بكالوجيا
Bacalogia

النسخة الأصلية
2023-2024

الرياضيات

لطلاب الثالث الثانوي العلمي

شرح بحث المتتاليات

تتضمن النوطة

- شرح جميع افكار بحث المتتاليات بطريقة سلسة
- تبسيط وتوضيح طرق الحل واضافة امثلة لكل فقرة
- التنويه على اهم النكشات الامتحانية

2023
2024

Bacalogia

شرح بحث المتتاليات

الوحدة الاولى

5

ماهي المتتالية؟

هو تابع منطلقه N (مجموعة الأعداد الطبيعية)

ومستقره R (مجموعة الأعداد الحقيقية)

نرمز للمتتالية بالشكل: $(U_n)_{n\geq عدد}$ حيث:

عدد: دليل البدء n: الدليل (U_n): الحد العام

طرق تعريف المتتالية:

1) **صيغة تتبع العدد n (أي يعطى الحد العام)**

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq عدد}$ المعرفة وفق:

$$U_n = n^2 + 2$$
$$U_0 = 0^2 + 2 = 2$$
$$U_1 = 1^2 + 2 = 3$$

2) **صيغة تابع $U_n = f(n)$**

مثال: لتكن المتتالية $u_n = \sqrt{n+1}$ وليكن التابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية:

$$U_0 = f(0) = \sqrt{0+1} = 1$$
$$U_1 = f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$U_2 = f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

3) **صيغة التدريجية: "يعطى حد البدء + علاقة U_{n+1} بدلالة U_n"**

مثال: لتكن المتتالية: $U_0 = 5$

$$U_{n+1} = U_n + 2$$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى:

$$U_0 = 5$$
$$U_1 = U_0 + 2 = 5 + 2 = 7$$
$$U_2 = U_1 + 2 = 7 + 2 = 9$$

جهة اطراد متتالية:

أي معرفة هل المتتالية (متزايدة ام متناقصة)(تماماً)

1) المتتالية المتزايدة تماماً: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **ازدادت** قيمة الحد

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} > U_n$

2) المتتالية المتزايدة: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **ازدادت** قيمة الحد او **بقي قيمة الحد**

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} \geq U_n$

3) المتتالية المتناقصة تماماً: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **نقصت** قيم الحد

أي تحقق: $U_{n+1} < U_n$

4) المتتالية المتناقصة: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **نقصت** قيمة الحد أو **بقيت** كما هي

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} \leq U_n$

5) المتتالية الثابتة $U_{n+1} = U_n$

أنواع المتتاليات:

المتتالية الحسابية:

نقول عن متتالية أنها حسابية اذا نتج كل حد عن سابقه **بإضافة** عدد ثابت يسمى أساس المتتالية (r)

أي تحقق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = U_n + r$$

لاثبات ان المتتالية حسابية:

$$U_{n+1} - U_n = r$$

قواعد المتتالية الحسابية:

اذا كان (p ,m) دليلين ل U فان:

$$U_m - U_p = (m-p)r$$

فائدة القانون السابق:

يفيد في معرفة الأساس وذلك اذا كان لدينا حدين معلومين أو في معرفة حد من أحد الحدود المطلوبة

مثال:

اوجد الحد ذي الدليل 20 لمتتالية الحسابية $(U_n)_{n\geq0}$ اذا علمت ان $U_2 = 4$ واساسها $r = 2$

الحل:

$$U_m - U_p = (m-p)r$$
$$U_{20} - U_2 = (20-2)2$$
$$U_{20} = 4 + 36 = 40$$

قانون مجموع المتتالية الحسابية:

$$S = \frac{(\text{حدالأول} + \text{حد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

المتتالية الهندسية:

نقول عن متتالية انها هندسية اذا نتج كل حد عن سابقه بضربه بعدد ثابت (q) يسمى أساس المتتالية

أي تحقق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = U_n . q$$

لاثبات ان المتتالية هندسية:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

قواعد المتتالية الهندسية:

اذا كان (p ,m) دليلين ل Uفان:

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

فائدة القانون السابق:

يفيد في معرفة الأساس وذلك اذا كان لدينا حدين معلومين أو في معرفة حد من أحد الحدود المطلوبة

مثال:

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و$U_1 = 3$ اوجد الحد ذي الدليل 8

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$
$$\frac{U_8}{U_1} = 2^{(8-1)} \Rightarrow U_8 = 3 \times 2^7 = 384$$

قانون مجموع المتتالية الهندسية:

$$S = \text{الحد الأول} \times \frac{1-(\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}}$$

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

ملاحظة هامة: لمعرفة عدد الحدود نميز عدة حالات منها:

1. اذا كانت الأدلة متعاقبة فان عدد الحدود يعطى كما يلي:

عدد الحدود = الدليل الأخير – الدليل الأول + 1

2. اذا كانت الأدلة زوجية بدءا من العدد 2 فان عدد الحدود يعطى كما يلي: $\text{عدد الحدود} = \frac{\text{الدليل الأخير}}{2}$

المتتاليات

- جهة اطراد متتالية
- المتتالية الحسابية
- المتتالية الهندسية
- الاثبات بالتدريج

جهة اطراد متتالية
متزايد تماماً: $U_{n+1} > U_n$
متناقص تماماً: $U_{n+1} < U_n$
ثابتة: $U_{n+1} = U_n$

المتتالية الحسابية
$U_{n+1} = U_n + r \quad , \quad U_m - U_p = (m-p)r$
المجموع: $S = \frac{n(a+l)}{2}$
اذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية كان:
$b = \frac{a+c}{2}$

المتتالية الهندسية

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q \quad , \quad \frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

المجموع: $S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$

اذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية كان:

$$b^2 = a.c$$

الاثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي):

نطبق الخطوات التالية:

1) نبرهن صحة العلاقة من أجل اصغر عدد طبيعي في المجموعة المعطاة :

2) نفرض صحة العلاقة من أجل أي عدد طبيعي n

3) نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$ يعني بحط محل كل n بالتمرين $n+1$

وهون عنا اربع حالات لطرح السؤال عن الاثبات بالتدريج :

اولاً: حالة المتتالية :

1)بنطلق من الفرض $E(n)$

2)بعمل عمليات حسابية عالفرض (الطرف الموجود فيه u_n

لوصل لشكل المتتالية المطلوب ولحولها ل u_{n+1}

ثانياً (معادلة او متراجحة)بس يكون بالسؤال مجموع

1)بنطلق من الفرض$E(n)$

2)بضيف مقدار للطرفين وبعمل عمليات حسابية عليها متل الضب او الإضافة وبستفاد من انو فيني حذف المقدار السالب من طرف المتراجحة الكبير او حذف مقدار موجب من طرف المتراجحة الصغير لحتى اصل لعلاقة $E(n+1)$

ثالثاً:مقدار مضاعف لعدد:

1)هون بنطلق من $E(n+1)$

وبحاول لاقي من احد الأطراف طريقة لعوض العلاقة $E(n)$

وهي عالاغلب بتكون مجموعين او اكتر واحد منن بكون هو الخاصة $E(n)$ والباقي بكون المضاعف للعدد المفروض بإخراج العدد عامل مشترك منكون وصلنا ل $E(n+1)$

رابعاً: بالاستفادة من اطراد تابع f المعرف وفق $u_{n+1} = f(u_n)$

1)اول شي بعرف $(u_n)_{n\geq n_0}$ بالعلاقة التدريجية وعلى اساسها بعرف التابع $f(x)$ وباثبت انو مطرد تماماً على المجال المدروسة فيه المتتالية وهون بميز حالتين:

اول حالة التابع متزايد تماماً:هون بستخدم تصوير الأطراف والمتراجحة بتضل متل مهية.

تاني حالة التابع متناقص تماماً: هون بستخدم تصوير الأطراف كمان بس بغير بجهة المتراجحة

وعلماً انو $u_{n+1} = f(u_n)$ وبالاستفادة من انو يمكن حذف مقدار سالب من طرف المتراجحة الكبير وحذف مقدار موجب من طرف المتراجحة الصغير بكون وصلنا ل $E(n+1)$

- **وبمجمل الحالات الأربعة** هالحالات هية الي بتجي عن الاثبات بالتدريج كسؤال بالإضافة انو ممكن تصادفك تمارين مارح تقدر تحلها الا اذا كان عندك خبرة **وحالل** كتير تمارين عن البرهان بالتدريج (**يعني هالحالات مانها قانون ثابت لنمشي عليه بكل الأوقات**)

مثال: أثبت أنه من اجل العدد الطبيعي الموجب تماماً N فان :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل: نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 1$

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1 = 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad *$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

في كل الملفات نطلق من * لكن في هذا التمرين سننطلق من الطرف الأول وصولاً للطرف الثاني:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$l_1 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n^3) + (n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$(n+1)^2.\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right]$$

$$(n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$

تخمين متتالية:

- فكرة :

1) حساب حدود + تخمين عبارة u_n بدلالة n او اقترح صيغة

2) اثبت أو عبر أو حدد أو أوجد u_n بدلالة n

- قانون التخمين: $u_n = (u_0 - L).a^n + L$

منطلق l من القانون الاتي $L = \frac{b}{1-a}$ والمتتالية

الهندسية المتخفية أساسها q هي: $w_n = u_n - L$

كيفية طرح السؤال بالامتحان النهائي وكيفية حل التمرين:

- السؤال:

1) احسب الحدود وخمن عبارة u_n بدلالة n او اقترح صيغة

2) اثبت او عبر او حدد او اوجد u_n بدلالة n

المتتالية هي:

$$\begin{cases} u_n = \text{رقم} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

- طريقة الحل:

1) نعوض الرقم بدل كل n :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
$a^n = (\ )^n$						

1. ونكمل بإحدى الطريقتين:

(1)

نستنتج من الجدول مباشرة

من السطرين الثاني والثالث

$u_n + (\ )^n = \text{عدد}$

$u_n = \text{عدد} - (\ )^n$

(2)

$L = \frac{b}{1-a}$

$u_n = (u_0 - L).a^n + L$

نعوض قيم L, a, u_0 فنجد

انه نتج $u_n = \cdots$

2. نحل التمرين بطريقتين:

الطريقة الأولى: نثبت صحة التخمين عن طريق الاثبات بالتدريج

الطريقة الثانية: $w_n = u_n - L$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = q$$

$$\frac{w_n}{w_0} = q^n \Longrightarrow u_n = w_n + L$$

التمرين الثاني صفحة 22:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$ في حالة أي عدد طبيعي n

1) احسب $u_1 \longrightarrow u_5$ ثم خمن عبارة u_n بدلالة n

2) بحساب عبارة $u_n - 3$ عند كل $n \geq 0$ عبر عن u_n بدلالة n

الحل:

1. نوجد الحدود :

$$n = 0 \Longrightarrow u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$$
$$n = 1 \Longrightarrow u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$
$$n = 2 \Longrightarrow u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$
$$n = 3 \Longrightarrow u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$
$$n = 4 \Longrightarrow u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1	-1	-5	-13	-29
$2^n = (2)^n$	1	2	4	8	16	32

ونكمل بإحدى الطريقتين:

(1)

نستنتج من الجدول مباشرة

من السطرين الثاني والثالث

$u_n + (2)^n = 3$

$u_n = -(2)^n + 3$

(2)

$$L = \frac{b}{1-a} = \frac{-3}{1-2} = 3$$

$u_n = (u_0 - L).a^n + L$

نعوض قيم L, a, u_0 فنجد

انه نتج $u_n = \cdots$

$$u_n = (2-3).2^n + 3$$
$$= -2^n + 3$$

2. طريقة أولى:

متتالية هندسية $w_n = u_n - L \Longrightarrow w_n = u_n - 3$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{2u_n - 3 - 3}{u_n - 3} = \frac{2u_n - 6}{u_n - 3} = \frac{2(u_n - 3)}{u_n - 3} = 2$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = 2$

نعوض بالقانون:

$$\frac{w_n}{w_0} = q^n \Longrightarrow w_n = (u_0 - 3)2^n = -2^n$$
$$u_n = w_n + 3 = -2^n + 3$$

طريقة ثانية: عن طريق الاثبات بالتدريج:

$$u_n = -2^n + 3$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$ ونعوض:

$u_0 = -2^0 + 3 = -1 + 3 = 2$ محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل n:

$$u_n = -2^n + 3$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$:

$$u_{n+1} = -2^{n+1} + 3$$

$$L_1 = u_{n+1} = 2u_n - 3 = 2(-2^n + 3) - 3$$
$$= -2^n.2 + 6 - 3 = -2^{n+1} + 3$$
$$= L_2$$

وهو المطلوب.

دراسة اطراد متتالية:

لدينا ثلاث طرق او معايير لدراسة الاطراد:

1) معيار القسمة: اذا كانت المتتالية ذات حدود موجبة تماماً فاننا نستخدم هذا المعيار فاننا نستخدم هذا المعيار حيث نحسب المقدار $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ونميز ما يلي: (ونقارن مع العدد واحد)

المتتالية المتزايدة تماماً: $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

المتتالية المتناقصة تماماً: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

مثال: لتكن المتتالية $(W_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $W_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ادرس اطراد هذه المتتالية:

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

والمتتالية متناقصة تماماً

2) معيار الطرح: (ليس لدينا قاعدة محددة لاستخدامه) ولكن يلزمنا خبرة لدراسة اشارة الناتج

المتتالية متزايدة تماماً: $U_{n+1} - U_n > 0$

المتتالية المتناقصة تماماً: $U_{n+1} - U_n < 0$

مثال: لتكن المتتالية المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق

$$U_n = \frac{2n-1}{n+4}$$

ادرس طراد هذه المتتالية:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+4} - \frac{2n-1}{n+4}$$
$$\Rightarrow \frac{(n+4)(2n+1) - (n+5)(2n-1)}{(n+4)(n+5)}$$
$$= \frac{2n^2 + n + 8n + 4 - (2n^2 - n + 10n - 3)}{(n+4)(n+5)}$$
$$= \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً

3) معيار الاشتقاق:

نكتب المتتالية بالشكل $U_n = f(x)$ ثم ندرس اطراد التابع كما يلي:

1- نوجد المشتق الأول $\acute{f}(x)$

2- نعدم المشتق الأول ان امكن

3- نرسم جدول الإشارة للمشتق الأول

اذا كان $\acute{f}(x)$ موجب فالتابع متزايد تماماً واذا كان $\acute{f}(x)$ سالب فالتابع متناقص تماماً

مثال:

$$U_n = \sqrt{3n+1}$$

نفرض $U_n = f(x)$

$$f(x) = \sqrt{3x+1} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$$

فالتابع متزايد تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً

دون ملاحظاتك

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

بهي السطور رح نختم معكن شرح بحث المتتاليات التابع لفريقنا بكالوجيا...حاولنا قدر الإمكان تكون هالنوطة عون إلكن بدراستكن من خلال وضع كامل أفكار الكتاب بالإضافة لامثلة مساعدة متمنالكن التوفيق من تيم الرياضيات بفريقنا بكالوجيا 💙

تركنالكن شوية سطور فاضية تحت لسببين الأول لتكتبوا ملاحظاتكن الهامة والثاني لتكتبوا فيها أي شي يضل ذكرى إلكن بختام هي النوطة ولاتنسو تشاركونا فيه على مواقع التواصل الاجتماعي (بكالوجيا)

إلى هنا نصل

لنهاية شرح بحث المتتاليات

ولايزال لدينا الكثير من الرياضيات الجميلة

بانتظاركم ^_^

تدرب صفحة 18

- أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ حيث $U_n=\frac{2^n}{3^{n+1}}$ متتالية هندسية؟

$$U_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{2\times 2^n}{3\times 3^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{2\times 2^n}{3\times 3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}}=\frac{2\times 2^n}{3\times 3^{n+1}}\times\frac{3^{n+1}}{2^n}=\frac{2}{3}$$

ومنه المتتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$.

2) الأسئلة الأتية تتعلق بمتتاليات هندسية او حسابية:

1) $(U_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية فيها $U_2=41$ و $U_5=-13$.
احسب ال U_{20} ؟

نوجد أساس المتتالية من القانون....

$$U_n-U_P=(n-p)r \Rightarrow$$
$$U_5-U_2=(5-2)r \Rightarrow -13-41=3r$$
$$\Rightarrow 3r=-54 \Rightarrow r=-18$$
$$U_{20}-U_2=(20-2)r$$
$$\Rightarrow U_{20}-41=18(-18)$$
$$\Rightarrow U_{20}=-324+41=-283$$

2) $(U_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية فيها $U_7=\frac{1}{1080}, U_{10}=\frac{25}{2197}$
احسب ال U_{30}

$$U_n=U_P\,q^{n-p} \Rightarrow U_{10}=U_7\,q^{10}-3 \Rightarrow$$

$$\frac{25}{2197}=\frac{1}{1080}q^3 \Rightarrow q^3=\frac{25}{2197}\times\frac{1080}{1}$$

$$q^3=\frac{5^3\times 2^3\times 3^3}{13^3} \Rightarrow q=\frac{30}{13}$$

$$U_{30}=\frac{1}{1080}\times\frac{30^{30-7}}{13}=\frac{1}{1080}\times\frac{30^{23}}{13}$$

3) $(Un)_{n\ge0}$ متتالية حسابية أساسها r= 3 وفيها $U_1=-2$
احسب ال Un بدلالة n واستنتج قيمة المجموع

$$S1=U_{30}+U_{31}+U_{32}$$
$$S2=U_1+U_2+\cdots+U_{20}$$

نوجد ال Un بدلالة n

$U_n-U_p=(n-p)\,r \Rightarrow U_n-U_1=(n-1)3$

$\Rightarrow U_n+2=3n-3 \Rightarrow U_n=3n-5$

نوجد المجموع الأول

$a=U_{30}=3\times30-5=85$ $\quad l=U_{32}=3\times32-5=91$

$n=20+1-1=20$

$S_1=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{3}{2}(85+91)=\frac{3}{2}(176)=\frac{528}{2}=264$

نوجد المجموع الثاني

$a=U_1=3-5=-2$ $\quad l=U_{20}=3\times20-5=55$

$n=20-1+1=20$

$S_2=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{20}{2}(-2+55)=10(53)=530$

4) $(Un)n\ge0$ متتالية هندسية فيها $U_1=-2$, $q=3$ احسب ال Un بدلالة n واستنتج المجموعين

$S_1=U_1+U_2+\dots\dots\dots+U_7$ $\quad S_2=U_2+U_4+U_6+\dots\dots\dots.+U_{2n}$

نوجد عباره Un بالقانون

$$\frac{Un}{Up}=q^{n-p}=-2(3)^{n-1}$$

حساب المجموع الأول

$$a=U_1=-2\ ,q=3\ ,n=7-1+1=7$$

$$S_1=a\frac{1-q^n}{1-q}=-2\frac{1-3^7}{1-3}=-2\frac{1-3^7}{-2}=1-3^7$$

نوجد المجموع الثاني وهو عباره عن متتالية قفزات

$a=U_2=-6$ $\quad q=9$ $\quad n=n$

$S_2=-6\frac{1-q^n}{1-9} = -6\frac{1-9^n}{-8} = \frac{3}{2}(1-9^n)$

5) $(Un)\geq 0$ متتالية حسابية أساسها r= -2 وفيها $U_0 = -3$ احسب المجموع $U_{25}+U_{62}+......+U_{125}$

$U_n - U_p = (n-p)r \Rightarrow U_n - U_0 = (n-0)(-2)$

$\Rightarrow U_n + 3 = -2n \Rightarrow U_n = -2n - 3$

حساب المجموع $a = U_{25} = -53$

$l = U_{125} = -235$

$n = 125 - 25 + 1 = 101$

$S=\frac{101}{2}(-53-253) = \frac{101}{2}(-306)$

6) $(Un)\geq 0$ متتالية هندسية أساسها $q=2\,, u_0=1$ احسب المجموع $u_3+u_4+\cdots+u_{10}$

$U_n = U_p(q^{n-p}) = U_0(q^{n-0}) = 2^n$

لحساب المجموع n = 10 – 3 +1 =8 q=2 $a=U_3=2^3=8$

$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = 8\frac{1-2^8}{1-2} = 8\frac{1-2^8}{-1} = -8(1-2^8)$

7) احسب المجموع $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\cdots+10$

المتتالية هي مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية

أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول $\frac{1}{2}$ وحدها الأخير 10

لإيجاد عدد الحدود $U_1=\frac{1}{2}$ و $U_n=10$

$U_n - U_1 = (n-1)r \Rightarrow 10-\frac{1}{2} = (n-1)\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 20-1 = n-1 \Rightarrow n=20$

$S=\frac{20}{2}\left(\frac{1}{2}+10\right) = 10\left(\frac{21}{2}\right)$

8) a و b و c حدود متتاليه هندسيه $a+b+c=36.75$

$a\times b\times c = 343$

حسب خاصه $b=\sqrt{ab}$ ومنه $b^2=ab$

abc =343⇒ b^2 b = 343 ⇒ b3 = 343 ⇒ b = 7

* a× 7 ×c =343 ⇒ ac = 343 ÷ 7 = 49.........

a+7+c =36.75 ⇒ a+c = 36.75 – 7 =29.75

⇒ a = 29.75 - c

نعوض في * ونجد $(29.75-c)(c) = 49$

ومنه $c^2-(29.75)c+49=0$

نحل المعادلة باستخدام الدلتا

⇐ $\Delta = b^2-4ac = (29.75^2) - 4(1)(49)$

نحسب $c_2\, c_1$ ونعوض

ثم نعوض ونحسب a

V_n متتالية معرفة وفق $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$ $v_0=1$

A. تحقق ان $v_n>0$ أيا كان العدد الطبيعي n؟

من خلال الاثبات بالتدريج

نبرهن ان $E(n)$ صحيحه من اجل n=0

$V_0 = 1>0 \Rightarrow E(0)$ صحيحه

نفرض ال$E(n)$ صحيحه من اجل $v_n>0$

نبرهن ان ال $E(n+1)$ صحيحه ⇐ $v_{n+1}>0$

نحول ال v_{n+1} الى شكل اخر عن طريق القسمة الاقليدية

فينتج لدينا: (عن طريق القسمة الاقليدية)

$$v_{n+1} = 1+\frac{-1}{v_{n+1}}$$

ننطلق من $E(n)$:

$$v_n>0$$

نضيف 1

$$v_{n+1}>1$$

نقلب

$$\frac{1}{v_{n+1}}<1$$

نضرب ب -1

$$\frac{-1}{v_{n+1}}>-1$$

نضيف 1

$$1+\frac{-1}{v_{n+1}}>0$$

B. اثبت ان المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n=\frac{1}{v_n}$ حسابية؟

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

ومنه المتتالية حسابية أساسها r = 1

وحدها الأول $u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$ ومنه $un = 1+n$

C. استنتج عباره الv_n بدلالة n

بما ان $u_n = 1 + n \Leftarrow v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1+n}$

ادرس جهة اطراد المتتالية؟

$u_n = \frac{3}{n^2}$ (1

$$u_{n+1} = \frac{3}{(n+1)^2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

$u_n = \sqrt{3n+1}$ (2

$$u_{n+1} = \sqrt{3n+4} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

$u_n = \frac{2n-1}{n+4}$ (3

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+8-2x+1}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2} > 0 \Rightarrow$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

$u_n = \frac{1}{n^2+1}$ (4

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} < 0 \Rightarrow$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

$u_n = \frac{3n+1}{n-2}$ (5

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

$u_n = \frac{n}{10^n}$ (6

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{10^{n+1}} - \frac{n}{10^n} = \frac{n+1-10^n}{10^{n+1}} = \frac{1-9n}{10^{n+1}} < 0$$

ومنه المتتالية متناقصة تماماً بدءا من الحد ذو الدليل n = 1

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n - 3$ (7

نلاحظ ان كل حد ينتج عن سابقه بإضافة العدد 3- فالمتتالية حسابية أساسها r=-3 وعندما يكون الأساس سالب تكون المتتالية متناقصة تماماً

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ (8

نلاحظ ان حدود المتتالية موجبة ومنه $\Leftarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1 \Leftarrow$ المتتالية متناقصة تماماً

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2u_n$ (9

نلاحظ ان حدود المتتالية موجبة تماما $\Leftarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$

$\Leftarrow$ فالمتتالية متزايدة تماما

تدرب صفحة 21

$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

احسب الحدود S_1 وS_2 وS_3 وS_4 وعبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

اثبت بالتدريج انه في حالة اية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$s_1 = 1^2 = 1$$
$$s_2 = 1^2 + 2^2 = 5$$
$$s_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$
$$s_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^4 = 30$$
$$s_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 + (n+1)^2$$
$$\Rightarrow s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$$

من خلال الاثبات بالتريج

نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 1$:

$$S_1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \Leftarrow E = 1$$

فالعلاقة صحيحة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad *$$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$l_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 + (n+1)^2$$

$$l_1 = s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$
$$= (n+1)\frac{[n(2n+1) + 6n + 6]}{6}$$
$$= (n+1)\frac{(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$
$$= (n+1)\frac{(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= (n+1)\left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right]$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2$$

ومنه العلاقة محققة

ليكن $x > -1$ في حالة عدد طبيعي n نرمز بالرمز E(n) الى المتراجحة $(1+x)^n \ge 1 + nx$

- اثبت ان المتراجحة محققة

نبرهن صحة العلاقة من اجل n=0 ⇐

$$(1+x)^0 = 1 = 1 = l_1 = l_2$$

⇐ ومنه العلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \quad *$$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$(1+x)^{n+1} \ge 1 + (n+1)x$$

ننطلق من *

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

نضرب الطرفين ب $(1+x)$:

$$(1+x)(1+x)^n \ge (1+nx)(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \ge 1 + x + nx + nx^2$$

$$nx^2 > 0$$

$$(1+x)^{n+1} \ge 1 + x + nx$$

ومنه العلاقة صحيحة

تمرينات ومسائل

التمرين الأول: ادرس اطراد المتتاليات التالية

$u_n = -3n + 1$ (1

$$u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n+1)$$

$$= -3n - 3 + 1 + 3n - 1 = -3 < 0$$

ومنه المتتالية متناقصة تماماً

$u_n = \frac{n+1}{n+2}$ (2

الحل نشكل التابع $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ والتابع اشتقاقي على R\{−2} مشتقه

$$f'(x) = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه التابع متزايد تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً

$u_n = 2^n$ (3

$$u_{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2 > 1 \Rightarrow$$

المتتالية متزايدة تماماً

$u_n = \left(\frac{-1}{n}\right)^n$ (4

نوجد الحدود الأولى

$$u_1 = \frac{-1}{1} = -1 \qquad u_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-1}{27} \qquad u_4 = \left(\frac{-1}{4}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

نلاحظ ان المتتالية غير مطردة

$u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ (5

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$$

ومنه المتتالية متناقصة تماما

$u_n = \frac{n^2}{n!}$ (6

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)n!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{n+1}{n!} \times \frac{n!}{n^2}$$

$$= \frac{n+1}{n^2} > 1 \Rightarrow$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \qquad + \frac{1}{2^n}$ (7

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n + 1} > 0 \Rightarrow$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

$u_0 = 2 \qquad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ (8

من خلال الاثبات بالتدريج

نوجد الحدود الأولى

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{21}{8} + 2 = \frac{37}{8}$$

نجد ان المتتالية متزايدة نبرهن ذلك بالتدريج:

$$u_{n+1} > u_n$$

نبرهن ان العلاقة صحيحه من اجل n=0 ⇐

$u_1 - u_0 = \frac{7}{2} - 2 > 0$ ⇐ العلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل n ونبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$

⇐ $\frac{3}{4}u_{n+1} > \frac{3}{4}u_n$ نضرب ب $\frac{3}{4}$ ثم نضيف 2 للاطراف

⇐ $\frac{3}{4}u_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}u_n + 2$ ومنه العلاقة صحيحة.

التمرين الثاني:

لدينا $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$ احسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 و u_4 ثم خمن عباره ال U_n بدلالة n

الحل: $u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$u_2 = 2u_1 - 3 = 2 - 3 = -1$

$u_3 = 2u_2 - 3 = -2 - 3 = -5$

$u_4 = 2u_3 - 3 = -120 - 3 = -13$

ننظم الجدول

n	0	1	2	3	4
u_n	2	1	-1	-5	-13
2^n	1	2	4	8	16

ونكمل بإحدى الطريقتين:

(1)	(2)
نستنتج من الجدول مباشرة من السطرين الثاني والثالث	$L = \frac{b}{1-a} = \frac{-3}{1-2} = 3$
$u_n + (2)^n = 3$	$u_n = (u_0 - L).a^n + L$
$u_n = 3 - (2)^n$	نعوض قيم L, a, u_0 فنجد انه ننتج $u_n = \cdots$
	$u_n = (2-3).2^n + 3 = -2^n + 3$

متتالية هندسية $w_n = u_n - L \Longrightarrow w_n = u_n - 3$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}-3}{u_n-3} = \frac{2u_n-3-3}{u_n-3} = \frac{2u_n-6}{u_n-3} = \frac{2(u_n-3)}{u_n-3} = 2$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = 2$

نعوض بالقانون:

$$\frac{w_n}{w_0} = q^n \Longrightarrow w_n = (u_0 - 3)2^n = -2^n$$

التمرين الثالث:

لدينا $u_{n+1} = -u_n + 4$ و $u_0 = 3$ احسب الحدود $u_1 u_2 u_3 u_4$ وخمن عبارة u_n بدلالة n

$u_1 = -u_0 + 4 = -3 + 4 = 1$

$u_2 = -u_1 + 4 = -1 + 4 = 3$

$u_3 = -u_2 + 4 = -3 + 4 = 1$

$u_4 = -u_3 + 4 = -1 + 4 = 3$

n	0	1	2	3	4
u_n	3	-1	3	-1	3
$(-1)^n$	1	-1	1	-1	1

ومنه نجد ان:

$$L = \frac{b}{1-a} = \frac{4}{1+1} = 2$$

$$u_n - (-1)^n = 2 \Rightarrow u_n = 2 + (-1)^n$$

التمرين الرابع: اثبت بالتدريج صحة الخاصتين

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

نرمز لهذه المساواة بالرمز $E(n)$

نبرهن ان $E(1)$ صحيحة $S_1 = 1! = 1 = l_1$

$l_2 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow l_1 = l_2$

ومنه العلاقة محققة

نفرض ان العلاقة $E(n)$ صحيحة:

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n + n! = (n+1)! - 1$$

نبرهن صحة العلاقة $E(n+1)$:

$$1 + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$$

$$l_1 = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1 + n + 1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 = l_2$$

ومنه العلاقة صحيحة

$$n! \geq 2^{n-1}$$

نبرهن بالتدريج صحة العلاقة

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(1)$

$1! = 1 \quad 2^{1-1} = 2^0 = 1 \Rightarrow$ العلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$

$(n)! \geq 2^{n-1} \qquad *$

نبرهن صحة العلاقة $E(n+1)$

$(n+1)! \geq 2^n$

ننطلق من * :

$(n)! \geq 2^{n-1}$

نضرب الطرفين ب $(n+1)$:

$(n+1)(n)! \geq 2^n(n+1)$

ننسب الى $(n+1)$ العدد 2

$(n+1)(n)! \geq 2^{n-1}.2$

ومنه نجد ان $(n+1)! \geq 2^n$ فالعلاقة محققة.

التمرين الخامس:

لدينا $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ و $v_n = u_{2n} - u_n$

اثبت ان المتتالية v_n متزايدة تماما

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = u_{2n} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

نوجد v_{n+1}

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

نوجد الفرق

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2}$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

ومنه المتتالية متزايدة تماما

التمرين السادس:

a و b و c اعداد حقيقية نعلم ان a, b, c هي ثلاثة حدود متتالية من متتالية هندسية رمز الى أساسها بالرمز q كم نعلم ان $c, 2b, 3a$ هي ثلاثة حدود من متتالية حسابية والمطلوب احسب q

انا لازم جيب علاقة فيها q أساس المتتالية واكتب الحدود وانا بعرف بالمتتالية الهندسية كل حد بينتج عن القبلو بضربو بعدد والي هوq فبصير معي اول حد هو a تاني حد وهو $b =$ aq وتالت حد هو $c = aq^2$

وبالفرض الاعداد c،3a , 2b حدود متعاقبة من متتاليةحسابية

حيث a≠ 0

$$2b = \frac{3a+c}{2} \Rightarrow 3a + c = 4b$$

هلئ بدي عوض محل العلاقة فوق بقيم a, b, c

$$3a + aq^2 = 4aq \Rightarrow 3 + q^2 = 4q \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$$
$$\Rightarrow (q-1)(q-3) = 0$$
$$\Rightarrow q = 1 \quad , \quad q = 3$$

التمرين السابع:

لدينا $u_{n+1} = 10u_n - 18$ و $u_0 = 7$ عبر عن u_n بدلالة n

1) عين عدد الاصفار عندما نأخذ n القيم 1,2,3,4,5

$$u_1 = 10u_0 - 18 = 10(7) - 18 = 52$$
$$u_2 = 10u_1 - 18 = 10(52) - 18 = 502$$
$$u_3 = 10u_2 - 18 = 10(502) - 18 = 5002$$
$$u_4 = 10u_3 - 18 = 10(5002) - 18 = 50002$$
$$u_5 = 10u_4 - 18 = 10(50002) - 18 = 500002$$

2) ما عدد الاصفار بدلالة n: نلاحظ ان عدد الاصفار هو $(n-1)$

3) تحقق ان $u_k = 5(10)^k + 2$ في حالة k من [1,2,3,4,5]

$$u_1 = 5(10) + 2 = 5 + 2 = 52$$
$$u_2 = 5(10)^2 + 2 = 500 + 2 = 502$$
$$u_3 = 5(10)^3 + 2 = 5002$$
$$u_4 = 5(10)^4 + 2 = 50002$$
$$u_5 = 5(10)^5 + 2 = 500002$$

4) اقترح صيغه للحد u_n بدلالة n واثبت ذلك

n	0	1	2	3	4
$a^n = 10^n$	1	10	100	1000	10000
u_n	7	52	502	5002	50002

$$l = \frac{b}{1-a} = \frac{-18}{1-10} = 2$$

$$u_n = (u_0 - l)a^n + l = (7-2)10^n + 2 = 5(10^n) + 2$$

الاثبات بالتدريج

نبرهن صحة العلاقة من اجل E(0)

$$u_0 = 5(10)^0 + 2 = 5 + 2 = 7$$

ومنه العلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونبرهن صحة العلاقة $E(n+1)$

$$u_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$$
$$l_1 = u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10[5(10)^n + 2] - 18$$
$$= 5(10)^{n+1} + 20 - 18$$
$$= 5(10)^{n+1} + 2 = l_2$$

ومنه العلاقة محققة

التمرين الثامن: لدينا $u_0 = s$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$

1) عين كثير الحدود من الدرجة الثانية p بحيث تحقق $t_n = p(n)$ التي حدها $(u_n)_{n\geq 0}$

نفسها أي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$

نفرض ان $p(n) = an^2 + bn + c$ يجب إيجاد الاعداد a،b،c

$$t_n = p(n) = an^2 + bn + c$$

لدينا $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$

ومنه $p(n+1) = \frac{1}{2}pn + n^2 + n$

$$a(n+1)^2 + bn + b + c = \frac{1}{2}(an^2 + bn + c) + n^2 + n$$

$$a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c = \frac{1}{2}(an^2 + bn + c) + n^2 + n$$

$$an^2 + 2an + a + bn + b + c = \frac{1}{2}an^2 + \frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}c + n^2 + n$$

$$an^2 + (2a+b)n + (a+b+c) = \left(\frac{1}{2}a + 1\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}b + 1\right)n + \left(\frac{1}{2}c\right)$$

بالمقارنة بين الطرفين

$$a = \frac{1}{2}a + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots *$$

$$2a + b = \frac{1}{2}b + 1 \ldots\ldots\ldots **$$

$$a + b + c = \frac{1}{2}c \ldots\ldots\ldots ***$$

من * $a - \frac{1}{2}a = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$

نعوض في ** $4 + b = \frac{1}{2}b + 1$

$$b - \frac{1}{2}b = -3 \Rightarrow 2b - b = -6 \Rightarrow b = -6$$

نعوض في ***

$$2 - 6 + c = \frac{1}{2}c \Rightarrow -4 + c = c \Rightarrow -8 + 2c = c \Rightarrow c = 8$$

$$t_n = p(n) = 2n^2 - 6n + 8$$

2) أثبت ان المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}u_n + n^2 + n - \frac{1}{2}t_n - n^2 - n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - t_n) = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

ومنه المتتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

3) اكتب عبارة ال v_n

$$v_0 = u_0 - t_0 = s - p(0) = s - 8$$

$$v_n = v_0 \times q^n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التمرين التاسع: $v_{n+1} = av_n + b$

1) عين تابعاً $f(x) = v_{n+1}$ أياً كانت قيمة $n \geq 0$

$$f(x) = ax + b$$

التابع معرف على $D = [0, +\infty[$

2) احسب l حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow x = ax + b \Rightarrow x - ax = b \Rightarrow (1-a)x = b$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{1-a} = l$$

3) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = v_n - l$ ان انها هندسية واستنتج عبارة u_n بدلالة a،n b، v_0، ثم استنتج v_n

$$u_n = v_n - l$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1} - l}{v_n} = \frac{av_n + b - l}{u_n}$$

لكن $l = \frac{b}{1-a} \Rightarrow b = (1-a)l$

$$= \frac{av_n + l(1-a) - l}{u_n}$$

لكن $u_n = v_n - l \Rightarrow v_n = u_n + l$

$$= \frac{a(u_n + l) + l(1-a) - l}{u_n}$$

$$= \frac{a(v_n) + l - al - l}{u_n} = \frac{a(v_n) - al}{u_n}$$

$$= \frac{a[(v_n - l)]}{u_n} = \frac{au_n}{u_n} = a$$

ومنه المتتالية هندسية أساسها q=a

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_0 = v_0 - l(q)^n = \left(v_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n \Rightarrow$$

$$u_n = \left(v_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n$$

$$v_n = u_n + l \Rightarrow$$

$$v_n = \left(v_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

التمرين العاشر: متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ $u_1 = 4$ و $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$

1) عين عددين a،b يحققان $a + b = 5 , ab = 6$

a=2 b=3

2) لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - au_n$ انها متتالية هندسية أساسها b

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n = 5u_n - 6u_{n-1} - 2u_n$$
$$= 3u_n - 6u_{n-1}$$
$$v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1}$$
$$v_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n)$$
$$v_{n+1} = 3v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$$

ومنه المتتالية هندسية أساسها q=3

3) لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حيث $w_n = u_{n+1} - bu_n$ اثبت انها متتالية هندسية أساسها a

$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$\Rightarrow w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1}$$
$$w_{n+1} = 2w_n \Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = 2$$

ومنه المتتالية هندسية أساسها q=2

4) عبر عن v_n, w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n \Rightarrow v_0 = u_1 - 2u_0 = 4 - 2(1) = 2$$
$$v_n = v_0q^n \Rightarrow v_n = 2.(3)^n \Longrightarrow v_n = 2.(3)^n$$
$$w_n = u_{n+1} - 3u_n \Rightarrow w_0 = u_1 - 3u_0$$
$$= 4 - 3(1) = 1$$
$$\frac{w_n}{w_0} = q^n \Rightarrow w_n = (2)^n$$

بالتعويض في العلاقة:

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n$$
$$2.(3)^n = u_{n+1} - 2u_n \Longrightarrow u_{n+1} = 2.(3)^n + 2u_n$$
$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$(2)^n = 2.(3)^n + 2u_n - 3u_n$$
$$u_n = 2.(3)^n - (2)^n$$

التمرين الحادي عشر:

1) اثبت أيا كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ ان $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$

من خلال الاثبات بالتدريج

نبرهن صحة العلاقة من اجل n=2

$$3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12 \qquad (2+1)^2 = 3^2 = 9$$

ونجد ان $12 \geq 9$ ومنه العلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل n

$$3 \times n^2 \geq (n+1)^2$$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل n+1

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$
$$3(n^2 + 2n + 1) \geq n^2 + 4n + 4$$
$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4$$
$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$$
$$3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + 2n + 3$$

لدينا من الفرض:

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$
$$6n + 3 \geq 2n + 3 \quad \Leftarrow$$
$$3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + (2n+3)$$
$$\Rightarrow \quad 3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

ومنه العلاقة محققة

2) نرمز بالرمز $E(n)$ الى القضية $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$

- ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم تكون القضية صحيحة عنده
- اثبت ان $E(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$

$E(1) \quad l_1 = 3^1 = 3 \qquad l_2 = 2 + 5(1^2) = 7$

نلاحظ ان $l_1 < l_2$ ومنه $E(1)$ غير محققة

$E(2) \quad l_1 = 3^2 = 9 \qquad l_2 = 2^2 + 5 \times 2^2 = 4 + 20 = 24$

نلاحظ ان $l_1 < l_2$ ومنه $E(2)$ غير محققة

$E(3) \quad l_1 = 3^3 = 27 \qquad l_2 = 2^3 + 5 \times 3^2 = 53$

نلاحظ ان $l_1 < l_2$ ومنه $E(3)$ غير محققة

$E(4) \quad l_1 = 3^4 = 81 \qquad l_2 = 2^4 + 5 \times 4^2 = 96$

نلاحظ ان $l_1 < l_2$ ومنه $E(4)$ غير محققة

$E(5) \quad l_1 = 3^5 = 343 \qquad l_2 = 2^5 + 5 \times 5^2 = 157$

نلاحظ ان $l_1 > l_2 \Leftarrow E(5)$ محققة

نبرهن صحة ذلك بالتدريج:

التمرين التوضيحي في الأسفل:

التمرين الثاني عشر: نرمز بالرمز $E(n)$ الى القضية $3^n \geq (n+2)^2$

لتكون القضايا $E(0), E(1), E(3) E(4)$ صحيحة

من اجل $E(0)$

$3^0 \geq (0+2)^2 \Rightarrow 1 \geq 4$ غير صحيحة

من اجل $E(1)$

$3^1 \geq 3^2 \Rightarrow 3 \geq 9$ غير صحيحة

من اجل $E(3)$

$3^3 \geq 5^2 \Rightarrow 27 \geq 25$ فالعلاقة صحيحة

من اجل $E(4)$:

$3^4 \geq 6^2 \Rightarrow 81 \geq 36$

اثبت بالتدريج ان $E(n)$ صحيحة عندما $n \geq 3$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(3)$

من الطلب السابق $27 \geq 25$ محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونبرهن صحة العلاقة $E(n+1)$

$$3^{n+1} \geq (n+3)^2$$
$$l_1 = 3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq (n+2)^2 \times 3$$
$$\geq (n^2+4n+4)3 \geq 3n^2+12n+12$$
$$\geq n^2+2n^2+6n+6n+9+3$$
$$\geq n^2+6n+9+(2n^2+6n+3)$$

$2n^2+6n+3>0$ تهمل لانها مقدار موجب

عندما $n \geq 3$

$$3^{n+1} \geq (n+3)^2 = l_2$$

فالعلاقة محققة

التمرين الثالث عشر: اثبت بالتدريج

1) 4^n+2 من مضاعفات العدد 3

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(0)$

$4^0+2=1+2=3$ ومنه العلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$

$$4^n+2=3k \Rightarrow 4^n=3k-2$$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$4^{n+1}+2=4\times 4^n+2=4(3k-2)+2$$
$$=12k-8+2=12k-6$$
$$=3(4k-2)$$

ومنه العلاقة محققة

2) $2^{3n}-1$ من مضاعفات العدد 7

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(0)$ $\quad 2^0-1=1-1=0$

صحيحة لأن الصفر مضاعف لاي عدد

نفرض صحة العلاقة من اجل$E(n)$

$$2^{3n}-1=7k \Rightarrow 2^{3n}=7k+1$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$2^{3n+3}-1=2^3\times 2^{3n}-1=8(7k+1)-1$$
$$=56k+8-1=56k+7$$
$$=7(8k+1)$$

ومنه العلاقة محققة

3) n^3+2n من مضاعفات العدد 3

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(0)$

$0+2\times 0=0=3\times 0=0$ فالعلاقة صحيحة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$

$$n^3+2n=3k \Rightarrow n^3=3k$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$:

$$(n+1)^3+2(n+1)$$
$$(n+1)^3+2(n+1)=(n+1)[(n+1)^2+2]$$
$$=(n+1)[n^2+2n+1+2]$$
$$=(n+1)(n^2+2n+3)$$
$$=n^3+2n^2+3n+n^2+2n+3$$
$$=n^3+2n+3n^2+3n+3$$
$$=(n^3+2n)+3(n^2+n+1)$$
$$3(n^2+n+1)=3K$$
$$=(n^3+2n)=3K$$

ومنه العلاقة صحيحة

4) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ من مضاعفات العدد 7

نبرهن ان $E(0)$ صحيحة

$$3^{0+1}+2^{0+2}=3+2^2=3+4=7$$

ومنه العلاقة صحيحة

نفرض صحة العلاقة من اجل n

$$3^{2n+1}+2^{n+2}$$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$

$$3^{2n+3}+2^{n+3}=3^{2n+1}\times 3^2+2^{n+2}\times 2^1$$
$$=9\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$$
$$=(7+2)3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$$
$$=7\times 3^{2n+1}+2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$$
$$=7\times 3^{2n+1}+2(3^{2n+1}+2^{n+2})$$

ومنه العلاقة محققة

التمرين الرابع عشر: نرمز الى القضية

«يقسم العدد 9 العدد 10^n+1» بالرمز $E(n)$ في حالة $n\epsilon N$

1)اثبت انه اياً كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كان $E(n+1)$ صحيح

نفرض ان $E(n)$ صحيحة $\Leftarrow$ 10^n+1 من مضاعفات 9

نبرهن صحة$E(n+1)$

$$10^{n+1}+1=10^n+10+1$$
$$=10^n(9+1)+1=9\times 10^n+10^n+1$$

ومنه العلاقة صحيحة

تكون القضية $E(n)$ صحيحة على N برر اجابتك

من اجل $n=0\,,n=1$ القضية غير صحيحة لان

$$E(0)=10^0+1=1+1=2$$
$$E(1)=10+1=11$$

ومنه القضية غير صحيحة

التمرين الخامس عشر: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حيث
$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

1) اثبت ان $0 \leq u_n \leq 2$ أيا كان العدد الطبيعي n

نبرهن ان $E(0)$ صحيحة $\Leftarrow$ $0 \leq U_0 = 1 \leq 2$

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$ ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

لدينا من الفرض $0 \leq u_n \leq 2$

$$2 \leq 2+u_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{4}$$
$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$$

ومنه العلاقة محققة

2) اثبت ان المتتالية متزايدة تماماً

نثبت ذلك من خلال الاثبات بالتدريج حيث $u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحة العلاقة من اجل$E(0)$ $\Leftarrow$

$\sqrt{3} > 1 \Leftarrow u_1 > u_0$ محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$

$$u_{n+1} > u_n$$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

لدينا من الفرض: نضيف 2 للأطراف ثم نجذر

لنحصل عشكل u_{n+1}

$$2+u_{n+1} > 2+u_n \Leftarrow u_{n+1} > u_n$$
$$\sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{2+u_n}$$
$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

ومنه المتتالية متزايدة تماما فالعلاقة محققة .

التمرين السادس عشر: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$

1) اثبت ان التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$متزايد تماما
واستنتج $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

التابع f معرف اشتقاقي على المجال $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+6)^2} = \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2}$$
$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

ومنه التابع متزايد تماماً

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(0)$

$\frac{1}{2} < u_0 = 1 < 1$ العلاقة صحيحة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$ ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$$

لدينا من الفرض $\frac{1}{2} < u_n < 1$ والتابع f متزايد تماما

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_{n+1}) \leq f(1) \Rightarrow \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

ومنه العلاقة محققة

2) اثبت ان المتتالية متناقصة تماماً

$$u_{n+1} < u_n$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(0)$

$u_1 = \frac{5}{8} < u_0 = 1$ فالعلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

لدينا من الفرض $u_{n+1} < u_n$ والتابع متزايد تماما

$$f(u_{n+1}) < f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

ومنه المتتالية متناقصة فالعلاقة محققة .

التمرين السابع عشر: ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:
$u_0 = 2\cos\theta \quad , u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ (في حالة $n\epsilon N$)

1) احسب u_1 و u_2

$$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$$
$$= \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$
$$\Rightarrow u_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$$
$$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\frac{\theta}{2}}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}$$
$$= 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\right| \Rightarrow u_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}$$

تذكرة:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

2) اثبت بالتدريج ان $u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

نبرهن صحة القضية من اجل E(0)

$\Leftarrow u_0 = 2\cos\theta = 2\cos\frac{\theta}{2^n} \Leftarrow$ العلاقة محققة

نفرض صحة القضية من اجل $E(n)$

$$u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$$

ونبرهن صحة القضية من اجل $E(n+1)$

$$u_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2^n}}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2\times 2^n}}$$

$$= 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right| \Rightarrow u_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

ومنه العلاقة محققة

التمرين الثامن عشر:

في المستوي p المحدد بمعلم متجانس H هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق احداثياتها المعادلة $x^2-5y^2=1$

ليكن التابع f الذي يقرن بكل نقطة M من المستوي P النقطة $f(M)=\acute{M}$ أي $\acute{M}(9x+20y,4x+9y)$

لتكن S_0 النقطة التي احداثياتها $(1,0)$ ثم لنتأمل في المستوي P متتالية النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ وفق $S_{n+1}=f(S_n)$

أثبت ان s_n نقطة من المجموعة H وان احداثياتها اعداد صحيحة

نرمز الى احداثيتي النقطة M ب $f'(x)=m$ اي ان :

$x'=9x+20y$ و $y'=4x+9y$ و $H=x^2-5y^2=1$

نرمز بالرمز $E(n)$ الى الخاصة: $S_n(x,y)\epsilon H$ نقطة من H وكل x,y من اعداد صحيحة

نبرهن ان $E(0)$ صحيحة $S_0(1,o)\in H$ تحقق معادلة H

$(1)^2-5(0)^2=1$ اذن $S_0\epsilon H$ ومنه

$$x^2=9x+20y \quad y^2=4x+9y \quad H=x^2-5y^2=1$$

النقطة (S_n) تنتمي الى المجموعة H واحداثياتها اعداد صحيحة

نفرض ان $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد الطبيعي n

$S_n(x,y)$ تنتمي ل H وx وy عددان صحيحان

نبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$x'^2-5y'^2=(9x+20y)^2-5(4x+9y)^2$$
$$=81x^2+36xy+400y^2-80x^2-360xy+405y^2$$
$$=x^2-5y^2=1 \Rightarrow S_{n+1}\epsilon H \Rightarrow \text{العلاقة محققة}$$

التمرين التاسع عشر

يرمز x الى عدد حقيقي ويرمز n الى عدد طبيعي غير معدوم

نضع $s_n=\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)+\cdots+\cos[(2n-1)x]$

1) باستعمال دساتير مثلثية تعرفها اثبت ان

$$\sin a\times\cos b=\tfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

و $\sin 2a = 2\sin a\times\cos a$

نعلم ان $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

بالجمع $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$

ومنه $\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

وعندما a=b نجد

$$\sin(a+a)+\sin(a-a)=2\sin a\cos a$$

ومنه $\sin 2a=2\sin a\cos a$

2) حول كلا من العبارتين الاتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين الى مجموع نسبتين مثلثيتين

$\sin x\times\cos((2x+1)x)$ و $\sin nx\times\cos nx$

وجدنا ان :

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

وعندما: $a=x$ ، $b=(2n+1)x$ نجد :

$$\sin x\cos(2n+1)x=\frac{1}{2}[\sin(x+(2n+1)x)+\sin(x-(2n+1)x)]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin(x(1+2n+1))+\sin(x(1-2n-1))]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin(x(2+2n))+\sin((-2n)x)]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin(2x(n+1))-\sin((2n)x)]$$

وعندما $a=nx\,,b=nx$ نجد

$$\sin nx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(nx+nx)+\sin(nx-nx)]$$
$$\Rightarrow \sin nx\cos nx=\frac{1}{2}\sin(2nx)$$

3) اثبت ان $s_n = \cos(nx) \times \frac{\sin(nx)}{\sin x}$

أيا يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi (k \in Z)$

$$S(n) = \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x}$$

نبرهن صحة العلاقة $E(1)$ $\Leftarrow$

$s_1 = \cos x = \cos x \times \frac{\sin x}{\sin x}$ $\Leftarrow$ العلاقة محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل $E(n)$

$$s_n = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n-1)x)$$

ونبرهن صحة العلاقة من اجل $E(n+1)$

$$S(n+1) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots$$
$$+ \cos(2n-1)x + \cos(2n+1)x$$
$$s_{n+1} = s_n + \cos(2n+1)x$$

$$S(n+1) = \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x} + \cos(2n+1)x$$

نوحد المقامات:

$$= \frac{\sin nx \cos nx + \sin x \cos(2n+1)x}{\sin x}$$

$$= \sin nx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(2nx))$$

$$\sin x \cos(2n+1)x = \frac{1}{2}[(\sin 2(n+1)x - \sin(2nx))]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2nx + \frac{1}{2}\sin 2(n+1)x - \frac{1}{2}\sin 2nx}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin 2(n+1)x}{2\sin x} = \frac{2\sin(n+1)x\cos(n+1)x}{2\sin x}$$

$$= \frac{2\sin(n+1)x\cos(n+1)x}{2\sin x}$$

$$= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\cos(n+1)x = l_2$$

ومنه العلاقة صحيحة.

قوانين هامة يجب حفظها

$1) \cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

قوانين المجموع والفرق:

$2) \sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$

ال sin تحافظ على الاشارة

$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$

ال cos تحافظ على النسبة

قوانين cos و sin ضعفي الزاوية:

$3) \sin(2*) = 2\sin(*) . \cos(*)$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$= 1 - 2\sin^2 x$

قوانين cos و sin زاوية بدلالة cos ضعفي الزاوية:

$4) \sin^2(*) = \frac{1-\cos 2*}{2} \Longrightarrow 2\sin^2(*) = 1 - \cos 2*$

$\cos^2(*) = \frac{1+\cos 2*}{2} \Longrightarrow 2\cos^2(*) = 1 + \cos 2*$

$5) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

دون ملاحظاتك

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

إلى هنا نصل

لنهاية حل تمارين بحث المتتاليات

شدو الهمة لسا الطريق بأوله وعنا كتير

شغل ^_^