حل تمرين

أولاً: أجب عن التمارين التالية؟

التمرين الأول: احسب النهاية المطلوبة مبيناً المجالات التي تستخدم عليها؟

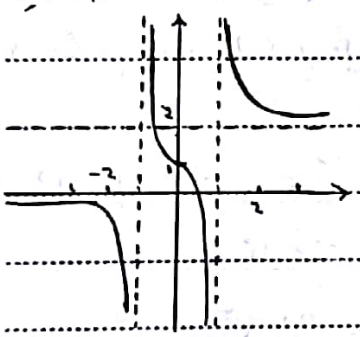
أ) $f(x)=\frac{5}{2+\cos x}$ ب) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

التمرين الثاني: احسب نهاية التابع f عند ما يؤول x إلى الصفر $f(x)=x+1+x$

التمرين الثالث: احسب في كل حالة نهاية التابع f عند a

$a=0$ $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}$ $a=+\infty$ $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$

التمرين الرابع: ليكن c الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً؟ بالاعتماد أجب عن الأسئلة التالية



أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ $\lim_{x\to -1} f(x)$ $\lim_{x\to -1} f(x)$

ب) اذكر مجال تعريف التابع ومجموعة الأعداد الحقيقية

ج) ما هي معادلات المقاربات $f(x)=1$ بيانياً

د) هل f التابع f مستمر؟

ثانياً: أجب عن الأسئلة التالية؟

السؤال الأول: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=\frac{3x^3+2x+1}{x^2+1}$ والمطلوب

أ) اكتب f بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$

ب) أثبت أن $y=ax+b$ معادلة مقارب مائل عند ∞؟ ادرس وضعه النسبي

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=x\sqrt{x}$ بفرض $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ جد عدداً طبيعياً x يجعل $f(x)>10^6$

السؤال الثالث: a و b عددان حقيقيان f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=ax^3+bx+3x$ عين a و b كي يكون التابع f مستمر حيث $f(1)=3$

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق الصيغة $f(x)=\frac{1}{1-x}$ حيث بيّن أن $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ من أجل $x\neq 1$

السؤال الخامس: حل المسألة التالية

المسألة الأولى: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق الصيغة

$$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$$

1) برهن أن $f(x+2\pi)=f(x)$ ثم استنتج أن f دوري ودوره 2π

2) ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$

3) اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند $x=\frac{\pi}{2}$

4) ادرس تغيرات f على $[-\pi,\pi]$

5) ارسم (C_f) على $[-\pi,\pi]$

المسألة الثانية: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) بيّن أن $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

3) بيّن أن $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

4) ادرس تغيرات f ثم نظم جدول تغيراتها

5) هل يقبل التابع f مماساً شاقولياً؟ بيّن ذلك

6) اكتب معادلة المماس عند النقطة $(0,1)$

7) ارسم (C_f) ومقارباته المائلة

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق..

Scanned by CamScanner

$\ln x$ e^x $\int_a^b x.dx$

التمرين الأول

i) $f(x) = \frac{5}{2+\cos x}$

$f' = \frac{-(-\sin x)(5)}{(2+\cos x)^2}$

$= \frac{5\sin x}{(2+\cos x)^2}$

ii) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

$f' = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{x}$

$= \frac{\frac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ $\quad]0,+\infty[$ على

التمرين الثاني

$f(x) = x|x|$

$t(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\quad x_0 = 0$

$= \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \frac{x|x|-0}{x} = |x|$

$\lim_{x\to 0} t(x) = 0$

f قابل للاشتقاق عند 0

التمرين الثالث

i) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

$= \frac{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{-(1-\cos x)}{x^2}$

$= \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$

$= -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -2\left(\frac{1}{4}\right)$

$= -\frac{1}{2}$

التمرين الأول

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
3. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
4. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$
5. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$
6. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$
7. $y=0$ مقارب $y=2$ مقارب $x=1$ مقارب $x=-1$ مقارب
8. المعادلة $f(x)=1$ تقبل حل وحيد
9. نستنتج مما سبق أن f تقبل قيمة حدية

التمرين الثاني

$f(x) = \frac{3x^3+2x+1}{x^2+1}$

نقسم بسط على المقام

$3x$

$x^2+1 \overline{)\ 3x^3+2x+1}$

$-3x^3-3x$

$-x+1$

$f(x) = 3x + \frac{-x+1}{x^2+1}$

$a=3$ $b=0$ $c=-x+1$ معرف

$y = 3x$

$f(x) - y = \frac{-x+1}{x^2+1}$

$\lim_{x\to+\infty}(f-y) = 0$

$y=3x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي

دراسة الإشارة:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	
x^2+1		$+$	$\|$	$+$	
الكل		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C_f فوق D		C_f تحت D	

Scanned by CamScanner

$\int_a^b x\,dx \quad e^x \quad \ln x$

التمرين 1

$P(x) = x\sqrt{x}$

1. لنبحث عن n بحيث $P(x) > 10^6$
2. نريد $x\sqrt{x} > 10^6$
3. $x^3 > 10^{12}$
4. $x > 10^4$

التمرين 2

$P(x) = ax^3 + bx + 3x$

1. $P(1) = 3$ معناه صحيح بمعنى كيف حصلت
2. الحل بعوض
3. $3 = a + b + 3$
4. 1) $\Rightarrow a + b = 0$ منه
5. 2) لعينة طريقة تعلم باشتقاق الدرس
6. $P'(x) = 3ax^2 + b + 3$
7. $0 = 3a + b + 3$
8. 2) $\Rightarrow 3a + b = -3$
9. 1) $\Rightarrow a = -b$ من
10. بعوض 2) في 1)

$-3b + b = -3 \Rightarrow -2b = -3$

$b = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

$a = -\frac{3}{2}$

التمرين 3

من أجل $n = 1$

1. $P'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

نثبت بالتدرج

2. $P' = \frac{0 - (-1)(1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$
3. صحة العبارة محققة من أجل $n = 1$
4. نفرض: $P^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

5. المطلوب: $P^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$
6. نبرهن: نثبت الفرض
7. $\left(P^{(n)}(x)\right)' = \frac{-(n+1)(1-x)^n(-1)\,n!}{(1-x)^{2n+2}}$
8. $P^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)n!\,(1-x)^n}{(1-x)^n(1-x)^{n+2}}$
9. $= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$
10. محققة بالبرهنة بمحققة من أجل $n+1$ هي صحيحة.

التمرين 4

1. المطلوب البرهان:
2. $P(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x)$
3. $= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$
4. $= P(x)$
5. إذن منحنى تابع زوجي ومنه لبيان
6. فنكتفي بالبحث في $\mathbb{R}^+$
7. $P(x + 2\pi) = 3\sin^2(x + 2\pi)$
8. $+ 4\cos^3(x + 2\pi)$
9. $= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$
10. $= P(x)$
11. إذن تابع دوري دوره 2π
12. بما أنه تابع زوجي ودوري دوره 2π
13. يكفي دراسته على $[0, \pi]$
14. $P' = 6\sin x \cos x + 12\cos^2 x(-\sin x)$
15. $= 6\sin x \cos x - 12\cos^2 x \sin x$
16. $= 6\sin x \cos x(1 - 2\cos x)$

Scanned by CamScanner

١٠ $f(0) = 0 + 4 = 4$ د

١١ $f(\pi) = 0 - 4 = -4$ د

$f' = 6\cos x \sin x (1 - 2\cos x)$

١٢ $f' = 0$ د

١٣ $6\cos x \sin x (1 - 2\cos x) = 0$ د

١٤ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ د

١٥ $x = \frac{\pi}{2}$ $k = 0$ $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ د

١٦ $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$ د

١٧ $f(0) = 4$ $x = 0$ $k = 0$ د

١٨ $f(\pi) = -4$ $x = \pi$ $k = 1$ د

١٩ $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ د

٢٠ $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ د

٢١ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ د

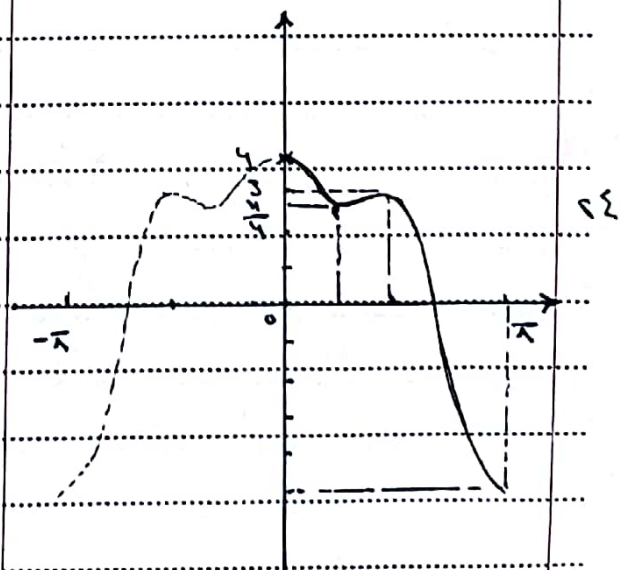
٢٢ $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{11}{4}$ $x = \frac{\pi}{3}$ $k = 0$ د

٢٣ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \notin [0, \pi]$ ق

٢٤

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
f	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

٢٥



١١ $f_{n+1} = \sqrt{x^2+1}$ اثبات الخاصة

١ $x \in D \Rightarrow -x \in D$ ق

٢ $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1}$ ق

$= f_{n+1}$

٣ الخاصة زوجي وظهر لها تناظر محور بالنسبة محور التراتيب

٤ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ د

٥ $f_{n+1} - y = \sqrt{x^2+1} - x$ د

٦ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ ح.ع

نضرب بالمرافق.

٧ $f - y = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ د

٨ $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$ ق

٩ اذن $y = x$ مقارب مائل لـ $+\infty$

١٠ $f_{n+1} - y = \sqrt{x^2+1} + x$ د

١١ $\lim_{x \to -\infty} (f - y) = \infty - \infty$ ح.ع

نضرب بالمرافق

١٢ $f - y = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ د

١٣ $\lim_{x \to -\infty} (f - y) = 0$ ق

١٤ اذن $y = -x$ مقارب مائل لـ $-\infty$

١٥ D_f مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ د

$D =]-\infty, +\infty[$ ق

١٦ $f' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ د

١٧ $f' = 0$ $x = 0$ د

$f(0) = 1$

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

١٨ ١٠

١٩ ١- $f(x) \geq 1$ من جدول التغيرات ٥

ب- $m = f'(0) = 0$ ٥

معادلة المماس الموازي لمحور السينات

ج٢ $y = 1$ ٥

$x = y$

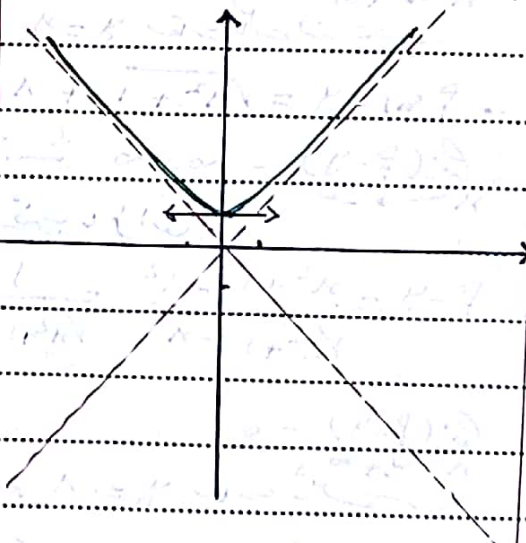
ج٣ $(0,0)$ $y = 0$ $x = 0$

$(1,1)$ $y = 1$ $x = 1$ ٥

$x = -y$

ج٤ $(0,0)$ $y = 0$ $x = 0$ ٥

$(-1,1)$ $y = 1$ $x = -1$



ج٦ ١٠

لرسم المقاربات ٥

ورسم المنحنى ٥

إذا لم يذكر الطالب نقاط رسم المقاربات ورسم المنحنى يعطى ٢٥ من ٣٠ درجة .

ملاحظات

١) في التمرين السابق إذا لم يذكر الطالب مجموعة الدستقدمة يخسر ثلث درجات .

٢) في التمرين السابق يمكن إيجاد النهاية $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ بطريقة

٣) في السؤال الأول : يمكن الصعود إلى إيجاد جدول $0 \pm \varepsilon$.

٤) إذا أخطأ الطالب في العتبة بمقدار ε يطبق بالعتبة الصحيحة ويخسر درجة واحدة .

٥) أي عمل صحيح غير الطالب يحتسب صحيحاً .

Scanned by CamScanner