تجميع شرائح الدكتور لمقرر

(الرياضيات المالية)

للدكتور:
وليد الطيب محمد أحمد

الفصل الصيفي ١٤٣٩هـ

تجميع:

سوسو

الإشراف العام:

Leader + مودي

الباب الأول

المجموعات

الدرس الأول

تعريف المجموعة:

تجمع أية أشياء يسمى مجموعة، ونسمي هذه الأشياء بعناصر المجموعة ، مثلاً:

السبت، الأحد، الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس.

هذه العناصر تشكل مجموعة، يمكن تسميتها بمجموعة أيام الأسبوع.

كتابة المجموعة: نكتب المجموعة بطريقتين:

1. **طريقة رصد (سرد) العناصر:**

في هذه الطريقة نقوم بكتابة عناصر المجموعة.

يتم ذلك بـ وضع عناصر المجموعة بين القوسين" { } " ونفصل بين كل عنصر والآخر بالفاصلة "،"

مثلاً: نكتب مجموعة أيام الأسبوع كالأتي:

{الخميس ، الأربعاء ، الثلاثاء ، الأثنين ، الأحد ، السبت}

لاحظ: ترتيب العناصر لا يؤثر على المجموعة، كذلك التكرار.

2. **طريقة الصفة المميزة:**

في هذه الطريقة نذكر الخاصية (الخواص) المشتركة بين عناصرالمجموعة .

يتم ذلك بـ نكتب داخل القوسين" { } " من اليسار متغير(عادة x) ونضع الرمز " | " ويقرأ " حيث أن" ثم نكتب x متبوعا بالخاصية المشتركة للعناصر.

مثلاً:

{ x | من أيام الأسبوع x }

نقرأ " مجموعة العناصر x حيث أن x من أيام الأسبوع ".

قد نستخدم ثلاث نقاط "..." للدلالة على نمط تسلسل العناصر، فمثلاً يمكن كتابة مجموعة أحرف اللغة العربية كما يلي:

{ي ، ... ، ث، ت، ب، أ}

مثال:

لتكن $\{1,2,3, \dots, 7\}$ كم عدد عناصر هذه المجموعة ؟

الحل : عناصر هذه المجموعة هي : ١ و٢ و ٣ و٤ و٥ و٦ و ٧ أي أن عددها سبعة.

المجموعة المنتهية والمجموعة غير المنتهية

المجموعة قد تكون منتهية أي قابلة للعد (عدد عناصرها محدود) ، مثلاً:

$\{x|$ طالب في جامعة الإمام $x\}$

لاحظ كل الأمثلة السابقة لمجموعات منتهية.

وقد تكون المجموعة غير منتهية ، مثلاً:

$\{x|$ مربع $x\}$

تسمية المجموعة (عنوان المجموعة)

نسمي المجموعة بحروف كبيرة مثل A, B, X وغيرها فمثلاً نقول أن A هي مجموعة الصلوات المفروضة، B هي مجموعة أيام الأسبوع، X هي مجموعة أحرف اللغة العربية.

$A = \{x|$ من الصلوات المفروضة $x\}$

$B =$ {الخميس ، الأربعاء ، الثلاثاء ، الأثنين ، الأحد ، السبت}

$X =$ {ي ، ... ، ث، ت، ب، أ}

لنكتب هذه المجموعات بالطريقتين:

كتابة المجموعة بطريقة رصد العناصر	كتابة المجموعة بطريقة الصفة المميزة
$A =$ {الفجر ، الظهر ، العصر ، المغرب ، العشاء}	$A = \{x|$ من الصلوات المفروضة $x\}$
$B =$ {الخميس ، الأربعاء ، الثلاثاء ، الأثنين ، الأحد ، السبت}	$B = \{x|$ من أيام الأسبوع $x\}$
$X =$ {ي ، ... ، ث، ت، ب، أ}	$X = \{x|$ من حروف اللغة العربية $x\}$

إنتماء عنصر لمجموعة

عندما يكون عنصر موجود في مجموعة (ضمن عناصرها) نقول أن هذا العنصر ينتمي لهذه المجموعة مثلاً صلاة الفجر ضمن الصلوات المفروضة فنقول الفجر ينتمي للمجموعة A ، نكتب ذلك:

الفجر $\in A$

أما إذا كان العنصر غير موجود في المجموعة قلنا انه لا ينتمي إليها فمثلاً صلاة العيد لا تنتمي للمجموعة A ، نكتب ذلك :

صلاة العيد $\notin A$

مثال:

١) إذا كانت $C = \{2,4\}$ ، أي العبارات التالية خاطئة:

(a) $2 \in C$

(b) $7 \notin C$

(c) $4 \in C$

(d) $4 \notin C$

الحل:

العبارة الخاطئة هي: (d) $4 \notin C$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $A = \{x \mid$ من أيام العطلة الأسبوعية في السعودية $x\}$ فنكتب المجموعة A بطريقة رصد العناصر كالأتي:

(a) $A =$ {الخميس ، السبت}

(b) $A =$ {الجمعة ، السبت}

(c) $A =$ {الجمعة ، السبت ، الأحد}

(d) $A =$ {الجمعة، الخميس ، السبت}

الحل:

(b) $A =$ {الجمعة ، السبت}

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

المجموعة الأولى في نهائيات كأس العالم ٢٠١٨ بروسيا ضمت منتخبات السعودية ومصر والاورجواي وروسيا ، نكتب هذه المجموعة بطريقة الصفة المميزة كالأتي:

(a) $\{x \mid$ من منتخبات المجموعة الأولي في نهائيات كأس العالم $x\}$

(b) {السعودية ، الاورجواي ، روسيا ، مصر}

(c) $\{x \mid$ من المنتخبات المشاركة في نهائيات العالم $x\}$

(d) {السعودية ، الاورجواي ، روسيا}

الحل:

(a) $\{x \mid$ من منتخبات المجموعة الأولي في نهائيات كأس العالم $x\}$

الدرس الثاني

المجموعة الجزئية:

إذا كانت كل عناصر مجموعة موجودة ضمن عناصر مجموعة أخرى، نقول إن المجموعة الأولى جزئية من المجموعة الثانية، ونرمز لذلك بالرمز " $\subset$ " ويقرأ "جزئية من "

مثلاً : {السبت، الجمعة، الخميس، الأربعاء، الثلاثاء، الإثنين، الأحد} $\subset$ {السبت ، الجمعة}

{ x| x من حروف كلمة جديد } $\subset$ {ج، د، ي }

لاحظ في المثال الثاني المجموعتان متساويتان، في هذه الحالة يمكن استخدام الرمز "$\subseteq$" ويقرأ جزئية أو تساوي

{ x| x من حروف كلمة جديد } $\subseteq$ {ج، د، ي }

أو استخدام رمز المساواة "="

{ x| x من حروف كلمة جديد } $=$ {ج، د، ي }

المجموعة غير الجزئية:

إذا وجد على الأقل عنصر في المجموعة الأولى لا يوجد في المجموعة الثانية نقول إن المجموعة الأولى ليست جزئية من المجموعة الثانية فمثلاً:

$$\{1,3,4,5\} \not\subset \{1,3,5,7,9\}$$

العبارة	المعنى
$a \in A$	العنصر a ينتمي للمجموعة A
$b \notin A$	العنصر b لا ينتمي للمجموعة A
$A \subset B$	المجموعة A جزئية فعلية من المجموعة B
$C \not\subset B$	المجموعة C ليست جزئية من المجموعة B
$A \subseteq B$	المجموعة A جزئية أو تساوي المجموعة B
$A = B$	المجموعة A تساوي المجموعة B

المجموعة الشاملة:

إذا كانت هنالك دراسة ما تحوي عدد من المجموعات وكانت هنالك مجموعة تحوي عناصر كل هذه المجموعات فإننا نسميها المجموعة الشاملة، نرمز للمجموعة الشاملة بالرمز U.

فمثلاً: ليكن اهتمامنا بالمجموعات التالية: مجموعة طلاب كلية العلوم الاجتماعية بجامعة الإمام، مجموعة طلاب كلية الشريعة بجامعة الإمام، مجموعة طلاب كلية الاقتصاد بجامعة الإمام ومجموعة طلاب جامعة الإمام. نلاحظ ان مجموعة طلاب جامعة الإمام تحوي عناصر المجموعات الثلاثة، بالتالي فهي المجموعة الشاملة.

المجموعة الخالية:

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحوي أية عنصر، نرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو { } .

فمثلاً:

$A = \{x \mid$ من طلاب مقرر مال 118 يدرس علم التشفير $x\}$

$$A = \emptyset$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $C = \{2,4\}$ فإن

(a) $C \not\subset A$

(b) $C \in A$

(c) $C \subset A$

(d) $C \in B$

الحل: (c) $C \subset A$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $A = \{2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{x \mid$ من أرقام العدد 5324 $x\}$ فإن

(a) $A \neq B$

(b) $A = B$

(c) $B = \emptyset$

(d) $A \in B$

الحل: (b) $A = B$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

معطى المجموعات:

$A = \{2, 3, 4\}$ و $B = \{x \mid$ من أرقام العدد 124 $x\}$ و $C = \{0, 5\}$

أي المجموعات أدناه تصلح لتكون المجموعة الشاملة

(a) $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) $U = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(c) $U = \{0, 1, 2, 4, 5\}$

(d) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الحل:

(d) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الدرس الثالث

مجموعات الأعداد الرئيسية:

١) مجموعة الأعداد الطبيعية:

نرمز لها بـالرمز $\mathbb{N}$ وهي:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

نلاحظ:

- $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية.
- $0 \notin \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}$ محدودة من أسفل بالعدد ١
- لاتحوي أعداد سالبة
- لاتحوي أعداد كسرية

٢) مجموعة الأعداد الصحيحة:

نرمز لها بـالرمز $\mathbb{Z}$ وهي:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

نلاحظ:

- $\mathbb{Z}$ مجموعة غير منتهية.
- تحوي اعداد سالبة وأعداد موجبة
- $0 \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

٣) مجموعة الأعداد النسبية (الكسرية):

نرمز لها بـالرمز $\mathbb{Q}$ وهي:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

نلاحظ:

- $\mathbb{Q}$ تكتب بطريقة الصفة المميزة.
- يسمى العدد a البسط والعدد b المقام ، b لا يمكن ان يكون صفراً.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ، لندمج هاتين العبارتين معاً $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

٤) مجموعة الأعداد غيرالنسبية

هناك أعداد لا يمكن كتابتها في الصورة $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z}$ مثل الجذور $\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,, \sqrt{5}\,, \dots$ (تسمى جذور صماء) ، تسمى مجموعة مثل هذه الأعداد بمجموعة الأعداد غير النسبية نرمز لها بـ $\mathbb{Q}'$ أو $\mathbb{Q}^c$.

٥) مجموعة الأعداد الحقيقية:

مجموعة الأعداد النسبية مع مجموعة الأعداد غير النسبية تشكل مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية ، نرمز لها بـ $\mathbb{R}$. ونعني بها كل الأعداد (الطبيعية مع الصحيحة مع النسبية مع غير النسبية)

نلاحظ:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

لقد تعرفنا على مجموعات الأعداد الرئيسية وهي:

المجموعة	الرمز
مجموعة الأعداد الطبيعية	$\mathbb{N}$
مجموعة الأعداد الصحيحة	$\mathbb{Z}$
مجموعة الأعداد النسبية	$\mathbb{Q}$
مجموعة الأعداد غير النسبية	$\mathbb{Q}^c$
مجموعة الأعداد الحقيقية	$\mathbb{R}$

هنالك مجموعات ثانوية مثل:

- مجموعة الأعداد الكلية: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الزوجية: $\{2, 4, 6, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الفردية: $\{1, 3, 5, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الأولية $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

لنسترجع بعض الرموز الأساسية:

الرمز	المعنى
$<$	" أصغر من" مثلا: $3 < 5$
$\le$	" أصغر من أو يساوي" مثلا: $3 \le 5$ مثال آخر $3 \le 5$
$>$	" أكبر من" مثلا: $8 > 2$
$\ge$	" أكبر من أو يساوي" مثلا: $8 \ge 2$ مثال آخر $2 \ge 2$
$=$	" يساوي" مثلا: $10 = 10$
$\neq$	" لا يساوي" مثلا: $3 \neq 5$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

لتكن المجموعة $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \le x < 5\}$ ، تكتب المجموعة A بطريقة رصد العناصر بالصورة :

(a) $A = \{3,4,5\}$ (b) $A = \{2,3,4,5\}$

(c) $A = \{2,3,4\}$ (d) $A = \{3,4\}$

الحل: (b) $A = \{2,3,4\}$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

لتكن المجموعة $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ ، تكتب المجموعة A بطريقة رصد العناصر بالصورة :

(a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$

(b) $A = \{1, 2,3,4\}$

(c) $A = \{1, 2,3\}$

(d) $A = \{0, 1, 2, 3,4\}$

الحل: (c) $A = \{1, 2,3\}$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

يعد العدد 20 عدد :

(a) زوجي (b) أولي (c) فردي (d) غير نسبي

الحل: (a) زوجي

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

يصنف العدد $\sqrt{3}$ على أنه عدد :

(a) طبيعي (b) غير نسبي (c) صحيح (d) نسبي

الحل:

(b) غير نسبي

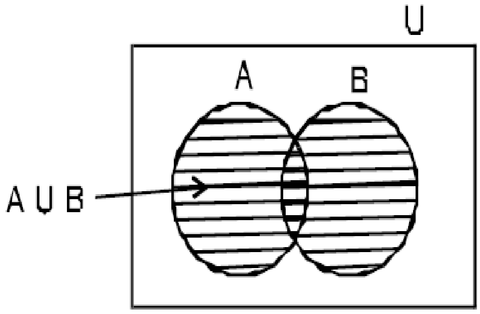
الدرس الرابع

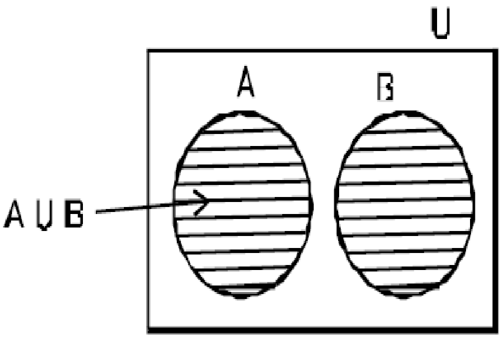
العمليات على المجموعات:

لتكن A و B مجموعتان و لتكن U المجموعة الشاملة، هنالك عمليات يمكن إجراءها على هذه المجموعات:

١) الإتحاد

اتحاد المجموعتين A و B هو المجموعة التي تضم عناصر المجموعتين معاً ، نرمز للاتحاد بالرمز ∪ ، يمكن تمثيل اتحاد المجموعتين A و B بالشكلين أدناه (تسمى أشكال فن *Venn diagram*)





مثال:

لتكن $A = \{1,3,4,5\}$ و $B = \{2,3,4,6\}$ أوجد $A \cup B$

الحل:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

لاحظ:

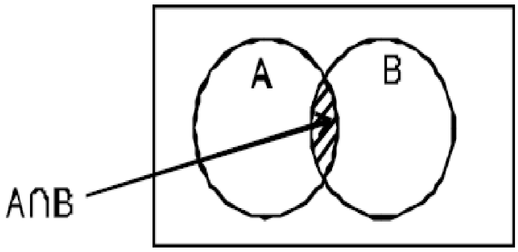
$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

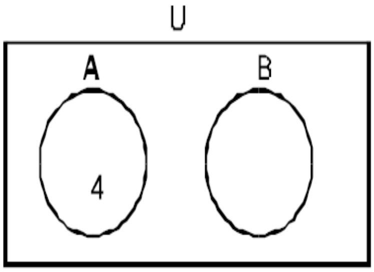
٢) التقاطع :

تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة التي تضم العناصر المشتركة بين المجموعتين ، نرمز للتقاطع بالرمز ∩ ،



إذا لم تكن هنالك عناصر مشتركة بين المجموعتين قلنا أن التقاطع يساوي مجموعة خالية

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$$



مثال :

لتكن $A = \{1,3,4,5\}$ و $B = \{2,3,4,6\}$ أوجد $A \cap B$

الحل:

$$A \cap B = \{3,4\}$$

لاحظ:

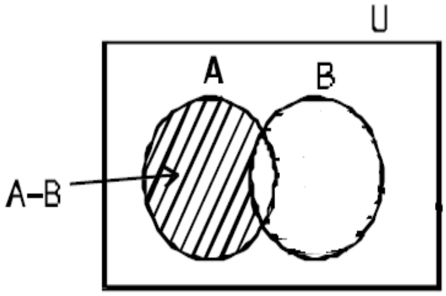
$$A \cap B = B \cap A$$

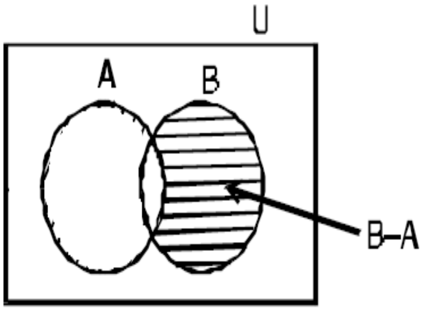
$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

٣) الفرق:

المجموعة A فرق المجموعة B هي المجموعة التي تضم عناصر المجموعة A التي لا تنتمي إلى المجموعة B ، نرمز لهذا الفرق بالرمز A − B





مثال:

لتكن $A = \{1,3,4,5\}$ و $B = \{2,3,4,6\}$

أوجد

1) $A - B$

2) $B - A$

الحل:

1) $A - B = \{1,5\}$

2) $B - A = \{2,6\}$

نلاحظ أن $A - B \neq B - A$ ($A - B \neq B - A$ إلا إذا كان A = B)

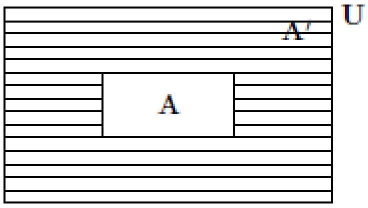
لاحظ:

$$A - A = \emptyset$$

$$A - \emptyset = A$$

٤) **متممة المجموعة** :

لنفرض ان مجموعة طلاب جامعة الإمام هي المجموعة الشاملة U ، ولتكن A هي مجموعة طلاب كلية العلوم الاجتماعية، نسمي المجموعة التي تحوي كل طلاب الجامعة الذين لا ينتمون لكلية العلوم الاجتماعية بالمجموعة المتممة للمجموعة A، ونرمز لها بالرمز A^c أو A'.



مثال:

لتكن $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ المجموعة الشاملة ولتكن $A = \{2,3,4,6\}$ أوجد A^c

الحل:

نبحث عن عناصر U التي لا تنتمي إلى A

فبالتالي فإن:

$$A^c = \{1,5\}$$

لاحظ:

$$U^c = \emptyset$$

$$\emptyset^c = U$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

لتكن $A = \left\{1,-3,4,\frac{5}{7}\right\}$ و $B = \{2,-3,4,6\}$ فإن $A \cap B$ يساوي

$(a)\ \left\{1,2,-3,4,5,6,\frac{5}{7}\right\}$ $(b)\ \emptyset$ $(c)\ \{-3,4\}$ $(d)\ \{3,4\}$

الحل:

$(c)\ \{-3,4\}$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

لتكن $A = \{1,-1,2,-2\}$ و $B = \{2,-3,4\}$ فإن $A \cup B$ يساوي

$(a)\ \{1,-1,2,-2,-3,4\}$ $(b)\ \emptyset$ $(c)\ \{1,2,3,4\}$ $(d)\ \{2\}$

الحل:

$(a)\ \{1,-1,2,-2,-3,4\}$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

لتكن $A = \{1, -1, 2, -2\}$ و $B = \{2, -3, 4\}$ فإن $A - B$ يساوي

(a) $\{2, -3\}$ (b) $\{-3, 4\}$ (c) $\{1, -1, 2\}$ (d) $\{1, -1, -2\}$

الحل:

(d) $\{1, -1, -2\}$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة:

لتكن $U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ المجموعة الشاملة ولتكن $A = \{4, 6\}$ فإن A^c

(a) $\{2, 4, 8, 10\}$ (b) $\{2, 10\}$ (c) $\{2, 8, 10\}$ (d) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

الحل:

(c) $\{2, 8, 10\}$

الباب الثاني

العلاقات والدوال

الدرس الأول

العلاقة:

العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعتي تسمى المجموعة الأولى بمجال العلاقة وتسمى المجموعة الثانية بالمجال المقابل (أو المجال المصاحب).

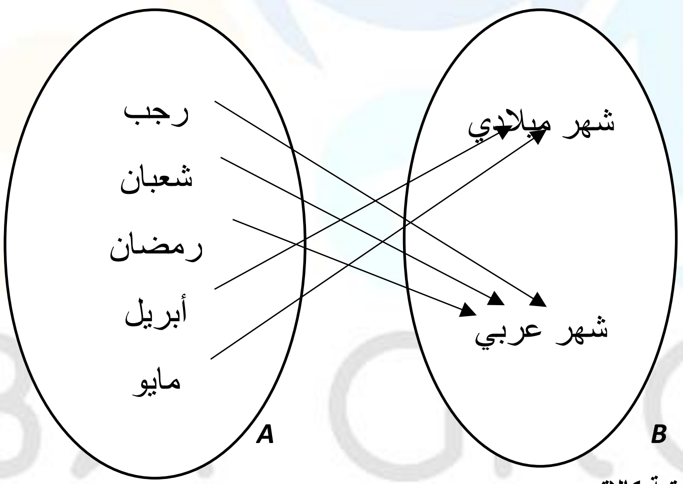
تأمل المجموعتين:

$A =$ {رجب، شعبان، رمضان، أبريل، مايو}

$B =$ {شهرميلادي ، شهر عربي}

لاحظ أن رجب، شعبان، ورمضان من الشهور العربية، أما أبريل ومايو من الشهور الميلادية، يمكن عمل علاقة بين عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة B بحيث ترتبط العناصر "رجب، شعبان، ورمضان" بالعنصر "شهر عربي"، ويرتبط العنصران "أبريل ومايو" بالعنصر "شهر ميلادي".

لنعبر عن هذه العلاقة بالمخطط السهني التالي:



يمكن أن نكتب هذه العلاقة في صورة أزواج مرتبة كالاتي:

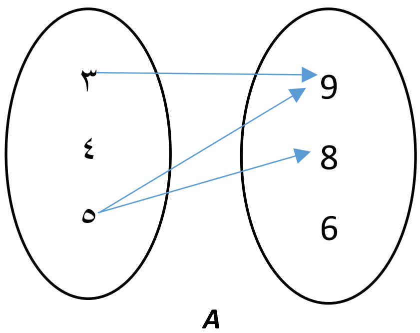
{(رجب، شهر عربي)، (شعبان، شهر عربي)، (رمضان، شهر عربي)، (أبريل، شهر ميلادي)،

(مايو، شهر ميلادي)}

هذه علاقة بين المجموعة A و المجموعة B ، مجال العلاقة هو المجموعة A ومجالها المقابل هو المجموعة B .

ليس بالضرورة أن ترتبط كل عناصر المجال وأن ترتبط كل عناصر المجال المقابل،

مثلا: لتكن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، معرفة بالمخطط السهمي التالي:



لاحظ :

- **العنصر "٤" في المجموعة A لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة B .**
- **العنصر "٦" في المجموعة B لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة A .**
- **العنصر "٥" في المجموعة A ارتبط بعنصرين في المجموعة B .**

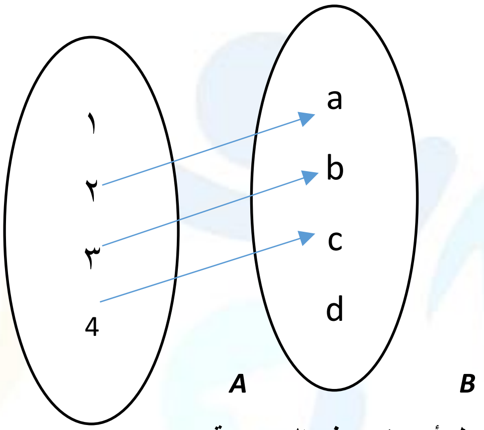
الدالة:

الدالة هي علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجال بعنصر وحيد من عناصر المجال المقابل. نرمز للدالة عادة بالرمز f ، فإذا كان لدينا دالة مجالها المجموعة A ومجالها المقابل المجموعة B نقول أن f دالة من المجموعة A إلى المجموعة B ونكتب ذلك كالآتي:

$$f : A \rightarrow B$$

تأمل العلاقات التالية:

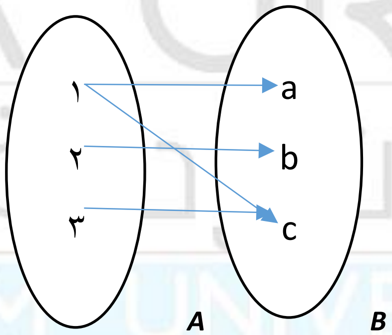
١



لاحظ العنصر "١" في المجموعة A لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة B .

هذه العلاقة ليست دالة.

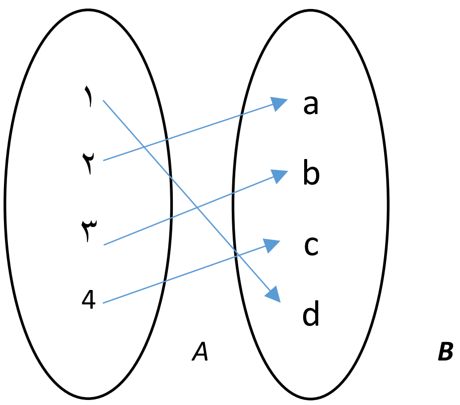
٢



لاحظ العنصر "١" في المجموعة A ارتبط بأكثر من عنصر في المجموعة B .

هذه العلاقة ليست دالة.

٣

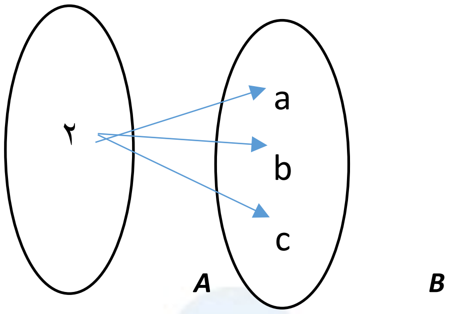


لاحظ كل عنصر في المجموعة A ارتبط بعنصر وحيد في المجموعة B .

هذه العلاقة دالة. نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

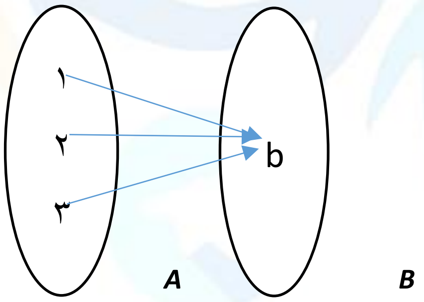
$$f = \{(1,c),(2,a),(3,b),(4,c)\}$$

٤



لاحظ العنصر "٢" في المجموعة A ارتبط بأكثر من عنصر في المجموعة B .

هذه العلاقة ليست دالة.

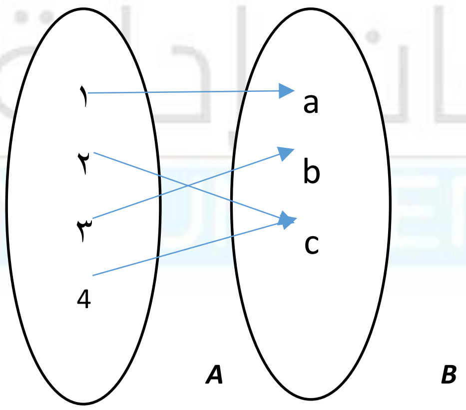


لاحظ كل عنصر في المجموعة A ارتبط بعنصر وحيد في المجموعة B .

هذه العلاقة دالة. نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

$$f = \{(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

٥



لاحظ كل عنصر في المجموعة A ارتبط بعنصر وحيد في المجموعة B .

هذه العلاقة دالة. نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

$$f = \{(1,a),(2,c),(3,b),(7,c),(6,c)\}$$

<u>مثال:</u> اختر الإجابة الصحيحة:

الدالة $f = \{(1,a),(5,b),(7,d),(4,c)\}$ مجالها هو

(a) دالة مجالها $\{1,5,6,7\}$

(b) دالة مجالها $\{1,5,7,4\}$

(c) دالة مجالها $\{a,b,c\}$

(d) دالة مجالها $\{1,a,5,b,7,d,4,c\}$

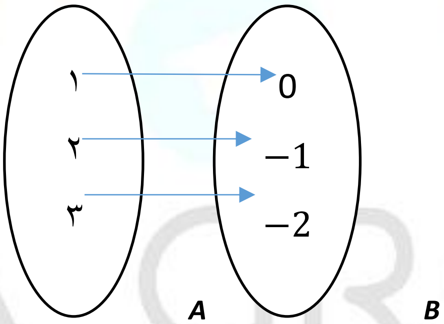
<u>الحل:</u>

(b) دالة مجالها $\{1,5,7,4\}$

الدرس الثاني

<u>صورة العنصر:</u>

الدالة $f : A \to B$ معرفة كالآتي:



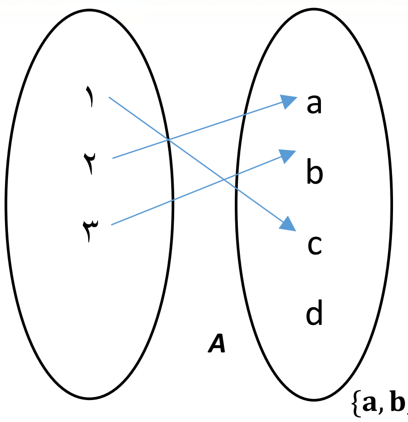
نلاحظ أن العنصر ١ اقترن (ارتبط) بالعنصر 0 ، نقول ان صورة العنصر ١ هي ٠ ونكتب ذلك: $f(1) = 0$.

لاحظ:

$$f(2) = -1$$

$$f(3) = -2$$

<u>مدى الدالة:</u> تامل الدالة:



مجال الدالة هو $\{1,2,3\}$ ومجالها المقابل هو $\{a,b,c,d\}$

عناصر المجال المقابل التي إقترنت (ارتبطت) بالمجال تشكل مجموعة تسمى مدى الدالة.

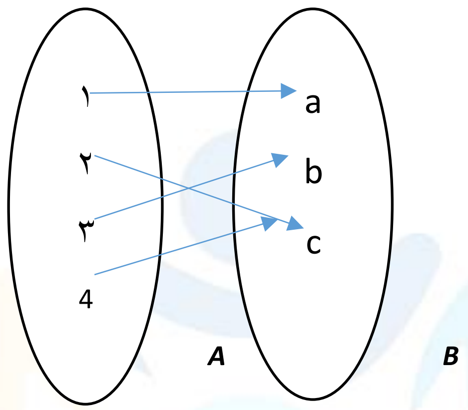
بالتالي المدى هو $\{a, b, c\}$

لاحظ: المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل.

<u>الدالة الشاملة:</u>

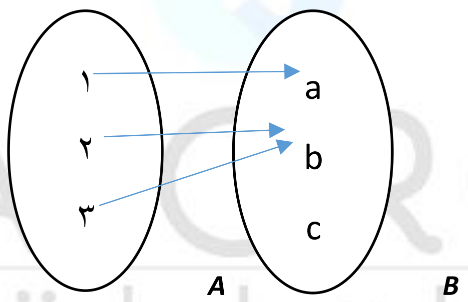
نقول أن f دالة شاملة إذا كان مداها مساويا لمجالها المقابل.

مثلا: الدالة



دالة شاملة.

بينما الدالة:

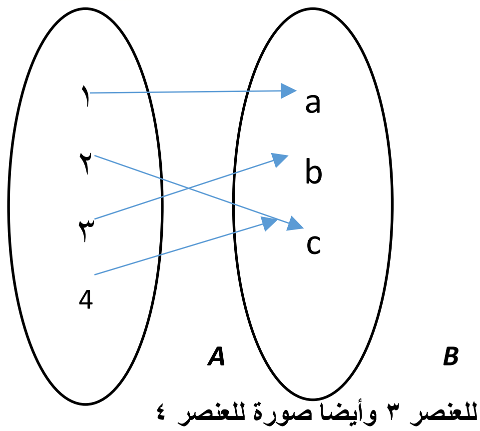


ليست شاملة ، لاحظ: مدها لا يساوي مجالها المقابل.

<u>الدالة واحد لواحد:</u>

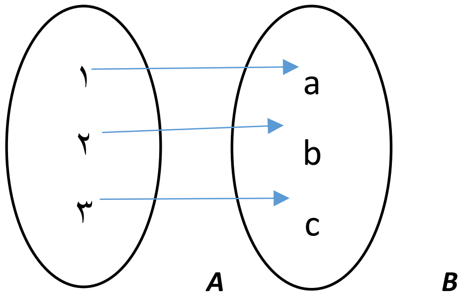
نقول أن f دالة واحد لواحد إذا كان كل عنصر في المدى هو صورة لعنصر واحد فقط من المجال.

مثلا: الدالة



ليست دالة واحد لواحد لأن العنصر c هو صورة للعنصر ٣ وأيضا صورة للعنصر ٤

بينما الدالة:



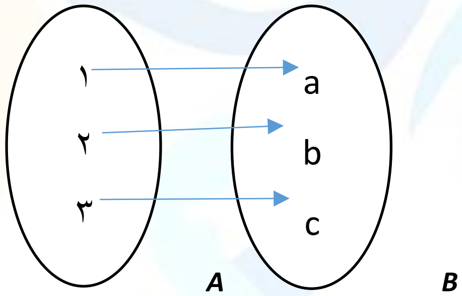
دالة واحد لواحد.

<u>الدالة العكسية:</u>

إذا كانت الدالة شاملة وأيضا واحد لواحد فإنه توجد لها دالة عكسية نرمز لها بالرمز f^{-1}

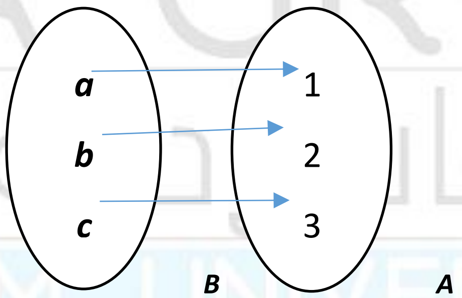
ونقرأ " الدالة العكسية "

مثلا: الدالة $f : A \to B$ معرفة كالآتي:



دالة شاملة ودالة واحد لواحد ، بالتالي الدالة العكسية موجوده وهي:

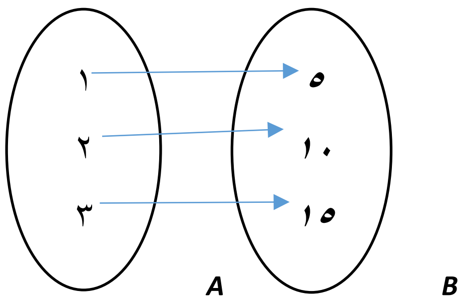
الدالة $f^{-1} : B \to A$ معرفة كالآتي:



لاحظ: مجال f هو المجال المقابل لـ f^{-1} . والمجال المقابل لـ f هو مجال f^{-1} .

<u>مثال:</u> اختر الإجابة الصحيحة

معطى الدالة $f : A \to B$ معرفة كالآتي:



١. $f^{-1}(10)$ تساوي

(e) ١ (f) ٠ (g) ٣ (h) ٢

٢. $f^{-1}(5)$ تساوي

(i) ١ (j) ٠ (k) ٣ (l) ٢

٣. $f(3)$ تساوي

(m) ١ (n) ٠ (o) 15 (p) 5

الدرس الثالث

المتغيرات والثوابت

المتغير هو رمز (عادة يكون حرف) يستخدم للتعبير عن عدد، مثلاً إذا كان لدينا علبة بها عدد غير معلوم من الأقلام وهناك قلمان خارج العلبة فالمجموع الكلي للأقلام يكون عدد الأقلام المجهول إضافة للقلمين، لنعبر عن عدد الأقلام المجهول بالحرف x بالتالي يمكن التعبير عن المجموع الكلي للأقلام بـ $x+2$

نسمي $x+2$ بتعبير (أو مقدار)، فإننا نسمي $x+2$ بتعبير جبري ونسمي x متغير، يمكن استخدام أي حرف للدلالة على متغير ولكن عادة ما نستخدم الحرف x .

المتغير في المقدار يمكن استبداله بأي عدد، ومتى ما استبدلنا المتغير بعدد يمكن إيجاد قيمة المقدار، مثلاً لنأخذ $x+2$ إذا وضعنا $x=8$ فإن

$$x+2=8+2=10$$

مثال:

احسب قيمة $3x+4$ إذا كان $x=5$

الحل

$$3x+4=3(5)+4=15+4=19$$

مثال:

احسب $6x-3+5(y-1)$ إذا كان $x=2$ و $y=3$

الحل

$$6x-3+5(y-1)=6(2)-5(3-1)=12-3+5(2)=9+10=19$$

الصورة الرياضية للدالة

لنفرض لدينا دالة f مجالها $\mathbb{N}$ ومجالها المقابل $\mathbb{N}$ ، تربط كل عنصر مع نفسه، بالتالي العنصر ١ سيرتبط بالعنصر ١ العنصر ٥ سيرتبط بالعنصر ٥ وهكذا .

يمكن التعبير عن ذلك رياضيا كلآتي:

الدالة $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ معرفة بالقانون: $f(x)=x$

لاحظ:

$$f(1)=1\ ,f(2)=2\ ,f(10)=10$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

إذا كانت $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ معرفة بالقانون: $f(x) = x + 1$

١. $f(1)$ تساوي

(q) ١ (r) ٠ (s) ٣ (t) ٢

٢. $f(5)$ تساوي

(u) 7 (v) 6 (w) 5 (x) 9

٣. $f(3)$ تساوي

(y) ٣ (z) ٠ (aa) 5 (bb) 4

الباب الثالث
الأساس والقوة واللوغاريتم

الدرس الأول

الأساس والقوة

نعلم ان حاصل الضرب $2 \times 2 \times 2$ هو ٨ ، يمكن كتابته كالتالي:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

لقد حصلنا على العدد ٨ بضرب العدد ٢ في نفسه ٣ مرات، نكتب ذلك $8 = 2^3$

ونسمي العدد ٢ الأساس والعدد ٣ الأس (أو القوة) ، ونقرأ ٢ أس ٣ .

المقدار 5^4 يقرأ ٥ أس ٤ أو العدد ٥ مرفوع للقوة ٤ .

لاحظ: إذا كانت القوة ٢ قلنا العدد أس ٢ أو العدد تربيع وإذا كانت القوة ٣ قلنا العدد أس ٣ أو العدد تكعيب .

بصورة عامة : نسمي x^n القوة رقم n للعدد x ، نسمي x الأساس ونسمي العدد n الأس.

لاحظ:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

بصورة عامة:

لأي عدد حقيقي a فإن a^n تعني أن العدد a مضروبا في نفسه n مرة.

ضرب المقادير ذات الأساس الموحد

عندما نضرب أعداداً ذات أساس موحد نجمع القوى
$x^n . x^m = x^{n+m}$

مثلاً:

$$3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$$

$$(2x)(x^5)(3x^2) = 6x^8$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

ناتج الضرب : $(2ab^3)(3a^2b^4)$ هو

$6ab^4$ (d)	$6a^3b$ (c)	$6a^3b^7$ (b)	$5a^3b^7$ (a)

قسمة المقادير ذات الأساس الموحد

عندما نقسم أعداداً ذات أساس موحد نطرح القوى

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

مثلاً:

$$\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$$

$$\frac{a^3b^2}{a^2b} = a^{3-2}b^{2-1} = ab$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $\frac{x^3x^2}{x^4}$ يساوي

x (d)	x^3 (c)	x^9 (b)	1 (a)

رفع القوة إلى قوة أخرى

عندما نرفع قوة العدد إلى قوة أخرى نضرب القوتين

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

مثلاً:

$$(3^2)^5 = 3^{10}$$

$$(x^3)^4 = x^{12}$$

حاصل ضرب المقادير ذات القوة المشتركة

حاصل ضرب مقدارين ذات قوة واحدة (مشتركة) يعني أن المقدار الأول مرفوعا لهذه القوة مضربا في المقدار الثاني مرفوعا لهذه القوة.

$$(xy)^n = x^ny^n$$

مثلاً:

$$(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$$

$$(abc)^5 = a^5b^5c^5$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $(2xy)^4$ يساوي

(a) $2x^4y^4$	(b) $16x^4y$	(c) $16xy^4$	(d) $16x^4y^4$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $(x^4y)^3$ يساوي

(a) $x^{12}y^3$	(b) x^4y	(c) x^4y^4	(d) x^4y^3

المقدار ذو قوة سالبة

العدد مرفوع لقوة سالبة.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

أيضاً:

$$\frac{1}{x^{-n}} = x^n$$

كذلك:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

مثلاً:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$$

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار 5^{-2} يساوي

(a) 1	(b) 10	(c) $\frac{1}{25}$	(d) 25

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$ يساوي

(a) $\frac{y^3}{x^3}$	(b) $\frac{x}{y^{-3}}$	(c) $\frac{x^{-3}}{y}$	(d) $\frac{x^3}{y^3}$

المقدار مرفوعا للقوة صفر

العدد مرفوع للصفر يساوي ١.

$$x^0 = 1$$

مثلاً:

$$2^0 = 1$$

$$(3x)^0 = 1$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $\left(\frac{-4}{2}\right)^0$ يساوي

(a) 2	(b) -2	(c) 1	(d) -4

الدرس الثاني

اللوغاريتم

عرفنا أن

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

لنحل المسألة التالية:

أوجد قيمة المتغير x حيث $2^x = 8$.

نريد أن نعرف عدد مرات ضرب العدد ٢ في نفسه للحصول على ٨، بالطبع ٣ مرات.

في هذه الحالة نقول أن لوغريثم العدد ٨ للأساس ٢ هو ٣ .

ونكتب ذلك:

$$\log_2 8 = 3$$

حيث أن لوغريثم العدد لأي أساس هو عدد مرات ضرب هذا الأساس في نفسه للحصول على هذا العدد.

مثلاً: لوغريثم العدد ٢٧ للأساس ٣ هو عدد مرات ضرب العدد ٣ في نفسه للحصول على ٢٧ ، (ثلاث مرات)

أي ان لوغريثم العدد ٢٧ للأساس ٣ هو ٣ ، نكتب ذلك كما يلي:

$$\log_3 27 = 3$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log_4 16$ يساوي

(a) 2	(b) 3	(c) 1	(d) 4

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log_2 32$ يساوي

(a) 2	(b) 4	(c) 1	(d) 5

لاحظ: عندما يتساوى العدد والأساس يكون ناتج اللوغريثم ١

مثلاً: لنحسب $\log_5 5$ ، عدد مرات ضرب الأساس ٥ في نفسه للحصول على ٥ هي مرة واحدة، بالتالي:

$$\log_5 5 = 1$$

بصورة عامة: (a عدد حقيقي موجب)

$\log_a a = 1$

لاحظ: 2^3 تعني أن العدد ٢ مضروبا في نفسه ثلاث مرات .

بالتالي فإن :

$$\log_2 2^3 = 3$$

بصورة عامة :

$\log_a a^n = n$

نعلم أن $3^0 = 1$

أي أن ضرب العدد 3 في نفسه صفر مرة يعطينا ١ بالتالي فإن:

$$\log_3 1 = 0$$

بصورة عامة : $(a \neq 1)$

$\log_a 1 = 0$

الدرس الثالث

اللوغريثم العشري

اللوغريثم الذي أساسه ١٠ يسمى اللوغاريثم العشري وعادة نعبر عنه بدون كتابة الأساس، فمثلاً:

$$\log x$$

تعني لوغريثم العدد x للأساس ١٠ (أي عدد مرات ضرب الأساس ١٠ في نفسه للحصول على x).

مثلا:

لنوجد $\log 100$

نريد عدد مرات ضرب العدد ١٠ في نفسه للحصول على ١٠٠ (هي مرتان)

بالتالي :

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

لنوجد $\log 0.1$

لاحظ: $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

بالتالي:

$$\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log 10000$ يساوي

(a) 2	(b) 3	(c) 1	(d) 4

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log 0.001$ يساوي

(a) -2	(b) -3	(c) 3	(d) -4

الباب الرابع

متتاليات (متواليات) الأعداد

الدرس الأول

المتتاليات

المتتالية هي تتالي أعداد بترتيب معين، كل عدد يسمى حد للمتتالية.

مثلا متتالية الأعداد:

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

حدها الأول هو ١ وحدها الثاني ٣ وهكذا،

لاحظ: هذه المتتالية غير منتهية،

نرمز للحد الأول بـ a_1 والحد الثاني بـ a_2 وهكذا ...

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7$$

نرمز للحد العام بـ a_n

ماهي قاعدة إنشاء هذه المتتالية؟

تم تكوين المتتالية السابقة بإضافة ٢ لحدها الأول للحصول على حدها الثاني، وهكذا في كل مرة يضاف ٢ للحد السابق للحصول على الحد التالي.

مثال

معطى المتتالية: ... ,13 ,9 ,5

ماهي قاعدة إنشاء هذه المتتالية؟ أوجد حدها الرابع.

الحل

القاعدة: إضافة ٤ للحد السابق. بالتالي حدها الرابع هو:

$$a_4 = a_3 + 4 = 13 + 4 = 17$$

المتتالية الحسابية:

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي قاعدة إنشائها هي: إضافة (طرح) عدد معين للحد السابق، للحصول على الحد التالي. نسمي هذا العدد الثابت بأساس المتتالية ونرمز له بـ d.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

وهكذا، ...

كيف نوجد أساس المتتالية الحسابية؟

أساس المتتالية الحسابية يكون:

$$d = a_2 - a_1$$

أو $d = a_3 - a_2$ وهكذا ، ...

بصورة عامة فإن الأساس هو:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

<u>مثال:</u> اختر الإجابة الصحيحة

١. أساس المتتالية : $1, 3, 5, 7, \dots$ هو

(e) 3	(f) ٢	(g) ٤	(h) ١

٢. أساس المتتالية : $8, 3, -2, -7, \dots$ هو

(a) 3	(b) ٥	(c) -5	(d) -3

٣. الحد المفقود في المتتالية : $4, \boxed{\ }, 10, 13, \dots$ هو

(a) 7	(b) 16	(c) 5	(d) -3

٤. متتالية حسابية حدها الأول ٥ وأساسها ٤ يكون حدها الثالث هو

(a) ٩	(b) ١	(c) 13	(d) 20

<u>الحد العام للمتتالية الحسابية:</u>

الحد a_n يسمى الحد العام أو الحد النوني وهو القاعدة المتبعة في تكوين المتتالية، لنوجد صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية:

عرفنا أن:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

...

بالتلي فإن الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

تمكنا هذه الصيغة من إيجاد الحد الذي نريد.

مثلا لنوجد الحد السابع للمتتالية $1, 3, 5, 7, \dots$

في هذه المتتالية: $d = 2$ و $a_1 = 1$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = 1 + 6(2) = 1 + 12 = 13$$

<u>مثال:</u> اختر الإجابة الصحيحة

الحد الحادي عشر في المتتالية : $3, 6, 9, 12, \dots$ هو

(a) ٣3	(b) ٢٣	(c) ٢١	(d) ٣٠

مجموع المتتالية الحسابية

ما هو مجموع الأعداد من ١ إلى ٥؟

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

لاحظ للمتتالية:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

متتالية حسابية حدها الأول ١ وأساسها ١ وعدد حدودها ٥ (أي حدها الأخير ٥).

مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول a_1 وحدها الأخير L وعدد حدودها n يساوي

$$\frac{n(a_1 + L)}{2}$$

مجموع المتتالية:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

هو

$$\frac{n(a_1 + L)}{2} = \frac{5(1 + 5)}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مجموع حدود المتتالية : $1, 3, 5, 7, 9, 11$ هو

(a) ٧٢	(b) ٢٣	(c) ٣٠	(d) ٣٦

لاحظ: لحساب مجموع متتالية نحتاج لمعرفة قيمة الحد الأخير، فمثلا لحساب مجموع العشرة حدود الأولى من المتتالية:

$$1, 5, 8, \dots$$

نحتاج أولا لإيجاد الحد العاشر:

$$a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 9(3) = 28$$

الآن أصبح لدينا الحد الأخير (العاشر) وهو ٢٨ ولدينا الحد الأول وهو ١ نستطيع حساب المجموع:

$$\frac{n(a_1 + L)}{2} = \frac{10(1 + 28)}{2} = 5(29) = 145$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مجموع العشرة حدود الأولى من المتتالية : $2, 4, 6, \dots$ هو

(a) ٩٠	(b) ١٠٠	(c) ١١٠	(d) ١٢٠

الدرس الثاني

المتتالية الهندسية:

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي قاعدة إنشائها هي: ضرب الحد السابق بعدد معين،للحصول على الحد التالي. نسمي هذا العدد المعين بأساس المتتالية ونرمز له بـ r.

$a_2 = a_1(r)$

$a_3 = a_2(r)$

وهكذا، أساس المتتالية الحسابية يكون:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

أو

$$r = \frac{a_3}{a_2}$$

بصورة عامة:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

١. أساس المتتالية : $1, 3, 9, 27, \ldots$ هو

(a) 3	(b) ٩	(c) ١٢	(d) ٢

٢. أساس المتتالية : $2, 10, 50, 250, \ldots$ هو

(a) ٢	(b) ٥	(c) 10	(d) 20

٣. الحد المفقود في المتتالية : $4, 8, \boxed{}, 32, \ldots$ هو

(a) ١٢	(b) 16	(c) 20	(d) 14

٤. متتالية هندسية حدها الأول ١ وأساسها ٤ يكون حدها الثالث هو

(a) ٨	(b) ١٦	(c) 5	(d) 6

الحد العام للمتتالية الهندسية:

لنوجد صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية.

عرفنا أن:

$a_2 = a_1(r)$

$a_3 = a_2(r) = a_1(r)(r) = a_1(r^2)$

$a_4 = a_3(r) = a_1(r^2)(r) = a_1(r^3)$

...

بالتالي فإن الحد العام هو:

$a_n = a_1(r^{n-1})$

وهذه الصيغة تمكنا من إيجاد الحد الذي نريد.

مثلا لنوجد الحد السادس للمتتالية :

$$3, 6, 12, \ldots$$

الحد السادس هو:

$$a_6 = a_1(r^5)$$

في هذه المتتالية: $r = 2$ و $a_1 = 3$ ، بالتعويض نجد:

$$a_6 = 3(2^{6-1}) = 3(2^5) = 3(32) = 96$$

بالتالي الحد السادس يساوي 96.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

الحد الخامس في المتتالية : $1, 3, 9, \ldots$ هو

(a) 3^5	(b) 2^5	(c) 2^4	(d) 3^4

الباب الخامس

ضرب وتحليل المقادير الجبرية

الدرس الأول

ضرب المقادير الجبرية

عرفنا أن $x^n . x^m = x^{n+m}$ لنوجد حاصل الضرب $x(x+3)$ ، يمكن توزيع الضرب على الجمع كما يلي:

$$x(x+5) = x.x + 3x = x^2 + 3x$$

بالمثل :

$$(x+3)(x+4) = x(x+4) + 3(x+4)$$
$$= x^2 + 4x + 3x + 12$$
$$= x^2 + 7x + 12$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مفكوك المقدار : $x^3(x+y)$ يعطي

(d) $x^3 + y$	(c) $x^3 + x^3y^3$	(b) $x^4 + x^3y$	(a) $x^3 + x^3y$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مفكوك المقدار : $(x+2)(x-1)$ يعطي

(a) $x^2 + 2x - 1$

(b) $x^2 + x - 2$

(c) $x^2 + x - 1$

(d) $2x - 2$

الدرس الثاني

قابلية القسمة على الأعداد الأولية

نعلم أن $5 \times 3 = 15$ نقول ان العددين 3 و 5 عوامل العدد 15 حيث ان العدد 15 يقبل القسمة على العدد 3 وعلى العدد 5 .

العدد 2 عامل من عوامل العدد ١٦ ،حيث أن العدد ١٦ يقبل القسمة على ٢ .

العدد الأولي

العدد الأولي هو العدد الذي لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد.

مجموعة الأعداد الأولية $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

قابلية القسمة على ٢

يقبل العدد القسمة على ٢ إذا كان زوجي.
العدد ١٦ يقبل القسمة على ٢
العدد ٢٠ يقبل القسمة على ٢
العدد ١٥ لا يقبل القسمة على ٢

قابلية القسمة على ٣

يقبل العدد القسمة على ٣ إذا كان العدد المكون من مجموع ارقامه يقبل القسمة على ٣
العدد ٢١ يقبل القسمة على ٣ (مجموع أرقام العدد $2 + 1 = 3$)
العدد ٨٤ يقبل القسمة على ٣ (مجموع أرقام العدد $8 + 4 = 12$ ، العدد ١٢ يقبل القسمة على ٣)
العدد ٢٥ لا يقبل القسمة على ٣ (مجموع أرقام العدد $2 + 5 = 7$ ، العدد ٧ لا يقبل القسمة على ٣)

قابلية القسمة على ٥

يقبل العدد القسمة على ٥ إذا كان رقم احاده ٥ أو صفر.

العدد ٤٥ يقبل القسمة على ٥ (رقم أحاده ٥)

العدد ٦٠ يقبل القسمة على ٥ (رقم أحاده ٥)

العدد ٧٢ لا يقبل القسمة على ٥ (رقم أحاده ٢)

قابلية القسمة على ٧

كيف نعرف إن العدد يقبل القسمة على ٧ ؟
لنختبر قابلية قسمة العدد ٢٤٥ على ٧ ،

- **نأخذ رقم أحاد العدد ونضعفه $2(5) = 10$**
- **ونطرح الناتج (١٠) من باقي العدد (العدد بدون رقم أحاده)**

$$24 - 10 = 14$$

إذا كان الناتج صفر أو يقبل القسمة على ٧ فبالتالي العدد الأساسي يقبل القسمة على ٧.

الناتج العدد ١٤ وهو يقبل القسمة على ٧ بالتالي العدد ٢٤٥ يقبل القسمة على ٧.

قابلية القسمة على ١١

كيف نعرف ان العدد يقبل العدد القسمة على ١١ ؟
لنختبر قابلية قسمة العدد ٨٤٧ عل ١١

- **نضع بين أرقام العدد الإشارات (−) و(+) بالتناوب ابتداء من (−) ونحسب الناتج**

$$8 - 4 + 7 = 11$$

إذا كان الناتج صفر أو يقبل القسمة على ١١ فإن العدد الأساسي يقبل القسمة على ١١

العدد ٨٤٧ يقبل القسمة على ١١

تحليل العدد إلى عوامله الأولية

بكتابة العدد 15 في الصورة 5×3 نكون قد حللنا العدد ١٥ إلى عوامله الأولية (العددان 3 و 5).

مثال

حلل العدد ٧٢ الى عوامله الأولية

الحل

نبحث قابلية العدد ٧٢ القسمة على ٢ إذا لم يقبل نبحث قابلية قسمته على ٣ وإذا لم يقبل نبحث قابلية قسمته على ٥ وهكذا ...

٢	٧٢
٢	٣٦
٢	١٨
٣	٩
٣	٣
	١

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

مثال

حلل العدد ٥٦ الى عوامله الأولية

الحل

٢	٥٦
٢	٢٨
٢	١٤
٧	٧
	١

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$$

$$72 = 2^3 \times 7$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

العوامل الأولية للعدد 56 هي

(a) 4 و 14	(b) 5 و 7	(c) 2^3 و 7	(d) 2 و 28

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

من بين الأعداد أدناه، العدد الذي يقبل القسمة على ٢ و ٣ هو

(a) 48	(b) 46	(c) 51	(d) 70

الدرس الثالث

القاسم المشترك الأكبر

ما هو القاسم (العامل) المشترك الأكبر للعددين ١٨ و ١٢ ؟ ماهو أكبر عدد يقسم كل من العددين ١٨ و ١٢ ؟

عوامل العدد ١٨ هي: ١، ٢، ٣، ٦، ٩، ١٨

عوامل العدد ١٢ هي: ١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢

نلاحظ ان أكبر قاسم مشترك لهما هو ٦

لنضع طريقة أخرى لنوجد بها القاسم المشترك الأكبر لعددين،

- **نحلل العددين الى عواملهما الأولية**

١٨	٢
٩	٣
٣	٣
١	

بالتالي $18 = 2 \times 3 \times 3$ **أي أن** $18 = 2 \times 3^2$

١٢	٢
٦	٢
٣	٣
١	

بالتالي $12 = 2 \times 2 \times 3$ **أي أن** $12 = 2^2 \times 3$

- **يكون القاسم المشترك الأكبر هو حاصل ضرب العوامل المشتركة (ذات الأس الأصغر).**

نأخذ العوامل المشتركة بين العددين ذات الأس الأصغر: ٢ و ٣

بالتالي القاسم المشترك الأصغر هو

$$2 \times 3 = 6$$

مثال

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين ١٢ و ٦٦

الحل

٦٦	٢
٣٣	٣
١١	١١
١	

$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

القاسم المشترك الأكبر هو

$$2 \times 3 = 6$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

القاسم المشترك الأكبر للعددين ٢٠ و ٢٤ هو

(a) 8	(b) 5	(c) 4	(d) 10

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

القاسم المشترك الأكبر للعددين ٣٢ و ٦٤ هو

(a) 16	(b) 64	(c) 8	(d) 32

المضاعف المشترك الأصغر

ما هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ١٢ و ١٨ ؟
مضاعفات العدد ١٢ هي: ١٢، ٢٤، ٣٦، ٤٨ ، ...
مضاعفات العدد ١٨ هي: ١٨، ٣٦، ٥٤، ٧٢، ...
نلاحظ أن أصغر مضاعف مشترك هو ٣٦
لنضع طريقة أخرى لنوجد بها المضاعف المشترك الأصغر لعددين،

- **نحلل العددين الى عواملهما الأولية**

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

- **يكون المضاعف المشترك الأصغر هو حاصل ضرب العوامل المشتركة (ذات الأس الأكبر) والعوامل غير المشتركة.**

العوامل المشتركة ذات الأس الأكبر 3^2 و 2^2

بالتالي المضاعف المشترك الأصغر هو $3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$

مثال

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٢١ و١٤

الحل

٣	٢١
٧	٧
	١

$$21 = 3 \times 7$$

٢	١٤
٧	٧
	١

$$14 = 2 \times 7$$

نأخذ كل عوامل العددين، والتي تكون مشتركة نأخذ منها ذات الأس الأكبر.

بالتالي المضاعف المشترك الأصغر هو

$$3 \times 7 \times 2 = 42$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المضاعف المشترك الأصغر للعددين ١٢ و ٨ هو

(a) 8	(b) 12	(c) 48	(d) 24

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٣٢ و ٦٤ هو

(a) 16	(b) 64	(c) 8	(d) 32

الدرس الرابع

طرق التحليل

نعني بتحليل المقدار وضعه في صورة عوامل مضروبة في بعضها. هنالك عدد من الطرق لتحليل المقادير الجبرية منها:

١) التحليل باستخراج العامل المشترك:

نريد تحليل المقدار $2x+4$ ، لاحظ أن هذا المقدار يتكون من مجموع الحدين $2x$ و 4 ، هناك عامل مشترك بين هذين الحدين هو العدد ٢ فالحد الأول $2x$ يساوي ٢ ضرب x والحد الثاني 4 يساوي ٢ ضرب ٢ ، لذلك نكتب:

$$2x+4=2(x+2)$$

مثال:

حلل المقدار $4ab+8ac$

الحل:

لاحظ العامل المشترك هو $4a$

$$4ab+8ac=4a(b+2c)$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار x^2-6x يساوي

(a) $x(x+6)$	(b) $x(x-6)$	(c) $x(1-6x)$	(d) $x^2(x-6)$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

تحليل المقدار $12+4x$ يعطي

(a) $12(x+3)$	(b) $3(4+x)$	(c) $12(x+4)$	(d) $4(3+x)$

٢) تحليل فرق مربعين:

لنقم بضرب المقدار $(x-y)$ في المقدار $(x+y)$

$$(x-y)(x+y)=x^2+xy-xy-y^2$$
$$=x^2-y^2$$

لاحظ الناتج عبارة عن x^2 (مربع) فرق y^2 (مربع) ، أي فرق مربعين.

نسمي المقدار x^2-y^2 فرق مربعين ويحلل كالتالي:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

مثلاً:

$$x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$$

$$x^2-25=x^2-5^2=(x-5)(x+5)$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

تحليل المقدار : x^2-1 يعطي

(a) x^2-1

(b) x^2+1

(c) x^2+x-1

(d) $x(x-1)$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

تحليل المقدار : a^2-b^2 يعطي

(a) a^2-b

(b) a^2-b^2

(c) $a-b^2$

(d) a^2+b^2

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مفكوك المقدار : $(x+2)(x-2)$ يعطي

(a) x^2+2x-4

(b) x^2-4

(c) x^2-2

(d) $2x-2$

٣) تحليل فرق ومجموع مكعبين:

لنقم بضرب المقدار $(x+y)$ في المقدار (x^2-xy+y^2)

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3$$
$$=x^3-y^3$$

نسمي المقدار x^3+y^3 مجموع مكعبين ويحلل كالتالي:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

أما المقدار x^3-y^3 فهو فرق مكعبين ويحلل كالتالي:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

مثلاً:

$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$$

لاحظ:

العدد	١	٢	٣	٤	٥
مربعه	١	٤	٩	١٦	٢٥
مكعبه	١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

تحليل المقدار : $x^3 - 8$ يعطي

(a) $(x-2)(x^2-2x+4)$

(b) $(x-2)(x^2+2x+4)$

(c) $(x-4)(x+4)$

(d) $(x+2)(x^2-2x+4)$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

تحليل المقدار : $1 - x^3$ يعطي

(a) $(1-x)(1+2x+x^2)$

(b) $(1-x)(1+x+x^2)$

(c) $(1-x)(1+x)$

(d) $(1-x)(1-x+x^2)$

الباب السادس

المعادلات والمتباينات

الدرس الأول

المعادلات الجبرية في متغير واحد

المعادلة

هي جملة رياضية توضح مقدارين متساويين، المعادلة تحوي علامة المساواة "=".

مثلاً:

$$x + 2 = 5$$

هذه معادلة تحوي المتغير x ، عندما نستبدل المتغير x بالقيمة التي يكون عندها طرفي المعادلة متساويين نكون أوجدنا حل المعادلة.
$x = 3$ هو حل المعادلة $x + 2 = 5$.
هذه المعادلة من الدرجة الأولى، حيث أن أكبر قوة للمتغير x هي ١

لاحظ:

الدرجة	المعادلة
الدرجة الأولى	$x + 2 = 5$
الدرجة الثانية	$x^2 + 2x + 1 = 0$
الدرجة الثالثة	$5x^3 + 4x^2 - x = 3$
الدرجة الرابعة	$x^4 - x^2 = 0$

حل معادلة الدرجة الأولى

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى في متغير واحد هي:

$$a_1 x + a_0 = 0$$

حيث a_1, a_0 أعداد حقيقية و $a_1 \neq 0$.

لنحل المعادلة :

$$x + 2 = 5$$

نريد إيجاد قيمة x التي تجعل الطرفين متساويين

من خواص المعادلة أنه يمكن إضافة مقدار للطرف الأيمن وإضافة نفس المقدار للطرف الأيسر وتظل المعادلة كما هي أي لا تتغير المعادلة. كذلك عند الطرح، الضرب والقسمة. أي عندما نجري عملية معينة على الطرفين لا تتغير المعادلة.

لنطرح ٢ من كل طرف

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x = 3$$

بالتالي فإن حل المعادلة هو $x = 3$ نسمي الحل أيضا جذرا للمعادلة.

<u>مثال</u>

حل المعادلة:

$$\frac{5x - 2}{3} = x$$

<u>الحل</u>

لنضرب طرفي المعادلة في ٣

$$3\left(\frac{5x - 2}{3}\right) = 3x$$

بفك الأقواس

$$5x - 2 = 3x$$

بطرح $3x$ من كل طرف

$$5x - 3x - 2 = 3x - 3x$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

بالتالي فإن حل المعادلة هو $x = 2$

<u>مثال:</u> اختر الإجابة الصحيحة

حل المعادلة: $5x - 3(x + 2) = 2$ هو

(a) $x = 2$	(b) $x = 4$	(c) $x = 1$	(d) $x = 0$

الدرس الثاني

<u>حل معادلة الدرجة الثانية</u>

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد هي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

نسمي a معامل x^2 ونسمي b معامل x ونسمي c الحد المطلق (أو الحد الخالي من x).

هناك عدد من الطرق لحل هذه المعادلة منها ، لنأخذ طريقة التحليل.

حل معادلة الدرجة الثانية بالتحليل:

يمكن تحليل مقدار الدرجة الثانية إلى عاملين من الدرجة الأولى، حيث أنه عند ضرب عاملين من الدرجة الأولى نحصل على مقدار من الدرجة الثانية، مثلا

العاملان $(x-2)$ و $(x+3)$ عند ضربهما ببعض:

$$(x-2)(x+3) = x^2 + 3x - 2x - 6$$
$$= x^2 + x - 6$$

نحصل على معادلة الدرجة الثانية:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

بالتالي فبالتحليل تصبح هذه المعادلة :

$$(x-2)(x+3) = 0$$

عندئذ لنساوي كل من المقدارين $(x-2)$ و $(x+3)$ بالصفر

$$x - 2 = 0 \ \rightarrow x = 2$$
$$x + 3 = 0 \ \rightarrow x = -3$$

بالتالي فإن حل المعادلة $x^2 + x - 6 = 0$ هو $x = 2$ و $x = -3$ أي أن الجذران هما $x = 2$ و $x = -3$.

لاحظ:

عند ضرب الجذرين 2 , -3 نتحصل على -6 (أي الحد المطلق في المعادلة)

وعند جمع الجذرين نتحصل على -1 (أي سالب معامل x في المعادلة)

حاصل ضرب الجذرين يساوي الحد المطلق
حاصل جمع الجذرين يساوي سالب معامل x

مثال

أوجد جذري المعادلة:

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

الحل

نبحث عن عددين (الجذرين) حاصل ضربهما يساوي 6 وحاصل جمعهما يساوي 7

الجذران هما $x = 6$ و $x = 1$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

جذرا المعادلة: $x^2 - 4x + 3 = 0$ هما

(a) $x = -1$ و $x = 3$

(b) $x = -1$ و $x = -3$

(c) $x = 1$ و $x = -3$

(d) $x = 1$ و $x = 3$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

جذرا المعادلة: $x^2+6x+5=0$ **هما**

(a) $x=-1$ و $x=5$

(b) $x=-1$ و $x=-5$

(c) $x=1$ و $x=5$

(d) $x=1$ و $x=-5$

حالات خاصة

١. **لنحل المعادلة** $ax^2+bx+c=0$ **في حالة** $c=0$

مثلا لنحل المعادلة $x^2+3x=0$ **يمكن التحليل باستخراج العامل المشترك**

$$x^2+3x=0$$

$$x(x+3)=0$$

بالتالي الحل هو $x=0$, $x=-3$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

جذرا المعادلة: $x^2-4x=0$ **هما**

(a) $x=1$ و $x=3$

(b) $x=0$ و $x=-4$

(c) $x=0$ و $x=4$

(d) $x=2$ و $x=4$

٢) **لنحل المعادلة** $ax^2+bx+c=0$ **في حالة** $b=0$

مثلا لنحل المعادلة $x^2-9=0$ **لاحظ لدينا فرق مربعين**

$$x^2-9=0$$

$$(x-3)(x+3)=0$$

بالتالي الحل هو $x=3$, $x=-3$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

جذرا المعادلة: $x^2-4=0$ **هما**

(a) $x=1$ و $x=2$

(b) $x=2$ و $x=-2$

(c) $x=4$ و $x=-4$

(d) $x=1$ و $x=-2$

الدرس الثالث

حل المعادلات الآنية

لنأخذ المعادلتين:

$$x + y = 5$$

$$x - y = 3$$

لدينا معادلتين من الدرجة الأولى في مجهولين هما x و y ، نريد إيجاد قيمتي x و y اللتان تحققان المعادلتين معا، نسمى هذا الحل بالحل الآني للمعادلتين.

هنالك عدد من الطرق لحل المعادلتين آنيا، لنأخذ طريقة الحذف:

- **نسعي لحذف أحد المجهولين فتصبح لدينا معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد يمكن حلها، فإذا حذفنا x يكون لدينا معادلة في مجهول واحد هو y يمكن إيجاد y**
- **ثم نعوض قيمة y في أي من المعادلتين فيكون لدينا معادلة في x يمكن عندها إيجاد x .**

لنوجد الحل الآني للمعادلتين:

$$x + y = 5$$

$$x - y = 3$$

لنحذف أحد المجهولين ليكن y ، لاحظ معامل y في المعادلة الأولى يساوي ١ وفي المعادلة الثانية يساوي -1 عندها إذا قمنا بجمعهما نتحصل على الصفر أي نكون قد حذفنا y .

لنجمع المعادلتين معا

$$x + y = 5$$

$$x - y = 3$$

$$2x = 8$$

بالتالي فإن $x = 4$

لنعوض قيمة x في المعادلة الأولى (أو الثانية)

$$4 + y = 5$$

بالتالي فإن $y = 1$

عندئذ يكون الحل هو $x = 4$ و $y = 1$.

مثال

حل المعادلتين الأتيتين آنيا

$$x + 3y = 5$$

$$x + y = 3$$

الحل

يمكن حذف x بطرح المعادلتين

$$x + 3y = 5$$

$$x + y = 3$$

$$2y = 2$$

بالتالي فإن $y = 1$ لنعوض قيمة y في المعادلة الأولى

$$x + 3y = 5$$

$$x + 3 = 5$$

بالتالي فإن $x = 2$

عندئذ يكون الحل هو $x = 2$ و $y = 1$.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

الحل الآني للمعادلتين:

$$2x + 3y = 5$$

$$x + 3y = 4$$

هو:

(a) $x = 1$ و $y = 1$

(b) $x = 2$ و $y = -2$

(c) $x = -1$ و $y = 1$

(d) $x = 1$ و $y = -1$

الدرس الرابع

المتباينات (المتراجحات)

المعادلة تحوي علامة المساواة "=" ، أما المتباينة فتحوي أحد الرموز $\geq, \leq, >, <$

الرمز	الدلالة
$<$	أصغر من ، مثلا $3 < 5$
$>$	أكبر من ، مثلا $8 > 4$
$\leq$	أصغر من أو يساوي ، مثلا $7 \leq 10$
$\geq$	أكبر من أو يساوي ، مثلا $12 \geq 12$

أمثلة لمتباينات:

$$x + 1 > 7$$

$$x^2 - 2x \leq -1$$

$$x \geq 12$$

تحل المتباينة بإيجاد قيم المجهول التي تجعل المتباينة صحيحة.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

إذا كان x عددا طبيعيا فإن حل المعتباينة : $x + 2 < 9$ هو

(a) $\{8, 9, 10, \ldots\}$

(b) $\{7\}$

(c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

حل المتباينة $x + 2(x-1) \geq 4$ **هو**

(a) $x \geq 2$

(b) $x > 2$

(c) $x < 2$

(d) $x \leq 2$

بحمد الله