مركز الأبعاد المتناسبة

1 مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين

1) مبرهنة الوجود:

بفرض A , B نقطتين وليكن α , β عددين يحققان $\alpha + \beta \neq 0$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة فقط G تحقق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) ، (B,β) .

2) علاقة الإنشاء: $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$

3) إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين A , B لهما نفس التثقيل فإن G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

4) مبرهنة الاختزال: G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) ، (B,β) عندئذٍ أياً كانت M فإن :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$$

5) إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1-t)$ ، (B,t) عندئذٍ $\overrightarrow{AG} = t\,\overrightarrow{AB}$

....

تمرين 1: النقطتان A , B نقطتان مختلفتان عيّن في الحالات الآتية عددين α , β كي تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) ، (B,β) .

$$2\overrightarrow{GB} - 3\underbrace{\overrightarrow{AB}} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GB} - 3\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$$

$$2\underbrace{\overrightarrow{GB}} - 3\overrightarrow{AG} - 3\underbrace{\overrightarrow{GB}} = \vec{0}$$

$$-3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

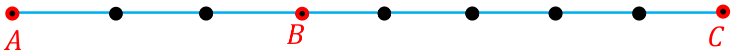
$$\alpha = 3 \;\;,\;\; \beta = -1$$

$$(A,3) \;\;,\;\; (B,-1)$$

....

حسان البيطار 0933756454
خلدون سيروان 0932791896

تمرين ②: في الشكل الآتي التدريجات متساوية عبّر عن النقاط A , B , C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الآخرين



A : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) , (C,γ) :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{8}$$

$$8\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$$

$$8\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$(B,8)\quad,\quad(C,-3)$$

B : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (C,γ) :

$$\frac{BA}{BC}=\frac{3}{5}$$

$$5\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{BC}$$

$$5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

$$(A,5)\quad,\quad(C,3)$$

---

② مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط

1) مبرهنة الوجود:

نتأمل ثلاث نقاط A , B , C وثلاثة أعداد حقيقية α , β , γ تحقق $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ)

2) علاقة الإنشاء : $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$

من علاقة الإنشاء نستنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ مرتبطة خطياً، لأننا استطعنا كتابة العلاقة السابقة بالشكل :

$\overrightarrow{AG}=k\,.\overrightarrow{AB}+t\,.\overrightarrow{AC}$ (تسمى المعادلة السابقة معادلة المستوي المار من النقطة A والموجه بالشعاعين $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

3) النقاط A و B و C و G تقع في مستو واحد .

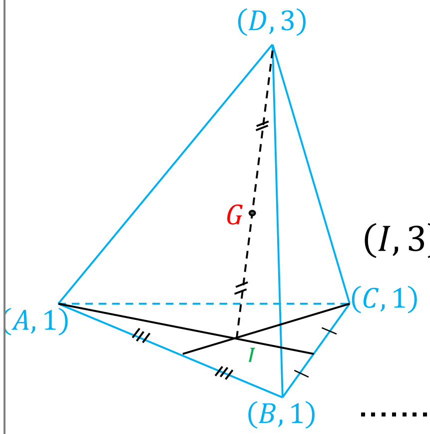
لإثبات وقوع أربع نقاط في مستو واحد يكفي أن تكون إحدى هذه النقاط هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاث المتبقية.

4) إذا كانت $\alpha=\beta=\gamma$ فإن G هي مركز ثقل المثلث ABC

طارق سعد الدين 0955561648 وائل زعترية 0933699123

تمارين (استخدام الخاصة التجميعية)

$ABCD$ رباعي وجوه، استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:



1) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,3),(C,1),(B,1),(A,1)$

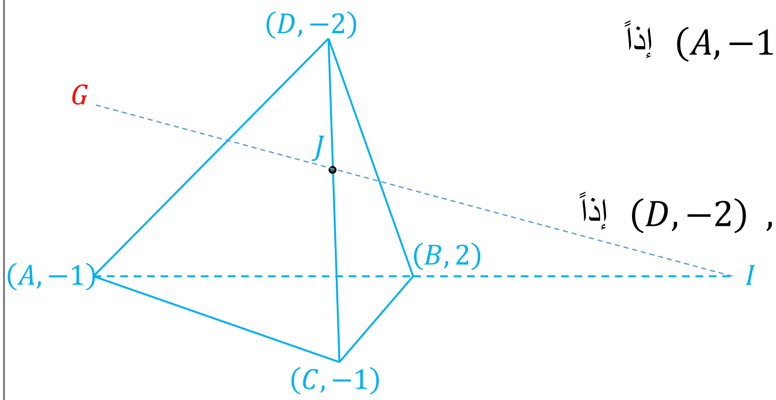
لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,1),(B,1),(A,1)$

وهو مركز ثقل المثلث ABC ومنه $(I,3)$.

عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,3)$ ، $(I,3)$

و G منتصف $[DI]$

....



2) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,-2),(C,-1),(B,2),(A,-1)$

لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,2)$ ، $(A,-1)$ إذاً

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{1}\overrightarrow{AB}$$

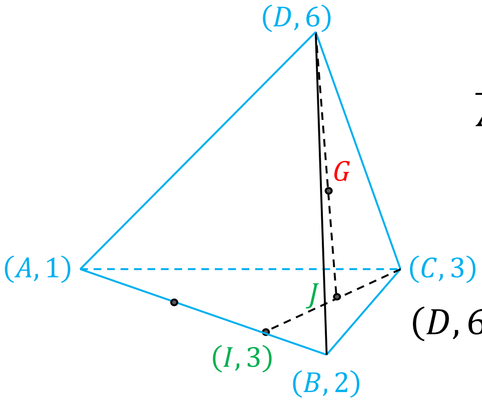
ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,-1)$ ، $(D,-2)$ إذاً

$$\overrightarrow{DJ}=\frac{-1}{-3}\overrightarrow{DC}$$

وحسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,-3)$ ، $(I,1)$

إذاً $\overrightarrow{IG}=\frac{-3}{-2}\overrightarrow{IJ}$

....



3) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,6),(C,3),(B,2),(A,1)$

- I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2),(A,1)$ ويحقق $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
- J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,3),(I,3)$

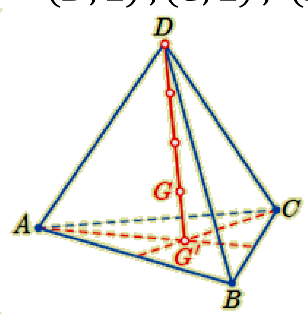
ومنه J منتصف $[IC]$ ويكون $(J,6)$

- وحسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,6),(J,6)$

إذاً G منتصف $[DJ]$

....

4) $ABCD$ رباعي وجوه، أوجد G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$



♦ $\grave{G}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,1)$

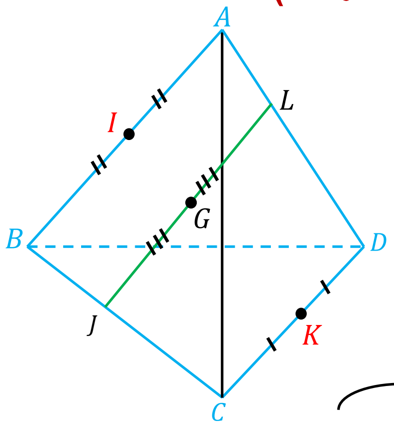
ومنه $\grave{G}$ نقطة تلاقي المتوسطات ويكون $(\grave{G},3)$

♦ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين: $(\grave{G},3)$ ، $(D,1)$

وذلك حسب الخاصة التجميعية ومنه: $\overrightarrow{\grave{G}G}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\grave{G}D}$

ونسمي G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ وهي تقع على القطعة المستقيمة $[\grave{G}D]$

النمط الأول من المسائل (إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة)



التمرين الأول: $ABCD$ رباعي وجوه ، $I\,,K$ منتصفا الحرفين $[AB]\,,[CD]$

و J و L نقطتان معرفتان بالعلاقتين : $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$,

و أخيراً G هي منتصف $[JL]$

أثبت أن النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة .

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء $\overrightarrow{AL}=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{AD}$

إذاً L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A,2)\,,(D,1)$

ومنه $(L,3)$

$$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء $\overrightarrow{CJ}=\frac{\beta}{\gamma+\beta}\overrightarrow{CB}$

إذاً J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,1)\,,(B,2)$

ومنه $(J,3)$

بما أن G منتصف $[JL]$ فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(L,3)$ و $(J,3)$

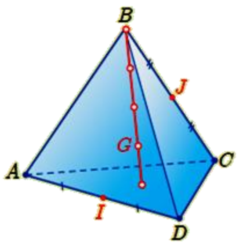
و حسب الخاصة التجميعية G مركز أبعاد متناسبة للنقاط : $(A,2)\,,(B,2)\,,(C,1)\,,(D,1)$

بما أن I منتصف $[AB]$ فإن I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,2)$.

و بما أن K منتصف $[CD]$ فإن K مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$.

حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2)\,,(I,4)$.

إذاً النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة .



التمرين الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه، G مركز ثقله، I منتصف $[AD]$

J منتصف $[BC]$ أثبت أن G,J,I تقع على استقامة واحدة.

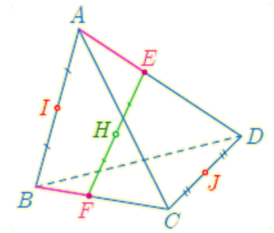
- بما أن I منتصف $[AD]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(A,1)\,,\ (D,1)$

- بما أن J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين: $(C,1)\,,\ (B,1)$
- بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)\,,\ (J,2)$

"حسب الخاصة التجميعية".

عندئذ G,J,I على استقامة واحدة.



التمرين الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه، و a عدد حقيقي. J, I هما بالترتيب منتصفا $[AB]$, $[CD]$ وE, F نقطتان تحققان العلاقتين:
$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$
أثبت أن H, J, I تقع على استقامة واحدة.

لدينا : $\overrightarrow{BF} = a\,\overrightarrow{BC}$ وبالمقارنة مع علاقة الإنشاء : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ حيث G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ نستنتج أن : F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,a),(B,1-a)$ وتكون $(F,1)$	لدينا : $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AD}$ وبالمقارنة مع علاقة الإنشاء : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ حيث G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ نستنتج أن : E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,a),(A,1-a)$ وتكون $(E,1)$

♦بما أن H منتصف القطعة (FE) فإن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F,1),(E,1)$ وحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1-a) \quad , \quad (B,1-a) \quad , \quad (D,a) \quad , \quad (C,a)$$

♦ I منتصف (AB) فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a),(B,1-a)$ وتكون $(I,2-2a)$

♦ J منتصف (CD) فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,a),(D,a)$ وتكون $(J,2a)$

♦ وبما أن Hمركز الأبعاد المتناسبة للنقاط D,C,B,A وحسب الخاصة التجميعية

فإن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين J,I

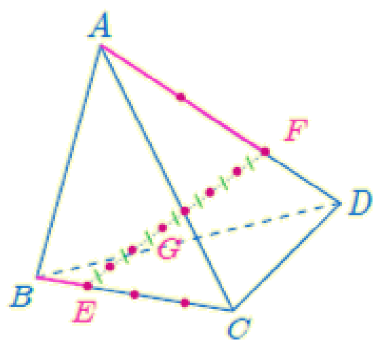
إذاً J,I,H تقع على استقامة واحدة.

....

التمرين الرابع: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ ونقطتين F, E معرفتين وفق $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

أثبت أن G , مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,3)$, $(C,1)$, $(D,2)$، يقع على $[EF]$

ثم عين النقطة G على $[EF]$.



♦ $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

فإن E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$, $(C,1)$

♦ $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

فإن F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(D,2)$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,3)$, $(C,1)$, $(D,2)$

فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,4)$, $(F,3)$ إذاً فهي تقع على المستقيم (EF)

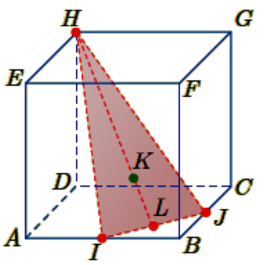
$$\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

....

النمط الثاني من المسائل (إثبات وقوع أربع نقاط في مستو واحد)

التمرين الأول: $ABCDEFGH$ **مكعب ،** I **و** J **منتصفا الحرفين** $[AB]$ **و** $[BC]$ **بالترتيب و** K **مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط** $(A,1)$ **و** $(B,2)$ **و** $(C,1)$ **و** $(H,1)$

أثبت وقوع النقاط $I\,,J\,,K\,,H$ **في مستو واحد .**



من الفرض لدينا I منتصف $[AB]$ $\Leftarrow$ I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,1)$

و J منتصف $[BC]$ $\Leftarrow$ J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1)$ و $(C,1)$

و بما أن K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

أي K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $\overbrace{(B,1)\text{و}(B,1)}$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

و حسب الخاصة التجميعية : K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,2)$ و $(J,2)$ و $(H,1)$

إذاً النقاط $I\,,J\,,K\,,H$ تقع في مستوٍ واحد .

....

التمرين الثاني: $ABCDEFGH$ **مكعب. أثبت أن النقطة** K **المعرفة بالعلاقة:** $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$ **تقع في المستوي** (BCG) **أنشئ النقطة** K

لدينا من الفرض

$$2\overrightarrow{AK}=\underbrace{\overrightarrow{CB}}_{K}+\underbrace{\overrightarrow{CA}}_{K}+3\,\underbrace{\overrightarrow{AG}}_{K}$$

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$$

$$2\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$$

$$\Longrightarrow \boxed{-2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KG}=\vec{0}}$$

إذاً K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)\,,(C,-2)\,,(G,3)$ $\Leftarrow$ K تقع في المستوي (BCG)

<u>إنشاء K:</u> K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)\,,\underbrace{(C,-2)\,,(G,3)}$

بفرض $(L,1)$ مركز أبعاد لـ G و C إذاً $\boxed{\overrightarrow{CL}=\frac{3}{1}\,\overrightarrow{CG}}$

وحسب الخاصة التجميعية K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)\,,(L,1)$

$\Leftarrow$ K منتصف $[BL]$

....

طارق سعد الدين 0955561648 وائل زعترية 0933699123

النمط الثالث من المسائل (مسائل الدمج)

المسألة الأولى: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$، k نقطة ما من $[AB]$ تحقق $AK=\frac{1}{3}AB$ ، L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $CL=\frac{2}{3}CD$ وأخيراً I منتصف $[AD]$ و J هي منتصف $[BC]$، نعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$.

1) a) أثبت أن النقاط G , I , J تقع على استقامة واحدة.

I منتصف $[AD]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$, $(D,2)$ ويكون $(I,4)$

J منتصف $[BC]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$ ويكون $(J,2)$

وبما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط$(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$

عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2)$و$(I,4)$

فالنقاط I , J , G على استقامة واحدة.

b) أثبت أن النقاط G , K , L تقع على استقامة واحدة.

بما أن k نقطة ما من $[AB]$ تحقق $AK=\frac{1}{3}AB$ فإن:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

فإن k مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(A,2)$

ويكون $(k,3)$

بما أن L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق

$$CL=\frac{2}{3}CD$$

$$\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

فإن L مركز الأبعاد المتناسبة

للنقطتين $(D,2)$, $(C,1)$ ويكون $(L,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$, $(L,3)$ وهي منتصف $[LK]$ فالنقاط k , L , G على استقامة واحدة.

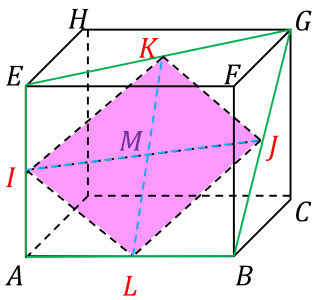
2) استنتج وقوع النقاط I , J , K , L في مستو واحد.

المستقيمان $[LK]$ و$[IJ]$ يتقاطعان في نقطة واحدة G فهما يعينان مستو وحيد

ومنه فالنقاط I , J , K , L تقع في مستو واحد.

....

المسألة الثانية: نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ والنقاط I,J,k,L منتصفات $[AE]$, $[BG]$, $[EG]$, $[AB]$ بالترتيب والنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,1)$, $(G,1)$, $(E,1)$



1. أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها على هذه القطعة.

♦ I منتصف $[AE]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(E,1)$

♦ J منتصف $[BG]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(G,1)$

وبما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,1)$, $(G,1)$, $(E,1)$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$, $(J,2)$ حسب الخاصة التجميعية إذاً $M\in[IJ]$

وبما أن I و J لهما نفس التثقيل إذاً M منتصف $[IJ]$.

2. أثبت أن M تنتمي إلى $[kL]$ وعين موضعها على هذه القطعة.

♦ k منتصف $[EG]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,1)$, $(G,1)$

♦ L منتصف $[AB]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,1)$

وبما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,1)$, $(G,1)$, $(E,1)$

فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,2)$, $(k,2)$ إذاً $M \in [kL]$

وبما أن LK لهما نفس التثقيل إذاً M منتصف $[kL]$.

3. استنتج أن L,k,J,I تقع في مستو واحد وعين طبيعة الرباعي $ILJk$

M نقطة تقاطع المستقيمين $(kL),(IJ)$ فإن المستقيمين يعينان مستو.

فالنقاط L,k,J,I تقع في مستو واحد.

والشكل الرباعي $ILJk$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان.

....

النمط الرابع من المسائل (مسائل الاختزال)

المسألة الأولى: نتأمل رباعي الوجوه $ABCD$ ونقطتين J,I معرفتين وفق: $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$

1. أيمكن أن تنطبق إحدى النقطتين J,I على الأخرى.

لدينا $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$

لنفرض جدلاً أن I منطبقة على J أي$(I=J)$ وبالتالي يكون: $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ ① و $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{ID}$ ②

بطرح العلاقتين ① و② نجد:

$$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{ID}$$
$$\overrightarrow{CA} = 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID})$$
$$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{DB}$$

فالشعاعان $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$ مرتبطان خطياً أي أن $[DB]$, $[CA]$ حرفان متوازيان في رباعي الوجوه و هذا مستحيل.

إذاً I لا تنطبق على J

2. أثبت أنه أياً كانت النقطة M من الفراغ كان: $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$

♦ $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$

طريقة أولى: لديناً $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ إذاً $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$, $(B,-2)$ وأياً كانت M نقطة من الفراغ فإن: $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$	**طريقة ثانية:** $L_1 = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$ $= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{IB}$ $= -\overrightarrow{MI} = L_2$

♦ $\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$

طريقة أولى: لدينا $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$ إذاً $\overrightarrow{JC} - 2\overrightarrow{JD} = \vec{0}$ ومنه J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,1)$, $(D,-2)$ وأياً كانت M نقطة من الفراغ فإن: $\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$	**طريقة ثانية:** $L_1 = \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ $= \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} - 2\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{JD}$ $= -\overrightarrow{MJ} = L_2$

3. جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق: $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$

لتكن G مركز ثقل المثلث BCD فإنه (حسب مبرهنة الاختزال) أياً كانت M نقطة من الفراغ فإن:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} &= 3\overrightarrow{MG}\\ -\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD} &= -3\overrightarrow{MG}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ نعوض في العلاقة السابقة :

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\|$$

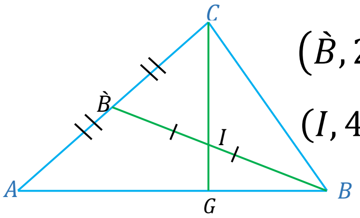
$$3\|\overrightarrow{MG}\| = 3\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}}_{\downarrow}\right\|$$

$$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GA}\|$$

ومجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\|\overrightarrow{GA}\|$

النمط الخامس من المسائل (تعيين الأمثال α , β , γ)

التمرين الأول: انطلاقاً من الشكل المجاور ، جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) و استنتج λ التي تحقق : $\overrightarrow{GA}+\lambda\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}$



$\acute{B}$ منتصف $[AC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(C,1)$ وتكون $(\acute{B},2)$

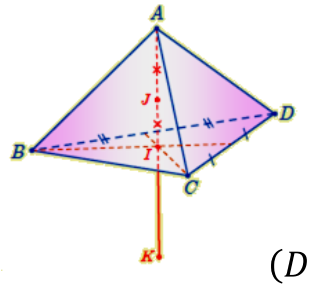
I منتصف $[B\acute{B}]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\acute{B},2)$, $(B,2)$ وتكون $(I,4)$

و منه $(I,4)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,1)$

بما أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AB) فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,2)$ عندئذٍ :

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+2\,\overrightarrow{GB} &= \vec{0}\\ \overrightarrow{GA}+\lambda\,\overrightarrow{GB} &= \vec{0}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

التمرين الثاني: ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن I مركز ثقل المثلث BCD
J منتصف $[AI]$ وk نظيرة A بالنسبة إلى I عبر عن k,J
بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A , B , C , D بعد تزويدها بأمثال مناسبة .



أولاً:

بما أن I مركز ثقل المثلث BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$

وعندها يكون $(I\,,3)$ وبما أن J منتصف $[AI]$ فإن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(A,3)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية يكون J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$

ثانياً:

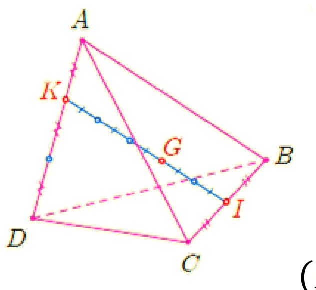
K نظيرة A بالنسبة لـ I $\Longleftarrow$ $\overrightarrow{KA} = 2\,\overrightarrow{KI}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{KA} - 2\,\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

وبما أن $(I,3)$ نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $\frac{-3}{2}$ فيكون : $\frac{-3}{2}\overrightarrow{KA} + 3\,\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,3)$, $\left(A,\frac{-3}{2}\right)$

ولكن $(I,3)$ مركز ثقل المثلث BCD ومنه I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية تكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $\left(A,\frac{-3}{2}\right)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$



التمرين الثالث: بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور

عين الأعداد الأربعة d, c, b, a ليتحقق ما يأتي:

1. K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,a) , (D,d)

من الشكل نجد:

$$(K,3)\leftarrow\begin{cases}a=2\\ d=1\end{cases}\Longleftarrow\begin{cases}2\overrightarrow{KA}+1\overrightarrow{KD}=\vec{0}\\ a\overrightarrow{KA}+d\overrightarrow{KD}=\vec{0}\end{cases}$$

2. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,b) , (C,c)

من الشكل نجد:

$$(I,2)\leftarrow\begin{cases}b=1\\ c=1\end{cases}\Longleftarrow\begin{cases}1\,\overrightarrow{IB}+1\,\overrightarrow{IC}=\vec{0}\\ b\,\overrightarrow{IB}+c\,\overrightarrow{IC}=\vec{0}\end{cases}$$

3. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,a) , (B,b) , (C,c) , (D,d)

من الشكل نجد: $3\,\overrightarrow{GI}+2\,\overrightarrow{GK}=\vec{0}$ إذاً G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,3)$, $(K,2)$

من الشكل نجد: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ وبما أن $(K,2)$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A , D عندئذ:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{\frac{1}{3}\times 2}{1\times 2}\overrightarrow{AD}\Longrightarrow\boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{\frac{2}{3}}{2}\overrightarrow{AD}}$$

إذاً $(K,2)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $\left(A,2-\frac{2}{3}\right)$, $\left(D,\frac{2}{3}\right)$

أي أن $a=\frac{4}{3}$ و $d=\frac{2}{3}$

♦ بما أن $(I,3)$ منتصف BC فإن: $\left(B,\frac{3}{2}\right)$, $\left(C,\frac{3}{2}\right)$

أصبح لدينا: $b=\frac{3}{2}\ ,\ c=\frac{3}{2}\ ,\ d=\frac{2}{3},\ \ a=\frac{4}{3}$

وبضرب الأثقال بـ 6 نحصل على: $b=9\ ,\ c=9\ ,\ d=4,\ \ a=8$

....

التمرين الرابع: انطلاقاً من الشكل المجاور ، جد الأمثال α و β و γ و δ

لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) .

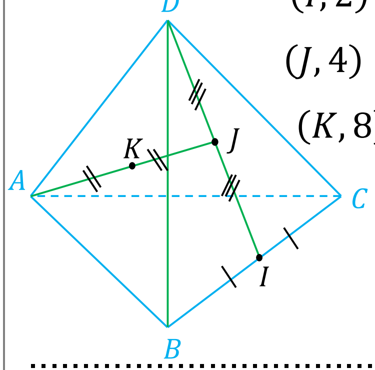
لدينا I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$ و منه $(I,2)$

لدينا J منتصف $[DI]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$, $(I,2)$ و منه $(J,4)$

لدينا K منتصف $[AJ]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,4)$, $(J,4)$ و منه $(K,8)$

عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

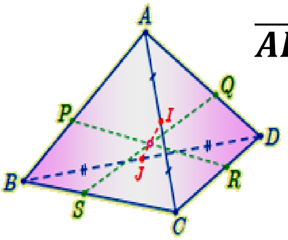
$(D,2),(C,1),(B,1),(A,4).$



....

النمط السادس من المسائل (تعيين نقطة تلاقي مستقيمات)

مسألة: نتأمل رباعي الوجوه $ABCD$ و لتكن x من المجال $]0,1[$ و لتكن P, Q, R, S النقاط التي تحقق:



$$\overrightarrow{AP} = x\,.\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AQ} = x\,\overrightarrow{AD} \quad , \quad \overrightarrow{CR} = x\,.\overrightarrow{CD} \quad , \quad \overrightarrow{CS} = x\,\overrightarrow{CB}$$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]\,,[BD]$

أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة .

① $\overrightarrow{CS} = x\,\overrightarrow{CB}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن S مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, 1-x)\,,(B, x)$ و يكون $(S, 1)$

② $\overrightarrow{CR} = x\,\overrightarrow{CD}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, 1-x)\,,(D, x)$ ويكون $(R, 1)$

③ $\overrightarrow{AQ} = x\,\overrightarrow{AD}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1-x)\,,(D, x)$ و يكون $(Q, 1)$

④ $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{AB}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1-x)\,,(B, x)$ ويكون $(P, 1)$

⑤ I منتصف $[AC]$ وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1-x)\,,(C, 1-x)$ ويكون $(I, 2-2x)$

⑥ J منتصف $[BD]$ وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D, x)\,,(B, x)$ ويكون $(J, 2x)$

بما أن النقاط المثقلة $(D, x)\,,(C, 1-x)\,,(B, x)\,,(A, 1-x)$ مجموع تثقيلاتها غير معدوم فإنه يوجد نقطة G مركز أبعاد متناسبة لها عندئذٍ :

- من ② و ④ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P, 1)\,,(R, 1)$ وهي منتصف $[PR]$.
- من ① و ③ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(S, 1)\,,(Q, 1)$ وهي منتصف $[QS]$.
- من ⑤ و ⑥ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J, 2x)\,,(I, 2-2x)$

الخلاصة: G تقع على كل من المستقيمات $[JI], [QS], [PR]$ أي أن المستقيمات السابقة تتقاطع في نقطة واحدة هي G

....