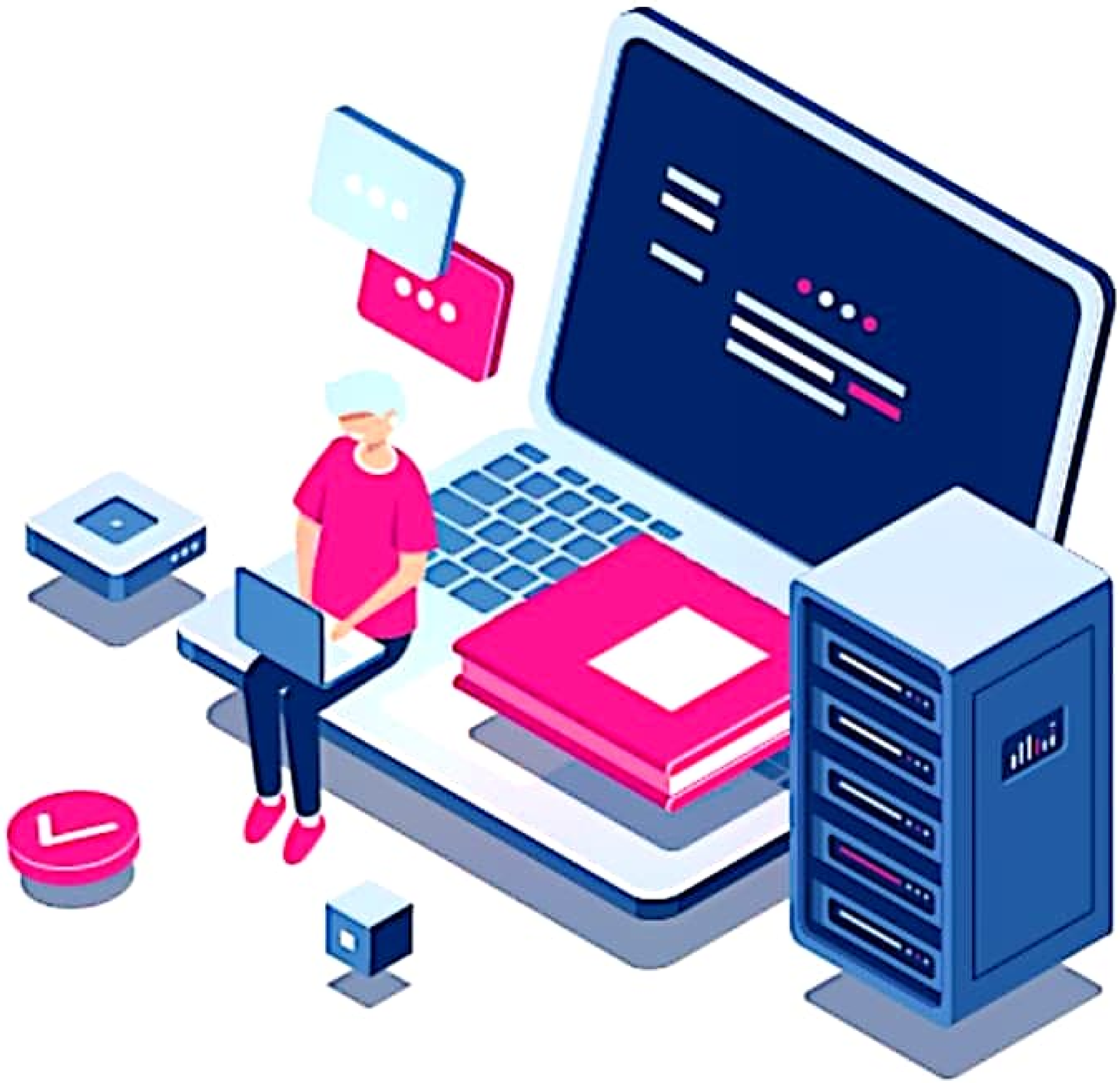
سلسلة

التجمع التعليمي

التجمع التعليمي



الرياضيات مع بسمة أمل

أوراق المصطفى

المتتاليات

ملخص نظري (+)

تمارين شاملة (امتحانية)

إعداد المبدعان :

ابتسام العمر

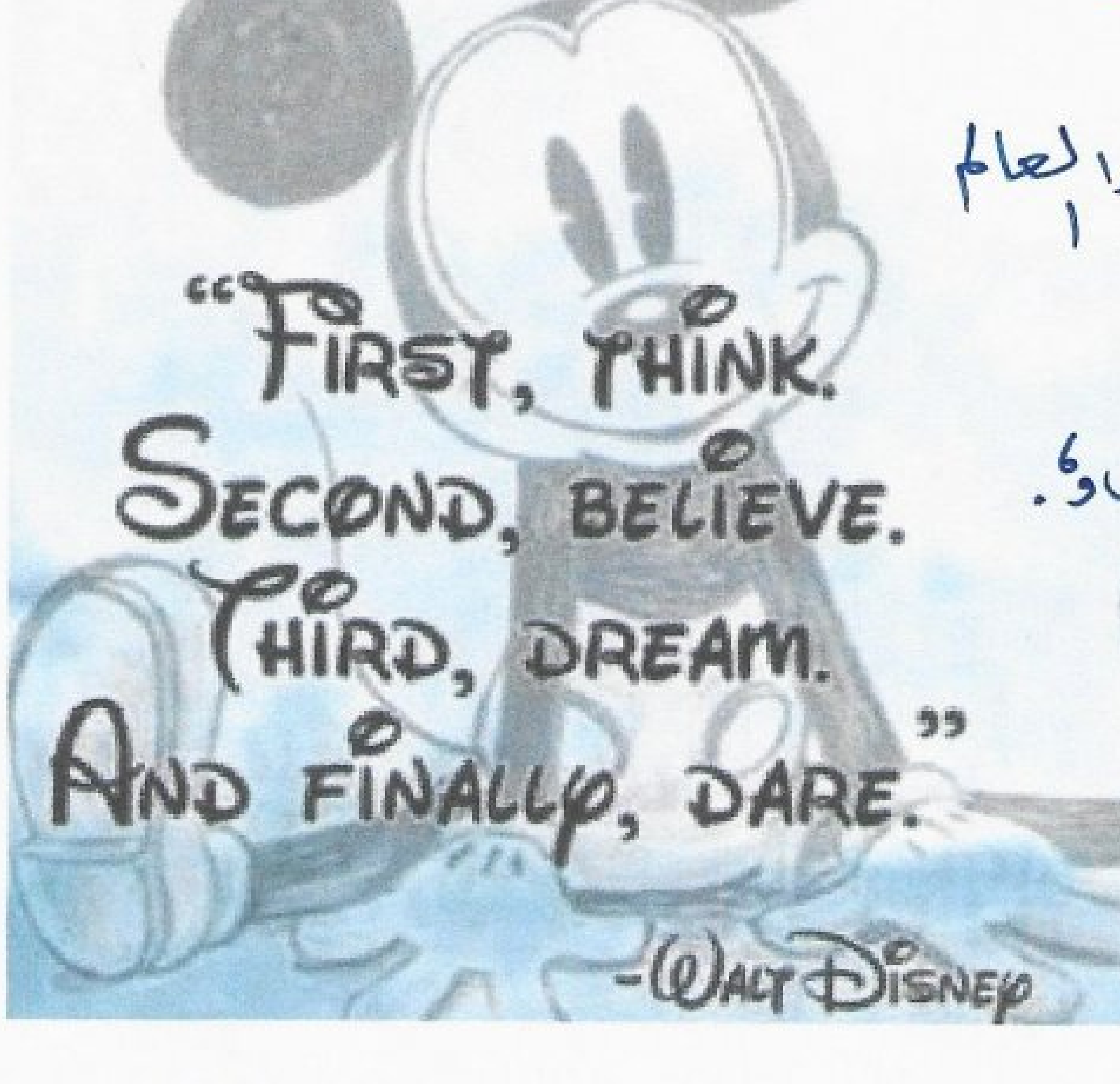
عبد الوهاب بربانة

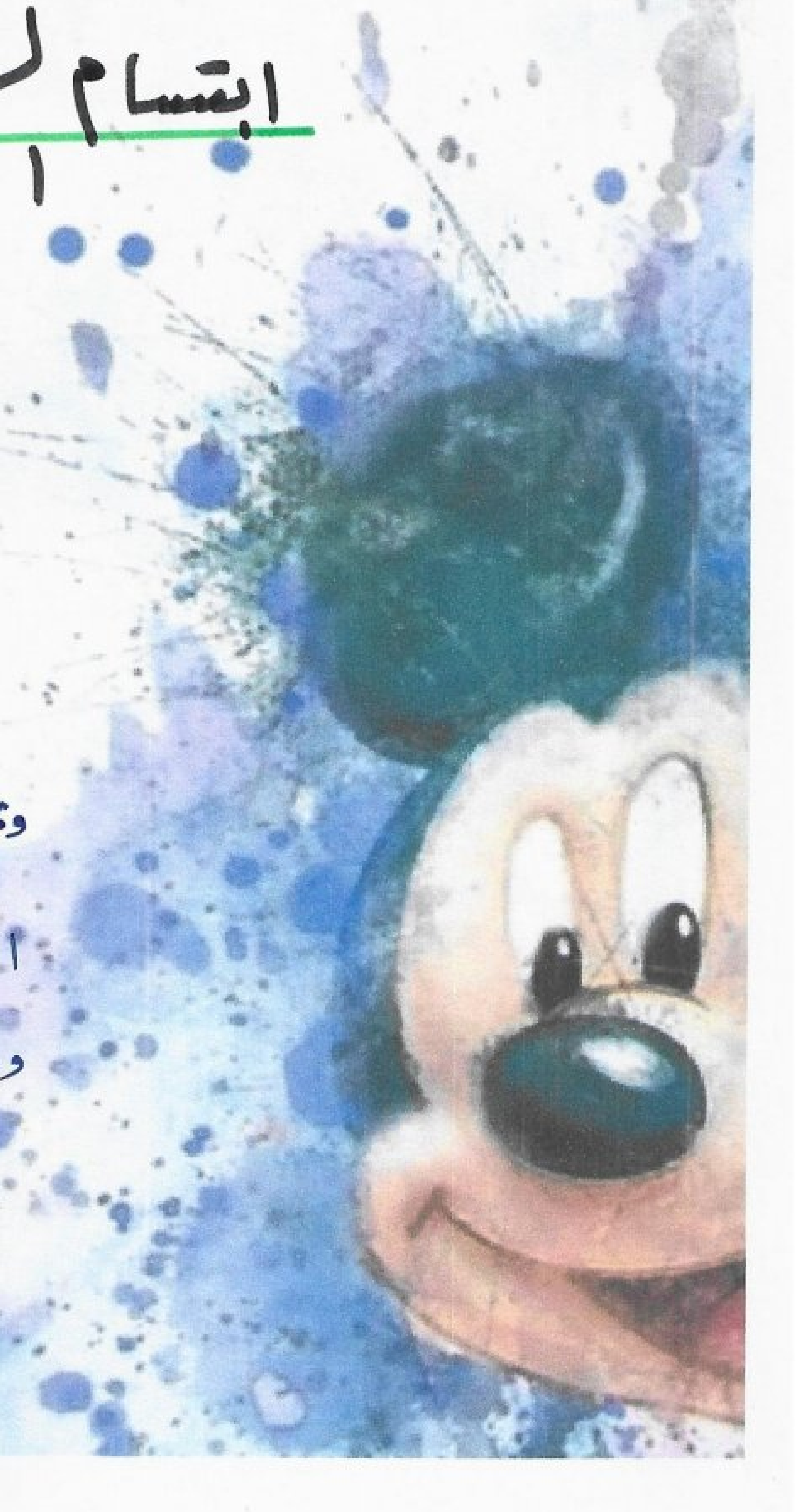
الرياضيات مع بسمة أمل.

تواصل : 0991070187

تلغرام : الرياضيات مع بسمة أمل

«هناك نوعان من الألم في هذا العالم
الألم الذي يؤلمك
والألم الذي يغيرك ويعلمك».





«أطراد متتالية»

1- متزايدة $U_{n+1} > U_n$

2- متناقصة $U_{n+1} < U_n$

3- ثابتة $U_{n+1} = U_n$

طرق دراسة الاطراد:

A) إشارة الفرق: $U_{n+1} - U_n$

الشرط:

a) $U_{n+1} - U_n > 0 \rightarrow$ U_n متزايدة

b) $U_{n+1} - U_n < 0 \rightarrow$ U_n متناقصة

c) $U_{n+1} - U_n = 0 \rightarrow$ U_n ثابتة

B) النسبة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = ?$

الشرط:

a) $U_{n+1} \div U_n > 1 \rightarrow$ U_n متزايدة

b) $U_{n+1} \div U_n < 1 \rightarrow$ U_n متناقصة

c) $U_{n+1} \div U_n = 1 \rightarrow$ U_n ثابتة

C) إطراد دالة: $f'(x)$

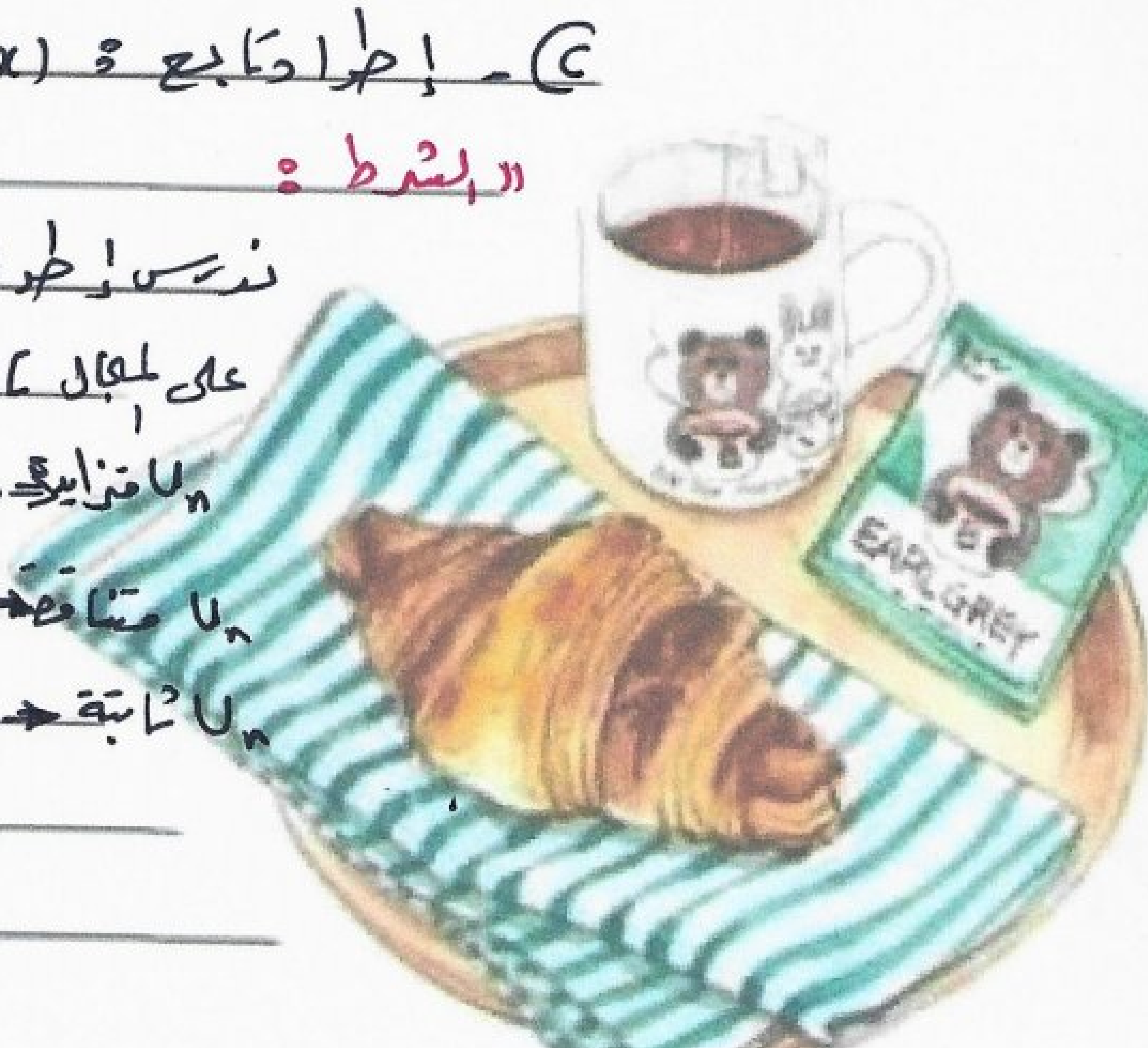
الشرط:

ندرس إطراد $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$

a) $f' > 0$ U_n متزايدة

b) $f' < 0$ U_n متناقصة

c) $f' = 0 \rightarrow$ U_n ثابتة



«الاستقراء الرياضي»

الخطوات:

1- نثبت صحة العلاقة من أجل $n = n_0$.

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n.

3- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$.

الأشكال:

1- متراجحة

2- علاقة

3- جملة مضاعفات.

الاستخدامات:

1- طلب صريح.

2- إطراد متتالية.

3- تخمين عبارة U_n بدلالة n.

4- الاشتقاقات من المراتب العليا.

Note:

a عدد حقيقي غير معدوم.

A- $\underbrace{a+a+a+\dots+a}_{} = a(n+1)$

a مكرر $n+1$ مرة

B- $\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{} = a^{n+1}$

a مكرر $n+1$ مرة.

C- $\underbrace{a^0 \times a^1 \times a^2 \times \dots \times a^n}_{} = a^{0+1+2+\dots+n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

a مكرر $n+1$ مرة

«متتالية محدودة»

U_n متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

1- نقول عن U_n محدودة من الأعلى إذا وُجد عدد حقيقي M يحقق: من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \leq M$ ونسمي M «عنصر راجع».

2- نقول عن U_n محدودة من الأدنى إذا وُجد عدد حقيقي m يحقق: من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \geq m$ ونسمي m «عنصر قاصر».

3- نقول أن U_n محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى ومن الأدنى

$m \leq U_n \leq M$.

سؤال مهم:

* كيف نثبت U_n متتالية محدودة من الأعلى بعدد حقيقي M أو من الأسفل بعدد حقيقي m؟

«نتبع إحدى الطرق»:

1- استعمال الإثبات بالتدريج للبرهان على: $U_n \geq m$ أو $U_n \leq M$

2- نقارن بين U_n و M «أو U_n و m».

بدراسة إشارة $U_n - m$ أو $U_n - M$

3- إذا كانت: $U_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $[0, +\infty[$.

4- إذا كانت U_n على شكل مجموع لمتتالية هندسية نستفيد من المجموع.

«تقارب متتالية»

- $\lim_{n \to \infty} U_n =$ عدد: U_n متقاربة
- $\lim_{n \to \infty} U_n = \infty$ أو غير محدودة: U_n متباعدة
- ما في عبارة «U_n»

- U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.
- U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

«نهاية متتالية» $\lim_{n \to \infty} U_n$

- U_n صريحة ← تعويض مع مراعاة قواعد النهايات
- U_n هندسية ← حسب الأساس
- $\sin(n)$، $\cos(n)$، $(-1)^n$، $n!$ ← إحاطة ← $-1 \leq \sin, \cos, (-1)^n \leq 1$

«تجاور متتاليتين»

نقول عن متتاليتين U_n و V_n متجاورتان أي: U_n و V_n إحداها متزايدة والأخرى متناقصة ونهاية الفرق تساوي صفر $\lim_{n \to \infty}(U_n - V_n) = 0$

- $U_{n+1} = aU_n + b$

النهاية هي حل المعادلة $f(x) = x$

$n! \geq n$

$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$

I will be...

Note: في بعض التمارين $f(x) = x$ تقبل أكثر من حل وبالتالي علينا رفض كل الحلول عدا واحد فقط ويكون سبب الرفض إما المجال أو اتجاه التغير (المحدودية)

وجه المقارنة	«المتتالية الهندسية»	«المتتالية الحسابية»
التعريف	$U_{n+1}=U_n\cdot q$	$U_{n+1}=U_n+r$
الإثبات	$\frac{U_{n+1}}{U_n}\overset{?}{=}q$	$U_{n+1}-U_n\overset{?}{=}r$
القانون الهام	$U_m=U_p * q^{m-p}$	$U_m=U_p+(m-p)\cdot r$

- استخدامات -

① حدين ← ① إيجاد الأساس q أو r

② حد و أساس ← ② إيجاد U_0 أو أي حد

← ③ كتابة عبارة U_n بدلالة n.

المجموع	$S=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$	$S=\frac{n(a+l)}{2}$

حساب n:

Ⅰ الحدود متعاقبة: $n=$ الدليل الأخير - الدليل الأول + 1

Ⅱ الحدود غير متعاقبة «لدينا قفزة مقدارها b».

$$n=\frac{\text{الأخير}-\text{الأول}}{\text{مقدار القفزة}}+1$$

$$U_0+U_1+\dots+U_n=\frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$$

- الحالة الخاصة في المجموع -

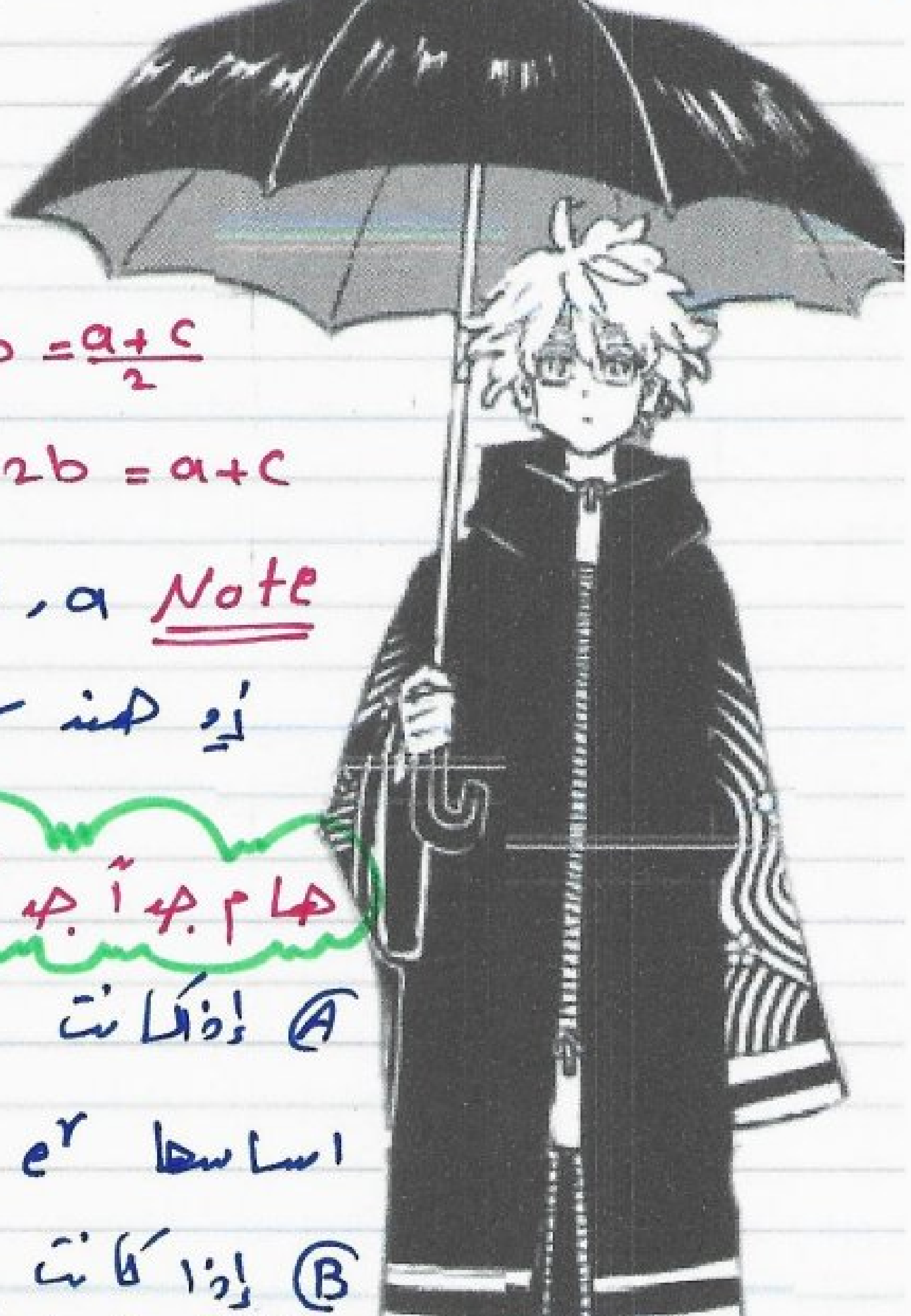
$$q^0+q^1+q^2+\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- الوسط -

$b^2=a\cdot c$ OR $b=\sqrt{a\cdot c}$

$b=\frac{a+c}{2}$ OR $2b=a+c$

Note: a، b و c تشكل حدود متتالية (حسابية أو هندسية) إذا حققت شرط الوسط.



هام جداً جداً: الانتقال من الحسابية إلى الهندسية و العكس:

Ⓐ إذا كانت U_n متتالية حسابية أساسها r فإن e^{U_n} هندسية أساسها $q=e^r$.

Ⓑ إذا كانت U_n متتالية هندسية «موجبة تماماً» أساسها q فإن $\ln U_n$ حسابية متتالية حسابية أساسها $r=\ln q$.

بعض الخواص الهامة

1- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 \ ; & -1<q<1 \\ +\infty \ ; & q>1 \\ \text{غير محدودة} & q\leq -1 \end{cases}$

2- إذا كانت u_n و v_n متتاليتان هندسيتان أساسها q_1 , q_2 بالترتيب وحدها الأول u_0 و v_0 ($v_n \neq 0$). فإنه:

⇐ $\frac{1}{v_n}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q_2}$

وحدها الأول: $\frac{1}{v_0}$

⇐ $\frac{u_n}{v_n}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$

وحدها الأول $\frac{u_0}{v_0}$

⇐ $(u_n \cdot v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q_1 \cdot q_2$ وحدها الأول $u_0 \cdot v_0$

الرياضيات مع بسمة أمل.

3- إطراد متتالية حسابية:

نعتمد على إشارة r

حيث: $u_{n+1} - u_n = r$

$r>0$	$r<0$	$r=0$
u_n متزايدة تماماً	u_n متناقصة تماماً	u_n ثابتة

4- إطراد متتالية هندسية:

نعتمد على u_0 و q

A- $0<q<1$

* $u_0>0$ ⇐ u_n متناقصة
* $u_0<0$ ⇐ u_n متزايدة.

B- * $q>1$ و $u_0>0$

⇐ u_n متزايدة.

* $q>1$ و $u_0<0$

⇐ u_n متناقصة.

C- * $q=1$

⇐ u_n ثابتة.

D- * $q=0$ ⇐ u_n معدومة ابتداءً من الحد الثاني.

E- * $q<0$ ⇐ u_n غير مطردة (انتبه)

D.Y.K?

المتتاليتان المتجاورتان لهما نفس النهاية.

4 u_n , v_n متجاورتان ⇔ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

تمارين متنوعة - متتاليات -

التمرين الأول:

u_n متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث: $u_6 = 9$ و $u_3 = 3$

1- أوجد أساسها r وحدها الأول u_0.

2- اكتب عبارة u_n بدلالة n.

3- هل العدد 37 حد من حدود المتتالية u_n؟ إذا كان حداً ما رتبته؟

4- احسب المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$$

5- احسب المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

التمرين الثاني:

احسب المجموعين:

$$S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \dots + 20$$

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \dots + 6$$

التمرين الثالث:

a ، b و c ثلاثة أعداد متتالية حسابية متزايدة أساسها r:

$$a + b + c = 9$$

1- a) احسب b

b) احسب a، c بدلالة r.

c) إذا علمت أن $a.c = -16$

* احسب r ، ثم استنتج a و c.

2- u_n متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها $r = 5$.

a- عبّر عن الحد العام u_n بدلالة n.

b- احسب u_{15} ثم استنتج المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$$

3- v_n متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ وفق: $v_n - 8u_n = 0$

* احسب المجموع:

$$S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$$

التمرين الرابع:

u_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

والمتتالية v_n معرفة وفق:

$$v_n = \frac{1}{u_n} + 1$$

1- أثبت أن v_n حسابية، عين أساسها وحدها الأول.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3- احسب نهاية u_n، ماذا تستنتج؟

4- احسب المجموع:

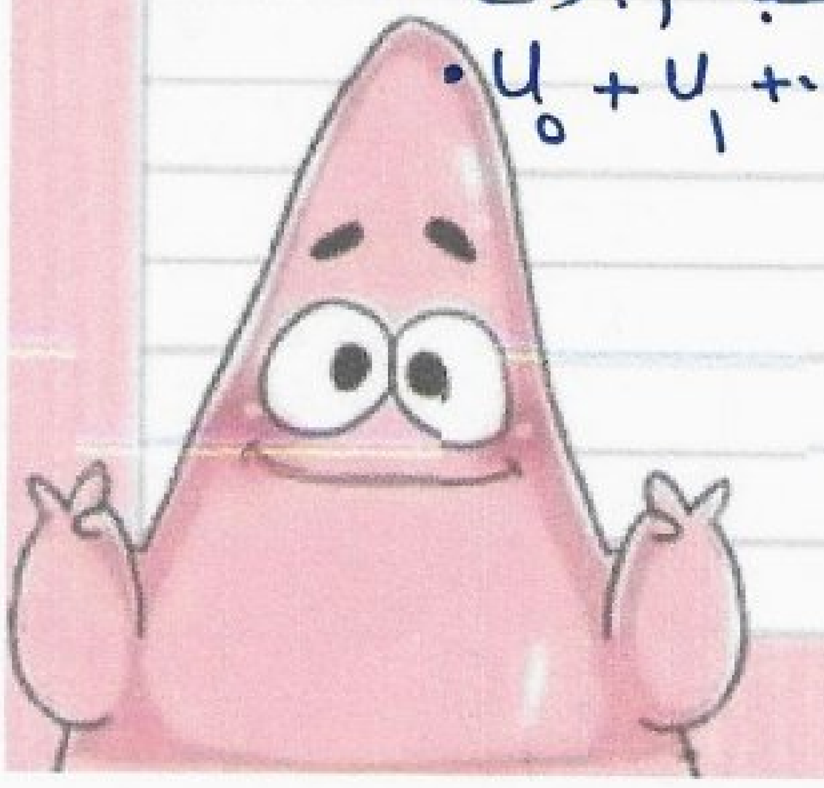
$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_{10}$$

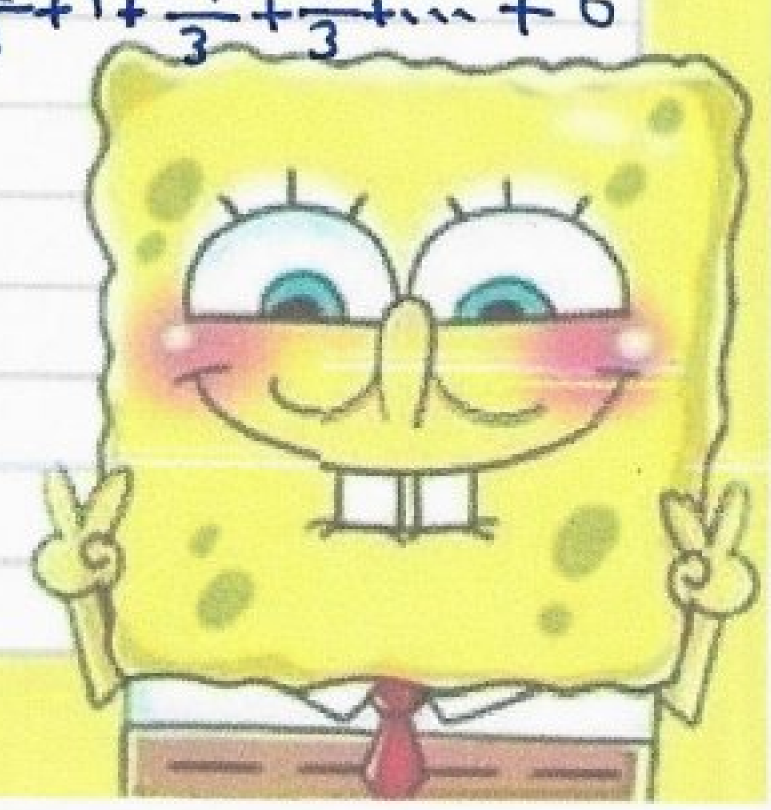
التمرين الخامس:

لتكن $u_n = 4n+1$ متتالية

* أثبت أن u_n حسابية وعيّن أساسها r، ثم احسب المجموع:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$$





التمرين السادس:

u_n متتالية معرفة تدريجياً وفقاً:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+4u_n} \end{cases}$$

1- أثبت بالتدريج أنه: $u_n > 0$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$

2- نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفقاً: $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

a- أثبت أن v_n حسابية عيّن أساسها وحدها الأول.

b- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

c- ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

* اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$

التمرين السابع:

a ، b ، c ثلاث حدود متتالية من متتالية هندسية أساسها q حيث ($a \neq 0$) إذا كان $12a$ ، $5b$ ، $2c$ ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية. احسب q

التمرين الثامن:

u_n متتالية معرفة وفقاً:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1+2u_n}{u_n} \end{cases}$$

و v_n معرفة وفقاً: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

a- أثبت أن v_n حسابية عيّن r و v_0.

b- اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن:

$$u_n = \frac{n+2}{n+1}$$

c) احسب المجموع:

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_7$$

التمرين التاسع:

عيّن عددين x ، y علماً أن: y و 15 و x حدود متعاقبة من متتالية هندسية و y و 25 و x حدود متتالية من متتالية حسابية.

التمرين العاشر:

u_n متتالية معرفة

$$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$$

* و نعرف v_n وفقاً:

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

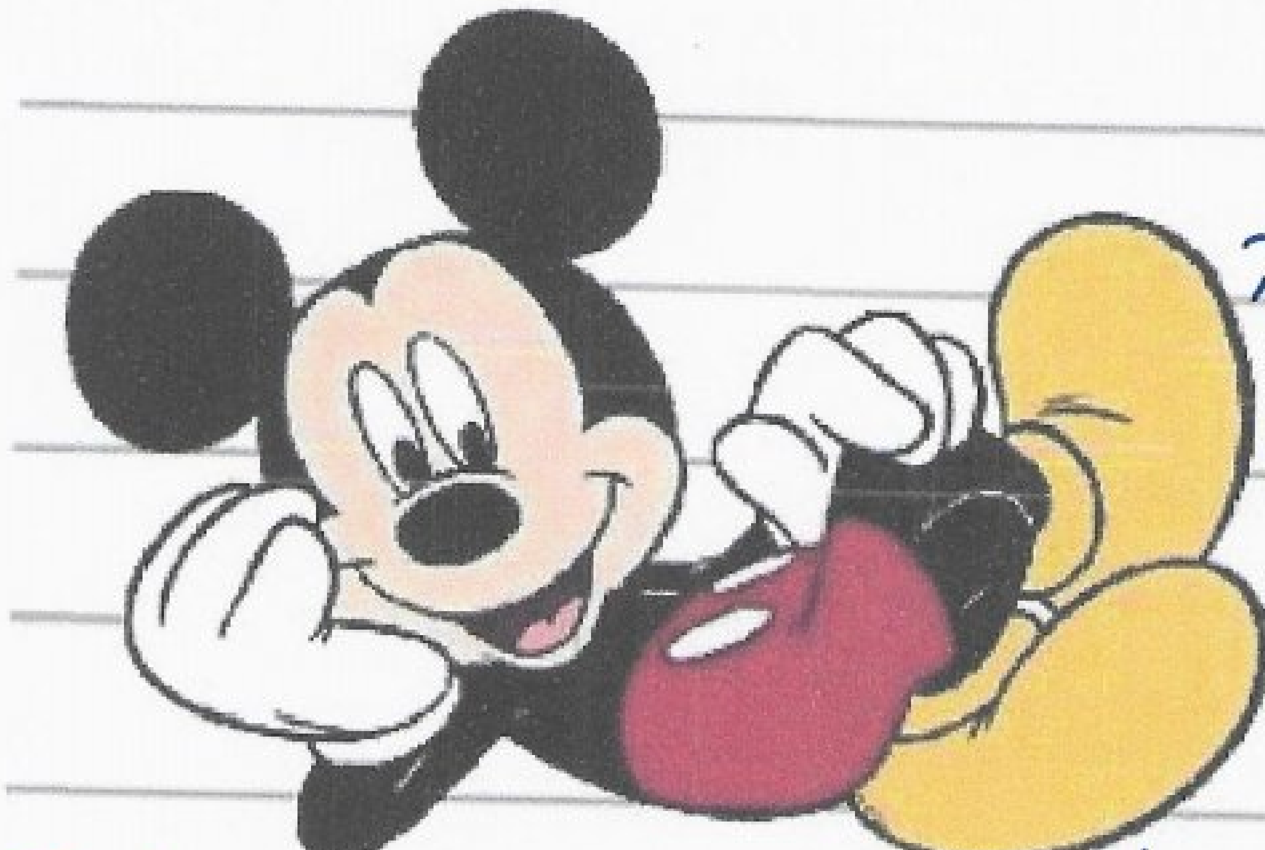
a- أثبت أن v_n هندسية عيّن أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n. ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

c) أثبت أن: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = e^2$

التمرين الحادي عشر:

برهن أن المتتالية الثابتة هي متتالية حسابية وهندسية في آنٍ معاً.



التمرين الثاني عشر

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n} \end{cases}$$

والمطلوب:

1) أثبت أن $0 < U_n < 1$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$.

2) نعرف V_n وفق:

$$V_n = \frac{1}{U_n} - 1$$

a) أثبت أن V_n هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة V_n بدلالة n.

c) استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3) احسب $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$.

التمرين الثالث عشر

U_n معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{5U_n + 4}{U_n + 2} \end{cases}$$

و $V_n = \frac{U_n - 4}{U_n + 1}$

والمطلوب:

1) أثبت أن V_n هندسية، جد أساسها وحدها الأول.

2) اكتب عبارة V_n بدلالة n، ثم احسب نهايتها.

3) استنتج عبارة U_n بدلالة n، ثم استنتج نهايتها، هل $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة؟

التمرين الرابع عشر

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$$

و V_n معرفة وفق:

$$V_n = U_n + 6$$

1) a) أثبت أن V_n هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة V_n بدلالة n.

c) استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3) نعرف W_n وفق:

$$W_n = \ln(V_n)$$

a) أثبت أن W_n حسابية، عيّن أساسها r و W_0.

b) اكتب عبارة W_n بدلالة n.

c) احسب W_5 ثم احسب $S = W_0 + W_1 + \dots + W_5$

« أنت حبيبك كل خير أنت حزنك أبقاه غير »

India 2009 Sam omar

التمرين الخامس عشر

U_n معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$$

1) أثبت بالتدريج أن $1 < U_n$ أياً تكن $n \in \mathbb{N}$.

2) ادرس اطراد U_n واستنتج تقاربها.

3) نعرف المتتالية V_n وفق:

$$V_n = \ln(U_n)$$

a) أثبت أن V_n هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول.

b) اكتب V_n و U_n بدلالة n.

c) احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

4) نضع:

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

و $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

1) احسب S_n ثم P_n بدلالة n.

2) عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $P_n = e^{\frac{7}{4}}$.

الرياضيات مع نسمة أمل.

التمرين السادس عشر:

U_n متتالية معرفة وفق: $U_n = \frac{6n+5(-1)^n}{3n}$

1) تحقق أن:

$$\frac{6n-5}{3n} \leq U_n \leq \frac{6n+5}{3n}$$

2- استنتج $\lim_{n\to\infty} U_n$

3- هل U_n متقاربة؟

التمرين السابع عشر:

لتكن المتتالية:

$$U_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

1- أعطِ صيغة أخرى تفيد في حساب U_n

2- احسب $\lim_{n\to\infty} U_n$.

التمرين الثامن عشر:

لتكن المتتالية U_n المعرفة وفق:

$$U_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

1) ادرس اطراد U_n

2) أثبت أنّ العدد 2 راجح على U_n.

3- احسب $\lim_{n\to\infty} U_n$

ثمّ جِد عدد طبيعي n_0 يحقق: أيّاً تكن $n > n_0$ كانت U_n في المجال $]1.9, 2.1[$.

التمرين التاسع عشر:

نتأمل المتتالية U_n المعرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{2}{U_n} \end{cases}$$

حيث $n \geq 0$.

1- أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$.

2- أثبت بالتدريج أنّ: $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ مهما تكن n من $\mathbb{N}$.

3- استنتج أنّ المتتالية U_n متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين العشرون:

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2 \end{cases}$$

أولاً: a) أثبت أنّ: $U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1$

b) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ: $1 \leq U_n \leq 2$ أيّاً كانت $n \in \mathbb{N}$.

ثانياً: a) أثبت أنّ: $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

b) استنتج أنّ $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

ثالثاً: a) علّل تقارب المتتالية U_n.

b) احسب نهايتها.

التمرين (21):

U_n معرفة وفق:

$$U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

1) أثبت أنّ $n \leq 2^n$ مهما تكن $n \geq 1$.

2) استنتج أنّ العدد $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$.

3. أثبت أنّ $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

التمرين (22) :

U_n معرفة وفقا :

$$U_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n}$$

1- أثبت أن $n \le 2^n$ وهذا من أجل $n \ge 1$.

2- أثبت أن: $U_n \le \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

3- استنتج عنصر راجح على U_n.

4- ادرس اطراد U_n.

5- استنتج أن U_n متقاربة.

التمرين (23) :

U_n متتالية معرفة وفقا:

$$U_n = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

I) أثبت أن U_n تكتب بالشكل

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

II) جد عددين حقيقيين a , b بحيث أن :

$$U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

III) في حالة n عدد طبيعي غير معدوم نشكل:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

a) عبر عن S_n بدلالة n.

b) استنتج نهاية المتتالية S_n.

التمرين (24) :

U_n , V_n متتاليتان معرفتان وفقا :

$$U_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

3- أثبت أن :

$$U_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$$

ثم احسب $\lim_{n\to\infty} U_n$

استنتج $\lim_{n\to\infty} V_n$

1) أثبت أن U_n متزايدة و V_n متناقصة.

2- استنتج أن U_n , V_n متجاورتان

التمرين (25) :

U_n متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفقا :

$$U_n = \ln\left(\frac{n \cdot e^n}{n+1}\right)$$

احسب بدلالة n المجموع :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

التمرين (26) :

$(U_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفقا :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1 \end{cases}$$

و $(V_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفقا :

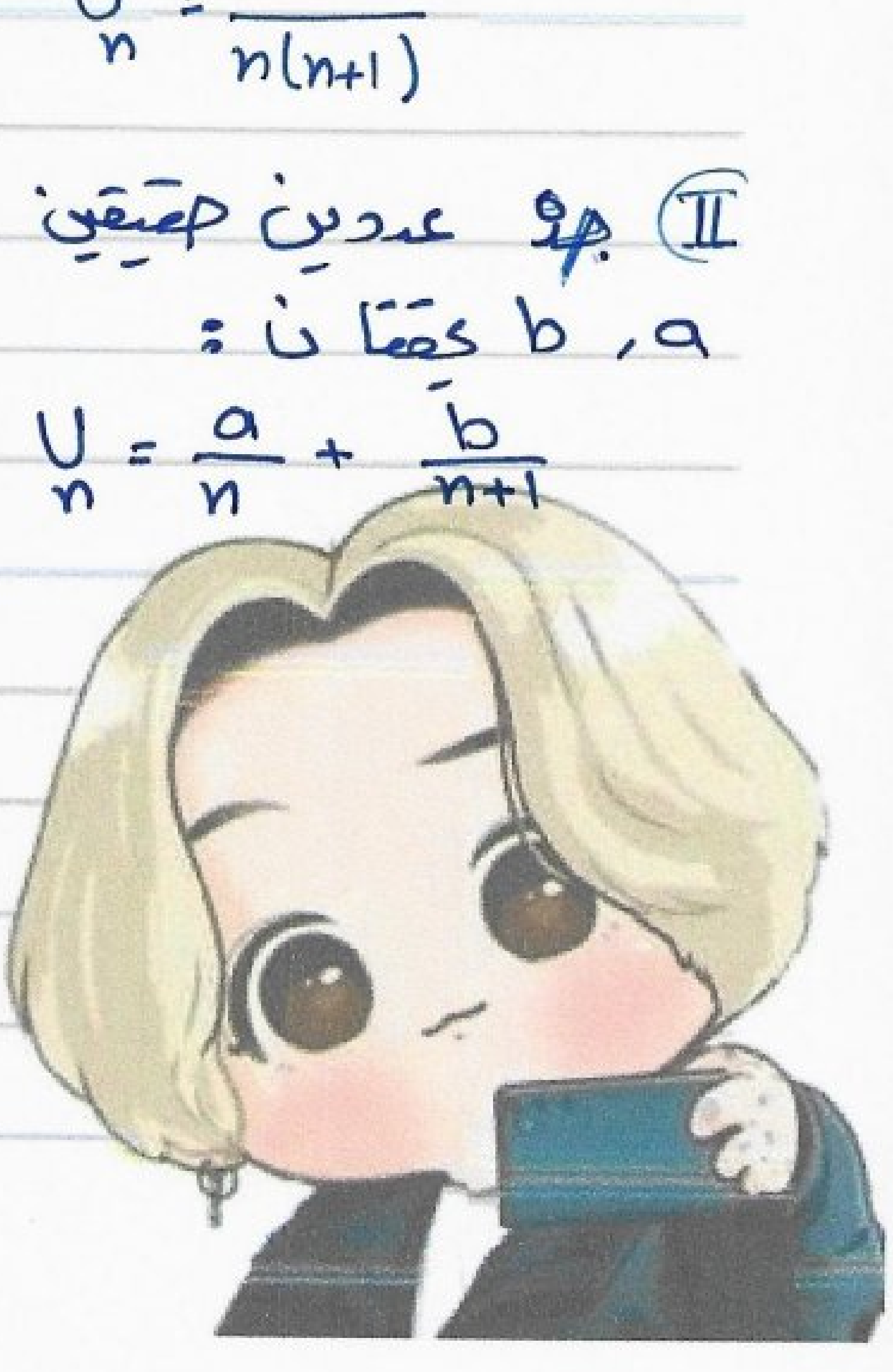
$$V_n = U_n + \alpha n + \beta$$

حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

* عين α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) هندسية نطلب تعيين اساسها q وحدها الأول V_0

* اكتب عبارة V_n بدلالة n واستنتج عبارة U_n بدلالة n.

الأستاذ: نور الدين.



التمرين (27):

نتأمل المتتاليتين:

s_n ، t_n المعرفتان وفق:

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n + 2s_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} s_0 = 12 \\ s_{n+1} = \dfrac{t_n + 3s_n}{4} \end{cases}$$

a) أثبت أن $s_n > t_n$

b) أثبت أن المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها.

c) أثبت أن s_n و t_n متجاورتان.

d) أثبت أن U_n المعرفة وفق: $U_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة، وجد قيمة حدها الثابت.

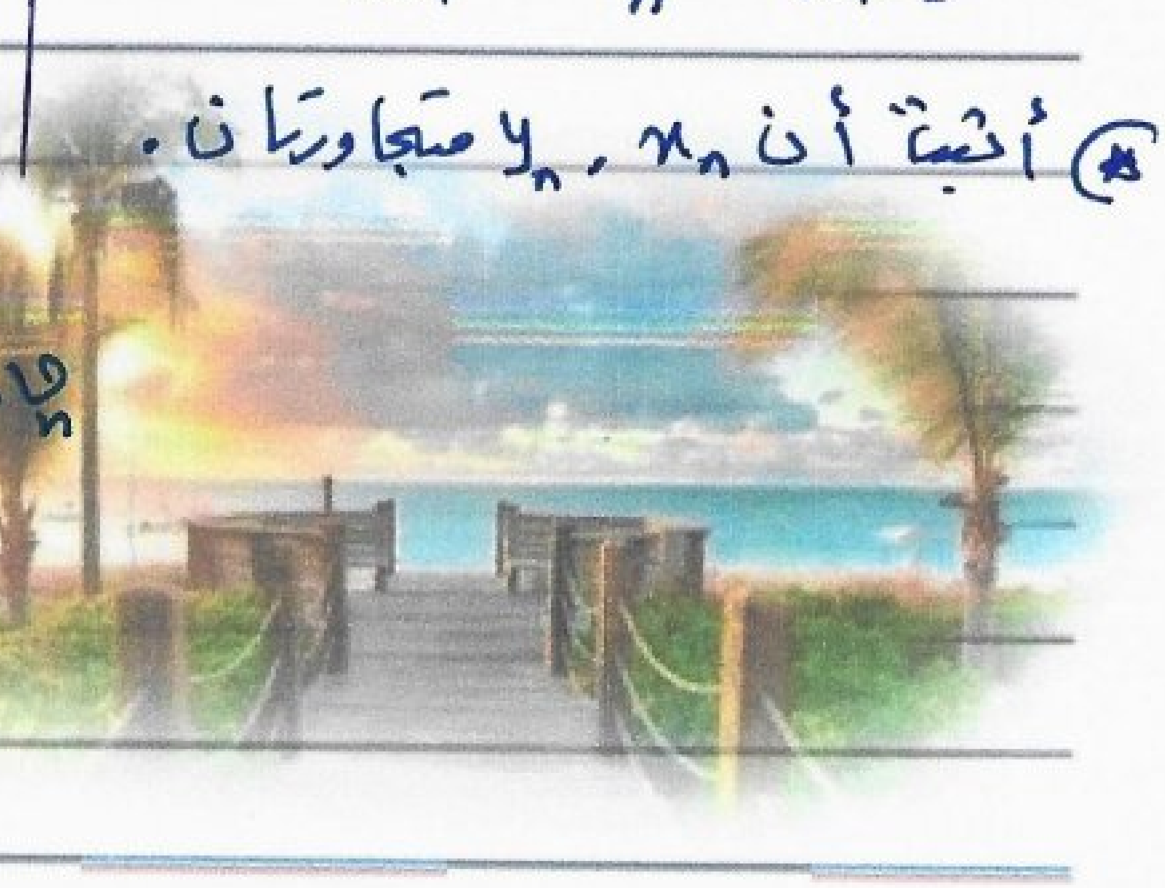
e) استنتج النهاية المشتركة لـ s_n و t_n.

التمرين (28):

x_n و y_n متتاليتان معرفتان وفق:

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

* أثبت أن x_n ، y_n متجاورتان.



التمرين (29):

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3 \end{cases}$$

ولتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $v_n = U_n - n + 1$

1- أثبت أن v_n هندسية جد أساسها وحدها الأول.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3- احسب بدلالة n المجاميع (المقادير) الآتية:

$$S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S_2 = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{2n}$$

$$S_3 = v_0 + \frac{v_1}{3} + \frac{v_2}{3^2} + \dots + \frac{v_n}{3^n}$$

$$S_4 = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \dots + 2^n v_n$$

$$S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

$$S_6 = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$S_7 = v_0 + v_2 + v_4 + \dots + v_{2n}$$

$$S_8 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

* $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

التمرين (30):

U_n متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

أولاً:

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية U_n.

1- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \leq n+3$

3- استنتج أن U_n محدودة من الأدنى، هل U_n متقاربة؟

ثانياً:

v_n متتالية معرفة وفق: $v_n = U_n - n$

a) أثبت أن v_n هندسية، عين أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

c) احسب $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

d) احسب بدلالة n المجموع:

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

ثالثاً:

t_n متتالية معرفة وفق: $t_n = \ln(v_n)$

a) أثبت أن t_n حسابية واحسب r، t_0

b) احسب بدلالة n المجموع:

$$A_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$$

ثم استنتج: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

تمارين متتاليات

حلول

التمرين الأول:

$U_6 = 9$ ، $U_3 = 3$

1- حساب r : $U_m = U_p + (m-p)\cdot r$

$U_6 = U_3 + (6-3)\cdot r$

$9 = 3 + 3r \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2$

حساب U_0 : $U_m = U_p + (m-p)\cdot r$

$U_3 = U_0 + (3-0)\cdot 2$

$3 = U_0 + 6 \Rightarrow U_0 = -3$

2- عبارة U_n : $U_m = U_p + (m-p)\cdot r$

$U_n = U_0 + (n-0)\cdot 2$

$U_n = -3 + 2n$

3- $U_n \overset{?}{=} 37$

$-3 + 2n = 37$

$2n = 40$

$n = 20$

$\Leftarrow$ العدد 37 هو حد من المتتالية U_n رتبته (21).

4- المجموع :

$n = 20 - 0 + 1 = 21$

$a = U_0 = -3$

$l = U_{20} = 37$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{21(-3+37)}{2}$

$= \frac{21 \times 34}{2} = 21 \times 17 = 357$

5- $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$a = U_0 = -3$

$l = U_n = -3 + 2n$

$n = n - 0 + 1 = n + 1$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{(n+1)(-3-3+2n)}{2}$

$S = \frac{(n+1)(-6+2n)}{2} = (n+1)(-3+n)$

التمرين الثاني:

$S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + 20$

$(\times 4)$

$4S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 80$

مجموع $n = 80$ من متتالية حسابية حدها الأول $a = 1$ ، وحدها الأخير $l = 80$.

$4S = n(a+l)$

$4S = \frac{80(1+80)}{2} \Rightarrow 4S = 40 \times 81$

$S = 10 \times 81 = 810$

$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \dots + 6$

$(\times 3)$

$3S_2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 18$

مجموع $n = 18$ من متتالية حسابية حدها الأول $a = 1$ وحدها الأخير $l = 18$

$\Rightarrow 3S_2 = \frac{n(a+l)}{2}$

$3S_2 = \frac{18(1+18)}{2} \Rightarrow 3S_2 = 9 \times 19$

$S_2 = 3 \times 19 = 57$

التمرين الثالث:

$a+b+c=9 \ldots (*)$

① - a - بما أن a , b , c حدود من متتالية حسابية فحسب خاصية الأوساط الحسابية:

$b=\frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b=a+c \ldots (**)$

بالتعويض في $(*)$:

$2b+b=9$

$3b=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

b - الحد الأول a

الحد الثاني $b=a+r \rightarrow a=b-r$

الحد الثالث $c=b+r$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow c=3+r \\ \Rightarrow a=3-r\end{array}\right\}(*)$

c - لدينا $a \cdot c=-16$

$(3+r)(3-r)=-16$

$9-r^2=-16$

$r^2=25$

$r=\mp 5$

بما أن المتتالية متزايدة

$\boxed{r=5}$

نعوض في $(*)$:

$c=8 \quad , \quad a=-2$

② - $r=5 \quad , \quad U_0=-2$

a - $U_m=U_p+(m-p) \cdot r$

$U_n=U_0+(n-0) \cdot 5$

$U_n=-2+5n$

$* \; U_{15}=-2+5(15)=-2+75=73$

$S=U_0+U_1+\ldots+U_{15}$

$n=15-0+1=16$

$a=U_0=-2$

$l=U_{15}=73$

$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{16(-2+73)}{2}$

$=8 \times 71=568$

③ - $V_n-8U_n=0$

$\Rightarrow V_n=8U_n \ldots (*)$

$V_0=8U_0$

$V_1=8U_1$

$V_2=8U_2$

$\vdots$

$V_n=8U_n$

$\Rightarrow S'=V_0+V_1+\ldots+V_n$

$=8U_0+8U_1+\ldots+8U_n$

$=8\underbrace{\left[U_0+U_1+\ldots+U_n\right]}_{\text{"مجموع حسابية"}}$ ← ع.م

$=8\left(\frac{n(a+l)}{2}\right)$

$=8 \cdot \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$

$=4 \cdot (n+1)(-2+5n)$

$S'=(4n+4)(-4+5n)$

التمرين الرابع:

$\begin{cases} U_0=\frac{1}{3} \\ U_{n+1}=\frac{U_n}{1+2U_n}\end{cases}$

① - $V_n=\frac{1}{U_n}+1$

$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}}+1=\frac{1}{\frac{U_n}{1+2U_n}}+1$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n} + 1 = \frac{2U_n}{U_n} + \frac{1}{U_n} + 1$$

$$= 2 + \frac{1}{U_n} + 1$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = 3 + \frac{1}{U_n}$$

نشكل الفرق:

$$v_{n+1} - v_n = 3 + \frac{1}{U_n} - \left(1 + \frac{1}{U_n}\right)$$

$$= 3 + \cancel{\frac{1}{U_n}} - 1 - \cancel{\frac{1}{U_n}} = 2 = r$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r=2$

وحدها الأول: $v_0 = \frac{1}{U_0} + 1 = 4$

② - عبارة v_n: $v_m = v_p + (m-p)\cdot r$

$$v_n = v_0 + (n-0)\cdot 2$$

$$v_n = 4 + 2n$$

عبارة U_n: $v_n = \frac{1}{U_n} + 1$

$$\Rightarrow v_n - 1 = \frac{1}{U_n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{4+2n-1} = \frac{1}{2n+3}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{2n+3}$$

③ - $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+3}\right) = 0$

نستنتج أن U_n متقاربة.

④ $S = v_1 + v_2 + \dots + v_{10}$

$n = 10 - 1 + 1 = 10$

$a = v_1 = 4 + 2(1) = 6$

$l = v_{10} = 4 + 2(10) = 24$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{10(6+24)}{2}$

$S = 5 \times 30$

$S = 150$

التمرين الخامس:

$U_n = 4n+1$

$U_{n+1} = 4(n+1)+1$

$= 4n+4+1 = 4n+5$

نشكل الفرق: $U_{n+1} - U_n = 4n+5-(4n+1)$

$= 4n+5-4n-1$

$= 4 = r$

فالمتتالية حسابية أساسها $r=4$

وحدها الأول: $U_0 = 4(0)+1 = 1$

المجموع: $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$

$n = 10-0+1 = 11$

$a = U_0 = 1$

$l = U_{10} = 4(10)+1 = 41$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{11(1+41)}{2}$

$= 11 \times 21 = 231$

التمرين السادس:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+4U_n} \end{cases}$$

① $E(n)$: « $U_n > 0$ »

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$U_0 = 2 > 0$

محققة $\Leftarrow$ $E(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$U_n > 0$ صحيحة.

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$U_{n+1} > 0$

* من الفرض:

$U_n > 0$

$\Rightarrow 4U_n > 0$

$\Rightarrow 1 + 4U_n > 0$

$\Rightarrow \frac{U}{1+4U_n} > 0$

$\downarrow$

$U_{n+1} > 0$ محققة

فالعلاقة صحيحة من أجل $n+1$

$\Leftarrow$ العلاقة صحيحة من أجل n.

التمرين السابع:

بما أنه a ، b ، c حدود متوالية من متتالية هندسية فحسب تعريف المتتالية الهندسية

الحد الأول a

الحد الثاني $b = a.q$

الحد الثالث $c = b.q = a.q^2$

وبما أنه $12a$ ، $5b$ ، $2c$ ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية فحسب خاصية الوسط الحسابية:

$$5b = \frac{2c+12a}{2}$$

$$\Rightarrow 10b = 2c + 12a$$

$$10aq = 2aq^2 + 12a$$

نقسم على $2a \neq 0$:

$$5q = q^2 + 6$$

$$\Rightarrow q^2 - 5q + 6 = 0$$

$$(q-3)(q-2) = 0$$

إما $q = 3$ أو $q = 2$

التمرين الثامن:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{-1+2U_n}{U_n} \end{cases} \quad , \quad V_n = \frac{1}{U_n - 1}$$

ⓐ

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{-1+2U_n}{U_n} - 1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1+2U_n-U_n}{U_n}} = \frac{1}{\dfrac{U_n-1}{U_n}}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n}{U_n - 1}$$

نشكل الفرق

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{U_n}{U_n-1} - \frac{1}{U_n-1} = \frac{U_n-1}{U_n-1} = 1 = r$$

فالمتتالية حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول

② -

$$V_n = \frac{1}{U_n}$$

ⓐ -

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{U_n}{1+4U_n}} = \frac{1+4U_n}{U_n}$$

$$= \frac{1}{U_n} + \frac{4U_n}{U_n}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{U_n} + 4$$

نشكل الفرق:

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_n} + 4 - \frac{1}{U_n} = 4 = r$$

فالمتتالية V_n حسابية أساسها $r=4$

وحدها الأول: $V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{2}$

ⓑ عبارة V_n: $V_m = V_p + (m-p).r$

$$V_n = V_0 + (n-0).4$$

$$V_n = \frac{1}{2} + 4n = \frac{8n+1}{2}$$

عبارة U_n:

$$V_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{\frac{8n+1}{2}}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{2}{8n+1}$$

ⓒ -

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$a = V_0 = \frac{1}{2}$$

$$l = V_n = \frac{8n+1}{2}$$

$$n = n - 0 + 1 = n+1$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{8n+1}{2}\right)}{2}$$

$$S_n = (n+1)\frac{\frac{8n+2}{2}}{2} = \frac{(n+1)(4n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(4n+1)}{2} = \infty$$

$$(y-45)(y-5)=0$$

إما $y=45 \Rightarrow x=5$

أو $y=5 \Rightarrow x=45$

التمرين العاشر:

$$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$$

$$v_n = \ln(U_n) - 2$$

ⓐ $v_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2$

$= \ln(e\cdot\sqrt{U_n}) - 2$

$= \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2$

$= 1 + \ln U_n^{\frac{1}{2}} - 2$

$= \frac{1}{2}\ln U_n - 1$

$= \frac{1}{2}(\ln U_n - 2)$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}(\ln(U_n) - 2)}{\ln U_n - 2} = \frac{1}{2} = q$$

فالمتتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a=v_0=1$ حيث:

$v_0 = \ln(U_0) - 2 = \ln e^3 - 2 = 3-2=1$

ⓑ عبارة v_n: $v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$

$v_n = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

عبارة U_n:

$v_n = \ln(U_n) - 2 \Rightarrow v_n + 2 = \ln(U_n)$

$\Rightarrow U_n = e^{v_n+2}$

$\Rightarrow U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

ⓒ
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2} = e^{0+2} = e^2$$

حيث: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

التمرين الحادي عشر:

بفرض U_n متتالية ثابتة أي: $U_{n+1} = U_n$

$$v_0 = \frac{1}{U_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

ⓑ عبارة v_n بدلالة n: $v_m = v_p + (m-p)\cdot r$

$v_n = v_0 + (n-0)\cdot 1$

$\Rightarrow v_n = 1+n$

عبارة U_n: $v_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$

$$\Rightarrow U_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{1} = \frac{n+1+1}{n+1}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{n+2}{n+1}$$

ⓒ $S = v_0 + v_1 + \dots + v_7$

$n = 7-0+1 = 8$

$a = v_0 = 1$

$l = v_7 = 1+7 = 8$

$$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{8(1+8)}{2}$$

$S = 4\times 9 = \boxed{36}$

التمرين التاسع:

$x, 15, y$ حدود هندسية

$15^2 = x.y$

$225 = x.y$ ——— $(*)$

x و 25 , y حدود حسابية

$$25 = \frac{x+y}{2}$$

$\Rightarrow 50 = x+y$ ——— $(**)$

من $(*)(*)$ نعزل x: $x = 50 - y$ —(3)

نعوض في $(*)$:

$(50-y)y = 225$

$50y - y^2 = 225$

$y^2 - 50y + 225 = 0$

لإثبات أن U_n حسابية: نشكل الفرق:

$$U_{n+1} - U_n = U_n - U_n = 0 = r$$

فالمتتالية حسابية

أساسها $r = 0$.

لإثبات أن U_n هندسية: نشكل النسبة:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n}{U_n} = 1 = q$$

فالمتتالية هندسية

أساسها $q = 1$.

التمرين الثاني عشر:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n} \end{cases}$$

① - $E(n)$: « $0 < U_n < 1$ »

* نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$0 < U_0 = \frac{1}{2} < 1$ محققة

⇐ $E(0)$ صحيحة

* نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$0 < U_n < 1$ «صحيحة»

* نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$0 < U_{n+1} < 1$

نغير شكل U_{n+1}:

$$\begin{array}{r|l} U_n & -U_n + 2 \\ \hline \mp U_n \pm 2 & -1 \\ 2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -1 + \frac{2}{2 - U_n} \quad ...(*)$$

من الفرض: $0 < U_n < 1$

نضرب بـ (-1): $0 > -U_n > -1$

نضيف (2): $2 > 2 - U_n > 1$

نقسم على (2): $1 > \frac{2 - U_n}{2} > \frac{1}{2}$

نقلب:

$$1 < \frac{2}{2 - U_n} < 2$$

نطرح (1):

$$0 < -1 + \frac{2}{2 - U_n} < 1$$

$$0 < U_{n+1} < 1$$

محققة ⇐ $E(n+1)$ صحيحة

⇐ العلاقة صحيحة مهما تكن n.

②-a

$$v_n = \frac{1}{U_n} - 1 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{U_n}{2 - U_n}} - 1$$

$$= \frac{2 - U_n}{U_n} - 1$$

$$= \frac{2 - U_n - U_n}{U_n}$$

$$= \frac{2 - 2U_n}{U_n}$$

$$= \frac{2(1 - U_n)}{U_n} = 2\left(\frac{1}{U_n} - \frac{U_n}{U_n}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)}{\frac{1}{U_n} - 1} = 2 = q$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = 2$

وحدها الأول: $v_0 = \frac{1}{U_0} - 1 = 1$

ⓑ - عبارة v_n:

$$v_m = v_p * q^{m-p} \Rightarrow v_n = v_0 \cdot (2)^{n-0}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_n = 2^n}$$

ⓒ عبارة U_n:

$$v_n = \frac{1}{U_n} - 1$$

$$v_n + 1 = \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2^n+1}$$

-3 $$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n+1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

حيث: $\lim_{n\to\infty} 2^n = 0$

التمرين الثالث عشر:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{5U_n+4}{U_n+2} \end{cases}$$

$$v_n = \frac{U_n-4}{U_n+1}$$

-1 $$v_{n+1} = \frac{U_{n+1}-4}{U_{n+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{5U_n+4}{U_n+2} - 4}{\frac{5U_n+4}{U_n+2} + 1} = \frac{\frac{5U_n+4-4U_n-8}{\cancel{U_n+2}}}{\frac{5U_n+4+U_n+2}{\cancel{U_n+2}}} = \frac{U_n-4}{6U_n+6}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{U_n-4}{U_n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{6}\left(\frac{\frac{U_n-4}{U_n+1}}{\frac{U_n-4}{U_n+1}}\right) = \frac{1}{6} = q$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$

وحدها الأول: $v_0 = \frac{U_0-4}{U_0+1} = \frac{\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}+1}$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{-7}{3}$$

-2 $$v_m = v_p \cdot q^{m-p}$$

$$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$$

$$v_n = -\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) = 0 \Leftarrow$$

لأن: $-1 < q = \frac{1}{6} < 1$

-3 عبارة U_n: $v_n = \frac{U_n-4}{U_n+1}$

$$\Rightarrow v_n U_n + v_n = U_n - 4$$

$$\Rightarrow v_n U_n - U_n = -4 - v_n$$

$$U_n(v_n - 1) = -4 - v_n$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{-4-v_n}{v_n-1} = \frac{v_n+4}{1-v_n} = \frac{-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n+4}{1+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{0+4}{1+0} = 4$$

U_n متقاربة.

التمرين الرابع عشر:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$$

$$v_n = U_n + 6$$

1 أ - $$v_{n+1} = U_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}U_n - 3 + 6$$

$$= \frac{1}{2}U_n + 3$$

$$= \frac{1}{2}(U_n + 6)$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n+6}{U_n+6}\right) = \frac{1}{2} = q$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

و حدها الأول: $v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8$

b - عبارة v_n : $v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} \Rightarrow \boxed{v_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c - عبارة u_n : $v_n = u_n + 6$

$\Rightarrow u_n = v_n - 6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

2 - $w_n = \ln(v_n)$

a) $w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

$\Rightarrow w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$

$= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

$= r$

فالمتتالية w_n حسابية أساسها $r = -\ln 2$

و حدها الأول $w_0 = a = \ln(v_0) = \ln 8$

b) عبارة w_n : $w_m = w_p + (m-p) \cdot r$

$w_n = w_0 + (n-0) \cdot (-\ln 2)$

$w_n = \ln 8 - n \ln 2$

$w_n = \ln 8 - \ln 2^n = \ln\left(\frac{8}{2^n}\right)$

c - $w_5 = \ln\left(\frac{8}{2^5}\right) = \ln\left(\frac{8}{32}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$

$a = w_0 = \ln 8$

$l = w_5 = -\ln 4$

$n = 5 - 0 + 1 = 6$

$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{6(\ln 8 - \ln 4)}{2}$

$= 3 \ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

التمرين الخامس عشر

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

1 - « $u_n > 1$ » : $E(n)$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 0$:

$E(0)$: $u_0 = e > 1$

محققة ⟸ $E(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$E(n)$: $u_n > 1$ (صحيحة)

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$E(n+1)$: $u_{n+1} > 1$

من الفرض لدينا:

$u_n > 1$

بجذر الطرفين:

$\sqrt{u_n} > \sqrt{1}$

$u_{n+1} > 1$ محققة

⟸ $E(n+1)$ صحيحة

⟸ $E(n)$ صحيحة مهما تكن n من $\mathbb{N}$.

2 - اتجاه u_n :

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n$

$= \frac{(\sqrt{u_n} - u_n)(\sqrt{u_n} + u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n}$

$= \frac{u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n} + u_n} = \frac{u_n(1 - u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n}$

من الطلب الأول وجدنا: $u_n > 1$

$1 - u_n < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

⟸ u_n متناقصة.

بما أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $m=1$ فهي متقاربة.

3-a)

$$v_n = \ln(U_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln(\sqrt{U_n}) = \frac{1}{2}\ln U_n$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}\ln U_n}{\ln U_n} = \frac{1}{2} = q$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول: $v_0 = \ln U_0 = \ln e = 1$

b- عبارة v_n: $\quad v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

$$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

عبارة U_n:

$$v_n = \ln(U_n) \Rightarrow U_n = e^{v_n}$$

$$\Rightarrow U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c-

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = e^0 = 1$$

4-1)

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$n = n - 0 + 1 = n+1$$

$$a = v_0 = 1$$

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$$

$$= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^0} \times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \times \dots \times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$P_n = e^{S_n} = e^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

-2)

$$P_n = e^{\frac{7}{4}} \rightarrow \cancel{e}^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \cancel{e}^{\frac{7}{4}}$$

$$2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{7}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2 - \frac{7}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^3}$$

$$\rightarrow 2^{n+1} = 2^3 \rightarrow n+1 = 3$$

$$\boxed{n=2}$$

التمرين السادس عشر:

$$U_n = \frac{6n + 5(-1)^n}{3n}$$

1-

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

$$-5 \le 5(-1)^n \le 5$$

$$6n-5 \le 6 + 5(-1)^n \le 6n+5$$

$$\frac{6n-5}{3n} \le \frac{6+5(-1)^n}{3n} \le \frac{6n+5}{3n}$$

$$\frac{6n-5}{3n} \le U_n \le \frac{6n+5}{3n}$$

2- نهاية الأطراف في جوار ∞ :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{6n-5}{3n} = \frac{6n}{3n} = 2$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{6n+5}{3n} = \frac{6n}{3n} = 2$$

فحسب مبرهنة الحافة: $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$

3- بما أن $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$ فالمتتالية متقاربة.

التمرين السابع عشر

$$U_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

1- $$U_n = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= 2 - \left[a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right]$$

$$= 2 - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= 2 - 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2- $$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$$

حيث $\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

التمرين الثامن عشر

$$U_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

1- $$U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1+1} = \frac{2n+2-1}{n+2} = \frac{2n+1}{n+2}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{2n+1}{n+2}_{(n+1)} - \frac{2n-1}{n+1}_{(n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{n} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{2n^2} + \cancel{n} - \cancel{4n} + 2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0$$

U_n متزايدة.

2- $$U_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2}{1} = \frac{2n-1-2n-2}{n+1}$$

$$= \frac{-3}{n+1} < 0$$

$U_n < 2 \Leftarrow U_n - 2 < 0 \Leftarrow$

$M = 2$ عنصر راجح على U_n.

3- $$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) = 2$$

* تعيين n_0:

$$l = \frac{a+b}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = 0.1$$

$$|U_n - l| < r$$

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - \frac{2}{1}\right| < 0.1$$

$$\left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{n+1}{3} > 10$$

$$\Rightarrow n+1 > 30$$

$$n > 29$$

$$\boxed{n_0 = 29}$$

التمرين التاسع عشر:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{2}{U_n} \end{cases}$$

1- $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

ندرس إتجاه تغير f على المجال $[2,+\infty[$:

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$

$(x^2) \quad (2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

إما $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$

أو $x = -2$ مرفوض

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

⇐ f متزايد على المجال $[2,+\infty[$

2- $E(n)$: « $2 < U_{n+1} < U_n$ »

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$2 < U_1 < U_0$

$2 < \frac{13}{6} < 3$ محققة

محققة ⇐ $E(0)$ صحيحة

« توضيح: $U_1 = \frac{U_0}{2} + \frac{2}{U_0} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$ »

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$2 < U_{n+1} < U_n$ (صحيحة)

• نثبت صحة العلاقة من أجل n+1 :

$2 < U_{n+2} < U_{n+1}$

« بما أن f متزايد تماما ⇐ نضع صور الجمل »

$f(2) < f(U_{n+2}) < f(U_{n+1})$

$2 < U_{n+1} < U_n$

وهي محققة من فرضنا

⇐ $E(n+1)$ صحيحة

⇐ $E(n)$ صحيحة.

3- من الطلب السابق وجدنا أن

$2 < U_{n+1} < U_n$

$U_{n+1} < U_n$ ← U_n متناقصة

$2 < U_n$ ← U_n محدودة من الأدنى بالعدد $m=2$

U_n متقاربة

لأنها متناقصة ومحدودة من الأدنى.

نهاية U_n : $f(x) = x$

$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x}{1}$

$(x) \quad (2) \quad (2x)$

$\frac{x^2+4}{2x} = \frac{2x^2}{2x}$

$x^2 + 4 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

إما $x = 2$ أو $x = -2$ (مرفوض)

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} U_n = 2$

التمرين العشرون:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2 \end{cases}$$

أولاً: A

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

$= U_n^2 - 2U_n + 1 - 1 + 2$

$= (U_n - 1)^2 + 1$

b) $E(n)$: « $1 \le U_n \le 2$ »

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$1 \le U_0 = \frac{3}{2} \le 2$ محققة

⇐ $E(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$1 \le U_n \le 2$ « صحيح »

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$1 \le U_{n+1} \le 2$

من الفرض :

$1 \le U_n \le 2$

$0 \le U_n - 1 \le 1$

$0 \le (U_n - 1)^2 \le 1$

$1 \le (U_n - 1)^2 + 1 \le 2$

$1 \le U_{n+1} \le 2$

محققة ⇐ $E(n+1)$ صحيحة

⇐ $E(n)$ صحيحة.

ثانيا : a) $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

$l_1 = U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 2 - U_n$

$= U_n^2 - 3U_n + 2$

$= (U_n - 2)(U_n - 1) = l_2$

b) بما أن $1 \le U_n \le 2$

بما أن $U_n - 1 \ge 0$ و $U_n - 2 \le 0$

$U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1) \le 0$

⇐ U_n متناقصة

ثالثا a) بما أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $m = 1$

فهي متقاربة.

b) نهاية المتتالية U_n :

$\lim_{n \to \infty} U_n = ?$

$f(x) = x$

$x^2 - 2x + 2 = x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

إما $x = 2$ أو $x = 1$

مرفوض (مقبول)

التمرين الواحد والعشرين :

$U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$

1) $E(n)$: « $n \le 2^n$ »

* نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$1 \overset{?}{\le} 2^1$

$1 \le 2$ (محققة)

$\Rightarrow$ $E(1)$ صحيحة

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$n \le 2^n$ (صحيحة)

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$n+1 \le 2^{n+1}$

* من الفرض :

$n \le 2^n$

$2n \le 2^n \cdot 2^1$

$2n \le 2^{n+1}$

$n+1 \le 2n \le 2^{n+1} \Rightarrow n+1 \le 2^{n+1}$

محققة

⇐ $E(n+1)$ صحيحة

⇐ $E(n)$ صحيحة.

2- من الطلب السابق وجدنا أن

$n < 2^n$

أي:

$1 < 2^1$

$2 < 2^2$

$\vdots$

$n < 2^n$

$$\Rightarrow U_n < \frac{2^1}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \dots + \frac{2^n}{e^n}$$

$$U_n < \left(\frac{2}{e}\right)^1 + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

أساسها $q = \frac{2}{e}$ وحدها الأول $a = \frac{2}{e}$

وعدد الحدود n.

$$\Rightarrow U_n < a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\Rightarrow U_n < \frac{2}{e} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}$$

$$U_n < \frac{2}{e} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{\frac{e-2}{e}}$$

$$U_n < \frac{2}{\cancel{e}} \cdot \frac{\cancel{e}}{e-2} \cdot \left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$$

$$U_n < \frac{2}{e-2}\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$$

صغير .. يهمل

$$U_n < \frac{2}{e-2}$$

⇐ $M = \frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على U_n.

3- ندرس اطراد U_n:

$$U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

⇐ U_n متزايدة

* بما أنه U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين الثاني والعشرون

1- " محلول أول طلب في التمرين السابق!!

2- من الطلب السابق وجدنا: $n < 2^n$

$1 < 2^1$

$2 < 2^2$

$\vdots$

$$\Rightarrow U_n < \frac{2^1}{5^1} + \frac{2^2}{5^2} + \dots + \frac{2^n}{5^n}$$

$$\Rightarrow U_n < \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

مجموع n حدًا متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

وحدها الأول $a = \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow U_n < a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$U_n < \frac{2}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}$$

$$U_n < \frac{2}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}}$$

$$U_n < \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} \cdot \left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$U_n < \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

3- $$U_n < \frac{2}{3} - \underline{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

صفر

$$U_n < \frac{2}{3}$$

$M = \frac{2}{3}$ عنصر راجح على U_n

4- $$U_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n} + \frac{n+1}{5^{n+1}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{5^{n+1}} > 0$$

U_n متزايدة.

5- بما أنه U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين الثالث والعشرون:

$$U_n = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

I- $$U_n = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} - \frac{n!}{(n+1)\cdot n!}$$

$$= \frac{1}{n}_{(n+1)} - \frac{1}{n+1}_{(n)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

II- ب:

$$U_n = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ج:

$$U_n = \frac{a}{n}_{(n+1)} + \frac{b}{n+1}_{(n)}$$

$$U_n = \frac{an+a+bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 1 = (a+b)n + a$$

نطابق:

$a+b=0$ —— ①

$a=1$ —— ②

نعوض ② في ①:

$$1+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

III- $$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

a)

$$U_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

نجمع:

$$S = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

التمرين الرابع والعشرون:

$$U_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

1- اطراد U_n:

$$U_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$$

نشكل الفرق:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

$\Leftarrow$ U_n متزايدة

اطراد V_n:

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

نشكل الفرق:

$$V_{n+1} - V_n = \underbrace{U_{n+1} - U_n}_{\downarrow} + \frac{1}{2^{n+1}}_{(1)} - \frac{1}{2^n}_{(2)}$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1-2}{2^{n+1}}$$

إشارة الأكبر

$$= \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

الكسر الأصغر ←

المقام الأكبر ←

V_n متناقصة

2- نحسب نهاية الفرق:

$$\lim_{n\to\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n\to\infty} \left(U_n - U_n - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

بما أن U_n متزايدة و V_n متناقصة

و $\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$

فالمتتاليتان U_n و V_n متجاورتان.

3- $U_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{5}\right)^n$

مجموع n حدود متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{5}$ وحدها الأول $a=\frac{1}{5}$

$U_n = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1-(\frac{1}{5})^n}{1-\frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1-(\frac{1}{5})^n}{\frac{4}{5}}$

$=\frac{1}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\right) = \frac{1}{4}$

صفر

وبما أن U_n و V_n متجاورتان فإن $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{4}$

التمرين الخامس والعشرين:

$U_n = \ln\left(\frac{n\cdot e^n}{n+1}\right)$

$=\ln\left(\frac{n}{n+1}\cdot e^n\right)$

$=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln e^n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + n$

$U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + n$

نعوض: $U_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)+1$

$U_2=\ln\left(\frac{2}{3}\right)+2$

$U_3=\ln\left(\frac{3}{4}\right)+3$

$\vdots$

نجمع:

$S = U_1+U_2+\dots+U_n$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)+1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+2+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+3$

$+\dots+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+n$

$=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\dots+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$\boxed{+}\ \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\text{حسابية}}$

$=\ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{4}\times\dots\times\frac{\cancel{n}}{n+1}\right)$

$+\ \frac{n(a+l)}{2}$

$=\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{n(1+n)}{2}$

$S_n = -\ln(n+1)+\frac{n^2+n}{2}$

التمرين السادس والعشرون:

$$\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=3U_n+2n+1\end{cases}$$

$V_n = U_n+\alpha n+\beta$

1- بما أن V_n هندسية فإن:

$V_{n+1}=V_n\cdot q$ ---(*)

نحسب V_{n+1}:

التمرين السابع والعشرين :

$$\begin{cases} S_0 = 12 \\ S_{n+1} = \dfrac{t_n + 3S_n}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n + 2S_n}{3} \end{cases}$$

1) $E(n) : « \; S_n > t_n \; »$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 0$:

$S_0 = 12$ ، $t_0 = 1$

$S_0 > t_0$

$\Leftarrow E(0)$ صحيحة

• نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$S_n > t_n$ (صحيحة)

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$S_{n+1} > t_{n+1}$

أي : $S_{n+1} - t_{n+1} > 0$

$$S_{n+1} - t_{n+1} = \frac{t_n + 3S_n}{4} - \frac{t_n + 2S_n}{3}$$

$$= \frac{3t_n + 9S_n - 4t_n - 8S_n}{12}$$

$$= \frac{S_n - t_n}{12} = \frac{1}{12}(S_n - t_n) > 0$$

لأنه من الفرض $S_n > t_n \Rightarrow S_n - t_n > 0$

$\Leftarrow E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow E(n)$ صحيحة .

2) نعرف

$h_n = S_n - t_n$

$h_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1} = \frac{1}{12}(S_n - t_n)$

$$\Rightarrow \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{1}{12}\frac{\cancel{(S_n - t_n)}}{\cancel{S_n - t_n}} = \frac{1}{12} = q$$

المتتالية h_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$

$\lim_{n \to \infty} (S_n - t_n) = 0 \quad \left(-1 < q = \frac{1}{12} < 1\right)$

$$v_{n+1} = U_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta$$

$$= 3U_n + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$= 3(v_n - \alpha n - \beta) + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$= 3v_n - 3\alpha n - 3\beta + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$v_{n+1} = 3v_n \; \underbrace{- 2\alpha n - 2\beta + 2n + 1 + \alpha}$$

$$v_{n+1} = q \cdot v_n + 0$$

$\Rightarrow -2\alpha n - 2\beta + 2n + 1 + \alpha = 0$

$(-2\alpha + 2)n - 2\beta + \alpha + 1 = 0$

$-2\alpha + 2 = 0$ —— (1)

$-2\beta + \alpha + 1 = 0$ —— (2)

من (1) نجد : $\alpha = 1$

نعوض في (2) :

$-2\beta + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$

$\Rightarrow v_n = U_n + n + 1$

$\Rightarrow v_0 = U_0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = 1}$

$\Rightarrow v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

$v_n = v_0 \cdot 3^{n-0} \Rightarrow \boxed{v_n = 3^n}$

$\Leftarrow$ عبارة U_n : $\quad U_n = v_n - \alpha n - \beta$

$\Rightarrow U_n = 3^n - n - 1$

ⓒ ندرس اطراد S_n :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{t_n + 3S_n}{4} - \frac{S_n}{1}$$

$$= \frac{t_n + 3S_n - 4S_n}{4}$$

$$= \frac{t_n - S_n}{4} < 0$$

⇐ S_n متناقصة

ندرس اطراد t_n :

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n + 2S_n}{3} - \frac{t_n}{1}$$

$$= \frac{t_n + 2S_n - 3t_n}{3} = \frac{2S_n - 2t_n}{3} > 0$$

⇐ t_n متزايدة.

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - t_n) = 0$ (حسب الطلب السابق)

فالمتتاليتان U_n و V_n متجاورتان.

ⓓ $U_n = 3t_n + 8S_n$

$$U_{n+1} = 3t_{n+1} + 8S_{n+1}$$

$$= \cancel{3}\left(\frac{t_n + 2S_n}{\cancel{3}}\right) + \cancel{8}^{2}\left(\frac{t_n + 3S_n}{\cancel{4}}\right)$$

$$= t_n + 2S_n + 2t_n + 6S_n$$

$$= 3t_n + 8S_n = U_n$$

⇐ $U_{n+1} = U_n$ فالمتتالية U_n ثابتة.

* قيمتها الثابتة: $U_0 = U_1 = \dots = U_n$

$$U_0 = 3t_0 + 8S_0$$

$$= 3(1) + 8(12) = 3 + 96 = 99$$

$$U_n = U_0 = 99$$

ⓔ $U_n = 3t_n + 8S_n$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(3t_n + 8S_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(3t_n) + \lim_{n\to\infty}(8S_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 3\lim_{n\to\infty} t_n + 8\lim_{n\to\infty} S_n$$

بما أن S_n و t_n متجاورتان فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} t_n = l$$

و U_n ثابتة ⇐ $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U_0 = 99$

$$\Rightarrow 99 = 3l + 8l$$

$$99 = 11l \Rightarrow l = 9$$

وهي النهاية المشتركة للمتتاليتين t_n و S_n.

التمرين الثامن والعشرون:

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

$$y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

* ندرس اطراد x_n :

$$x_{n+1} = \frac{4(n+1)+5}{n+1+1} = \frac{4n+4+5}{n+2} = \frac{4n+9}{n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+9}{n+2}\,(n+1) - \frac{4n+5}{n+1}\,(n+2)$$

$$= \frac{\cancel{4n^2} + 9n + 4n + 9 - \cancel{4n^2} - 5n - 8n - 10}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

⇐ x_n متناقصة.

* ندرس اطراد y_n :

$$y_{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1+2} = \frac{4n+4+1}{n+3} = \frac{4n+5}{n+3}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4n+5}{n+3}\,(n+2) - \frac{4n+1}{n+2}\,(n+3)$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4n^2+5n+8n+10-(4n^2+12n+n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

y_n متزايدة.

نحسب الفرق:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}\right)$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$\Leftarrow$ x_n و y_n متجاورتان.

التمرين التاسع والعشرون:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3 \end{cases}$$

$$V_n = U_n - n + 1$$

1) $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) + 1$

$$= 3U_n - 2n + 3 - n - 1 + 1$$

$$= 3U_n - 3n + 3 = 3(U_n - n + 1)$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3\cancel{(U_n - n + 1)}}{\cancel{U_n - n + 1}} = 3 = q$$

فالمتتالية V_n هندسية أساسها $q = 3$

وحدها الأول:

$$V_0 = U_0 - 0 + 1 = 1$$

2) $V_m = V_p \cdot q^{m-p}$

$$V_n = V_0 \cdot 3^{n-0}$$

$$V_n = 1 \cdot 3^n \Rightarrow V_n = 3^n$$

عبارة U_n:

$$V_n = U_n - n + 1$$

$$\Rightarrow U_n = V_n + n - 1$$

$$U_n = 3^n + n - 1$$

3) $S_1 = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $a = V_0 = 1$ وعدد الحدود $n+1$

* $S_1 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2}$

$S_2 = V_n + V_{n+1} + \dots + V_{2n}$

متتالية هندسية:

$$q = 3, \quad a = V_n = 3^n$$

$$n = 2n - n + 1 = n + 1$$

* $\Rightarrow S_2 = 3^n \cdot \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 3^n \cdot \frac{3^{n+1}-1}{2}$

$S_3 = V_0 + \frac{V_1}{3} + \dots + \frac{V_n}{3^n}$

نبدأ من الحد الأخير: $\frac{V_n}{3^n} = \frac{3^n}{3^n} = 1$

فالمجموع لمتتالية ثابتة

حدها الثابت $a = 1$ وعدد الحدود $n+1$

* S_3 = القيمة الثابتة × عدد الحدود $= (n+1) \cdot 1$

* $S_4 = V_0 + 2V_1 + 2^2 V_2 + \dots + 2^n \cdot V_n$

نبدأ من الحد الأخير:

$$2^n \cdot V_n = 2^n \cdot 3^n = (2 \times 3)^n = 6^n$$

متتالية هندسية أساسها $q = 6$

حدها الأول $a = V_0 = 1$ وعدد الحدود $n+1$

$$S_4 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-6^n}{1-6}$$

* $S_4 = \frac{6^n - 1}{5}$

* $S_5 = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$

نبدأ من الحد الأخير:

$$\frac{1}{V_n} = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

عدد الحدود $n+1$ وحدها الأول $a=\frac{1}{v_0}=1$

$$\Rightarrow S_5 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

* $S_6 = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

نبدأ من الحد الأخير:

$$U_n = \underbrace{V_n}_{\text{هندسية}} + \underbrace{n-1}_{\text{حسابية}}$$

$w_n = n-1$

w_n حسابية أساسها $r=1$

وحدها الأول $a=0-1$

$a=-1$

وعدد الحدود: $n-0+1 = n+1$

والحد الأخير $l = w_n = n-1$

V_n هندسية: أساسها $q=3$ وحدها الأول $a=1$ عدد الحدود n

$$\rightarrow S_6 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{n(a+l)}{2}$$

$$= 1 \cdot \frac{1-(3)^n}{1-3} + \frac{(n+1)(-1+n-1)}{2}$$

$$= \frac{3^n-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

* $S_7 = V_0 + V_2 + V_4 + \dots + V_{2n}$

نبدأ من الحد الأخير:

$$V_{2n} = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$$

هندسية أساسها $q=9$ وحدها الأول

$$V_0 = 9^0 = 1$$

وعدد الحدود: $n = \frac{2n-0}{2}+1 = \frac{2n}{2}+1 = n+1$

$$S_7 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \frac{9^{n+1}-1}{8}$$

* $S_8 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$$S_8 = \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \dots \times \frac{\cancel{n}}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)$$

* $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

$$= 3^0 \times 3^1 \times 3^2 \times \dots \times 3^n$$

$$= 3^{0+1+2+\dots+n}$$

(الأس: مجموع الحدود حسابية.)

$$= 3^{\frac{n(a+l)}{2}} = 3^{\frac{(n+1)(n+0)}{2}} = 3^{\frac{n^2+n}{2}}$$

التمرين الثلاثون:

$U_0 = 2$

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$$

I.

II. $E(n)$: " $U_n < n+3$ "

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$U_0 = 2 < 0+3$

$2 < 3$ محققة

$\Leftarrow E(0)$ صحيحة

- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$U_n < n+3$ (صحيحة).

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$U_{n+1} < n+1+3$

$U_{n+1} < n+4 \quad \dots (*)$

من الفرض: $U_n < n+3$

$\times\left(\frac{2}{3}\right)$: $\frac{2}{3}U_n < \frac{2}{3}n + 2$

$\left(+\frac{1}{3}n+1\right)$

$$\frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 < \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$$

$U_{n+1} < n+3$ محققة

$\Leftarrow E(n+1)$ صحيحة.

⇐ $E(n)$ صحيحة.

② - إطراد U_n: $U_{n+1} - U_n$

$= \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - U_n$

$= -\frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 = +\frac{1}{3}(-U_n + n + 3) > 0$

⇐ U_n متزايدة

" من الطلب السابق وجدنا أنه $U_n < n+3$

$\Leftrightarrow -U_n + n + 3 \geq 0$

③ - لدينا $U_0 = 2$ والمتتالية U_n متزايدة إذاً من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n \geq 2$

⇐ U_n محدودة من الأسفل بالعدد $m = 2$.

" لا يمكن القول بأنها متقاربة ".

II - $V_n = U_n - n$

a- $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1)$

$= \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

$= \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}n$

$= \frac{2}{3}(U_n - n)$

$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{2}{3}(\cancel{U_n - n})}{\cancel{U_n - n}} = \frac{2}{3} = q$

فالمتتالية V_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول: $a = V_0 = U_0 - 0$

$= 2 - 0 = 2$

b- عبارة V_n: $V_m = V_p \cdot q^{m-p}$

$V_n = V_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-0}$

$V_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

عبارة U_n:

$V_n = U_n - n \Rightarrow U_n = V_n + n$

$\Rightarrow U_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c- $\lim_{n \to 0} U_n = \lim_{n \to \infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow 0 \quad\quad \downarrow \infty$

$= \infty$

d- $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$U_0 = V_0 + 0$

$U_1 = V_1 + 1$

$U_2 = V_2 + 2$

$U_3 = V_3 + 3$

$\vdots$

$U_n = V_n + n$

$\Rightarrow S = \underbrace{V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n}_{\text{هندسية}} + \underbrace{(0 + 1 + 2 + \dots + n)}_{\text{حسابية}}$

$= a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{n(a + l)}{2}$

$= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{(n+1)(0+n)}{2}$

$= 2 \times \frac{3}{1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$

$= 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n^2 + n}{2}$

III - $t_n = \ln(V_n)$

a- $t_{n+1} = \ln(V_{n+1})$

$\to t_{n+1} - t_n = \ln(V_{n+1}) - \ln(V_n)$

$= \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = r$

فالمتتالية t_n حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

وحدها الأول: $t_0 = \ln V_0 = \ln 2$

ب - عبارة t_n : $t_m = t_p + (m-p)\cdot r$

$t_n = t_0 + (n-0)\cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$t_n = \ln 2 + n \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= \ln\left(2 \cdot \frac{2^n}{3^n}\right)$

$\Rightarrow t_n = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$

$A_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$

$a = t_0 = \ln 2$

$n = n - 0 + 1 = n+1$

$l = t_n = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$

$\Rightarrow A_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{(n+1)\left(\ln 2 + \ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}$

$= \frac{(n+1)\left(2\ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}$

$= \frac{(n+1)\left(\ln 4 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}$

* الجداء P_n :

$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

نلغم للطرفين «نأخذ $\ln$ للطرفين»:

$\ln P_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n)$

$\ln P_n = \underbrace{\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n}_{A_n}$

$\ln P_n = A_n \Rightarrow P_n = e^{A_n} = e^{\frac{(n+1)\left(\ln 4 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{2}}$

والسلام لقلبك ♥.

سلسلة
التجمع التعليمي

التجمع التعليمي