

هندسة، منشور متوازي مستطيلات حجمه  $1056 \text{ cm}^3$ ، ويزيد  
طوله  $1 \text{ cm}$  على عرضه، ويقل ارتفاعه  $3 \text{ cm}$  عن عرضه، أوجد  
أبعاده.



$$8 \text{ cm}, 11 \text{ cm}, 12 \text{ cm}$$

(3)

أوجد جميع الأصفار لكل من الدالتين الآتيتين:

$$h(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4 \quad (3A)$$

$$\pm \frac{2}{3}, \pm i$$

$$k(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 45x + 18 \quad (3B)$$

$$2, -\frac{1}{2}, \pm 3i$$



اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددتها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24 \quad (1)$$

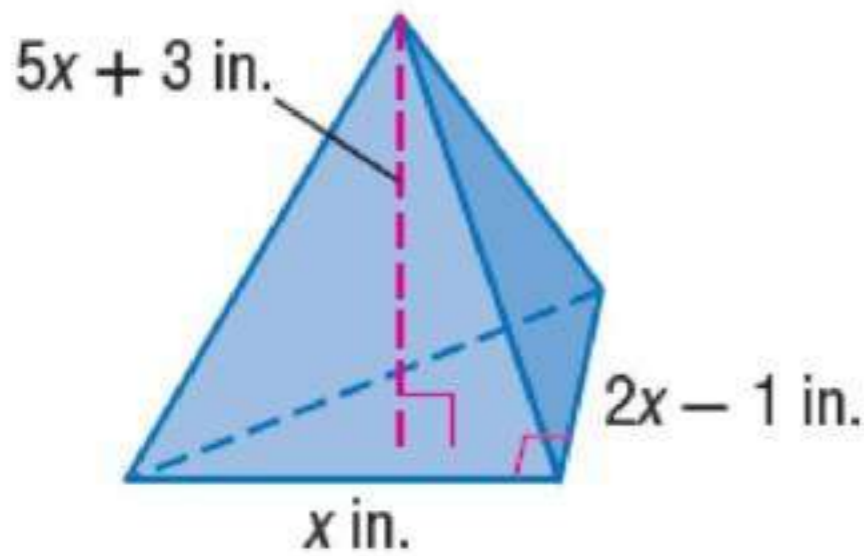
$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 15 \quad (2)$$

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}$$

(3)

هندسة إذا كان حجم الهرم الثلاثي المجاور  $210 \text{ in}^3$ ، فأوجد أبعاده.



$$5 \text{ in}, 9 \text{ in}, 28 \text{ in}$$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدالتين الآتيتين:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42 \quad (4)$$

$$-3, 2, 7$$

$$f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 29x + 12 \quad (5)$$

$$-\frac{3}{2}, -1$$

أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي :

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5 \quad (6)$$

$$\frac{5}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$f(x) = 8x^3 + 14x^2 + 11x + 3 \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{8}$$

$$f(x) = 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12 \quad (8)$$

$$-4, \frac{3}{4}, -i, i$$

$$f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 14x - 15 \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1+2i, 1-2i$$

### تدرب وحل المسائل

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل دالة مما يأتي :

$$f(x) = x^4 + 8x - 32 \quad (10)$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$$

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 10 \quad (11)$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28, \pm 56$$

$$f(x) = 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35 \quad (12)$$

$$\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{7}{3}, \pm \frac{35}{3}$$

$$f(x) = 6x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 18 \quad (13)$$



$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, 18, \pm \frac{1}{2},$$

$$, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

$$f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x - 42 \quad (14)$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, 18,$$

$$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

$$f(x) = 15x^3 + 6x^2 + x + 90 \quad (15)$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, 14, \pm 21, \pm 42, \pm \frac{1}{2},$$

$$\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{21}{2}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{7}{8}, \pm \frac{21}{8}$$

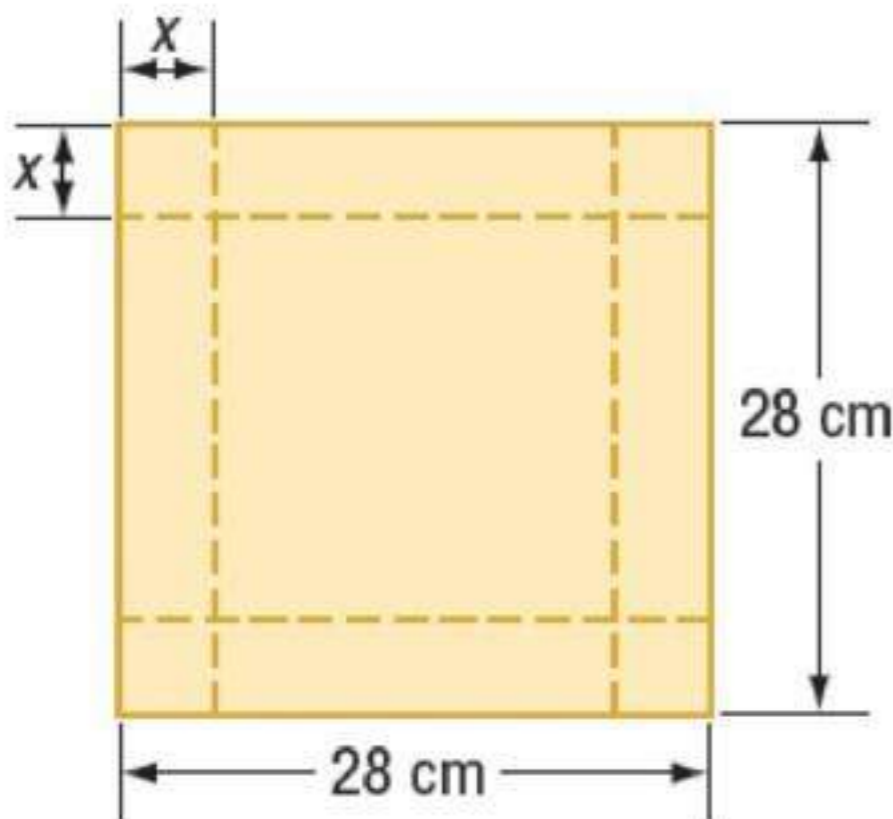
(16)

تصنيع يُراد تصنيع صندوق بقصص مربعات صغيرة متساوية في المساحة من زوايا ورقة مقواة مربعة الشكل، ثم ثني الجوانب إلى الأعلى.

(a) اكتب الدالة  $V(x)$  التي تمثل حجم الصندوق.

(b) ما قيمة  $x$  التي تجعل حجم الصندوق  $1152 \text{ cm}^3$ ؟

(c) إذا كان  $x = 6 \text{ cm}$ ، فما حجم الصندوق؟



(a)

$$V(x) = (28 - 2x)(28 - 2x)x$$

$$= 4x^3 - 112x^2 + 784x$$

(b) 2 أو 8

(c)  $1536 \text{ cm}^3$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي:

$$f(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30 \quad (17)$$

$-5, -3, -2$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 100x + 75 \quad (18)$$

$-5, \frac{3}{4}, 5$

$$f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 21x + 10 \quad (19)$$

$-\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{2}, 1$

$$f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8 \quad (20)$$

$-1, 2$

$$f(x) = 4x^3 + x^2 + 16x + 4 \quad (21)$$

$-\frac{1}{4}$

$$f(x) = 81x^4 - 256 \quad (22)$$

$-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$

أوجد جميع أصفار كل دالة فيما يأتي:

$$f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 9x + 2 \quad (23)$$

$\frac{2}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \quad (24)$$

$2, -1, i, -i$

$$f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2 \quad (25)$$
$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 2$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x \quad (26)$$
$$0, 3, -i, i$$

$$f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 \quad (27)$$
$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2$$

$$f(x) = 6x^4 + 22x^3 + 11x^2 - 38x - 40 \quad (28)$$
$$-2, \frac{4}{3}, \frac{-3 \pm i}{2}$$

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28 \quad (29)$$
$$-2, 2, \frac{7}{2}$$

$$f(x) = 9x^5 - 94x^3 + 27x^2 + 40x - 12 \quad (30)$$
$$3, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 10 \quad (31)$$
$$-1, -2, 5, i, -i$$

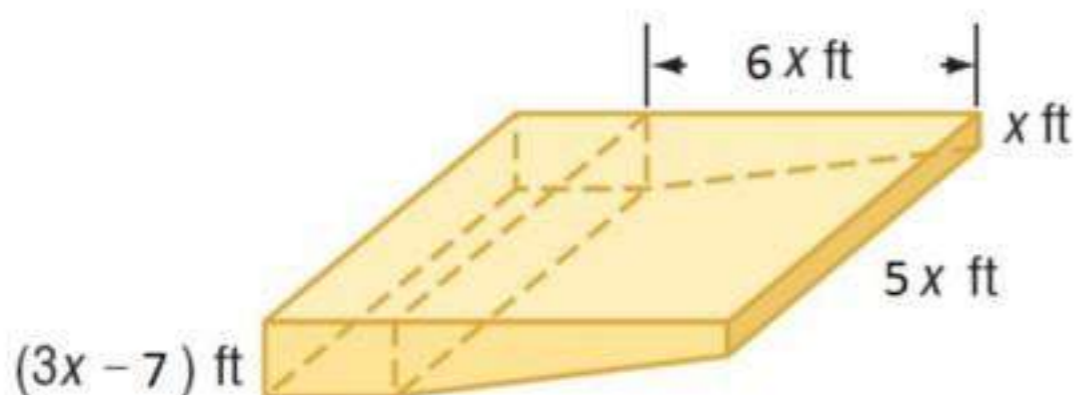
$$f(x) = 48x^4 - 52x^3 + 13x - 3 \quad (32)$$
$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

(33)

بركة سباحة يوضح الشكل الآتي مخطط بركة سباحة  
تسع  $9175\text{ft}^3$  من الماء.

(a) اكتب دالة كثيرة حدود تمثل حجم البركة.

(b) ما قيم  $x$  الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟



(34)

أفعوانة، يمكن تمثيل ارتفاع قطار أفعوانة عن مستوى الأرض في مدينة الألعاب بالدالة  
 $f(t) = t^4 - 31t^3 + 308t^2 - 1100t + 1200$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $f(t)$  ارتفاع الأفعوانة. استعمل  
نظرية الصفر النسبي لتحديد الأوقات الأربعة التي تكون عندها الأفعوانة عند مستوى الأرض.

$2s, 4s, 10s, 15s$

(35)

يُباع أحد أنواع الزيوت في عبوات أسطوانية الشكل حجم كل منها  $160\pi\text{in}^3$  تقريبًا، ويزيد ارتفاعها  $6\text{in}$  على  
نصف قطرها.

(a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم عبوة الزيت مستعملًا قانون حجم الأسطوانة  $V = \pi r^2 h$

(b) ما قيم  $r$  الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟

(c) أوجد أبعاد العبوة.

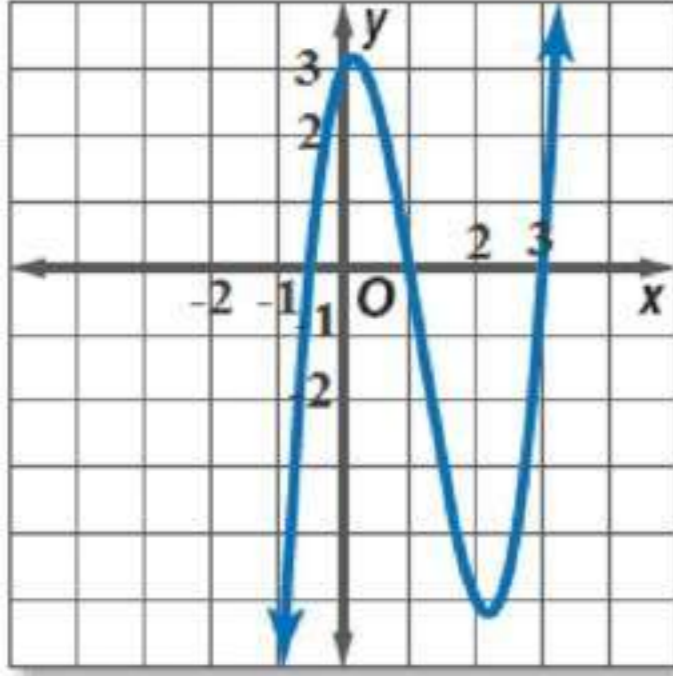
$$V = \pi r^3 + 6\pi r^2 \quad (a)$$

$$4 \text{ و } 4, -5 \pm i\sqrt{15} \quad (b)$$

$$r = 4 \text{ in}, h = 10 \text{ in} \quad (c)$$

(36)

أجب عن كل من الفرعين الآتيين:

(a) أوجد جميع أصفار كل من الدالتين:  $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ و  $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ .(b) أي الدالتين لها التمثيل البياني المجاور فأم  $g$ ؟

$$(a) \quad -1, \frac{1}{2}, -3; -\frac{1}{2}, 1, 3$$

(b) الدالة  $g$ 

أوجد جميع أصفار كل من الدالتين الآتيين:

$$(37) \quad f(x) = x^5 + 6x^4 - 19x^3 - 43x^2 + 18x + 40$$

$$1, -1, -2, 4, -5$$

$$(38) \quad f(x) = x^5 + x^4 - 23x^3 + 33x^2 + 126x - 216$$

$$2, 3, 3, -3, -4$$

### مسائل مهارات التفكير العليا

(39)

اكتشف الخطأ، كتبت كل من سلمى ونوف جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة:

 $f(x) = 4x^4 + 8x^5 + 10x^2 + 3x + 16$  فأي منهما إجابتها صحيحة؟ وضح إجابتك.

نوف

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$$

سلمى

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$$

نوف؛ قيمة  $q$  (المعامل الرئيس) 4 و ليست 8

(40)

تحذّر: اكتب دالة كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة يكون كل من العددين  $5 + 2i$  ,  $1 + \sqrt{3}$  صفراً من أصفارها.

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 38x - 58$$

(41)

تبرير: حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً؟ وضع إجابتك. "إذا كانت جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود أعداداً صحيحة فإن معاملها الرئيس إما 1 أو -1".

صحيحة دائماً؛ قد تكون جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود أعداداً صحيحة فغن قيمة  $q$  يجب أن تكون 1 أو -1 و إلا فمن الممكن أن تكون الأصفار الممكنة كسوراً. و لكي تكون قيمة  $q$  1 أو -1، يجب أن يكون المعامل الرئيس لكثيرة الحدود 1 أو -1.

(42)

مسألة مفتوحة: اكتب دالة تكون جميع أصفارها الممكنة:

$$\pm 18, \pm 9, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm \frac{9}{4}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 8x + 18$$

(43)

اكتب: وضح طريقة استعمال نظرية الصفر النسبي لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة لدالة.

يمثل الحد الثابت بالرمز  $p$  ، ويمثل المعامل الرئيس بالرمز  $q$  ويمكن إيجاد الأصفار الممكنة

$$\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q}$$

حيث  $m$  عامل من عوامل  $p$  و  $n$  عامل من عوامل  $q$ . فمثلاً إذا كانت  $q = 3$  ,  $p = 4$  فإن

$$\pm \frac{1}{3}, \pm 4, \pm 2, \pm 1, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{2}{3} \text{ : الأصفار النسبية الممكنة هي:}$$

## تدريب على اختبار

(44)

أي مما يأتي يعدّ صفرًا للدالة:

$$f(x) = 12x^5 - 5x^3 + 2x - 9$$

1 D       $\frac{3}{8}$  C       $-\frac{2}{3}$  B      -6 A

الإختيار الصحيح: (D)

(45)

كم صفرًا حقيقيًا سالبًا للدالة:

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

0 D      1 C      2 B      3 A

الإختيار الصحيح: (C)

## مراجعة تراكمية

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

6 , -3 ,  $\sqrt{2}$  (46)

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 6x + 36$$

5 , -1 ,  $4i$  (47)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 64x - 80$$

-4 , -2 ,  $i\sqrt{2}$  (48)

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 12x + 16$$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

$$x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6; x + 3 \quad (49)$$
$$(x - 1)(x + 2)(x + 1)$$

$$a^4 - 2a^3 - 17a^2 + 18a + 72; a - 3 \quad (50)$$
$$(a + 3)(a - 4)(a + 2)$$

$$x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12; x + i \quad (51)$$
$$(x - 3)(x + 4)(x - i)$$



## اختبر مفرداتك

بين ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

- (1) c
- (2) d ، القانون العام لحل المعادلة التربيعية
- (3) c
- (4) d ، كثيرة الحدود أولية
- (5) c
- (6) c
- (7) c
- (8) d ، دالة مكتوبة على الصورة التربيعية

## مراجعة الدروس

## 3-1 الأعداد المركبة

بسّط كلّ مما يأتي:

$$2i\sqrt{2} = \sqrt{-8} \quad (9)$$

$$15 + 3i = (2 - i)(13 + 4i) \quad (10)$$

$$2 + 5i = (6 + 2i)(4 - 3i) \quad (11)$$

$$28 + 3i = (6 + 5i)(3 - 2i) \quad (12)$$

(13)

كهرباء. تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية  $3 + 2i$  أوم، وفي الجزء الآخر منها  $4 - 3i$  أوم. اجمع هذين العددين لتجد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

المعوقة الكلية في الدائرة الكهربائية =  $7 - j$  أوم

حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$2x^2 + 50 = 0 \quad (14)$$

$$\pm 5i =$$

$$4x^2 + 1 = 0 \quad (15)$$

$$\pm \frac{1}{2}i =$$

القانون العام والمميز

3-2

أجب عن الفروع a-c لكل معادلة تربيعية فيما يأتي:

(a) أوجد قيمة المميز.

(b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

(c) حل المعادلة باستخدام القانون العام.

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \quad (16)$$

$$0 \quad (16a)$$

(16b) جذر حقيقي نسبي

$$\{5\} \quad (16c)$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \quad (17)$$

$$144 \quad (17a)$$

(17b) جذران حقيقيان نسبيان

$$\{-8, 4\} \quad (17c)$$

$$2x^2 + 3x - 18 = 0 \quad (18)$$

$$153 \quad (18a)$$

(18b) جذران حقيقيان غير نسبيين

$$\left\{ \frac{-3 \pm 3\sqrt{17}}{4} \right\} \quad (18c)$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (19)$$

$$0 \quad (19a)$$

(19b) جذر حقيقي نسبي

$$\left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad (19c)$$

(20)

**فيزياء** قذف محمد كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها  $40 \text{ ft/s}$ . إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض  $(h)$  بالأقدام يعطى بالمعادلة  $h = -16t^2 + 40t + 5$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض.

حوالي 2.62 ثانية

### العمليات على كثيرات الحدود

3-3

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

$$\frac{7x}{y^4} = \frac{14x^4y}{2x^3y^5} \quad (21)$$

$$3t^2n - 15t = 3t(tn - 5) \quad (22)$$

$$r^2 + 8r - 5 = (4r^2 + 3r - 1)(3r^2 - 5r + 4) \quad (23)$$

$$x^{12} = (x^4)^3 \quad (24)$$

$$m^3 - m^2 p - mp^2 + p^3 = (m + p)(m^2 - 2mp + p^2) \quad (25)$$

$$8b^2 + 3b = 3b(2b - 1) + 2b(b + 3) \quad (26)$$

بسّط كلّ مما يأتي:

$$3x^3 + 2x^2y^2 - 4xy = \frac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5} \quad (27)$$

$$6y^2 + y - 12 = (6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2) \quad (28)$$

$$a^3 + 3a^2 - 4a + 2 = (a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1} \quad (29)$$

$$(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1) \quad (30)$$

$$2a^5 - a^4 - 2a^3 + a^2 + a - 1 + \frac{1}{2a + 1}$$

(31)

 $3x + 2$ 

هندسة، حجم المنشور المتوازي  
المستطيلات في الشكل المجاور يساوي  
 $3x^3 + 11x^2 - 114x - 80$  وحدة  
مكعبة، فما مساحة القاعدة؟

مساحة القاعدة =  $x^2 + 3x - 40$  وحدة مربعة

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

$$5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1 \quad (32)$$

الدرجة 6 و المعامل الرئيس 5

$$6xy^2 - xy + y^2 \quad (33)$$

كثيرة حدود بمتغيرين  $x, y$

$$12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3 \quad (34)$$

الدرجة 8 و المعامل الرئيس 6

أوجد  $p(-2)$ ،  $p(x+h)$  لكل دالة فيما يأتي:

$$p(x) = x^2 + 2x - 3 \quad (35)$$

$$p(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3$$

$$p(-2) = -3$$

$$p(x) = 3x^2 - x \quad (36)$$

$$p(x+h) = 3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h$$

$$p(-2) = 14$$

$$p(x) = 3 - 5x^2 + x^3 \quad (37)$$

$$p(x+h) = 3 - 5x^2 - 10xh - 5h^2 + x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$$

$$p(-2) = -25$$

حلّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

$$x^3 + 2x^2 - 35x = 0 \quad (38)$$

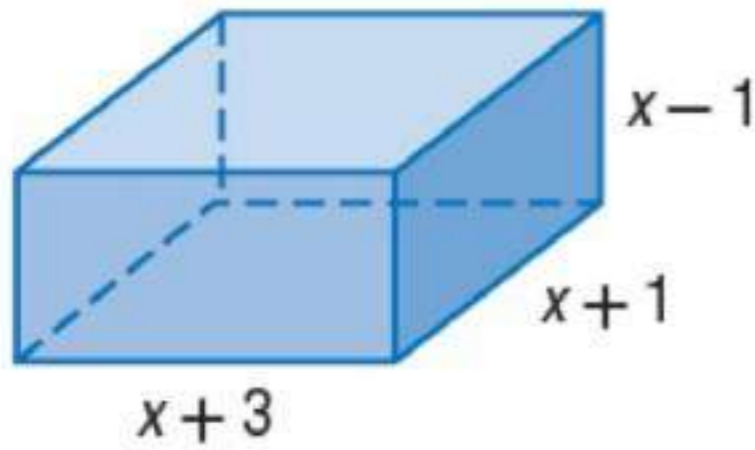
$$-7, 0, 5$$

$$8x^4 - 10x^2 + 3 = 0 \quad (39)$$

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(40)

هندسة: إذا كان حجم المنشور في الشكل الآتي يساوي  $315 \text{ in}^3$ . فأوجد كلاً من قيمة  $x$  وطول المنشور وعرضه وارتفاعه.



$$x = 6$$

$$9 \text{ in} = \text{الطول}$$

$$7 \text{ in} = \text{العرض}$$

$$5 \text{ in} = \text{الارتفاع}$$

أوجد  $f(4)$ ,  $f(-2)$  لكل دالة فيما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

$$f(x) = x^2 - 3 \quad (41)$$

$$f(-2) = 1$$

$$f(4) = 13$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \quad (42)$$

$$f(-2) = 18$$

$$f(4) = 0$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \quad (43)$$

$$f(-2) = 16$$

$$f(4) = 118$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1 \quad (44)$$

$$f(-2) = 57$$

$$f(4) = 321$$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

$$3x^3 + 20x^2 + 23x - 10, \quad x + 5 \quad (45)$$

$$(x + 2), \quad (3x - 1)$$

$$2x^3 + 11x^2 + 17x + 5, \quad 2x + 5 \quad (46)$$

$$(x^2 + 3x + 1)$$

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60, \quad x - 5 \quad (47)$$

$$(x + 3)(x + 4)$$

### الجزور والأصفار

3-8

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2 \quad (48)$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 3 أو 1

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 0

عدد الأصفار التخيلية: 2 أو 0

$$f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23 \quad (49)$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 0

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 4 أو 2

عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2 أو 0



$$f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6 \quad (50)$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 3 أو 1

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 1

عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2

$$f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3 \quad (51)$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 2 أو 0

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 1

عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2

$$f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3 \quad (52)$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 2 أو 0

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 2 أو 0

عدد الأصفار التخيلية: 6 أو 4 أو 2

### نظرية الصفر النسبي

3-9

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2 \quad (53)$$

$-2, -1 \pm \sqrt{2}$

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1 \quad (54)$$

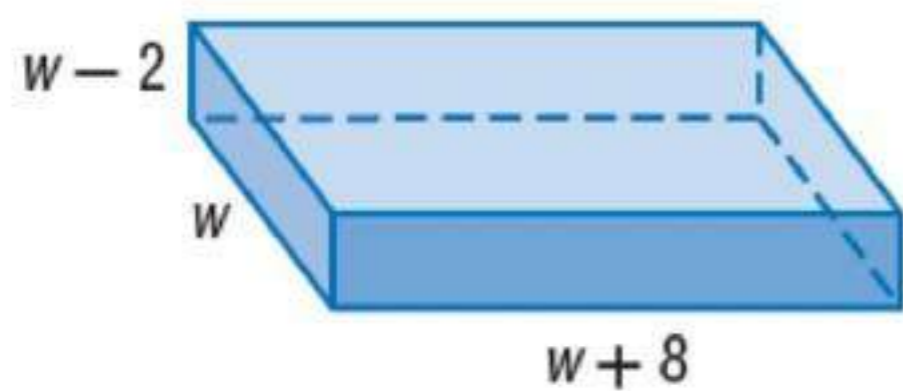
$-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \quad (55)$$

$-2, \pm 2i$

(56)

تخزين، صنعت سعاد صندوقًا للتخزين على شكل منشور متوازي مستطيلات حجمه  $96 \text{ ft}^3$ . أوجد أبعاد الصندوق باستخدام الشكل أدناه.



الطول =  $12 \text{ ft}$

العرض =  $4 \text{ ft}$

الارتفاع =  $2 \text{ ft}$

## الفصل 3 اختبار الفصل

بسط كلًا مما يأتي:

$$-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i = \frac{2-i}{1+3i} \quad (1)$$

$$6i = (2+3i)(2-3i) \quad (2)$$

$$14+2i = (3-i) \cdot (4+2i) \quad (3)$$

بسط كلًا مما يأتي:

$$21609a^2b^4 = (3a)^2(7b)^4 \quad (4)$$

$$14x^2 + 10x - 5 = (7x-2)(2x+5) \quad (5)$$

$$-2x^2 + 10x - 5 = (2x^2 + 3x - 4) - (4x^2 - 7x + 1) \quad (6)$$

$$4x^3 - x^2 + 10x - 14 = (4x^3 - x^2 + 5x - 4) + (5x - 10) \quad (7)$$

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 8x + 3) \div (x+3) \quad (8)$$

$$3x^2 + 4x - 11 - \frac{9}{x-3} = (3x^3 - 5x^2 - 23x + 24) \div (x-3) \quad (9)$$

(10)

إذا كانت  $l(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4$ ، فما قيمة  $l(3b)$ ؟

$$324b^3 + 180b^2 - 16$$

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$y(2y + x)(4y^2 + 2xy + x^2) = 8y^4 + x^3y \quad (11)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \quad \text{كثيرة حدود أولية} \quad (12)$$

$$(x - y)(a + 2)(a + 1) = a^2x + 3ax + 2x - a^2y - 3ay - 2y \quad (13)$$

حل كلًا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

$$8x^3 + 1 = 0 \quad (14)$$

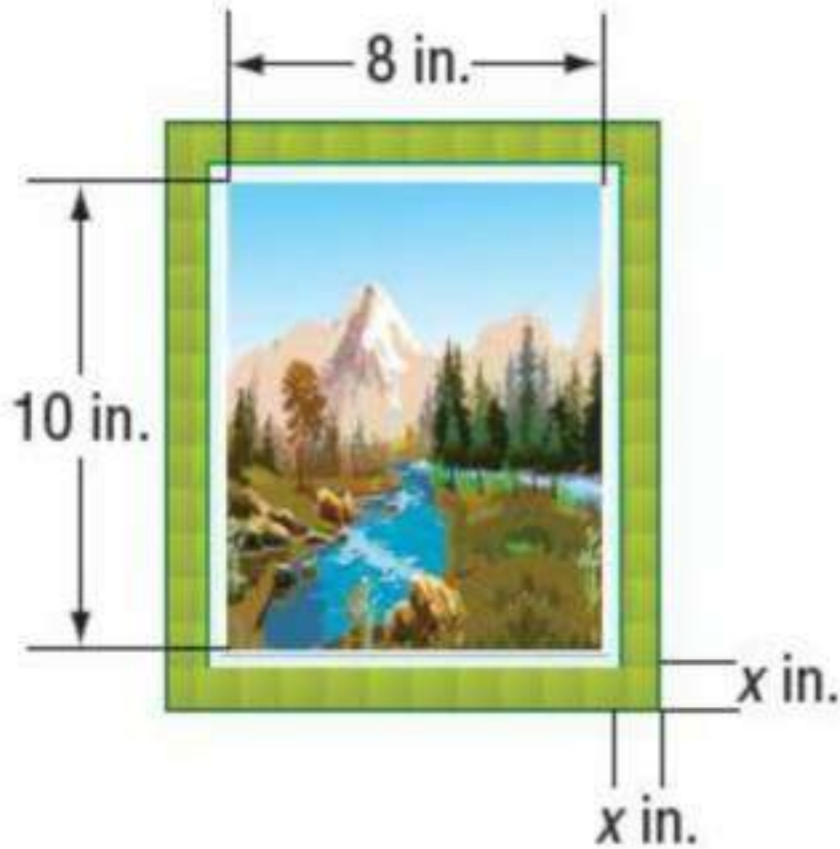
$$-\frac{1}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}$$

$$x^4 - 11x^2 + 28 = 0 \quad (15)$$

$$\pm\sqrt{7}, \pm 2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{حل المعادلة:} \quad (16)$$

$$1, 3$$



(17)

إطارات، إذا كانت مساحة الصورة وإطارها في الشكل الآتي  $268 \text{ in}^2$ ، فما عرض الإطار؟

$$2 \text{ in} = \text{عرض الإطار}$$

(18)

اختيار من متعدد، إذا كان  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 3$ ، فما قيمة  $f(-2)$ ؟

37 A      -33 C

27 B      -21 D

الاختيار الصحيح (B)

(19)

فيما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى:

$$2x^3 + 15x^2 + 22x - 15; x + 5$$

$$(2x-1), (x+3)$$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتهيلية لكل من الدالتين الآتيتين:

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 3 \quad (20)$$

$$0, 1, 2, 0 \text{ أو } 0$$

$$p(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1 \quad (21)$$

$$4, 1, 1$$

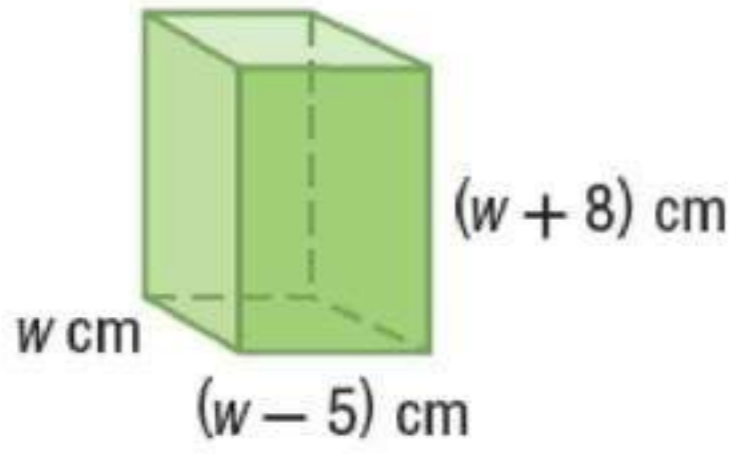
أوجد جميع أصفار كل من الدالتين الآتيتين:

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad (22)$$

$$-1, 2, 3$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \quad (23)$$

$$-2, \pm 2i$$



(24)

هندسة، إذا كان حجم المنشور المتوازي المستطيلات  
الموضح بالشكل أدناه  $612 \text{ cm}^3$ ، فأوجد أبعاده.

**$9 \text{ cm} , 17 \text{ cm} , 4 \text{ cm}$**

(25)

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 12x + 8.$$

**$\pm \frac{1}{2} , \pm 1 , \pm 2 , \pm 4 , \pm 8$**

## الإعداد للاختبارات المعيارية

## تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة من المسألتين الآتيتين، وحدد المطلوب واستعمل المعطيات في الحل:

(1)

لدى مزارع سياج طوله 240 ft، ويريد أن يحيط به حديقة مستطيلة الشكل على أن يكون جدار منزله أحد جوانبها. فما أكبر مساحة ممكنة للحديقة؟

7200 ft<sup>2</sup> A4960 ft<sup>2</sup> C3600 ft<sup>2</sup> B3280 ft<sup>2</sup> D

الاختيار الصحيح: (A)

(2)

يتم تصنيع الحلقات المعدنية بعمل ثقب في رقاقة معدنية دائرية. إذا صنعت حلقة بعمل ثقب عند مركز رقاقة معدنية قطرها 1.8 in، وكانت مساحة سطح الحلقة  $0.65\pi \text{ in}^2$ ، فما نصف قطر الثقب؟

0.35 in F

0.38 in G

0.40 in H

0.42 in J

الاختيار الصحيح: (H)

اختبار تراكمي  
للفصول 1 إلى 3

الفصل  
3

اختيار من متعدد

(1)

أبسط صورة للمقدار  $(5n^2 + 11n - 6) - (2n^2 - 5)$  هي:

$3n^2 + 11n - 11$  A

$3n^2 + 11n - 1$  B

$7n^2 + 11n - 11$  C

$7n^2 + 11n - 1$  D

الاختيار الصحيح: (B)

(2)

أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة:  $x^3 - 37x - 84 = 0$  ؟

$-4$  A

$-3$  B

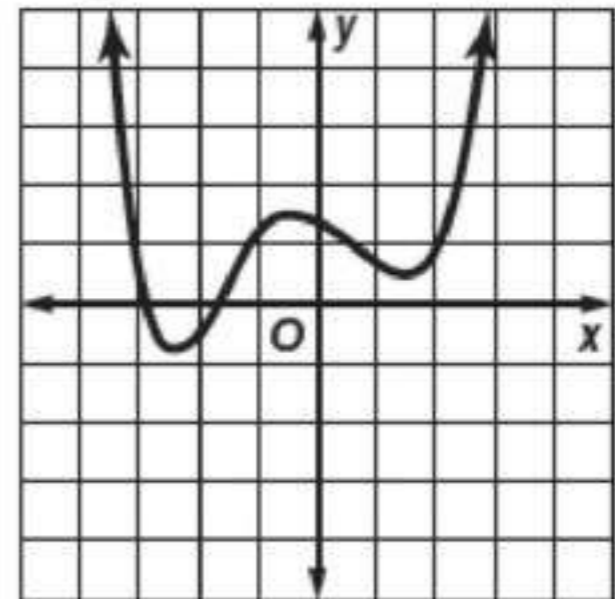
$6$  C

$7$  D

الاختيار الصحيح: (C)

(3)

كم صفرًا حقيقيًا للدالة الكثيرة الحدود الممثلة بيانيًا أدناه؟



$4$  C

$2$  A

$5$  D

$3$  B

الاختيار الصحيح: (A)



(4)

إذا كانت المصفوفة  $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$  ليس لها نظير ضربي، فإن قيمة  $x$  تساوي:

- A  $\frac{4}{3}$
- B  $\frac{4}{5}$
- C  $-\frac{4}{3}$
- D  $-\frac{4}{5}$

الاختيار الصحيح: (A)

(5)

استعمل عبد الرحمن الدالة:

$$P(x) = -0.000047x^2 + 0.027x + 3$$

لتقدير عدد سكان المدينة التي يسكنها ما بين عامي

1390، 1430 هـ، حيث  $x$  عدد السنوات منذ عام 1390 هـ،  $P$  عدد

السكان بالملايين. فما قيمة  $P(20)$  التي تمثل عدد سكان هذه

المدينة عام 1410 هـ؟

- A 2 مليون تقريباً
- B 2.5 مليون تقريباً
- C 3 ملايين تقريباً
- D 3.5 ملايين تقريباً

الاختيار الصحيح: (D)

(6)

أبسط صورة للمقدار  $\frac{2}{1-5i}$  هي:

$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$  A

$\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$  B

$\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$  C

$2 - \frac{2}{5}i$  D

الاختيار الصحيح: (C)

(7)

ما قيمة معيّر المعادلة:  $x^2 - x - 20 = 0$  ؟

5 C 9 A

-4 D 81 B

الاختيار الصحيح: (B)

(8)

إذا كان  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  وكانت  $X$  مصفوفة

رتبتها  $2 \times 2$  بحيث  $X = 2A - B$  فإن:

$X = 3B$  A

$X = 2A$  B

$X = -2B$  C

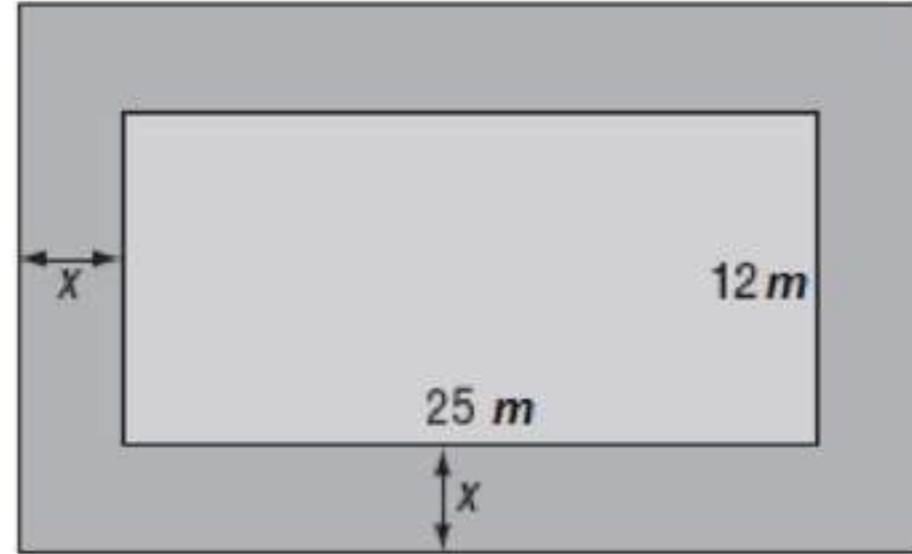
$X = 3A$  D

الاختيار الصحيح: (B)

## إجابة قصيرة

(9)

يبين الشكل الآتي حديقة محاطة بممر عرضه  $x$  مترًا. فإذا علمت أن مساحة الحديقة مع الممر  $558 \text{ m}^2$ ، فأوجد عرض الممر بالأمتار.



3m

(10)

حلل المقدار:  $64a^4 + ab^3$  تحليلًا تامًا، وبين خطوات الحل.

$$a(4a + b)(16a^2 - 4ab + b^2)$$

(11)

$$\text{بسّط المقدار: } \frac{3x^3 - 4x^2 - 28x - 16}{x + 2}$$

واكتب إجابتك على صورة حاصل ضرب عوامل مبيّنًا خطوات الحل.

$$(3x + 2)(x - 4)$$

(12)

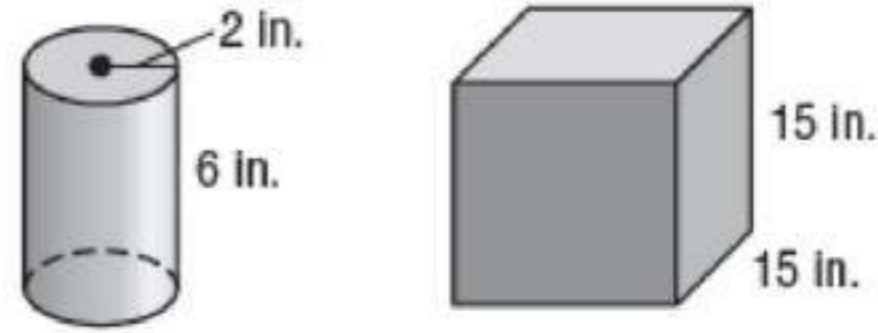
ما قيمة  $a$  في المعادلة المصفوفية الآتية؟

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

7.5

(13)

بريد صالح أن يملا الإناء المكعب بالماء مستعملاً العلبة الأسطوانية في الشكل أدناه. فكم مرة يستعمل العلبة؟



يستعمل العلبة 45 مرة.

### إجابة طويلة

(14)

منشور متوازي مستطيلات حجمه  $864 \text{ cm}^3$ ، ويقل طوله بمقدار  $1 \text{ cm}$  عن ارتفاعه، ويزيد عرضه بمقدار  $3 \text{ cm}$  على ارتفاعه.  
 (a) اكتب معادلة كثيرة حدود لإيجاد ارتفاع المنشور  $h$ .  
 (b) كم جذراً يمكننا للمعادلة كثيرة الحدود التي كتبناها؟ فسر إجابتك.  
 (c) أوجد الجذور الحقيقية للمعادلة التي كتبناها؟ وأوجد أبعاد المنشور.

$$h^3 + 2h^2 - 3h = 864 \quad (a)$$

(b)

درجة المعادلة 3، لذا يتوقع أن يكون لها 3 حلول على الأكثر.

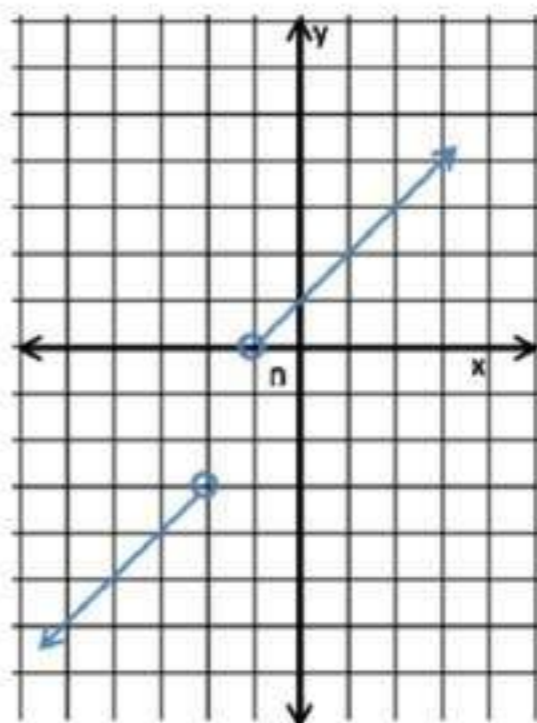
$$h = 9 \quad (c)$$

$$8 \text{ cm} = \text{الطول}$$

$$12 \text{ cm} = \text{العرض}$$

$$9 \text{ cm} = \text{الارتفاع}$$

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < -2 \\ x+1, & x > -1 \end{cases}$$