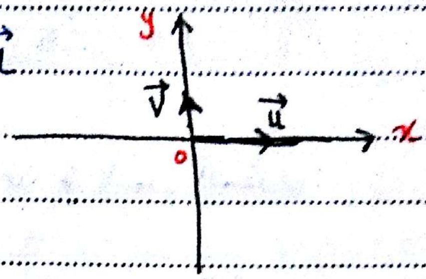
البحث الخامس : تطبيقات الأعداد العقدية

المستوي:

$\vec{u}$ شعاع محمول على x

$\vec{v}$ شعاع محمول على y



جميع أفكار بحث تطبيقات الأعداد العقدية في ثمانية ملاحظات:

1- كل نقطة $M(x,y)$ تمثل بعدد عقدي:

$Z_m = x + iy$ العدد العقدي الممثل للنقطة m

2- كل شعاع $\vec{w}(a,b)$ يمثل بعدد عقدي:

$Z_{\vec{w}} = a + bi$

3- الشعاع $\vec{AB}$ يمثل عقدياً

$Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$

يمثل النقطة B   ممثل النقطة A

4- لتكن النقاط المثقلة: (بين في نقاط مثقلة في عام ٢ - ١ - ٣ م)

(A, α) Z_A

(B, β) تمثلها Z_B

(C, γ) الأعداد Z_C

- ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة نعبر عن G بالعدد العقدي:

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

5- ليكن I منتصف القطعة AB نعبر عن I بالعدد العقدي :

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

6- G مركز ثقل المثلث ABC نعبر عن G بالعدد العقدي :

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

7- حساب طويلة الشعاع AB :

$$|Z_{AB}| = |Z_B - Z_A| = \sqrt{(\text{حقيقي})^2 + (\text{تخيلي})^2}$$

8- قياس الزاوية بين شعاعين لدينا ثلاث حالات :

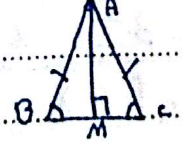
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}}\right) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(???)$$

الحالة الأولى : عدد عقدي $(x+iy)$: $r = ?$, $\sin\theta = ?$ و $\cos\theta = ?$ $\Leftarrow \arg\theta$

الحالة الثانية عدد حقيقي (x) : $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow$ D ، C ، B ، A على استقامة واحدة

الحالة الثالثة عدد تخيلي بحت (iy) : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ متعامدان

بعض الخواص من أجل المثلثات :

المثلث المتساوي الأضلاع :	المثلث المتساوي الساقين	المثلث القائم :
① - زواياه قياسها 60 أي $\frac{\pi}{3}$	زاويا القاعدة متساوية 	① - يقع مركز الدائرة في منتصف الوتر
② - المنصف هو متوسط وارتفاع ومحور القاعدة	AM محور منصف ومتوسط للقاعدة وينتمي له مركز الدائرة المارة برؤوسه.	② - نصف طول الوتر $\frac{1}{2}$ يساوي المتوسط
③ - نقطة تلاقي المتوسطات تدعى مركز ثقل المثلث أي أنها مركز الدائرة المار برؤوسه		

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

مثال: ص129 تتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u};\vec{v})$ في المستوي العقدي، والنقاط A ، B ، C
$c = -18+7i$ و $b = -6+3i$ و $a = 6-i$ التي تمثلها الأعداد العقدية
أثبت وقوع النقاط A و B و C على استقامة واحدة

الحل: نعلم سابقاً حتى نثبت نقاط على استقامة واحدة ① نشكل شعاعين من منطلق نفسه $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$
② ثم نثبت أن هذه الشعاعين مرتبطان خطياً

$$z_{\vec{AB}} = b - a = -6+3i-6+i = -12+4i$$

$$z_{\vec{AC}} = c - a = -18+7i-6+i = -12+4i$$

واضح أن

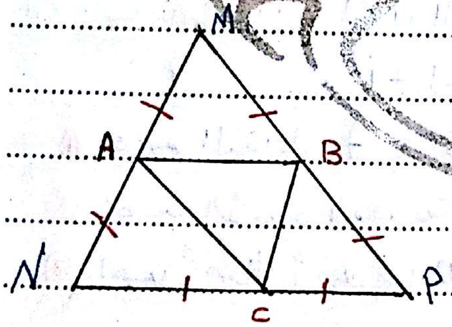
$$z_{\vec{AC}} = 2\,z_{\vec{AB}}$$

$\Downarrow$

$\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ مرتبطان خطياً

$\Leftarrow$ A ، B ، C تقع على استقامة واحدة

مثال: ص129 ليكن MNP مثلثاً ما، والنقاط A و B و C هي منتصفات أضلاعه $[MN]$ و $[PM]$ و $[NP]$ بالترتيب. أثبت أن للمثلثين $\overset{\triangle}{MNP}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ مركز الثقل نفسه



الحل: نعبر عن النقاط بالأعداد العقدية التالية:

M يمثل العدد m و N يمثل العدد n

P يمثل العدد p و A يمثل العدد a

B يمثل العدد b و C يمثل العدد c

ليكن G مركز ثقل المثلث MNP ولنعبر عنه بالعدد العقدي

$$g = \frac{m+n+p}{3}$$

وليكن G' مركز ثقل المثلث ABC ونعبر عنه بالعدد العقدي:

$$g' = \frac{a+b+c}{3} \quad (*)$$

ولنبرهن أن $g = g'$

A منتصف $MN \Leftarrow a = \frac{m+n}{2}$

B منتصف $MP \Leftarrow b = \frac{m+p}{2}$ ⟸ نعوض a و b و c في العلاقة $(*)$

C منتصف $PN \Leftarrow c = \frac{p+n}{2}$

$$g' = \frac{\frac{m+n}{2} + \frac{m+p}{2} + \frac{p+n}{2}}{3}$$

$$g' = \frac{\frac{\cancel{2}m + \cancel{2}n + \cancel{2}p}{\cancel{2}}}{3} =$$

$$g' = \frac{m+n+p}{3} = g$$

تدريب ① ص 132 : لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$Z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ و $Z_B = 2+i$ و $Z_A = -1+i$

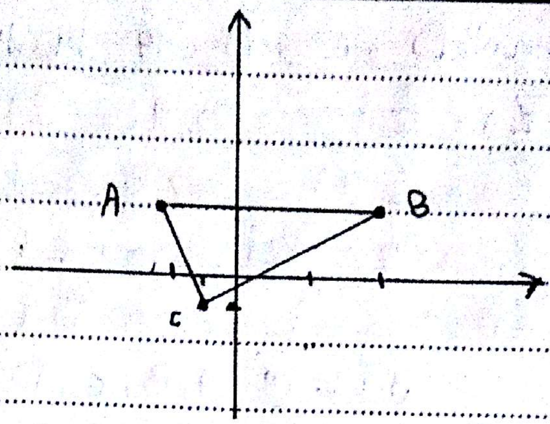
① ضع النقاط A و B و C

② احسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$

③ احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وبين إذا كان مثلثاً قائماً في C

الأستاذ : أحمد تكروري موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

1-



2- $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 2 + i + 1 - i = 3$

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i + 1 - i = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} i$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i - 2 - i = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} i$

3- نحسب طويلة الأشعة السابقة ثم نحسب حسب عكس فيثاغورث

$|Z_{\overrightarrow{AB}}| = |3 + i(0)| = \sqrt{9 + 0} = 3$

$|Z_{\overrightarrow{AC}}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$

$|Z_{\overrightarrow{BC}}| = \left|-\frac{5}{2} - \frac{3}{2} i\right| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}}$

حسب عكس فيثاغورث من أجل C

$(Z_{\overrightarrow{AB}})^2 = (Z_{\overrightarrow{BC}})^2 + (Z_{\overrightarrow{AC}})^2$

$9 = \frac{34}{4} + \frac{10}{4} \Rightarrow 9 \neq \frac{44}{4}$

$\Rightarrow 9 \neq 11$

$\Leftarrow$ المثلث ليس قائم في C

تدريب 132/② : لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية :

$Z_A = \frac{3}{2} i \quad \Rightarrow A(0 , \frac{3}{2})$

$Z_B = \frac{7}{2} + i \quad \Rightarrow B(\frac{7}{2} , 1)$

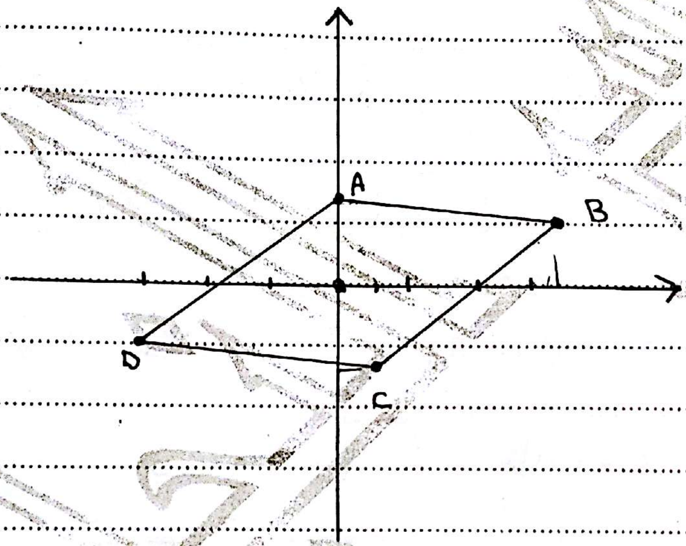
$Z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} i \quad \Rightarrow C(\frac{1}{2} , -\frac{3}{2})$

$Z_D = -3 - i \quad \Rightarrow D(-3 , -1)$

① ضع النقاط A, B, C, D في شكل

② ما طبيعة الرباعي ABCD ؟ (أو بين أن رباعي بصيغة اجمع أثبت أن الرباعي كذا)

الحل :



تذكيرية : لكي نثبت أن الرباعي متوازي أشكال يجب أن نثبت أن $\vec{AB}$ و $\vec{DC}$ شعاعين متساويات

③ لنتأكد أن

$$Z_{\vec{AB}} = Z_{\vec{DC}}$$

$$Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$$

$$\frac{7}{2} + i - \frac{3}{2} i = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} i + 3 + i$$

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{2} i = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} i \quad \text{محقق}$$

∴ ABCD متوازي أضلاع

تدريب $\frac{3}{132}$: لتكن النقطتان A و B تمثلهما الأعداد العقدية :

$Z_A = 2(1+i\sqrt{3})$ و $Z_B = 2(1-i\sqrt{3})$

1. أثبت أن A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4
2. جد العدد العقدي الممثل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC
3. ما طبيعة المثلث ABC ؟

الحل :

1. تذكير : أي مثلث يكون مركز الدائرة هو مركز ثقله يكون متساوي الأضلاع

يجب أن نبرهن أن $|\overrightarrow{Z_OA}| = |\overrightarrow{Z_OB}| = 4$

$$|\overrightarrow{Z_OA}| = |Z_A - Z_O| = |Z_A| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\overrightarrow{Z_OB}| = |Z_B - Z_O| = |Z_B| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

2. O مركز ثقل المثلث ABC

نعلم أن المركز $\boxed{Z_O = 0}$

$$Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

$$0 = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

$$Z_A + Z_B + Z_C = 0$$

نحل ضرباً في الوسطين

$$4 + Z_C = 0 \Rightarrow Z_C = -4$$

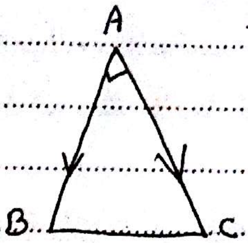
3. $|Z_OC| = |Z_C - Z_O| = |Z_C| = \sqrt{16+0} = 4$

$\Leftarrow$ المثلث ABC متساوي الأضلاع

تدريب 4/132 : نتأمل شعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ يمثلهما العددان العقديان u ، v بالترتيب

نفترض $v = iu$ ونضع $\vec{AB} = \vec{u}$ و $\vec{AC} = \vec{v}$

أثبت أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين



$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg\left(\frac{\vec{AC}}{\vec{AB}}\right) = \arg\left(\frac{\vec{V}}{\vec{u}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{v}{u}\right) = \arg\left(\frac{iu}{u}\right) = \arg(i)$$

$\Leftarrow$ $\vec{AC}$ ، $\vec{AB}$ متعامدان فإن $\hat{A} = 90^\circ$

لنبرهن أن

$$|\vec{AC}| = |\vec{AB}|$$

$$|\vec{V}| = |\vec{u}|$$

$$|v| = |u| \Rightarrow |iu| = |u|$$

$$|i| . |u| = |u|$$

$$|i| = 1 \Rightarrow 0 + i = 1$$

$\sqrt{0^2+1^2} = 1 \Rightarrow 1 = 1$ محقق

$\Leftarrow$ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

أجلك ليس لها أقدام لكي تأتي إليك ، اسع أنت إليها وبادر واجتهد لنيلها بكل جد ، فإن لم تبدأ اليوم لن تبدأ أبداً

تدريب 133/5 : المثلثان ABC و A'B'C' معرفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما

$a = 1 - i$, $b = 2 + 3i$, $c = 2 + i$

$a' = -2 + 3i$, $b' = 3 - i$, $c' = 4 + i$

① - احسب العدد الممثل للشعاع $AA' + BB' + CC'$

② - جد العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC

③ - أثبت أن G هي مركز ثقل المثلث A'B'C'

الحل:

① - $\overrightarrow{AA'} = a' - a = -2 + 3i - 1 + i = -3 + 4i$

$\overrightarrow{BB'} = b' - b = 3 - i - 2 - 3i = 1 - 4i$

$CC' = c' - c = 4 + i - 2 - i = 2$

$\Longrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$

② - $g = \dfrac{a + b + c}{3} = \dfrac{5 + 3i}{3} = \dfrac{5}{3} + i$

③ - نعتبر g' مركز ثقل المثلث A'B'C'

مطلوب $g = g'$

$g' = \dfrac{a' + b' + c'}{3} = \dfrac{5 + 3i}{3} = \dfrac{5}{3} + i = g$

أنا آسف يا الله لأني أنام كل ليلة

وأنا أدرك أني لست متعب بعض القائلك ....

اللهم عمدة

اللهم اتزان ......

تدريب 133/⑥ : لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية :

$a = 1 + \frac{3}{4}i$ و $b = 2 - \frac{5}{4}i$ و $c = 3 + \frac{7}{4}i$

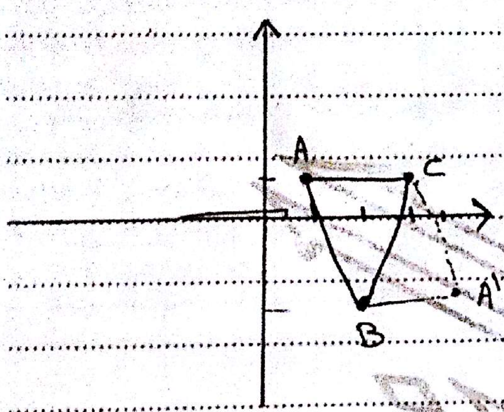
$A(1, 3/4)$ $\quad$ $B(2, -5/2)$ $\quad$ $C(3, 7/4)$

① - وضع النقاط A, B, C ثم احسب طويلات الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

② - استنتج أن ABC مثلث قائم متساوي الساقين

③ - احسب العدد العقدي الممثل للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ "مربعاً".

الحل: ①



$\overrightarrow{AB} = b - a = 2 - \frac{5}{2}i - 1 - \frac{3}{4}i$

$= 1 - 2i \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{AC} = c - a = 3 + \frac{7}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i = 2 + i$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

② - المثلث ABC متساوي الساقين لأن $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$

ونبرهن أنه قائم في A

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{2+i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i}\right)$

$= \arg\left(\frac{2+i+4i-2}{1+4}\right) = \arg\left(\frac{5i}{5}\right) = \arg(i) \Rightarrow$ المثلث قائم في A

③ - لإثبات أن $ABA'C$ مربعاً يكفي أن نبرهن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA'}$

تذكرية : المربع هو متوازي أضلاع فيه إحدى زواياه قائمة

لنبرهن أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA'}$

$c - a = a' - b$

$2 + i = a' - 2 + \frac{5}{4}i \Rightarrow a' = 4 - \frac{1}{4}i$

تدريب 133/⑦ : لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية :
$a = 2-2i$ و $b = -1+7i$ و $c = 4+2i$ و $d = -4-2i$

① لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $m = -1+2i$. أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة مركزها M ونصف قطرها يساوي 5

② ليكن e العدد الممثل للنقطة E منتصف [AB] . احسب e وبرهن أن

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

③ ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC ؟

الحل : يكفي أن نبرهن أن

$$|Z_{\overrightarrow{MA}}| = |Z_{\overrightarrow{MC}}| = |Z_{\overrightarrow{MD}}| = |Z_{\overrightarrow{MB}}| = 5$$

$$|Z_{\overrightarrow{MA}}| = |a-m| = |2-2i+1-2i| = |-3-4i|$$

$$|Z_{\overrightarrow{MA}}| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|Z_{\overrightarrow{MD}}| = |d-m| = |-4-2i+1-2i| = |-3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|Z_{\overrightarrow{MC}}| = |c-m| = |4+2i+1-2i| = |5| = \sqrt{25} = 5$$

$$|Z_{\overrightarrow{MB}}| = |b-m| = |-1+7i+1-2i| = \sqrt{25} = 5$$

ومنه نحقق بأن A و B و C و D على دائرة مركزه M ونصف قطرها يساوي 5

②
$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$
نشتغل بالطرفين معاً لنوصل للمساواة

$$e = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i} = \frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$

نجمع حقيقي مع حقيقي
وتخيلي مع تخيلي

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i} = \frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i} \Rightarrow \frac{3-9i}{-9-9i} = \frac{7-i}{3-9i}$$

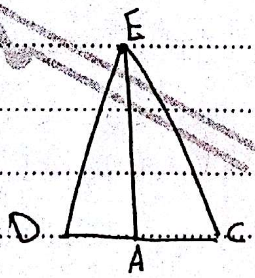
نقسم على 3
مقط عا الطرف اليسار

نضرب بمرافق المقام للتخلص من i

$$\Rightarrow \frac{1-3i}{-3-3i}\cdot\frac{-3+3i}{-3+3i} = \frac{7-i}{3-9i}\cdot\frac{3+9i}{3+9i}$$

$$\frac{-3+9i+3i+9}{9+9} = \frac{21-3i+63i+9}{9+81} \Rightarrow \frac{6+12i}{8}\,\div 6\% = \frac{30+60i}{90}\,\div 30\%$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1+2i}{3} = \frac{1+2i}{3}}$$ محقق



③ من العلاقة المحققة

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

بأخذ arg الطرفين

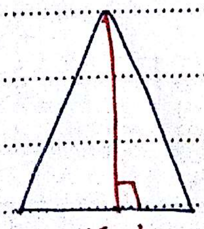
أخذنا arg لأنو بتجي جاهزة ال arg كنا ناخذا من الإشارة إلى العقدية حولنا العكس

$$\arg\frac{a-e}{d-e} = \arg\frac{c-e}{a-e}$$

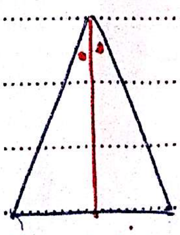
$$\arg\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{ED}} = \arg\frac{\overrightarrow{Ec}}{\overrightarrow{EA}} \Rightarrow (\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA},\overrightarrow{Ec})$$

EA منصف داخلي

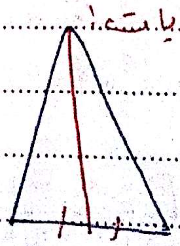
تكرر يا ست!



ارتفاع



منصف داخلي



متوسط

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تدريب 133/⑧: لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية:

1 و $3+2i$ بالترتيب. عين مجموعة النقاط $M(Z)$ في الحالتين الآتيتين:

① - $|Z-1| = |Z-3-2i|$

② - $|Z-3-2i| = 1$

الحل:

تذكرة قبل الحل: إذا ورد عين مجموعة النقاط $M(Z)$ نبدل كل

Z بـ $x+iy$

و $\bar{Z}$ بـ $x-yi$

$$|x+iy-1| = |x+iy-3-2i|$$

حقيقي مع حقيقي
تخيلي مع تخيلي

$$|(x-1)+iy| = |(x-3)+i(y-2)|$$

نربع الطرفين

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

$$(x-1)^2+y^2 = (x-3)^2+(y-2)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-4y+4$$

$$4x+4y-12=0$$

تمثل معادلة مستقيم (من الدرجة الأولى)

عملتُ جاهداً يا الله ربما كان الجهد قليلاً

لكنه حيلتي فلا تردني

2-

$$|Z-3-2i|=1$$

$$|x+iy-3-2i|=1$$

$$|(x-3)+i(y-2)|=1$$

تربيع الطرفين $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=1$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=1$$

تمثل معادلة دائرة

مركز $(3,2)$

نصف القطر $R=\sqrt{1}=1$

التحويلات الهندسية :

1 - الانسحاب :

- رمزه T
- يحتاج الى شعاع نعبر عنه بالعدد العقدي b
- قانونه

$$\boxed{Z'_{m} = Z_{m} + b}$$

ممثل m' — ممثل m — ممثل الشعاع

2 - التحاكي : يعني تكبير وتصغير نقطة

- رمزه H
- يحتاج الى مركز نعبر عنه بالعدد العقدي b
  - نسبة K
- قانونه :

$$\boxed{Z' - b = K(Z - b)}$$

الصورة — المركز — نسبة — الأصل — مركز

3 - الدوران :

- رمزه R
- يحتاج الى مركز نعبر عنه بالعدد العقدي b
  - زاوية θ
- قانونه

$$\boxed{Z' - b = e^{i\theta}(Z - b)}$$

الصورة — المركز — الزاوية — الاصل — المركز

الفائزون في الاوقات الصعبة... يجب أن يظلوا غائبين ... الى الابد

تدريب 136/1 : لتكن M النقطة التي تمثل العدد العقدي $Z = 1 + i$

جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي :

1 - T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{W} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

نعبر عنه بالعدد

$b = -2 + 3i$

قانون الانسحاب :

$$Z' = Z + b$$

$$Z' = 1 + i - 2 + 3i$$

$$Z' = -1 + 4i$$

2 - H التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3 .

$$Z' - 0 = K(Z - 0)$$

$$Z' = KZ$$

$$= 3(1+i)$$

$$Z' = 3 + 3i$$

3 - R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

$$Z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z - 0)$$

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot Z \Rightarrow Z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$$

$$Z' = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$Z' = \cancel{2}i\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow Z' = i\sqrt{2}$$

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تكرورية : التناظر هو دوران زاويته π . $Z = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow Z = -i$

تكرورية 2 : $Z = e^{i2\pi} \Rightarrow Z = 1$ و $Z = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow Z = i$ و $Z = e^{i\pi} \Rightarrow Z = -1$

(4) - S تناظر الذي مركزه $A(1-3i)$

$$Z' - A = e^{i\pi}(Z - A)$$

$$Z' - 1 + 3i = -1(1 + i - 1 + 3i)$$

$$Z' - 1 + 3i = -4i \Rightarrow Z' = 1 - 7i$$

(5) - R الدوران الذي مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

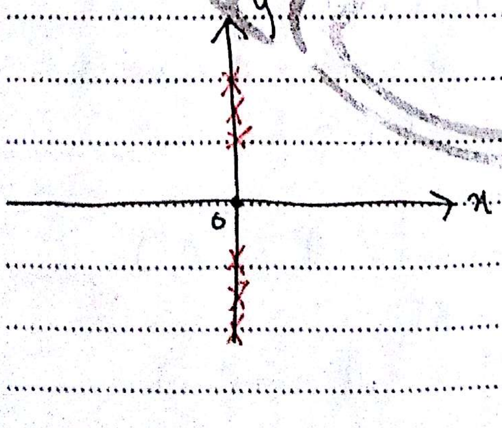
$$Z' - A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(Z - A)$$

$$Z' - 2 + i = -i(1 + i - 2 + i)$$

$$Z' - 2 + i = -i(-1 + 2i)$$

$$Z' - 2 + i = +i + 2 \Rightarrow Z' = \cancel{i} + 4$$

(6) - S التناظر المحوري الذي محوره (ox)



$$Z' = \bar{Z}$$

$$\Rightarrow Z' = 1 - i$$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تدريب 136/ ② : فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة، عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A:

① - $b = a - 1 + 3i$

B صورة A وفق انسحاب $\vec{W}(-1, 3)$

② - $b = -ia$

$b = e^{i\frac{3\pi}{2}} \cdot a$

B صورة A وفق دوران زاويته $3\pi/2$ ومركزه O

③ - $b = \bar{a}$

B صورة A وفق تناظر محوري محوره (ox)

⑤ - $b - 1 = -(a - 1)$

إما: B صورة A وفق تحاكي نسبته $K = -1$ مركزه $(1, 0)$

أو: $b - 1 = e^{i\pi}(a - 1 + 0(i))$

B صورة A وفق دوران مركزه $(1, 0)$ زاويته π

⑥ $b - i = e^{i\pi/3}(a - i)$

B صورة A وفق دوران زاويته $\pi/3$ ومركزه $(0, 1)$

⑦ - $b = a + 4 - 3i$

B صورة A وفق انسحاب $\vec{W}(4, -3)$

⑧ - $b + 1 - i = e^{i\pi/4}(a + 1 - i)$

B صورة A وفق دوران زاويته $\pi/4$ ومركزه $(-1, 1)$

تدريب 136/③ : لتكن النقطتان $G(3-i\sqrt{3})$ و $H(3+i\sqrt{3})$ ، وليكن R الدوران الذي مركزه O ويحقق $R(G)=H$ ، احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R

$R(G)=H$ تعني H صورة G وفق الدوران

الحل :

$$\arg\left(\frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{OG}}\right)=\arg\left(\frac{H-0}{G-0}\right)=\arg\left(\frac{H}{G}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}\cdot\frac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{9+3i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{9+3}\right)\qquad=\arg\left(\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

عدد عقدي $\arg=\theta$

$$r=\sqrt{1/4+3/4}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta=\arg=\frac{\pi}{3}$ ربع أول

الصيغة العقدية

$$H=e^{i\pi/3}\cdot G$$

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧
الأستاذ : أحمد تكروري

المسألة الأولى: نتأمل النقاط A و B و C التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية 140

$a = 8$ و $b = -4+4i$ و $c = -4i$

① a- تحقق أن $b - c = i(a - c)$

b- استنتج أن المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين

② نقرن بكل نقطة $M(Z)$ النقطة M' الموافقة للعدد العقدي $Z' = e^{i\pi/3} Z$

a- ما التحويل الهندسي الموافق ؟

b- احسب الأعداد العقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق هذا التحويل ،

③ لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$ بالترتيب

p و q و r الأعداد العقدية التي توافقها

a- احسب p و q و r b- تحقق $r - p = e^{i\pi/3}(q - p)$

c- استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع

الحل: ① a)

$L_1 = b - c = -4+4i+4i = -4+8i$

$L_2 = i(a - c) = i(8+4i) = -4+8i$

محقق فالعلاقة صحيحة

b) لدينا

$b - c = i(a - c)$

$\overrightarrow{CB} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \overrightarrow{CA}$

هو دوران مركزه C وزاويته $\theta = \pi/2$

CB صورة CA ومنه فإن $CA = CB$ فالمثلث قائم في C ومتساوي الساقين

② a) التحويل $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot Z$ هو دوران مركزه O وزاويته $\theta = \pi/3$

b)

$a' = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot a = (\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{3}}_{1/2} + i\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}/2})(8) = 4 + 4\sqrt{3}\, i$

$b' = e^{i\pi/3} \cdot b = (1/2 + \sqrt{3}/2\, i)(-4+4i) = -2+2i-2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$= (-2-2\sqrt{3}) + i(2-2\sqrt{3})$

$$c' = e^{i\pi/3} \cdot c = (1/2 + i\sqrt{3}/2)(-4i) = -2i + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2i$$

③ a)

$$p = \frac{a' + b}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{3}\, i - 4 + 4i}{2} = (2\sqrt{3} + 2)i$$

$$q = \frac{b' + c}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3} + i(2 - 2\sqrt{3}) - 4i}{2} = -1 - \sqrt{3} + i - \sqrt{3}i - 2i$$

$$= (-1 - \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3})i = (-1 - \sqrt{3})(1 + i)$$

$$r = \frac{c' + a}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i + 8}{2} = \sqrt{3} + 4 - i$$

ⓑ

$$L_1 = r - p = \sqrt{3} + 4 - i - 2\sqrt{3}\, i - 2i = \sqrt{3} + 4 - (2\sqrt{3} + 3)i$$

$$L_2 = e^{i\pi/3}(q - p) = (1/2 + i\sqrt{3}/2)\left[(-1 - \sqrt{3})(1 + i) - (2\sqrt{3} + 2)i\right]$$

$$= \sqrt{3} + 4 - (2\sqrt{3} + 3)i$$

ومنه نستنتج $L_1 = L_2$ فالعلاقة محققة

ⓒ

$$r - p = e^{i\pi/3}(q - p)$$

$$\overrightarrow{PR} = e^{i\pi/3} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

نلاحظ أن $PR = PQ$ لأن الدوران يحافظ على المسافات ونستنتج أيضاً أن R صورة Q وفق دوران مركزه P وزاويته $\pi/3$ فالمثلث PQR متساوي الأضلاع

المسألة ② 140/ : نتأمل مثلثاً OAB فيه $(\vec{OA},\vec{OB}) = \alpha$ حيث $\alpha \in]0,\pi[$

نُنشئ خارج هذا المثلث المربعين $OAMN$ و $OBPQ$ ومتوازي الأضلاع $NOQR$

نهدف المطلوب: أثبت أن المستقيمين (AB) و (OR) متعامدان وأن $OR = AB$

وذلك باستعمال الأعداد العقدية.

نختر معلماً متجانساً مباشراً $(O,\vec{u},\vec{v})$ وليكن a و b العددين العقديين اللذين يمثلان A و B.

① a. ما هي صور النقطتين N و Q وفق دوران ربع مباشر حول O؟

b. نرمز n إلى العدد العقدي الممثل للنقطة N و q للعدد العقدي الموافق للنقطة Q. أثبت أن $n = -ia$ و $q = ib$

② a. عبّر عن $\vec{OR}$ بدلالة $\vec{ON}$ و $\vec{OQ}$.

b. استنتج العدد العقدي r الذي يمثل النقطة R بدلالة a و b

c. ما العدد العقدي الممثل للشعاع $\vec{AB}$؟

d. أثبت إذن أن $OR = AB$ وأن $(\vec{u},\vec{AB}) + \frac{\pi}{2} = (\vec{u},\vec{OR})$ واستنتج تعامد (OR) و (AB)

الحل:

① a. المباشر: هو عكس عقارب الساعة، أما الغير مباشر فهو مع عقارب الساعة

والربع دورة هي $\pi/2$

N صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\pi/2$

Q صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\pi/2$

ⓑ بالاستفادة من (a) نجد

$a = e^{i\pi/2} \cdot n \Rightarrow a = in$

$q = e^{i\pi/2} \cdot b \Rightarrow q = in$

② a) وحسب قاعدة متوازي الأضلاع في جمع الأشعة

نكتب $\vec{OR} = \vec{ON} + \vec{OQ}$

b) لدينا $\vec{OR} = \vec{ON} + \vec{OQ}$ أي أن $\vec{OR}$ يمثل q ، n بالتعويض نجد:

$r = n + q = -ai + ib = -ai + ib = i(-a+b)$

ⓒ — $r = i(-a+b)$

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

c) $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

فالعدد العقدي w الممثل للشعاع $\vec{AB}$ هو

$w = b - a$ --- ②"

d) نلاحظ من ①" و ②" أن:

$r = iw \Rightarrow |r| = |w|$

$OR = AB$

$\arg(r) = \arg(i) + \arg(w)$

$(\vec{u}, \vec{OR}) = \pi/2 + (\vec{u}, \vec{AB}) \Rightarrow$

$(\vec{u}, \vec{OR}) - (\vec{u}, \vec{AB}) = \pi/2 \xrightarrow{\text{حسب شال}} (\vec{AB}, \vec{OR}) = \pi/2$

فالمستقيمان (OR) و (AB) متعامدان

طريقة ثانية:

$\frac{r}{w} = \frac{i(b-a)}{b-a} = i$

لدينا

وهو عدد تخيلي بحت إذن

$(\vec{AB}, \vec{OR}) = \pi/2$

لا شيء مستحيل عندما يكون الله بجانبك

المسألة ④ / 141 : في معلم متجانس مباشر $(O, \vec{U}, \vec{V})$:

نقرن كل نقطة $M(Z)$ حيث $Z \neq i$ بالنقطة $M(Z')$ حيث

$$Z' = \frac{Z+2}{Z-i}$$

① - عين Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها Z' عدداً حقيقياً

② - عين T مجموعة النقاط M التي يكون عندها Z' عدداً تخيلياً بحتاً

الحل: نبدل بدل كل Z بـ $x+iy$

① - نضرب بالمرافق

$$Z' = \frac{x+iy+2}{x+iy-i} = \frac{(x+2+iy)}{x+i(y-1)} \cdot \frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}$$

$$Z' = \frac{x^2+2x+i\cancel{xy}-ixy-2iy+y^2+ix+2i-y}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z' = \frac{(x^2+2x+y^2-y)+i(x-2y+2)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z' = \frac{x^2+2x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + \frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}\, i$$

Z' عدد حقيقي ⇐ حصة التخيلي $=0$ ⇐ $0 = \frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$

ينعدم الكسر إذا انعدم بسطه ⇐ $x-2y+2=0$

تمثل معادلة مستقيم (x, y من الدرجة الأولى)

② - Z' عدد تخيلي بحت ⇐ حصة الحقيقي $=0$ ⇐ $\frac{x^2+2x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} = 0$

نحوله من الشكل العام إلى الشكل الديكارتي $x^2+2x+y^2-y=0$

نتمم إلى مربع كامل $x^2+2x+1-1+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-1/2)^2 = \frac{5}{4}$$

تمثل معادلة دائرة $R = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$ مركز $(-1, 1/2)$

المسألة ⑥ / 142 : نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a = 2$ $A(2,0)$
و ليكن $b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ و ليكن I منتصف [AB]

① - a - ارسم شكلاً مناسباً و بيّن طبيعة المثلث OAB

b - استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \vec{OI})$

② - a - اكتب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية

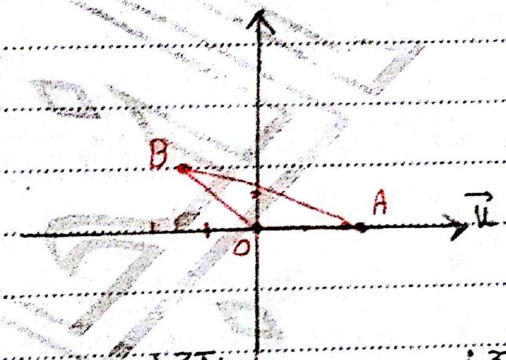
b - استنتج كلاً من $\cos 3\pi/8$ و $\sin 3\pi/8$

الحل ① - a - نحول b إلى الشكل الجبري

$$b = 2 \cdot e^{i\,3\pi/4} \longrightarrow 2\left[\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4\right]$$

$$= 2\left[-\cos 45 + i\sin 45\right] = 2\left[-\sqrt{2}/2 + i\,\sqrt{2}/2\right]$$

$$= (-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \Rightarrow B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$



طبيعة المثلث: $b = 2 \cdot e^{i\,3\pi/4} \Rightarrow b = e^{i\,3\pi/4} \cdot \underline{2}_{a}$

$$b = e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot a$$

B صورة A وفق دوران
زاويته $3\pi/4$ مركزه O

والدوران يحافظ على ~~...~~ الطول $\Leftarrow$ OAB متساوي الساقين

تذكرة : في المثلث متساوي الأضلاع ومتساوي الساقين
المنصف = المتوسط

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

b) OAB متساوي الساقين

$\Rightarrow$ المنصف = المتوسط OI

$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$

4) 2) جبري $Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

جبري $Z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$r = \sqrt{(\text{حقيقي})^2 + (\text{تخيلي})^2} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2+2}{4}}$

$r = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{3\pi}{8}$

أسي $Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot e^{i\,3\pi/8}$

b) أسي Z_I = جبري Z_I

$\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2-\sqrt{2}}\,(\cos 3\pi/8 + i\sin 3\pi/8) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ بالمطابقة

$\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos 3\pi/8 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 3\pi/8 = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow \cos 3\pi/8 = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

ملاحظة: $\boxed{\begin{array}{l} 2-\sqrt{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \end{array}}$

$\cos 3\pi/8 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2\cancel{\sqrt{2-\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin 3\pi/8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$