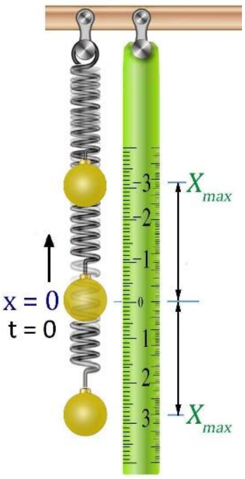
مسائل عامة

المسألة (1):

نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطةً مؤلّفةً من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 10\,\mathrm{N.m^{-1}}$ مثبّتٍ من إحدى نهايتيه إلى نقطةٍ ثابتةٍ، ويحملُ في نهايته الثانية جسماً كتلتُه $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ فإذا علمتَ أنّ مبدأ الزمن لحظةَ مرور الجسم في مركز التوازن، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب بسرعة $v = -3\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

المطلوب:



1. احسبْ نبضَ الحركة.
2. استنتج التابعَ الزمنيَّ لمطال الحركة.
3. احسبْ شدّةَ قوّةِ الإرجاع. في نقطة مطالها $3\,\mathrm{cm}$

الحل:

١- حساب نبض الحركة: من العلاقة $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

٢- استنتاج التابع الزمني للحركة:

يعطى التابع الزمني للهزازة التوافقية بالعلاقة: $\bar{x} = X_{\max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

- إيجاد $X_{\max}$: عند المرور بمركز التوازن : السرعة عظمى:

$\Leftarrow v = -3\mathrm{m.s^{-1}} = v_{\max}$ لكن $v_{\max} = v = -\omega_0 X_{\max}$ أي $\Leftarrow -3 = -10X_{\max} \Leftarrow X_{\max} = 0.3\ \mathrm{m}$

- إيجاد $\bar{\varphi}$:

حسب النص : $t = 0\ ,\ x = 0\ ,\ v < 0$ يتحرك بالاتجاه السالب نعوض في تابع المطال:

$$0 = X_0 \cos(\omega_0 \times 0 + \varphi)$$

$$\cos\bar{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad or \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

نختار قيمة $\bar{\varphi}$ التي تعطي سرعة سالبة

في تابع السرعة : $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ فنلاحظ:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{\max}\sin(\omega_0 \times 0 + \frac{\pi}{2}) < 0$$

-

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{\max}\sin(\omega_0 \times 0 + \frac{3\pi}{2}) > 0$$

لذلك نختار القيمة $\varphi = \frac{\pi}{2}$

وبذلك يكون التابع الزمني هو: $\bar{x} = 0.3\cos(10t + \frac{\pi}{2})$

٣- حساب شدة قوة الارجاع في نقطة مطالها : $3\,\mathrm{cm}$

$$F = |-k\,x| = 10 \times 3 \times 10^{-2} = 0.3\,\mathrm{N}$$

المسألة (2):

تهتزُّ نقطة ماديَّة كتلتها $0.5\,kg$ بحركة توافقيَّة بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، شاقوليّ وبدور $4\,s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8\,cm$ فإذا علمت أنَّ النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحرِّكة بالاتِّجاه السالب.

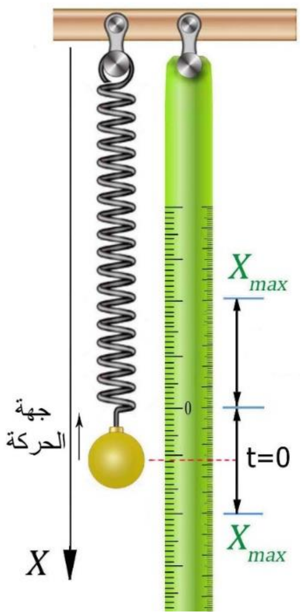
المطلوب:

1. استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.
2. عيّن لحظتي المرور الأوّل والثالث في وضع التوازن.
3. عيّن المواضع التي تكون فيها شدَّة محصِّلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، وحدّد موضعاً تنعدم فيه شدَّة هذه المحصِّلة.
4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغيَّر هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلَّقة؟
5. احسب الكتلة التي تجعل الدَّور الخاصّ $1\,s$.

الحل:

١- بما أن الحركة توافقية بسيطة فالتابع الزمني لمطال الحركة من الشكل $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

لنعين ثوابت الحركة : φ , ω_0 , X_{max} :



- حسب النص $X_{max} = 0.08\ m$
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$
- تعيين φ من شروط البدء $(t = 0 , x = \frac{X_{max}}{2} , v < 0)$ نعوض في التابع الزمني:

$$\frac{0.08}{2} = 0.08 \cos(\frac{\pi}{2} \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$\frac{1}{2} = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = (\frac{\pi}{3}\ or\ \frac{5\pi}{3})$$

نختار القيمة $\varphi = \frac{\pi}{3}$ لأنها تعطي سرعة سالبة توافق شروط البدء أما القيمة $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ فتعطي سرعة موجبة (مرفوض)

وبذلك يكون التابع الزمني $\boxed{\bar{x} = 0.08 \cos(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3})}$

٢- عند المرور في وضع التوازن $x = 0$ نعوض في التابع الزمني:

$$0 = 0.08 \cos(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k \Rightarrow t = \frac{1}{3} + 2k$$

المرور الأول : $k = 0 \Leftarrow t_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{S}$

المرور الثاني : $k = 1 \Leftarrow t_2 = \frac{7}{3}\,\mathrm{S}$

المرور الثالث: $k = 2 \Leftarrow t_3 = \frac{13}{3}\,\mathrm{S}$

٣- بما أنَّ $\overline{F} = m\,\overline{a} = m\,(-\omega_0^2\,\overline{x})$ فتكون شدة محصلة القوى عظمى في الوضعين الطرفيين أي $\overline{x} = \pm X_{\max}$

وقيمتها $\Rightarrow F_{\max} = \left|-m\,\omega_0^2\,X_{\max}\right|$

الشدة $\Rightarrow F_{\max} = \left|-0.5\,(\frac{\pi}{2})^2(0.08)\right| = 0.1\,\mathrm{N}$

٤- حساب ثابت صلابة النابض k من علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0^{\,2} = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow k = 4\pi^2\frac{m}{T_0^{\,2}}$$

$$k = 40\times\frac{0.5}{16} = 1.25\,\mathrm{N.m^{-1}}$$

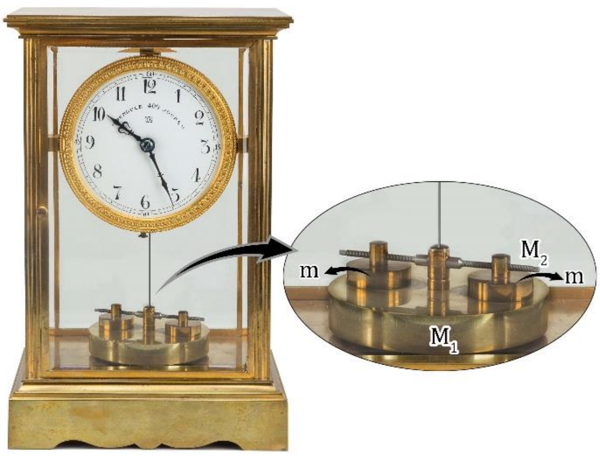
ولا تتغير قيمة ثابت صلابة النابض بتغير الكتلة

٥- حساب قيمة الكتلة التي تجعل الدور $1\,\mathrm{s}$ من علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0^{\,2} = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow m = k\,\frac{T_0^{\,2}}{4\pi^2}$$

$$m = 1.25\times\frac{(1)^2}{40} = 0.03125\,\mathrm{kg}$$

المسألة (٣)



تتألف ميقاتيه من قرص نحاسي كتلته $M_1 = 0.12\,\mathrm{kg}$ ، نصف قطره $R = 0.05\,\mathrm{m}$ مثبّت عليه ساق كتلتها $M_2 = 0.012\,\mathrm{kg}$ ، طولها $L = 0.1\,\mathrm{m}$ تحمل في طرفيها كتلتين متساويتين $m_1 = m_2 = 0.05\,\mathrm{kg}$ ، نعدّهما كتلتين نقطيتين تبعدان مسافة قدرها $2r = 0.04\,\mathrm{m}$ يمكن تغييّرها بواسطة بزال، نعلّق الجملة من مركز عطالتها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $k = 8\times10^{-4}\,\mathrm{m.N.rad^{-1}}$ كما في الشكل المجاور. **المطلوب**:

١- احسب دور الميقاتية.

٢- إذا أردنا للدور أن يزداد بمقدار $0.86\mathrm{s}$ وذلك بزيادة البعد بين الكتلتين m . كم يجب أن يصبح البعد الجديد بينهما؟

(عزم عطالة القرص حول محور مار من مركز عطالته $I_1 = \frac{1}{2}M_1R^2$ ، وعزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركزها $I_2 = \frac{1}{12}M_2L^2$ ، $\pi = 3.14$ ، $\pi^2 \simeq 10$)

الحل:

١- حساب دور الميقاتية: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$

لنحسب عزم عطالة الجملة: I_Δ(جملة) = I_Δ(قرص) + $2I_\Delta$(كتلة) + I_Δ(ساق)

$$I_\Delta = \frac{1}{2}M_1R^2 + 2(m\,r^2) + \frac{1}{12}M_2L^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}(0.12)(0.05)^2 + 2(0.05)(0.02)^2 + \frac{1}{12}(0.012)(0.1)^2$$

$$I_\Delta = 2\times10^{-4}\ \text{kg.m}^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}} = \pi\ \text{sec}$$

٢- إذا ازداد الدور بمقدار 0.86s سيصبح الدور الجديد $T_0' = 3.14 + 0.86 = 4\ \text{sec}$:

$$4 = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{8\times10^{-4}}} \Rightarrow 16 = 40\ \frac{I'_\Delta}{8\times10^{-4}} \Rightarrow I'_\Delta = \frac{16\times8\times10^{-4}}{40} = 32\times10^{-5}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}M_1R^2 + 2(m\,r'^2) + \frac{1}{12}M_2L^2$$

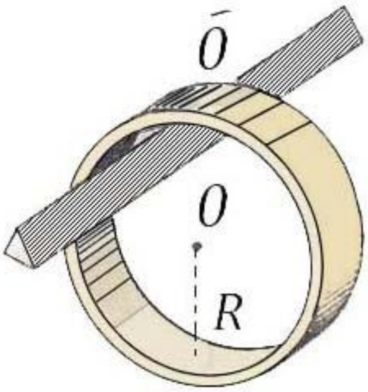
$$32\times10^{-5} = \frac{1}{2}(0.12)(0.05)^2 + 2(0.05)(r')^2 + \frac{1}{12}(0.012)(0.1)^2$$

$$32\times10^{-5} = 15\times10^{-5} + 10^{-1}(r')^2 + 10^{-5}$$

$$16\times10^{-4} = (r')^2$$

$$r' = 0.04\ \text{m}$$

المسألة (٤) :



تعلق حلقة معدنية نصف قطرها $R = 12.5\ \text{cm}$ ، كتلتها $M = 0.05\ \text{kg}$ بمحور أفقي ثابت كما هو موضح بالشكل لتشكل نواساً ثقلياً المطلوب:

١- احسب الدور الخاص لاهتزاز هذا النواس من اجل السعات الزاويّة الصغيرة إذا علمت أن عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/C} = MR^2$

٢- احسب طول النواس البسيط المواقت.

الحل:

١- حساب الدور: بما أن الحلقة تنوس حول محور لا يمر من مركز عطالتها نطبق هايغنز:

$$I_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + M\,d^2$$

$$I_{\Delta/O} = M\,R^2 + M\,R^2 = 2M\,R^2$$

نلاحظ أن $d = R$

نطبق علاقة الدور للنواس الثقلي من أجل السعات الزاوية صغيرة السعة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/O}}{M\,g\,d}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{M\,g\,R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 0.125}{10}} = 1\,\text{s}$$

٢- حساب طول النواس البسيط المواقت:

$$T_0\,(\text{مركب}) = T_0\,(\text{بسيط})$$

$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

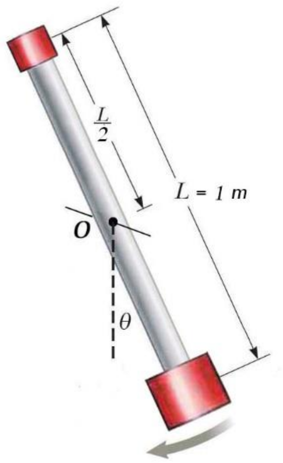
بالتربيع والإصلاح: $1 = 4\pi^2\,\frac{\ell}{g} \Rightarrow \ell = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{10}{40} = 0.25\text{ m}$

المسألة (٥):

يتألّف نوّاس ثقليٌّ من ساق شاقوليّة مهملة الكتلة طولها 1 m تحمل في نهايتها العلويّة كتلة نقطيّة $m_1 = 0.2\,\text{kg}$ وتحمل في نهايتها السفليّة كتلة نقطيّة $m_2 = 0.6\,\text{kg}$ تهتزُّ هذه السّاق حول محور أفقيّ مارّ من منتصفها

المطلوب:

1. احسب دور النوّاس في حالة السّعات الصّغيرة.
2. احسب طول النوّاس البسيط المواقت لهذا النوّاس.
3. احسب دور النوّاس لو ناس بسعة زاوية $\theta_{max} = 0.4\,\text{rad}$.
4. نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\theta_{max} = 60^\circ$ ونتركها دون سرعة ابتدائيّة.
   a. استنتج بالرموز علاقة السّرعة الزاوية لجملة النوّاس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق، ثمَّ احسب قيمتها عندئذٍ.
   b. احسب السُّرعة الخطّيّة لمركز عطالة جملة النوّاس لحظة المرور بالشّاقول.
5. نستبدل بالكتلة m_2 كتلة $m_1 = 0.2\,\text{kg}$ ونعلّق السّاق من منتصفها بسلك فتل شاقوليّ لنشكّل بذلك نوّاساً للفتل، نزيح السّاق الأفقيّة عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائيّة فتهتزُّ بدور $T_0 = 2\pi\text{ s}$.
   احسب قيمة ثابت فتل سلك التعليق.
6. احسب قيمة التّسارع الزاوي لنوّاس الفتل عند المرور بوضع $\theta = 0.5\,\text{rad}$.



الحل:

١- حساب دور النواس في حال السعات الصغيرة:

من علاقة الدور : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m\,g\,d}}$

- لنحسب عزم عطالة الجملة (الساق مهملة الكتلة):

$$I_\Delta = I_1 + I_2$$

$$I_\Delta = \text{m}_1 r_1^2 + \text{m}_2 r_2^2 = \text{m}_1 (\frac{L}{2})^2 + \text{m}_2 (\frac{L}{2})^2$$

$$I_\Delta = (\frac{L}{2})^2(\text{m}_1 + \text{m}_2) = (\frac{1}{2})^2(0.2 + 0.6) = 0.2\ \ \text{kg.m}^2$$

- حساب d :

$$d = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 + m_2} = \frac{0.6\times 0.5 - 0.2\times 0.5}{0.2 + 0.6} = 0.25\,\text{m}$$

نعوض بعلاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8\times 10\times 0.25}} = 2\,\text{sec}$$

٢- حساب طول النواس البسيط المواقت:

$$T_0\,(\text{مركب}) = T_0\,(\text{بسيط})$$

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} \Rightarrow \ell = 1\text{m}$$

٣- حساب الدور بسعة 0.4 rad :

$$T_0' = T_0\,(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16})$$

$$T_0' = 2\,(1 + \frac{0.16}{16}) = 2.02 \text{ sec}$$

٤- a – حساب السرعة الزاوية عند المرور بوضع الشاقول:

بتطبيق نظرية تغير الطاقة الحركية بين وضعين الأول عندما تصنع الجملة زاوية $\theta_{max} = 60^0$ والثاني عند المرور بوضع الشاقول:

$$\Delta E_{k\,(1\to 2)} = \sum \overline{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{k\,2} - E_{k\,1} = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

$$0 - \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = -(m_1 + m_2)\, g\, h + 0 \quad , \quad h = d\,(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,(m_1 + m_2)\ g\ h}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2\,(m_1 + m_2)\ g\ d\,(1 - \cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,(0.2 + 0.6) \times 10 \times 0.25 \times (1 - 0.5)}{0.2}} = \sqrt{10}\ \text{rad.s}^{-1}$$

b – حساب السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة المرور بالشاقول:

$$v = \omega \times d = \sqrt{10} \times 0.25 \ \text{ m.s}^{-1}$$

٥- حساب قيمة ثابت فتل السلك لنواس الفتل:

- لنحسب عزم عطالة جملة نواس الفتل:

$$I'_\Delta = I_1 + I_2$$

$$I'_\Delta = \text{m}_1 r_1^2 + \text{m}_2 r_2^2$$

$$I'_\Delta = 0.2 \times (0.5)^2 + 0.2 \times (0.5)^2 = 0.1 \text{ kg.m}^2$$

من علاقة الدور لنواس الفتل:

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{k}} \Rightarrow T_0'^{\,2} = 4\pi^2 \frac{I'_\Delta}{k} \Rightarrow k = 4\pi^2 \frac{I'_\Delta}{T_0'^{\,2}}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{0.1}{4\pi^2} = 0.1 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

٦- حساب قيمة التسارع الزاوي عند المرور بوضع $\theta = 0.5$ rad من العلاقة :

$$\alpha = -\omega_0^2\,\theta = -(\frac{2\pi}{T_0'})^2 . \theta$$

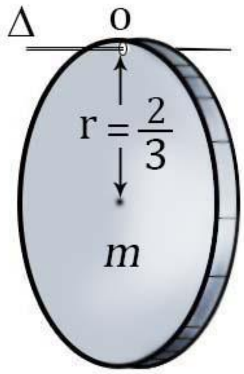
$$\alpha = -(\frac{2\pi}{2\pi})^2 \times 0.5 = -0.5 \text{ rad.s}^{-2}$$

المسألة (٦):

يتألَّف نوَّاس ثقليّ مركّب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r=\frac{2}{3}\mathrm{m}$ يمكن أن يهتزَّ في مستوٍ شاقوليٍّ حول محور أفقيٍّ مارٍّ من نقطة على محيطه.

المطلوب:

1. انطلاقاً من العلاقة العامّة لدور النوّاس الثقليّ المركّب، استنتج العلاقة المحدِّدة لدوره الخاصّ في حالة السّعات الصّغيرة، ثمَّ احسب قيمة هذا الدّور.
2. احسب طول النوّاس البسيط المواقت لهذا النوّاس المركّب.
3. نثبّت في نقطة من محيط القرص كتلة نقطيَّة m' تساوي كتلة القرص m ونجعله يهتزُّ حول محور أفقيٍّ مارٍّ من مركز القرص، احسب دوره في هذه الحالة من أجل السّعات الزاوية الصّغيرة.
4. نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقوليّ بسعة زاوية $\theta_{\max}$ ونتركه دون سرعة ابتدائيَّة فتكون السرعة الخطِّيَّة للكتلة النقطيَّة m' لحظة المرور بالشاقول $\frac{2\pi}{3}\mathrm{m.s^{-1}}$ احسب قيمة السعة الزاوية $\theta_{\max}$ (إذا علمت أنَّ: $\theta_{\max} > 0.24\,\mathrm{rad}$ ، $\mathrm{g}=10\mathrm{m.s^{-1}}$ ، $\pi^2=10$ عزم عطالة القرص حول محور مارّ من مركزه وعمودي على مستويه $I_{\Delta/c}=\frac{1}{2}m\,r^2$)



الحل:

١- علاقة الدور العامة للنواس الثقلي المركب هي: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m\,g\,d}}$

- لنوجد عزم عطالة القرص حول المحور المار من o : حسب هايغنز

$$I_{\Delta/O}=I_{\Delta/C}+m\,d^2$$
$$I_{\Delta/O}=\frac{1}{2}m\,r^2+m\,r^2=\frac{3}{2}m\,r^2$$

- نلاحظ من الشكل أن $oc=d=r$

نطبق علاقة الدور مع التعويض:

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}m\,r^2}{m\,g\,r}}=2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}=2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{2}{3}}{2\times10}}=2\sec$$

٢- طول النواس البسيط المواقت:

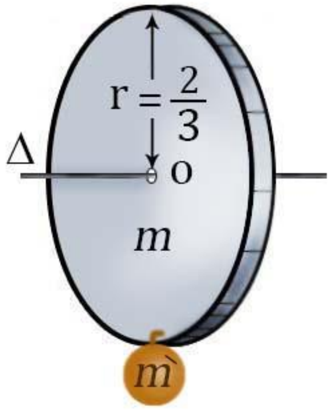
$$T_0\,(\text{مركب}) = T_0\,(\text{بسيط})$$

$$2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}\Rightarrow \ell=1\mathrm{m}$$

٣- حساب الدور عند تعليق كتلة نقطية جديدة: $m'=m$

- لنحسب عزم عطالة الجملة (القرص + الكتلة):

$$I_{\Delta/O}=I_{\Delta/C}+m'r^2$$
$$I_{\Delta/O}=\frac{1}{2}m\,r^2+m'r^2\quad,(m=m')$$
$$I_{\Delta/O}=\frac{3}{2}m\,r^2$$



- لنحسب d: $d=\frac{m r}{2m}=\frac{r}{2} \Rightarrow (m=m')$, $d=\frac{m\times(0)+m'r}{m+m'}$ نعوض في علاقة الدور:

$$T_0'=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{M\ g\ d}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}m\,r^2}{2m\ g\ \frac{r}{2}}}=2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}=2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{2}{3}}{2\times10}}=2\sec$$ (حيث M كتلة الجملة)

٤- حساب السرعة الزاوية عند المرور بوضع الشاقول:

بتطبيق نظرية تغير الطاقة الحركية بين وضعين الأول عندما تصنع الجملة زاوية $\theta_{\max}$ والثاني عند المرور بوضع الشاقول:

$$\Delta E_{k\,(1\rightarrow2)}=\sum \overline{W}_{\vec F}$$

$$E_{k\,2}-E_{k\,1}=\overline{W}_{\vec w}+\overline{W}_{\vec R}$$

$$0-\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2=-(m+m')\,g\,h+0 \quad ,\ (m=m')\ ,\quad h=\frac{r}{2}(1-\cos\theta_{\max})$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2(2m)\ g\ \frac{r}{2}(1-\cos\theta_{\max})}{\frac{3}{2}m\,r^2}}=\sqrt{\frac{4g\ (1-\cos_{\max})}{3r}}=\frac{v}{r}$$

$$\sqrt{\frac{4g\ (1-\cos_{\max})}{3r}}=\frac{v}{r}$$

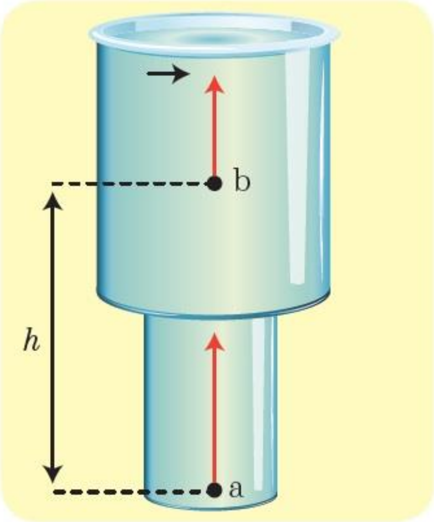
بتربيع العلاقة الأخيرة:

$$\frac{4g\ (1-\cos_{\max})}{3r}=\frac{v^2}{r^2}\Rightarrow\frac{4g\ (1-\cos_{\max})}{3}=\frac{v^2}{r}$$

$$\cos\theta_{\max}=1-\frac{3v^2}{4g\ r}$$

$$\cos\theta_{\max}=1-\frac{3\times\frac{4\pi^2}{9}}{4\times10\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \theta_{\max}=\frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

المسألة (٧):



يجري الماء داخل الأنابيب الموضَّحة في الشكل من (a) إلى (b) حيث نصف قطر الأنبوب عند (a) $r_1 = 5\,\text{cm}$ و نصف قطر الأنبوب عند النقطة (b) $r_2 = 10\,\text{cm}$ والمسافة الشاقوليَّة بين (a) و (b) $h = 50\,\text{cm}$:

1. احسب سرعة جريان الماء عند النقطة (b) علماً أنَّ سرعة جريان الماء عند النقطة (a) $v_1 = 4\,\text{m.s}^{-1}$.
2. احسب قيمة فرق الضَّغط (P_{a-b}) $(\rho_{\text{H2O}} = 1000\,\text{kg.m}^3)$.

الحل:١- من معادلة الاستمرارية :

$$s_1 v_1 = s_2 v_2$$
$$\pi r_1^2 v_1 = \pi r_2^2 v_2$$
$$v_2 = \frac{\pi r_1^2 v_1}{\pi r_2^2} = (\frac{r_1}{r_2})^2 v_1 = (\frac{5\times10^{-2}}{10\times10^{-2}})^2 \times 4 = 1\ \text{m.s}^{-1}$$

٢- حساب قيمة فرق الضغط P_{a-b} : من معادلة برنولي:

$$P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_b + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$
$$P_a - P_b = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1)$$
$$= \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g h$$
$$= \frac{1}{2}\times 1000 \times (1^2 - 4^2) + 1000 \times 10 \times 0.5$$
$$P_a - P_b = -2500\ Pa$$

المسألة (8):

تخيّل أنّ مركبة فضاء لها شكل مستطيل تقوم برحلة إلى نجم "الشعرى" وفق مسار مستقيم، بحيث يكون شعاع سرعة المركبة دوماً موازياً لطول المركبة، فتسجّل أجهزة المركبة المسافرة القياسات الآتية:

طول المركبة: $100\,\text{m}$، عرض المركبة: $25\,\text{m}$، المسافة المقطوعة: 4 سنة ضوئيّة، زمن الرحلة: $\frac{8}{\sqrt{3}}$ سنة، وتسجّل أجهزة المحطّة الأرضيّة قياساتها لتلك الرحلة باستخدام تيلسكوب دقيق،

احسب كلّاً من سرعة المركبة وطولها وعرضها في أثناء الرحلة، والمسافة التي قطعتها وزمن الرحلة وفق قياسات المحطّة الأرضيّة.

(سرعة الضّوء في الخلاء $c = 3 \times 10^{8}\ \text{m.s}^{-1}$)

الحل:

- حساب سرعة المركبة: بما أن زمن الرحلة بالنسبة لراصد موجود بالمركبة هو $\frac{8}{\sqrt{3}}$ سنة

من العلاقة $\Leftarrow$ الزمن $\times$ السرعة $=$ المسافة

$d = v\,t_0$: نعوض $4\times365\times24\times3600\times3\times10^{8} = v\times\frac{8}{\sqrt{3}}\times365\times24\times3600$

$$4\times3\times10^{8} = v\times\frac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$v = \frac{12\times10^{8}\sqrt{3}}{8} = \frac{3\times10^{8}\times\sqrt{3}}{2}\,\text{m.s}^{-1} = c\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{m.s}^{-1}$$

- حساب طول المركبة كما يبدو لراصد من المحطة الأرضية من العلاقة:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$L = 100\times\sqrt{1-\frac{3c^2}{4c^2}} = 100\times\sqrt{\frac{1}{4}} = 100\times\frac{1}{2} = 50\ \text{m}$$

- عرض المركبة لا يتغير ويبقى $25\,\text{m}$
- زمن الرحلة بالنسبة لراصد من المحطة الأرضية:

$$t = \gamma t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{3c^2}{4c^2}}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{\sqrt{3}}\ \textit{years}$$

- المسافة التي قطعتها : المسافة $= v\,t = \frac{c\sqrt{3}}{2}\times\frac{16}{\sqrt{3}} = 8c\ \text{m}$ (ثمان سنوات ضوئية)

المسألة (9):

إذا علمت أنّ الكتلة السكونيّة للبروتون 1.67×10^{-27} kg، وفي أحد التجارب كانت طاقته الكليّة تساوي ثلاثة أضعاف طاقته السكونيّة.

المطلوب:

1. احسب الطّاقة السكونيّة للبروتون مقاسة بالإلكترون فواط.

2. احسب سرعة البروتون في هذه التجربة.

3. احسب الطّاقة الحركيّة لهذا البروتون.

4. احسب كمّيّة الحركة له.

5. باعتبار كمّيّة الحركة P والطّاقة السّكونيّة E_0 والطّاقة الكُلّيّة E استنتج أنّ: $E^2=P^2C^2+E_0^2$، ثمّ تأكّد من ذلك حسابياً بالنسبة للبروتون المدروس في هذه التجربة.

(سرعة الضّوء في الخلاء $c=3\times10^8\ \text{m.s}^{-1}$)

الحل:

١- حساب الطاقة السكونية للبروتون:

$$E_0=m_0c^2=1.67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2=15.03\times10^{-11}\ \text{J}$$

$$E_0=\frac{15.03\times10^{-11}}{1.6\times10^{-19}}=939.3\ \text{Mev}$$

٢- حساب سرعة البروتون: حسب النص:

$$E=3E_0=mc^2=\gamma m_0c^2$$

$$3E_0=\gamma E_0$$

$$\gamma=3\ \Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=3\Rightarrow\ \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=9$$

$$1=9-\frac{9v^2}{c^2}\ \Rightarrow\frac{9v^2}{c^2}=8\ \Rightarrow v^2=\frac{8c^2}{9}\Rightarrow$$

$$v=2\times10^8\sqrt{2}\ \text{m.s}^{-1}$$

٣- حساب الطاقة الحركية لهذا البروتون:

$$E_k=E-E_0=3E_0-E_0=2E_0$$

$$E_k=2\times939.3=1878.6\ \text{Mev}$$

٤- حساب كمية الحركية:

$$P=mv=\gamma m_0v$$

$$P=3\times1.67\times10^{-27}\times2\times10^8\sqrt{2}$$

$$P=10.02\times10^{-19}\times\sqrt{2}\ \text{kg.m.s}^{-1}$$

٥- من علاقة الكتلة في النسبية $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ نربع الطرفين مع الإصلاح:

$m_0^2=m^2-\frac{m^2v^2}{c^2}$ نضرب الطرفين بـ c^4 فتصبح العلاقة:

$$m_0^2c^4=m^2c^4-m^2v^2c^2$$

$$m^2c^4=m^2v^2c^2+m_0^2c^4\Rightarrow E^2=P^2c^2+E_0^2$$

التحقق حسابياً : لدينا $E^2 = P^2c^2 + E_0^2$

لنحسب المقدار E^2 : حسب النص $E = 3E_0 = 3\times 15.03\times 10^{-11} = 45.0910^{-11}$

$E^2 = 2.0331081\times 10^{-19}$

لنحسب المقدار $P^2c^2 + E_0^2$:

$$P^2c^2 + E_0^2 = (10.02\times 10^{-19}\times \sqrt{2})^2 \times (3\times 10^8)^2 + (15.03\times 10^{-11})^2$$

$$P^2c^2 + E_0^2 = 2.0331081\times 10^{-19}$$

المسألة (10):

وشيعة طولها $40\,\text{cm}$، مؤلَّفة من 400 لفَّة، محورها الأفقيّ يعامد خطّ الزوال المغناطيسيّ، نضع في مركزها إبرة بوصلة صغيرة، ثمّ نمرّر في الوشيعة تيّاراً كهربائيّاً متواصلاً شدّته $16\,\text{mA}$.

المطلوب:

1. احسب شدّة الحقل المغناطيسيّ المتولِّد في مركز الوشيعة.
2. إذا أجرينا اللفَّ بالجهة نفسها على أسطوانةٍ فارغةٍ من مادّة عازلةٍ باستخدام سلك معزول قطره $2\,\text{mm}$ بلفّات متلاصقة، احسب عدد طبقات الوشيعة.
3. نضع داخل الوشيعة في مركزها حلقةً دائريّةً مساحتها 2cm^2 بحيث يصنع النّاظم على سطح الحلقة مع محور الوشيعة زاوية 60°.
احسب التدفقَ المغناطيسيّ عبر الحلقة الناتج عن تيار الوشيعة.

الحل:

١- حساب شدة الحقل المغناطيسي المتولد في مركز الوشيعة:

$$B = 4\pi\times 10^{-7}\ \frac{N\ I}{\ell}$$

$$B = 4\pi\times 10^{-7}\ \frac{400\times 16\times 10^{-3}}{40\times 10^{-2}} = 2\times 10^{-5}\ \text{T}$$

٢- عدد اللفات في الطبقة الواحدة = $\frac{\text{طول الوشيعة}}{\text{قطر السلك}}$ = $N' = \frac{\ell}{2r} = \frac{40\times 10^{-2}}{2\times 10^{-3}} = 200$ لفة

عدد طبقات الوشيعة = $\frac{\text{عدد اللفات الكلي}}{\text{عدد اللفات في الطبقة الواحدة}}$ = $\frac{N}{N'} = \frac{400}{200} = 2$ طبقة

٣- حساب التدفق المغناطيسي عبر الحلقة :

$$\Phi = N\ B\ S\ \cos 60$$

$$\Phi = 1\times 2\times 10^{-5}\times 2\times 10^{-4}\times \frac{1}{2} = 2\times 10^{-9}\ \text{web}$$

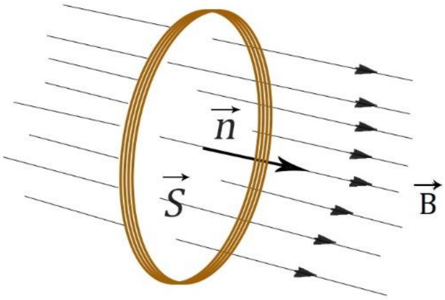
المسألة (11):

ملفّ دائريّ نصف قطره الوسطيّ $40\,\mathrm{cm}$ يتألّف من 100 لفّة، وُضِع في حقل مغناطيسيّ منتظم شدّته $0.5\,\mathrm{T}$ حيث خطوط الحقل عموديّة على مستوي الملفّ.

المطلوب:

1. احسب التدفّق المغناطيسيّ الذي يجتاز لفّات الملفّ.
2. ما مقدار التغيّر في التدفّق المغناطيسيّ إذا دار الملفّ في الاتّجاه الموجب بزاوية 45°.

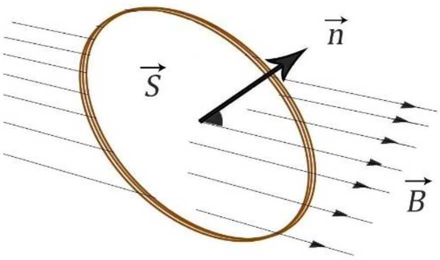
الحل:



١- من قانون التدفق :

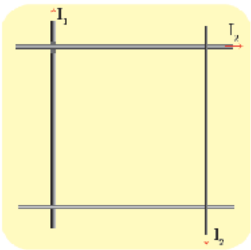
$$\Phi = N\,\vec{B}.\vec{S}$$
$$\Phi = N\,B.S\cos\theta$$
$$\Phi = N\,B.\pi r^2\cos\theta$$
$$\Phi = 100\times0.5\times\pi\times(0.4)^2\times\cos(0) = 8\pi\ \text{web}$$

٢- مقدار التغير في التدفق:



$$\Delta\Phi = N\,B.\pi r^2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$
$$\Delta\Phi = 100\times0.5\times\pi\times(0.4)^2(\cos 45 - \cos 0)$$
$$\Delta\Phi = 4\pi\times(\sqrt{2}-2) = -2.34\pi\quad \text{web}$$

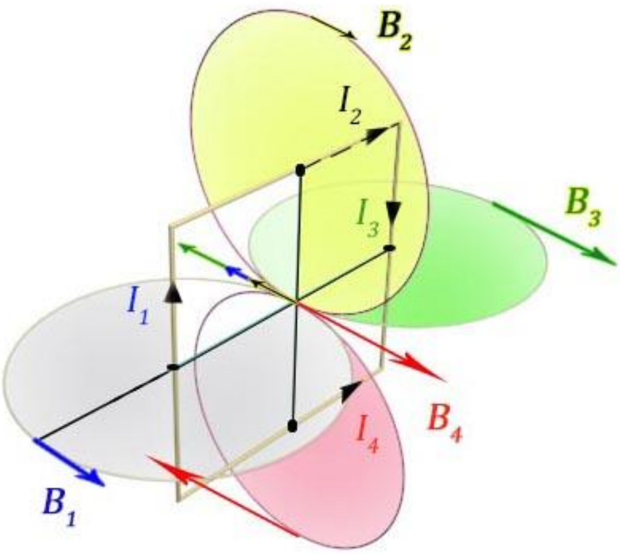
المسألة (12):



أربعُ أسلاك ناقلة طويلة تقع في مستوٍ واحد، ومتقاطعة مع بعضها البعض لتشكّل مربّعاً طول ضلعه $40\,\mathrm{cm}$، أوجد شدّةَ، واتجاهَ التيّار الذي يجب أن يمرَّ في الناقل الرابع بحيث تكون شدّة الحقل المغناطيسيّ في مركز المربّع معدومة.

حيث إنّ: $I_1 = 10\,\mathrm{A}, I_2 = 5\,\mathrm{A}, I_3 = 15\,\mathrm{A}$

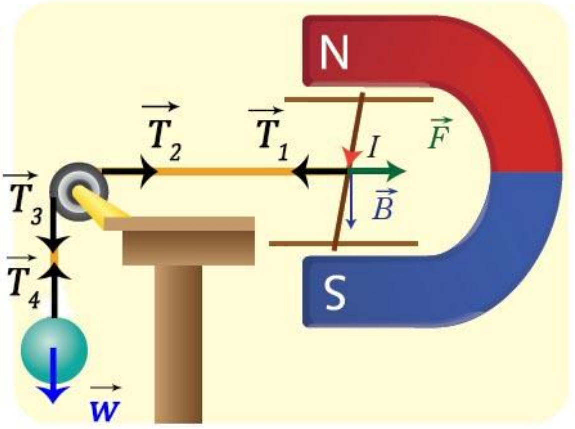
الحل: نطبق القانون: $B = 2\times10^{-7}\times\dfrac{I}{d}$:



$$B_1 = 2\times10^{-7}\times\frac{10}{20\times10^{-2}} = 10^{-5}\ \mathrm{T}$$
$$B_2 = 2\times10^{-7}\times\frac{5}{20\times10^{-2}} = 0.5\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$
$$B_3 = 2\times10^{-7}\times\frac{15}{20\times10^{-2}} = 1.5\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

$$B_4 = B_1 + B_2 + B_3$$
$$B_4 = 10^{-5} + 0.5\times10^{-5} + 1.5\times10^{-5} = 3\times10^{-5}\,\mathrm{T}$$
$$2\times10^{-7}\times\frac{I_4}{20\times10^{-2}} = 3\times10^{-5} \Rightarrow I_4 = 30\ \mathrm{A}$$

المسألة (13):



في الشكل المجاور تستند ساقٌ نحاسيّةٌ طولها $10\,\text{cm}$، وكتلتها $20\,\text{g}$ على سكّتين نحاسيّتين أفقيّتين، وتخضعُ بكاملها لحقل مغناطيسيّ منتظم شاقوليّ شدّته $B = 2\times10^{-2}\,\text{T}$ ويمرُّ بها تيّارٌ كهربائيٌّ متواصلٌ شدّته $15\,\text{A}$ وللحفاظ على توازن هذه السّاق نعلّق في مركز ثقلها خيطاً لا يمتطّ كتلته مهملة، مربوطٌ بكتلة،

المطلوب:

1. احسب كتلة الجسم المعلّق.
2. احسب شدّة قوّة ردّ فعل السكّتين على السّاق.

الحل: ١- حسب الشكل وحتى تتوازن الساق يجب أن يتحقق: حيث $W = T_4 = T_3 = T_2 = T_1 = F$

$$W = F \Rightarrow m\,g = I\,L\,B\,\sin\frac{\pi}{2}$$

$$m = \frac{I\,L\,B\,\sin\frac{\pi}{2}}{g} = \frac{15\times0.1\times2\times10^{-2}\times1}{10} = 3\times10^{-3}\,\text{kg}$$

٢- حساب قوة رد فعل السكتين على الساق:

هناك قوتان لرد الفعل (لكل سكة قوة رد فعل) وبالتالي $\vec{W} + 2\vec{R} = 0$

بالإسقاط والاصلاح:

$$W = 2R$$
$$m\,g = 2R$$
$$R = \frac{m\,g}{2} = \frac{3\times10^{-3}\times10}{2} = 15\times10^{-3}\,\text{N}$$

المسألة (14):

تيّار كهربائيّ شدّته $20\,\text{A}$ يمرُّ في سلك مستقيم طوله $10\,\text{cm}$ فإذا وضع السلك كاملاً في حقل مغناطيسيٍّ شدّته $2\times10^{-3}\,\text{T}$ وكان السلك يصنع مع خطوط الحقل المغناطيسيّ زاوية 30° احسب شدّة القوّة الكهرطيسيّة المؤثّرة في السلك.

الحل:

من القانون :

$$F = I\,L\,B\sin30^0$$
$$F = 20\times0.1\times2\times10^{-3}\times0.5 = 2\times10^{-3}\,\text{N}$$

المسألة (15):

نخضع إلكتروناً يتحرّك بسرعة $8\times10^{3}\,\mathrm{Km.s^{-1}}$ إلى تأثير حقل مغناطيسيّ منتظم ناظميّ على شعاع سرعته شدّته $B=5\times10^{-3}\,\mathrm{T}$.

المطلوب:

1. وازن بالحساب بين شدّة ثقل الإلكترون وشدّة قوّة لورنز المؤثّرة فيه. ماذا تستنتج؟
2. برهن أنّ حركة الإلكترون ضمن المنطقة التي يسودها الحقل المغناطيسيّ هي حركة دائريّة منتظمة، ثمّ استنتج العلاقة المحدِّدة لنصف قطر المسار الدائريّ، واحسب قيمته.
3. احسب دور الحركة.

$(e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\ ,\ m_e=9\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\ ,\ g=10\,\mathrm{m.s^{-2}})$

الحل:

١- الموازنة:

شدة ثقل الالكترون:	شدة قوة لورنز:
$W=m\,g$ $W=9\times10^{-31}\times10=9\times10^{-30}\,\mathrm{N}$	$F=ev\,B\sin\frac{\pi}{2}$ $F=1.6\times10^{-19}\times8\times10^{6}\times5\times10^{-3}\times1=64\times10^{-16}\,\mathrm{N}$
نلاحظ أن شدة قوة لورنز أكبر بكثير من شدة ثقل الالكترون	

٢- باهمال ثقل الالكترون أمام قوة لورنز : $\sum\vec{F}=m\,\vec{a}$

$$\vec{F}=m\,\vec{a}$$

$$e\vec{v}\wedge\vec{B}=m\,\vec{a}$$

وحسب خواص الجداء الشعاعي فإن : $\vec{B}\perp\vec{a}\ ,\ \vec{v}\perp\vec{a}$ وبما أنّ : $\vec{v}\perp\vec{a}$ فالحركة دائرية منتظمة

استنتاج العلاقة المحددة لنصف قطر المسار الدائري: من العلاقة: $e\vec{v}\wedge\vec{B}=m\,\vec{a}$

$$ev\,B\,\sin\frac{\pi}{2}=m\,a_C$$

$$ev\,B=m\frac{v^2}{r}$$

$$e\,B=m\frac{v}{r}\ \Rightarrow\ r=\frac{m\,v}{e\,B}$$

$$r=\frac{9\times10^{-31}\times8\times10^{6}}{1.6\times10^{-19}\times5\times10^{-3}}=9\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

٣- حساب دور الحركة:

$$v=\omega r=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}r$$

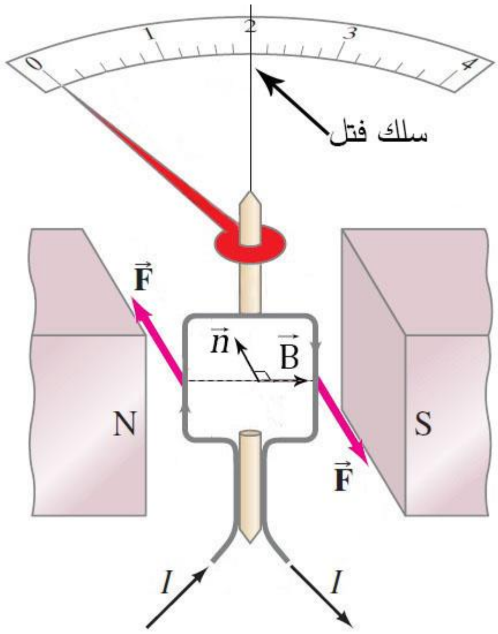
$$\mathrm{T}=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\times9\times10^{-3}}{8\times10^{6}}=\frac{9\pi}{4}\times10^{-9}\,\mathrm{s}$$

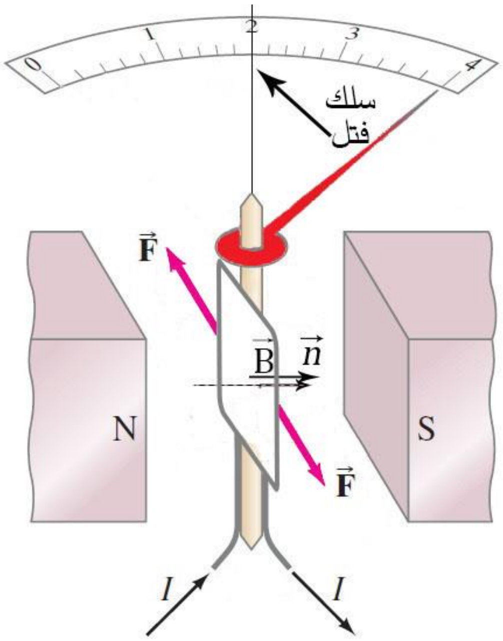
المسألة (16):

لدينا إطار مربّع الشكل مساحة سطحه $s = 25\,\mathrm{cm}^2$ يحوي 50 لفّة من سلك نحاسيٍّ معزول نعلّقه بسلك رفيع عديم الفتل وفق محوره الشاقوليّ ونخضعه لحقل مغناطيسيٍّ منتظم خطوطه أفقيّة شدّته $B = 10^{-2}\,\mathrm{T}$ بحيث يكون مستوي الإطار يوازي منحى الحقل $\vec{B}$ عند عدم مرور تيّار، نمرّر في الإطار تيّاراً كهربائيّاً شدّته $I = 5\,\mathrm{A}$ **المطلوب:**

1. احسب شدّة القوّة الكهرطيسيّة المؤثّرة في كلٍّ من الضّلعين الشاقوليّين لحظة مرور التيّار.
2. احسب عزم المزدوجة الكهرطيسيّة المؤثّرة في الإطار لحظة إمرار التيّار السابق.
3. احسب عمل المزدوجة الكهرطيسيّة عندما ينتقل الإطار من وضعه السّابق إلى وضع التّوازن المستقرّ.
4. نستبدل سلك التّعليق بسلك فتل ثابت فتله k لنشكّل مقياساً غلفانيّاً ونمرّر في الإطار تيّاراً كهربائيّاً شدّته ثابتة $2\,\mathrm{mA}$ فيدور الإطار بزاوية $0.02\,\mathrm{rad}$ ويتوازن. استنتج بالرموز علاقة ثابت فتل السلك k واحسب قيمته، ثمّ احسب قيمة ثابت المقياس الغلفانيّ G.
5. نزيد حساسيّة المقياس 10 مرّات من أجل التيّار نفسه، احسب ثابت فتل سلك التعليق بالوضع الجديد.

(يهمل تأثير الحقل المغناطيسيّ الأرضيّ)





الحل: طول ضلع الاطار المربع

$$L = \sqrt{S} = \sqrt{25\times10^{-4}} = 5\times10^{-2}\ \mathrm{cm}$$

١- حساب شدة القوة الكهرطيسية المؤثرة في الضلع الشاقولي

$$F = N\ I\ L\ B\sin\theta$$

$$F = 50\times5\times5\times10^{-2}\times10^{-2}\times\sin\frac{\pi}{2} = 0.125\,\mathrm{N}$$

٢- حساب عزم المزدوجة الكهرطيسية لحظة إمرار التيار:

$$\Gamma = N\ I\ S\ \ B\sin\alpha$$

$$\Gamma = 50\times5\times25\times10^{-4}\times10^{-2}\times\sin\frac{\pi}{2} = 6.25\times10^{-3}\,\mathrm{m.N}$$

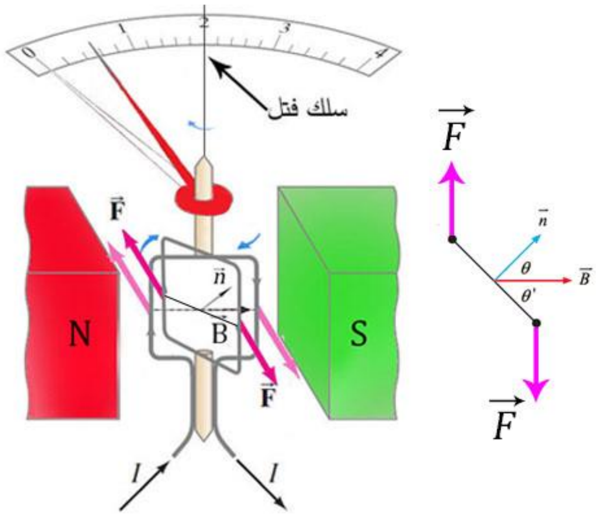
٣- حساب عمل المزدوجة الكهرطيسية:

$$W = I.\Delta\Phi$$

$$W = I.(\Phi_2 - \Phi_1) = I\ N\ B\ S\ (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

$$W = 5\times50\times10^{-2}\times25\times10^{-4}(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2})$$

$$W = 6.25\times10^{-3}\,\mathrm{J}$$



٤- استنتاج علاقة ثابت فتل السلك k:

عند دوران الاطار وتوازنه يتحقق :

$$\sum \overline{\Gamma} = 0$$

$$\overline{\Gamma}_{\Delta} + \overline{\Gamma} = 0$$

$$N\ I\ S\ B \sin\alpha - k\,\theta' = 0$$

وبما أن زاوية دوران الاطار $\theta' = 0.02$ rad صغيرة

$$\Rightarrow \cos\theta' = \cos(0.02) \simeq 1$$

$$\Rightarrow \cos\theta' = \sin\theta \simeq 1$$

بالإصلاح والتعويض:

$$N\ I\ S\ B \sin\alpha = k\,\theta'$$

$$k = \frac{N\ S\ B}{\theta'} I = \frac{50\times25\times10^{-4}\times10^{-2}}{2\times10^{-2}}\times2\times10^{-3}$$

$$k = 1.25\times10^{-4}\ \text{m.N.rad}^{-1}$$

حساب ثابت المقياس الغلفاني G :

$$G = \frac{\theta'}{I} = \frac{0.02}{2\times10^{-3}} = 10\ \text{rad.A}^{-1}$$

أو من العلاقة: $G = \frac{N\ S\ B}{k} = \frac{50\times25\times10^{-4}\times10^{-2}}{1.25\times10^{-4}} = 10\ \frac{\text{m}^2.\text{T}}{\text{m.N.rad}^{-1}} = 10\ \text{rad.A}^{-1}$

ملاحظة: إن الوحدة : $\frac{\text{m}^2.\text{T}}{\text{m.N.rad}^{-1}}$ و الوحدة rad.A^{-1} متساويتان لأن:

$$F = I\ .\ L\ .B\ .\sin\theta$$

حسب الوحدات المستخدمة في القوة الكهرطيسية (لابلاس) : $\text{N} = \text{A. m .T} \Rightarrow \text{A}^{-1} = \frac{\text{m .T}}{\text{N}}$

$$\frac{\text{m}^2.\text{T}}{\text{m.N.rad}^{-1}} = \text{rad.}\frac{\text{m .T}}{\text{N}} = \text{rad.A}^{-1}$$

٥- ملاحظة (هنا تم استخدام سلك جديد لذلك تغير ثابت الفتل) :

$$G' = 10\,G$$

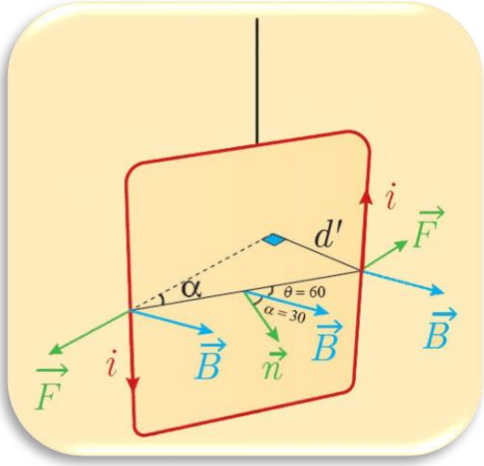
$$\frac{N\ S\ B}{k'} = 10\times\frac{N\ S\ B}{k} \Rightarrow$$

$$k' = \frac{k}{10} = \frac{1.25\times10^{-4}}{10} = 1.25\times10^{-5}\ \text{m.N rad}^{-1}$$

المسألة (17):

ملفّ مستطيل مساحته $200\,cm^2$ يتكوّن من 100 لفّة يمرّ فيه تيّار شدّته 3A، وضع في حقل مغناطيسيّ منتظم شدّته 0.1 T احسب عزم المزدوجة الكهرطيسيّة المؤثّرة عليه عندما يكون مستوي الملفّ يصنع زاوية 60° مع خطوط الحقل المغناطيسيّ.

الحل:



لدينا حسب النص $\theta' = 60^0$ وبالتالي $\alpha = 30^0$

ومن قانون عزم المزدوجة:

$$\Gamma = N\ I\ S\ \ B \sin\alpha$$

$$\Gamma = 100 \times 3 \times 200 \times 10^{-4} \times 10^{-1} \times \sin 30 = 0.3\ \ \text{m.N}$$

المسألة (18):

وشيعة طولها 30 cm ومساحة مقطعها $3 \times 10^{-2}\,m^2$ وذاتيّتها $L = 5 \times 10^{-3}\,H$

1. احسب عدد لفّاتها.
2. نمرّر في الوشيعة تيّاراً كهربائيّاً متواصلاً شدّته 15 A احسب الطاقة الكهرطيسيَّة المختزنة في الوشيعة.
3. نجعل شدَّة التيَّار تتناقص بانتظام من 20 A إلى الصفر خلال 0.5 s احسب القيمة الجبريَّة للقوَّة المحرِّكة الكهربائيَّة المتحرِّضة في الوشيعة وحدِّد جهة التيّار المتحرِّض.
4. نمرِّر في سلك الوشيعة تيّاراً كهربائيّاً شدّته اللحظيَّة مقدَّرة بالأمبير $\bar{i} = 20 - 5t$، احسب القيمة الجبريَّة للقوَّة المحرِّكة الكهربائيَّة التحريضيَّة الذاتيَّة الناشئة فيها.

(نهمل تأثير الحقل المغناطيسيِّ الأرضيّ)

الحل:

١- من قانون ذاتية الوشيعة:

$$L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{N^2 S}{\ell}$$

$$N = \sqrt{\frac{L\,\ell}{4\pi \times 10^{-7} \times S}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^{-3} \times 30 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^{-2}}} = 200 \quad \text{لفة}$$

٢- الطاقة الكهرطيسية

$$E = \frac{1}{2} L\, I^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-3} \times (15)^2 = 0.5626\ \text{J}$$

٣- حساب القوة المحركة الكهربائية المتحرضة:

$$\varepsilon = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -5 \times 10^{-3} \times \frac{(0-20)}{0.5} = +0.2\ volts$$

جهة التيار المتحرض هي بجهة التيار المحرض

٤- حساب القيمة الجبرية للقوة المحركة الكهربائية التحريضية الذاتية:

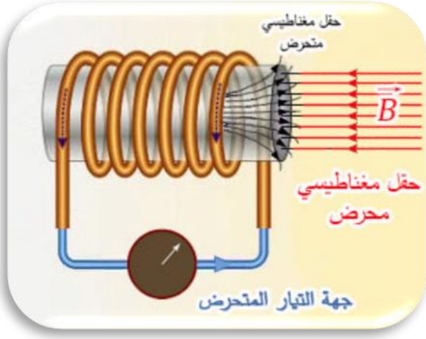
$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} = -L \times \frac{d}{dt}(20 - 5t) = -5 \times 10^{-3}(-5) = +25 \times 10^{-3}\ volts$$

المسألة (19):

وشيعة طولها $\frac{2\pi}{5}\,\mathrm{m}$ وعدد لفّاتها 200 لفَّة ومساحة مقطعها $20\,\mathrm{cm^2}$ حيث المقاومة الكلّيَّة لدارتها المغلقة 5Ω

1. نضع الوشيعة في منطقة يسودها حقل مغناطيسيّ ثابت المنحى وجهة خطوطه توازي محور الوشيعة، نزيد شدَّة هذا الحقل بانتظام خلال $0.5\,\mathrm{s}$ من $0.04\,\mathrm{T}$ إلى $0.06\,\mathrm{T}$:
   - a. حدِّد على الرسم جهة كلٍّ من الحقلين المغناطيسيّين المحرِّض والمتحرِّض في الوشيعة وعيِّن جهة التيّار المتحرِّض.
   - b. احسب القيمة الجبريَّة لشدَّة التيّار الكهربائيّ المتحرِّض المارّ في الوشيعة.
   - c. احسب ذاتيَّة الوشيعة.
2. نزيل الحقل المغناطيسيّ السابق ثمَّ نمرِّر في الوشيعة تيّاراً كهربائيّاً شدَّته اللحظيَّة $\bar{i} = 6 + 2t$
   - a. احسب القيمة الجبريَّة للقوَّة المحرِّكة الكهربائيَّة التحريضيّة الذاتيّة في الوشيعة.
   - b. احسب مقدار التغيُّر في التدفُّق المغناطيسيّ لحقل الوشيعة في اللحظتين: $t_1 = 0,\ t_2 = 1\mathrm{S}$
   - c. نمرِّر في سلك الوشيعة تيّاراً كهربائيّاً متواصلاً شدّته $10\,\mathrm{A}$ بدل التيّار السابق. احسب الطاقة الكهرطيسيّة المختزنة في الوشيعة.

(يهمل تأثير الحقل المغناطيسيّ الأرضيّ)



الحل: ١-a) جهة التيار المتحرض بحيث ينتج حقلاً مغناطيسياً يعاكس الحقل المحرض.

b) حساب القيمة الجبرية لشدة التيار المتحرض:

$$\varepsilon = R\,i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$i = \frac{-N\ S\ \cos(0)\left[B_2 - B_1\right]}{R\ \Delta t}$$

$$i = \frac{-200 \times 20 \times 10^{-4} \times 1(0.06 - 0.04)}{5 \times 0.5} = -3.2 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}$$

c) حساب ذاتية الوشيعة:

$$L = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{N^2 s}{\ell}$$

$$L = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{4 \times 10^{4} \times 20 \times 10^{-4}}{\frac{2\pi}{5}} = 8 \times 10^{-5}\,\mathrm{H}$$

٢- a – حساب القوة المحركة الكهربائية الذاتية :

$$\varepsilon = -L\,\frac{di}{dt} = -L \times \frac{d}{dt}(6 + 2t) = -8 \times 10^{-5}(+2) = -16 \times 10^{-5}\ volts$$

b - حساب تغير التدفق :
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\Phi = -\varepsilon\,\Delta t = -(-16 \times 10^{-5})(1 - 0) = 16 \times 10^{-5}\,web$$

c – الطاقة الكهرطيسية المختزنة:
$$E = \frac{1}{2} L\,I^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-5} \times 10^{2} = 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

المسألة (20):

وشيعة طولها $\frac{2\pi}{5}$m وعدد لفّاتها 1000 لفّة نصف قطر مقطعها 2 cm ومقاومة دارتها الكهربائيّة المغلقة 5Ω مؤلّفة من سلك نحاسيّ معزول قطر مقطعه $\frac{\pi}{500}$m

المطلوب:

1. احسب طول سلك الوشيعة واحسب عدد الطبقات.
2. احسب ذاتيّة الوشيعة.
3. نعلّق الوشيعة من منتصفها بسلك شاقوليّ عديم الفتل ونجعل محورها أفقيّاً عموديّاً على خطوط حقل مغناطيسيّ منتظم أفقيّ شدّته 10^{-2} T ونمرّر فيها تيّاراً كهربائيّاً شدّته 4 A المطلوب:
   a. احسب قيمة عزم المزدوجة الكهرطيسيّة عندما تكون قد دارت زاوية 30°.
   b. احسب عمل المزدوجة الكهرطيسيّة المؤثّرة في الوشيعة من لحظة مرور التيّار حتّى اللحظة التي تكون فيها قد دارت بزاوية 60°.
4. نقطع التيّار السابق عن الوشيعة وهي في وضع التّوازن المستقرّ ثمّ نديرها حول السلك الشاقوليّ خلال 0.5 S ليصبح محورها عموديّاً على خطوط الحقل المغناطيسيّ المطلوب:
   a. احسب شدّة التيّار المتحرّض المتولّد في الوشيعة.
   b. احسب كمّيّة الكهرباء المتحرّضة خلال الزمن السابق.
5. نعيد الوشيعة إلى وضع التوازن المستقرّ ثمّ ندخل بداخلها نواة حديدية عامل نفاذيتها المغناطيسيّ 50 احسب شدّة الحقل المغناطيسيّ داخل النواة الحديديّة واحسب قيمة التدفّق المغناطيسيّ داخل الوشيعة.

الحل:

١- حساب طول سلك الوشيعة وعدد الطبقات:

$$\text{طول سلك الوشيعة} = \ell' = N \times 2\pi r$$

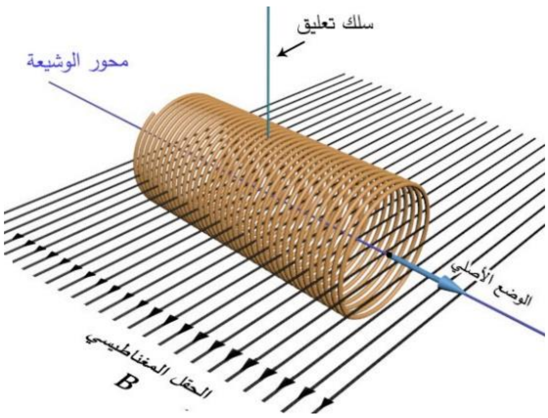
$$\ell' = 1000 \times 2\pi \times 2 \times 10^{-2} = 125 \text{ m}$$

عدد اللفات في الطبقة الواحدة الطبقات:
$$n = \frac{\text{طول الوشيعة}}{\text{قطر السلك}} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{\pi}{500}} = \frac{2\pi}{5} \times \frac{500}{\pi} = 200$$

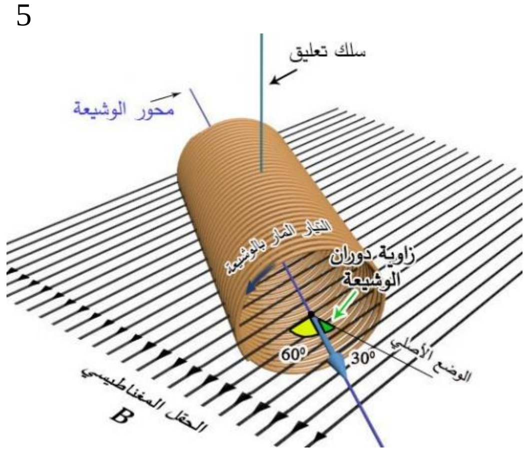
$$\text{عدد الطبقات} = \frac{N}{n} = \frac{1000}{200} = 5 \text{ طبقات}$$

٢- حساب ذاتية الوشيعة:
$$L = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N^2 s}{\ell} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{10^6 \times \pi \times 4 \times 10^{-4}}{\frac{2\pi}{5}} = 4\pi \times 10^{-4} \text{ H}$$

٣-



الوشيعة قبل مرور التيار



الوشيعة أثناء مرور التيار

a) حساب قيمة عزم المزدوجة الكهرطيسية عندما تدور الوشيعة زاوية 30^0 :

$$\Gamma = N\ B\ S\ I\ \sin\alpha$$

$$\Gamma = 1000\times10^{-2}\times\pi\times4\times10^{-4}\times4\times\sin 60 = 25\sqrt{3}\times10^{-3}\ \text{m.N}$$

b) حساب عمل المزدوجة:

$$W\ = I\ \Delta\Phi = I\ (\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$W\ = I\ N\ B\ S\ (\cos 30 - \cos 90)$$

$$W\ = 4\times1000\times10^{-2}\times\pi\times4\times10^{-4}(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0) = 25\sqrt{3}\times10^{-3}\,\text{J}$$

٤- a) حساب شدة التيار المتحرض:

$$\varepsilon = R\ i\ = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$i\ = \frac{-N\ B\ S\ [\cos 90 - \cos 0]}{R\ \Delta t}$$

$$i\ = \frac{-1000\times10^{-2}\times\pi\times4\times10^{-4}\times1(0-1)}{5\times0.5} = +5\times10^{-3}\,\text{A}$$

b) حساب كمية الكهرباء المتحرضة:

$$\Delta q = i\times\Delta t\ = 5\times10^{-3}\times0.5 = 2.5\times10^{-3}\ \text{C}$$

٥- حساب شدة الحقل المغناطيسي داخل نواة الحديدية:

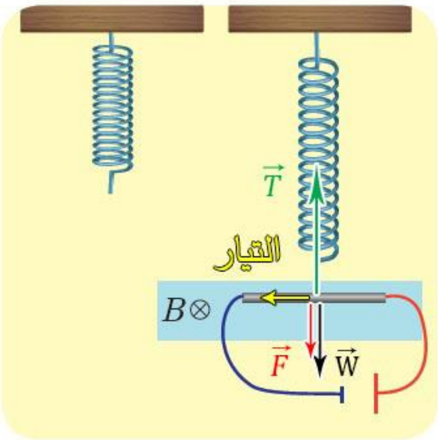
$$\mu = \frac{B_t}{B} \Rightarrow B_t\ = \mu B\ = 50\times10^{-2} = 0.5\ \ \text{T}$$

حساب التدفق المغناطيسي داخل الوشيعة:

$$\Phi = N\ B_t\ S\ \cos(0)$$

$$\Phi = 1000\times0.5\times\pi\times4\times10^{-4}\times1 = 2\pi\times10^{-1}\ \ \text{web}$$

المسألة (21):



ساق نحاسيَّة طولها $80\,cm$ نحرِّكها بسرعة أفقيَّة $\vec{v}$ عموديَّة على شعاع حقل مغناطيسيّ منتظم أفقيّ شدَّته $0.5\,T$ فيكون فرق الكمون بين طرفي الساق $0.4\,V$

المطلوب:

1. استنتج العلاقة المحدِّدة لسرعة الساق واحسب قيمتها.
2. نأخذ الساق النحاسيَّة ونعلِّقها من منتصفها ضمن منطقة الحقل السابق بنابض مرن شاقوليّ مهمل الكتلة ثابت صلابته $100\,N.m^{-1}$ ونمرِّر فيها تيَّاراً كهربائيّاً شدَّته $20\,A$ فتتوازن الساق بعد أن يستطيل النابض بمقدار $20\,Cm$ عن طوله الأصليّ
   - a. حدِّد على الرسم القوى الخارجيَّة المؤثِّرة على الساق.
   - b. استنتج بالرموز العلاقة المحدِّدة لكتلة الساق واحسب قيمتها.

الحل:

٣- استنتاج العلاقة المحددة لسرعة الساق:

لدينا المسافة التي تقطعها الساق $\Delta x = v\,\Delta t$ وتمسح الساق سطحاً قدره:

$$\Delta s = L\,\Delta x = L\,v\,\Delta t$$

ويكون التدفق: $\Delta\Phi = B.\Delta s = B.L\,v\,\Delta t$ وتنشأ قوة محركة كهربائية متحرضة قيمتها المطلقة:

$$\varepsilon = \left|-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{B\,L\,v\,\Delta t}{\Delta t} = B\,L\,v$$

$$\Rightarrow v = \frac{\varepsilon}{B\,L} = \frac{0.4}{0.5\times0.8} = 1\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

٤- استنتاج العلاقة المحددة لكتلة الساق:

عند التوازن:

$$\sum\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور عمودي موجه نحو الاسفل:

$$W + F - T = 0$$

$$m = \frac{k\,\Delta x - I\,L\,B\sin\frac{\pi}{2}}{g}$$

$$m = \frac{100\times0.2 - 20\times0.8\times1}{10} = 1.2\ \mathrm{kg}$$