أهم الأفكار الواردة في الأشعة والمستقيمات والمستويات رياضيات بكالوريا 2022

مدونة المناهج السعودية القسم السوري

/https://eduschool40.blog

طريقك إلى التفوق

أهم الافكار الواردة في

الأشعـــــة و المســـتقيمات والمســـــتويات

في الفراغ

إعداد الأستـــاذ : صفوان دربك

هاتف 7722636

جوال : 0967159353

1	كيف نجد احداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	29	كيف نثبت أن ثلاث نقاط تعين مستوي علمت معادلته
2	كيف نجد مركبات شعاع	30	كيف نجد معادلة مستوي يمر من نقطتين وعمودي على مستوي
3	كيف نجد طويلة شعاع $\overrightarrow{AB}$	31	كيف نجد معادلة مستوي يمر من نقطة و يوازي المستوي
4	كيف نجد طويلة شعاع $\vec{u}(a,b,c)$	32	كيف نجد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة
5	كيف نجد إحداثيات النقطة K ليكون الرباعي ABCK متوازي أضلاع	33	كيف نثبت تعامد مستويين
6	كيف نثبت الارتباط الخطي لشعاعين	34	كيف نجد احداثيات نقطة من مستوي
7	كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة	35	كيف نجد بعد نقطة عن مستوي
8	كيف نجد مركز ثقل مثلث	36	كيف نثبت أن مستوي يمس كرة
9	كيف نجد مركز الأبعاد المتناسبة لعدة نقاط مثقلة	37	كيف نجد معادلة كرة مركزها A وتمس المستوي P
10	كيف نجد المثقلات لتكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A,B,C	38	التمثيل الوسيطي لمستقيم علم شعاع توجيه له ويمر من نقطة
11	كيف نحدد موضع نقطة من علاقة شعاعية	39	التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة و لنصف مستقيم
12	كيف نحدد طبيعة مجموعة نقاط M بالفراغ	40	كيف نجد احداثيات نقطة من (مستقيم ، نصف مستقيم ، قطعة مستقيمة)
13	كيف نجد معادلة كرة علم مركزها ونصف قطرها	41	كيف نثبت توازي مستقيمين
14	كيف نجد معادلة كرة مركزها A وتمر من النقطة B	42	كيف نثبت تعامد مستقيمين
15	كيف نجد مركز ونصف قطر كرة علمت معادلتها	43	كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي
16	معادلة الاسطوانة	44	كيف نثبت أن مستقيم عمود على مستوي
17	معادلة المخروط	45	كيف نثبت أن مستويين متوازيان أو متقاطعان
18	كيف نثبت أن ثلاث نقاط تعين مستوي	46	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم ومستوي (تقاطع مستقيم مع مستوي)
19	كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاثة أشعة	47	كيف نعين المسقط القائم لنقطة على مستوي
20	كيف نثبت أن أربعة نقاط تقع في مستوي واحد	48	كيف نجد التمثيل الوسيطي لمستقيم ناتج من تقاطع مستويين
21	كيف نجد الجداء السلمي لشعاعين	49	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين
22	كيف نثبت تعامد شعاعين	50	كيف نعين المسقط القائم لنقطة على مستقيم
23	كيف نجد $\cos(\vec{u},\vec{v})$	51	كيف نجد بعد نقطة عن مستقيم
24	إيجاد إحداثيات نقط في معلم متجانس	52	كيف نثبت أن مستقيمين يعينان مستوي ونجد معادلة ذلك المستوي
25	كيف نجد معادلة مستوي بدلالة شعاع ناظم و نقطة	53	كيف ندرس تقاطع مستقيم مع كرة
26	كيف نجد شعاع ناظم لمستوي علم شعاعي توجيه له	54	كيف ندرس الوضع النسبي لمستوي و كرة
27	كيف نجد معادلة مستوي يمر من نقطة وعلم شعاعي توجيه له	55	كيف نجد مركز ونصف قطر دائرة ناتجة من تقاطع مستوي و كرة
28	كيف نجد معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط		

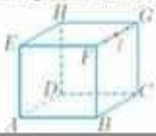
صفوان درباك 2022

1	كيف نجد احداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	
قاعدة	$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2})$	
مثال	أوجد احداثيات النقطة M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ $A(1,3,4)$, $B(3,5,2)$	$M(\frac{1+3}{2},\frac{3+5}{2},\frac{4+2}{2})=M(2,4,3)$
2	كيف نجد مركبات شعاع	
قاعدة	$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$	
مثال	أوجد مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(1,2,-3)$, $B(-1,3,3)$	$\overrightarrow{AB}(-1-1,3-2,3+3)=\overrightarrow{AB}(-2,1,6)$
3	كيف نجد طويلة شعاع $\overrightarrow{AB}$	
قاعدة	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$	
مثال	أوجد طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(1,2,-3)$, $B(-1,3,3)$	$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2+(3+3)^2}=\sqrt{4+1+36}=\sqrt{41}$
4	كيف نجد طويلة شعاع $\vec{u}(a,b,c)$	
قاعدة	$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	
مثال	أوجد طويلة الشعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$	$\vec{u}(2,3,-1)\Rightarrow \|\vec{u}\|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$
5	كيف نجد إحداثيات النقطة K ليكون الرباعي ABCK متوازي أضلاع	
قاعدة	من العلاقة $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CK}$ حيث $K(x,y,z)$	
مثال	أوجد إحداثيات النقطة K ليكون الرباعي ABCK متوازي اضلاع حيث $A(-1,2,1),B(1,2,1),C(0,2,0)$	لكي يكون ABCK متوازي أضلاع يجب أن يتحقق الشرط $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CK}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y-2\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x=-2\\y=2\\z=0\end{pmatrix}\Rightarrow K(-2,2,0)$
6	كيف نثبت الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ (توازي شعاعين)	
قاعدة	نثبت أن $\vec{u}=k\vec{v}$ أو أن مركباتهما متناسبة أي نثبت أن $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=k$	
مثال	اثبت أن الشعاعين $\vec{u}(6,3,-12),\vec{v}(2,1,-4)$ مرتبطان خطيا	$\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=\frac{-12}{-4}=3\Rightarrow$ $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطيا
7	كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة	
قاعدة	نثبت أن أي شعاعين متشكلين من النقاط الثلاث مرتبطين خطيا	
مثال	اثبت أن النقاط $A(1,2,-3)$, $B(-1,3,3)$, $C(5,0,-15)$ على استقامة واحدة	$\overrightarrow{AB}(-1-1,3-2,3+3)=\overrightarrow{AB}(-2,1,6)$ $\overrightarrow{AC}(5-1,0-2,-15+3)=\overrightarrow{AC}(4,-2,-12)$ $\frac{4}{-2}=\frac{-2}{1}=\frac{-12}{6}=-2\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا إذن النقاط على استقامة واحدة

8	كيف نجد مركز ثقل مثلث
قاعدة	إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC هي $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ $\quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ $\quad x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$
مثال	أوجد G مركز ثقل مثلث ABC حيث $A(1,2,-4), B(2,3,-2), C(6,1,3)$ $\left.\begin{array}{l} x_G = \frac{1+2+6}{3} = 3 \\ y_G = \frac{2+3+1}{3} = 2 \\ z_G = \frac{-4-2+3}{3} = -1 \end{array}\right\}$ $G(3,2,-1)$ مركز ثقل المثلث

9	كيف نجد مركز الأبعاد المتناسبة لعدة نقاط مثقلة
قاعدة	إحداثيات مركز الأبعاد للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ $\quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ $\quad x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
مثال	أوجد G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2),(B,2),(C,3)$ حيث $A(1,2,-4), B(2,3,-2), C(6,1,3)$ $\left.\begin{array}{l} x_G = \frac{2(1)+2(2)+3(6)}{2+2+3} = \frac{24}{7} \\ y_G = \frac{2(2)+2(3)+3(1)}{2+2+3} = \frac{13}{7} \\ z_G = \frac{2(-4)+2(-2)+3(3)}{2+2+3} = -\frac{3}{7} \end{array}\right\}$ مركز الأبعاد المتناسبة هو $G(\frac{24}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$

10	كيف نجد المثقلات α, β, γ لتكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$
قاعدة	نميز حالتان ① إذا علمت إحداثيات النقاط نبحث عن عددين x, y يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ فيكون $\beta = x \quad \gamma = y \quad \alpha = 1 - x - y$ ② إذا كان لدينا علاقة شعاعية نكتب العلاقة الشعاعية بالشكل $\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = 0$ فتكون المثقلات α, β, γ
مثال	① جد الأعداد الحقيقية α, β, γ حتى تكون النقطة $D(0,2,0)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0)$ نبحث عن عددين x, y يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + yAC \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+2y=0 \\ 2y=2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y=1 \\ x=-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha = 1-(-1)-1=1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{pmatrix}$ ② جد الأعداد الحقيقية α, β, γ حتى تكون النقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث $\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 0$ $\overrightarrow{AD} + 3AD + 3\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = 0$ $-3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow \alpha = -3, \beta = 3, \gamma = -1$

11	**كيف نحدد موضع نقطة من علاقة شعاعية**
قاعدة	باستخدام العلاقات بين الاشعة (علاقة شال)
مثال	ABCDEFGH مكعب و I منتصف الحرف [FG] عين النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$ نبحث عن شعاع بدايته A ويساوي $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}$ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AI}\Rightarrow M=I$ 
12	**كيف نحدد طبيعة مجموعة نقاط M بالفراغ**
قاعدة	نحول العلاقة الشعاعية إلى أحد الأشكال التالية ① المعادلة $MA=r=$ ثابت تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها r ② المعادلة $MA=MB$ تمثل المستوي المحوري للقطعة [AB] ③ المعادلة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$ تمثل مستوي يمر من النقطة A وناظمه $\overrightarrow{BC}$ ④ المعادلة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ تمثل كرة قطرها [AB]
مثال	إذا علمت أن ABCD رباعي وجوه جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق العلاقة $\Vert\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\Vert=\Vert 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\Vert$ $\Vert\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\Vert=3\Vert\overrightarrow{MG}\Vert$ حيث G مركز ثقل المثلث BCD $\Vert 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\Vert=\Vert 3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\Vert$ $=\Vert 3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\Vert=\Vert 3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{GM}\Vert=3\Vert\overrightarrow{GA}\Vert$ $\Rightarrow\Vert\overrightarrow{MG}\Vert=\Vert\overrightarrow{GA}\Vert=$ ثابت M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA
13	**كيف نجد معادلة كرة علم مركزها ونصف قطرها**
قاعدة	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ معادلة كرة مركزها $A(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها r
مثال	أوجد معادلة كرة مركزها (2,1,-2) ونصف قطرها 5 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5^2=25$
14	**كيف نجد معادلة كرة مركزها A وتمر من النقطة B**
قاعدة	نجد نصف قطر الكرة $R=AB$ فيصبح لدينا مركز A ونصف قطر AB (الفقرة 13)
مثال	أوجد معادلة كرة مركزها النقطة $A(2,1,-2)$ وتمر من النقطة $B(6,1,1)$ $R^2=AB^2=(6-2)^2+(1-1)^2+(1+2)^2=25$ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5^2=25$

19 كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

قاعدة

① إذا كان $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطين خطيا فإن الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ مرتبطة خطيا

② إذا كان $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فإن الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ تكون مرتبطة خطيا إذا وجد عددان $a,b\in R$ يحققان الشرط

$$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

مثال

أثبت أن الأشعة التالية مرتبطة خطيا $\vec{u}(1,2,-2),\vec{v}(-1,2,2),\vec{w}(1,0,-2)$

نلاحظ أن $\frac{2}{2}\neq\frac{1}{-1}$ ⟸ $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا ولكي تكون الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ مرتبطة خطيا

يجب أن نجد $a,b\in R$ تحقق الشرط $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ $\quad \vec{w}(1,0,-2)=a\vec{u}(1,2,-2)+b\vec{v}(-1,2,2)$

$$(1,0,-2)=(a-b,2a+2b,-2a+2b)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-b=1 & ① \\ 2a+2b=0\Rightarrow a+b=0 & ② \\ -2a+2b=-2\Rightarrow a-b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ①+② \Rightarrow a=\frac{1}{2} \\ \text{تعوض في } ② \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow \vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$$

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ مرتبطة خطيا

20 كيف نثبت أن أربعة نقاط تقع في مستوي واحد

قاعدة

نثبت الارتباط الخطي لثلاثة أشعة مشكلة من هذه النقاط

مثال

أثبت أن النقاط $A(1,1,5)$ ، $B(2,3,3)$ ، $C(0,3,7)$ ، $D(2,1,3)$ تقع في مستوي واحد

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا $\quad \overrightarrow{AD}(1,0,-2),\overrightarrow{AB}(1,2,-2),\overrightarrow{AC}(-1,2,2)$

$$(1,0,-2)=a(1,2,-2)+b(-1,2,2)\qquad \overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{cases} a-b=1 & ① \\ 2a+2b=0\Rightarrow a+b=0 & ② \\ -2a+2b=-2\Rightarrow a-b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ①+② \Rightarrow a=\frac{1}{2} \\ \text{تعوض في } ② \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا

إذن النقاط A,B,C,D تقع في مستوي واحد

21 كيف نجد الجداء السلمي لشعاعين

قاعدة

إذا كان $\vec{u}(x,y,z),\vec{v}(x',y',z')$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$

مثال

أوجد الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}(1,1,2),\vec{v}(2,1,-2)$

$$\vec{u}.\vec{v}=1(2)+1(1)+2(-2)=-1$$

كيف نثبت تعامد شعاعين	22
نثبت أن ضربهما السلمي يساوي صفر $\vec{u}.\vec{v}=0$ أي $\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'=0$	قاعدة
اثبت أن الشعاعين $\vec{u}(2,3,-4),\vec{v}(1,2,2)$ متعامدان $\vec{u}.\vec{v}=2(1)+3(2)-4(2)=2+6-8=0 \Rightarrow$ $\vec{u},\vec{v}$ متعامدان	مثال
كيف نجد $\cos(\vec{u},\vec{v})$	23
$\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert}$	قاعدة
أوجد $\cos(\vec{u},\vec{v})$ حيث $\vec{u}(1,1,2),\vec{v}(2,1,-2)$ $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{1(2)+1(1)+2(-2)}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{-1}{3\sqrt{6}}$	مثال
إيجاد إحداثيات نقط في معلم متجانس	24
في المعلم $(A,\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ المتجانس لدينا $A(0,0,0)$ $E(0,0,a)$ $B(a,0,0)$ $F(a,0,a)$ $D(0,a,0)$ $H(0,a,a)$ $C(a,a,0)$ $G(a,a,a)$ 	قاعدة
ABCDEFGH متوازي مستطيلات فيه $\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{CJ}=\frac{1}{2}\vec{CG}$ أوجد في المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\vec{AB},\frac{1}{4}\vec{AD},\frac{1}{3}\vec{AE}\right)$ احداثيات النقاط A,B,C,D,E,F,G,H,I,J $A(0,0,0)$ $E(0,0,3)$ $B(2,0,0)$ $F(2,0,3)$ $D(0,4,0)$ $H(0,4,3)$ $C(2,4,0)$ $G(2,4,3)$ $\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AB}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow I(1,0,0)$ $\vec{CJ}=\frac{1}{2}\vec{CG}\Rightarrow\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\Rightarrow J(2,4,\frac{3}{2})$	مثال

25 كيف نجد معادلة مستوي بدلالة شعاع ناظم و نقطة

قاعدة: معادلة مستوي يمر من النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$ هي

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

مثال: اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة $A(1,2,-1)$ ويقبل $\vec{n}(2,0,1)$ شعاعاً ناظماً له

$$2(x-1)+0(y-2)+1(z+1)=0$$

$$2x-2+z+1=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+z-1=0$$

26 كيف نجد شعاع ناظم لمستوي علم شعاعي توجيه له $\vec{u},\vec{v}$

قاعدة: نفرض شعاع الناظم للمستوي $\vec{n}(a,b,c)$ فيكون $\vec{n}.\vec{v}=0$ و $\vec{n}.\vec{u}=0$ ومنها نحسب a,b,c

مثال: أوجد شعاع ناظم لمستوي شعاعي توجيهه $\vec{u}(1,2,-2), \vec{v}(-1,2,2)$

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}.\vec{u}=0 &\Rightarrow a+2b-2c=0 \quad ① \\ \vec{n}.\vec{v}=0 &\Rightarrow -a+2b+2c=0 \quad ② \end{aligned}\right\} ①+② \Rightarrow \left\{\begin{aligned} b&=0 \\ a&=2c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

بوضع $c=1$ نجد $a=2$

شعاع الناظم $\vec{n}(2,0,1)$

27 كيف نجد معادلة مستوي يمر من نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وعلم شعاعي توجيه له $\vec{u},\vec{v}$

قاعدة: نجد شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي كما في الفقرة السابقة ونعوض في العلاقة

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

مثال: أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(1,2,-1)$ ويقبل $\vec{u}(1,2,-2), \vec{v}(-1,2,2)$ شعاعي توجيه له

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع الناظم فيكون

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}.\vec{u}=0 &\Rightarrow a+2b-2c=0 \quad ① \\ \vec{n}.\vec{v}=0 &\Rightarrow -a+2b+2c=0 \quad ② \\ ①+② &\Rightarrow b=0 \end{aligned}\right\}$$

بوضع $c=1$ نجد $a=2$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{n}(2,0,1) \\ &A(1,2,-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(x-1)+0(y-2)+1(z+1)=0$$

$$2x-2+z+1=0$$

$$2x+z-1=0$$

28 كيف نجد معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط A,B,C

قاعدة: نجد شعاعي توجيه للمستوي وليكن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ ونتأكد انهما غير مرتبطين خطياً ونختار إحدى النقاط ولتكن A ونجد معادلة المستوي كما هو في الفقرة السابقة (نقطة وشعاعي توجيه)

مثال: أوجد معادلة المستوي المار من النقاط $A(1,2,-3)$ ، $B(-1,3,3)$ ، $C(5,0,4)$

$$\overrightarrow{AB}(-1-1,3-2,3+3)=\overrightarrow{AB}(-2,1,6)$$

$$\overrightarrow{AC}(5-1,0-2,4+3)=\overrightarrow{AC}(4,-2,7)$$

$$\frac{4}{-2}=\frac{-2}{1}\neq\frac{7}{6} \Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$$ غير مرتبطين خطياً

$$\begin{aligned} \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 &\Rightarrow -2a+b+6c=0 \quad ① \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 &\Rightarrow 4a-2b+7c=0 \quad ② \\ 2\times① + ② &\Rightarrow c=0, \; b=2a \end{aligned}$$

بوضع $a=1$ نجد $b=2$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{n}(1,2,0) \\ &A(1,2,-3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &1(x-1)+2(y-2)+0(z+3)=0 \\ &x-1+2y-4=0 \\ &x+2y-5=0 \end{aligned}$$

29	**كيف نثبت أن ثلاث نقاط تعين مستوي علمت معادلته**
قاعدة	① نثبت أن النقاط ليست على استقامة واحدة ② نثبت أن النقاط تحقق معادلة المستوي وذلك بتعويض إحداثيات كل نقطة في معادلة المستوي
مثال	إذا علمت أن $A(1,2,-3)$ ، $B(-1,3,3)$ ، $C(5,0,4)$ اثبت أن معادلة المستوي ABC هي $x+2y-5=0$ نعوض $A(1,2,-3)$ بمعادلة المستوي فنجد $1+2(2)-5=0$ محققة نعوض $B(-1,3,3)$ بمعادلة المستوي فنجد $-1+2(3)-5=0$ محققة نعوض $C(5,0,4)$ بمعادلة المستوي فنجد $5+2(0)-5=0$ محققة $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-2,1,6)\\ \overrightarrow{AC}(4,-2,7)\\ \frac{4}{-2}=\frac{-2}{1}\neq\frac{7}{6}\end{array}\right\}$ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا A,B,C ليست على استقامة واحدة إذن معادلة المستوي ABC هي $x+2y-5=0$
30	**كيف نجد معادلة مستوي Q يمر من النقطتين A,B و عمودي على المستوي P**
قاعدة	الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{n_P}$ هما شعاعا توجيه للمستوي Q ونختار النقطة A يصبح لدينا شعاعي توجيه ونقطة (الفقرة 27)
مثال	أوجد معادلة المستوي Q المار من النقطتين $A(1,2,-3)$ ، $B(-1,3,3)$ وعمود على المستوي $P:4x-2y+7z-2=0$ نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ناظم Q فيكون $\overrightarrow{AB}(-2,1,6)$ $\quad \overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -2a+b+6c=0$ ① $\overrightarrow{n_P}(4,-2,7)$ $\quad \overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_P}=0 \Rightarrow 4a-2b+7c=0$ ② $2\times$ ① + ② $\Rightarrow c=0$ بوضع $a=1$ نجد $b=2$ $\left.\begin{array}{l}\vec{n}(1,2,0)\\ A(1,2,-3)\end{array}\right\} \Rightarrow 1(x-1)+2(y-2)+0(z+3)=0 \Rightarrow x-1+2y-4=0$ $x+2y-5=0$ أصبح لدينا ناظم ونقطة
31	**كيف نجد معادلة مستوي Q يمر من النقطة A ويوازي المستوي P**
قاعدة	نجد معادلة المستوي المار من النقطة A وناظمه ناظم المستوي P (الفقرة 25)
مثال	أوجد معادلة المستوي Q المار من $A(1,2,-3)$ و يوازي المستوي $P:x-2y+3z-1=0$ $\vec{n}(1,-2,3)$ ، $A(1,2,-3)$ $1(x-1)-2(y-2)+3(z+3)=0 \Rightarrow x-2y+3z+12=0$
32	**كيف نجد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$**
قاعدة	$\left\{\begin{array}{l}\text{① نجد } I \text{ منتصف } [AB]\\ \text{② نجد } \vec{n}=\overrightarrow{AB}\end{array}\right.$ المستوي المحوري هو المستوي المار من I وناظمه $\overrightarrow{AB}$ (الفقرة 25)
مثال	أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(1,5,-3)$ ، $B(-1,3,3)$ نجد إحداثيات I منتصف $[AB]$ $\quad I(\frac{-1+1}{2},\frac{3+5}{2},\frac{3-3}{2})=I(0,4,0)$ $\quad$ ناظم المستوي هو $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(-2,-2,6)$ $-2(x-0)-2(y-4)+6(z-0)=0 \Rightarrow -2x-2y+6z+8=0$

33	**كيف نثبت تعامد مستويين**
قاعدة	نثبت أن ناظميهما متعامدان
مثال	هل المستويان Q و P متعامدان أم لا؟ $P: x-2y-2z-1=0$ $\quad Q: 2x-4y+5z-6=0$ $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_P}(1,-2,-2)\\ \overrightarrow{n_Q}(2,-4,5)\end{array}\right\} \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1(2)-2(-4)-2(5) = 2+8-10 = 0 \Rightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0 \Rightarrow \vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ P, Q متعامدان $\Rightarrow$
34	**كيف نجد احداثيات نقطة من مستوي**
قاعدة	نختار قيمتين لمتغيرين ونجد قيمة المتغير الثالث وإذا كان أحد المتغيرات غير موجود نختار أي قيمة له
مثال	① أوجد إحداثيات نقطة من المستوي $P: 4x-2y+z-1=0$ بوضع $x=1, y=2$ نجد $z=1$ النقطة $(1,2,1)$ ② أوجد إحداثيات نقطة من المستوي $Q: x-2y-1=0$ بوضع $y=1$ نجد $x=3$ ونختار $z=1$ النقطة $(3,1,1)$
35	**كيف نجد بعد نقطة عن مستوي**
قاعدة	بعد النقطة A عن المستوي $P: ax+by+cz+d=0$ يعطى بالعلاقة $d(A,p) = \dfrac{\lvert ax_A + by_A + cz_A + d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
مثال	أوجد بعد النقطة $A(1,2,4)$ عن المستوي $P: x-2y-z-1=0$ $d(A,p) = \dfrac{\lvert 1-2(2)-4-1 \rvert}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \dfrac{\lvert 1-4-4-1 \rvert}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{\lvert -8 \rvert}{\sqrt{6}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}}$
36	**كيف نثبت أن مستوي يمس كرة**
قاعدة	نجد بعد مركز الكرة عن المستوي فإذا كان البعد يساوي نصف قطر الكرة يكون المستوي يمس الكرة
مثال	اثبت أن المستوي $P: x-2y+2z-1=0$ يمس الكرة $S: (x-4)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=9$ مركز الكرة $A(4,1,4)$ ونصف قطرها $r=3$ $d(A,p) = \dfrac{\lvert 4-2(1)+2(4)-1 \rvert}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(2)^2}} = \dfrac{\lvert 4-2+8-1 \rvert}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$ بعد مركز الكرة عن المستوي يساوي نصف قطرها إذن المستوي يمس الكرة
37	**كيف نجد معادلة كرة مركزها A وتمس المستوي P**
قاعدة	نجد نصف قطر الكرة الذي هو بعد المركز A عن المستوي P أي $r = d(A,p)$ ثم نجد معادلة الكرة (الفقرة 13)
مثال	أوجد معادلة كرة مركزها $A(2,1,-2)$ وتمس المستوي $P: x-2y+2z-11=0$ $r = d(A,p) = \dfrac{\lvert 2-2(1)+2(-2)-11 \rvert}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(2)^2}} = \dfrac{\lvert 2-2-4-11 \rvert}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{15}{\sqrt{9}} = \dfrac{15}{3} = 5$ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 5^2 = 25$

38	**التمثيل الوسيطي لمستقيم علم شعاع توجيه له ويمر من نقطة**
قاعدة	المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من النقطة A وموجه بالمستقيم $\vec{u}(a,b,c)$ هي $d:\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases} \quad t\in R$
مثال	أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من النقطة $A(1,2,-4)$ وموجه بالمستقيم $\vec{u}(-2,5,1)$ $d:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=5t+2 \\ z=t-4 \end{cases} \quad t\in R$
39	**التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ و لنصف المستقيم $[AB)$**
قاعدة	المعادلات الوسيطية للقطعة المستقيمة $[AB]$ $d:\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases} \quad t\in[0,1]$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}(a,b,c)$ المعادلات الوسيطية لنصف المستقيم $[AB)$ $d:\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases} \quad t\in[0,+\infty[$
مثال	أوجد المعادلات الوسيطية للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(1,2,-4), B(2,3,-2)$ $\left.\begin{matrix} A(1,2,-4) \\ \overrightarrow{AB}(1,1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2 \\ z=2t-4 \end{cases} \quad t\in[0,1]$
40	**كيف نجد احداثيات نقطة من مستقيم أو من نصف مستقيم أو من قطعة مستقيمة**
قاعدة	إحداثيات نقطة من مستقيم نختار أي قيمة لـ $t\in R$ إحداثيات نقطة من نصف مستقيم نختار أي قيمة لـ $t\in[0,+\infty[$ إحداثيات نقطة من قطعة مستقيمة نختار أي قيمة لـ $t\in[0,1]$
مثال	أوجد إحداثيات نقطة من المستقيم $d:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=5t+2 \\ z=t-4 \end{cases} \quad t\in R$ بوضع $t=0$ نجد $A(1,2,-4)\in d$
41	**كيف نثبت توازي مستقيمين**
قاعدة	نثبت أن شعاعي توجيههما متوازيان (أي مرتبطين خطيا)
مثال	أثبت أن المستقيمين d_1, d_2 متوازيان $d_2:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=5t+2 \\ z=t-4 \end{cases} \quad t\in R \qquad d_1:\begin{cases} x=4t+1 \\ y=-10t+2 \\ z=-2t-4 \end{cases} \quad t\in R$ $\left.\begin{matrix} u_1(4,-10,-2) \\ u_2(-2,5,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{4}{-2}=\frac{-10}{5}=\frac{-2}{1}=-2 \Rightarrow$ u_1, u_2 مرتبطين خطيا $\Rightarrow d_1$ يوازي d_2

42	**كيف نثبت تعامد مستقيمين**
قاعدة	نثبت أن شعاعي توجيههما متعامدان (أي جدائهما السلمي يساوي صفر)
مثال	أثبت أن المستقيمين d_1, d_2 متعامدان $d_1:\begin{cases} x=4t+1 \\ y=-10t+2 \\ z=-2t-4 \end{cases} \quad t\in R \qquad d_2:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=t-4 \end{cases} \quad t\in R$ $\left.\begin{matrix} u_1(4,-10,-2) \\ u_2(-2,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u_1}.\vec{u_2}=4(-2)-10(-1)-2(1)=0 \Rightarrow \vec{u_1}\perp\vec{u_2}$
43	**كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي**
قاعدة	نثبت أن شعاع توجيه المستقيم عمود على شعاع ناظم المستوي (أي جدائهما السلمي يساوي صفر)
مثال	أثبت أن المستقيم d يوازي المستوي P $P: x-y+7z-1=0$ $d:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=5t+2 \\ z=t-4 \end{cases} \quad t\in R$ $\left.\begin{matrix} n(1,-1,7) \\ u(-2,5,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}.\vec{u}=1(-2)-1(5)+7(1)=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}$ المستقيم d يوازي المستوي P
44	**كيف نثبت أن مستقيم (DE) عمود على مستوي (ABC)**
قاعدة	① إذا كان لدينا معادلة المستوي نثبت أن شعاع توجيه المستقيم يوازي شعاع ناظم المستوي (أي مرتبطين خطيا) ② إذا كان لدينا احداثيات النقاط A,B,C نتأكد أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا و نثبت أن $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AC}$ أي نثبت أن $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AC}=0$ و $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}=0$ عندها يكون $\overrightarrow{DE}$ ناظم المستوي (ABC)
مثال	① اثبت أن المستقيم d عمود على المستوي $P: x-y+7z-1=0$ ② اثبت أن المستقيم d عمود على المستوي (ABC) ثم أوجد معادلة المستوي (ABC) حيث $A(0,0,0), B(-4,3,1), C(-3,4,1)$ $d:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t+2 \\ z=-14t-4 \end{cases} \quad t\in R$ ① $\left.\begin{matrix} \vec{u}(-2,2,-14) \\ \vec{n}(1,-1,7) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{1}=\frac{2}{-1}=\frac{-14}{7}=-2 \Rightarrow \vec{n},\vec{u}$ مرتبطين خطيا $\Rightarrow p$ يوازي d ② اكمل الحل
45	**كيف نثبت أن مستويين متوازيان أو متقاطعان**
قاعدة	نجد ناظم كلا منهما n_1,n_2 ونميز حالتان إذا كان n_1,n_2 مرتبطين خطيا كان المستويان متوازيين إذا كان n_1,n_2 غير مرتبطين خطيا كان المستويان متقاطعين
مثال	بين ما إذا كان المستويان متوازيين أم متقاطعين $Q: x-y+4z-1=0 \quad , \quad P: 2x-2y+z+3=0$ $\left.\begin{matrix} n_p(2,-2,1) \\ n_Q(1,-1,4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}\neq\frac{1}{4} \Rightarrow n_P,n_Q$ غير مرتبطين خطيا إذن المستويان متقاطعين
46	**كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم ومستوي (تقاطع مستقيم مع مستوي)**
قاعدة	نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي ونميز الحالات التالية ① $0t=b$ لا يوجد تقاطع والمستقيم يوازي المستوي ② $0t=0$ المستقيم محتوى في المستوي ③ $t=b$ المستقيم يقطع المستوي في نقطة واحدة نعوض t في معادلات المستقيم لنجد نقطة التقاطع
مثال	ادرس الوضع النسبي للمستقيم d ومستوي P $P: x-y+7z+9=0$ $d:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t+2 \\ z=t-2 \end{cases} \quad t\in R$ نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي $-2t+1-(2t+2)+7(t-2)+9=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow A(-3,6,0)$ نقطة التقاطع هي

47 كيف نعين A' المسقط القائم لنقطة A على مستوي P

قاعدة

نجد معادلة المستقيم d المار من A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ حيث $\vec{u}$ هو $\vec{n}$ ناظم المستوي P

فيكون المسقط القائم هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P

مثال

أوجد المسقط القائم للنقطة $A(1,2,-2)$ على مستوي $P:-2x+2y+z+9=0$

نجد معادلة المستقيم المار من $A(1,2,-2)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}=\vec{n}(-2,2,1)$

$$d:\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t+2 \\ z=t-2 \end{cases} \quad t\in R$$

نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي (لكي نجد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي)

$$\left.\begin{array}{l} -2(-2t+1)+2(2t+2)+(t-2)+9=0 \\ 4t-2+4t+4+t-2+9=0 \Rightarrow t=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow A'(3,0,-3)$$

المسقط القائم

48 كيف نجد التمثيل الوسيطي لمستقيم ناتج من تقاطع مستويين

قاعدة

نكتب عبارة مجهولين بدلالة المجهول الثالث (وذلك بالحل المشترك لمعادلتي المستويين)

ثم نضع مكان المجهول الثالث t فنحصل على x, y, z بدلالة t

مثال

أوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم d الناتج من تقاطع المستويين $Q:2x-y-z+2=0$ $\quad P:x-5y+z+1=0$

$$\left.\begin{array}{l} x-5y+z+1=0 \quad ① \\ 2x-y-z+2=0 \quad ② \end{array}\right\} ①+② \Rightarrow 3x-6y+3=0 \Rightarrow 3x=6y-3 \Rightarrow \boxed{x=2y-1}$$

نعوض في المعادلة ①

$$2y-1-5y+z+1=0 \Rightarrow \boxed{z=3y}$$

$\boxed{\text{بوضع } y=t}$ نجد

$$d:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \\ z=3t \end{cases} \quad t\in R$$

49 كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين

قاعدة

ندرس الارتباط الخطي لأشعتهما الموجهة $\vec{u},\vec{u'}$ ① فإذا كانا مرتبطين خطيا فهما متوازيان (منطبقان أو منفصلان) ونميز بينهما بأخذ نقطة من أحدهما والتعويض في الاخر فإذا حققت المعادلات يكون المستقيمان منطبقان وإذا لم تحقق المعادلات يكونان منفصلين

② إذا كانا غير مرتبطين خطيا فهما إما متقاطعان أو غير واقعان في مستو واحد ونميز ذلك بالحل المشترك

مثال

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين

$$d:\begin{cases} x=2t-5 \\ y=t-2 \\ z=-\frac{1}{2}t+3 \end{cases} \quad t\in R \qquad d':\begin{cases} x=2s+5 \\ y=2 \\ z=2s+5 \end{cases} \quad s\in R$$

$$\left.\begin{array}{l} u(2,1,-\frac{1}{2}) \\ u'(2,0,2) \end{array}\right\} \frac{2}{2}\neq\frac{1}{0} \Rightarrow \vec{u},\vec{u'} \text{ غير مرتبطين خطيا } \Rightarrow$$

فهما إما متقاطعان أو غير واقعان في مستو واحد ونميز ذلك بالحل المشترك

$$\left.\begin{array}{l} 2t-5=2s+5 \quad ① \\ t-2=2 \quad ② \\ -\frac{1}{2}t+3=2s+5 \quad ③ \end{array}\right\} ② \Rightarrow t=4 \begin{cases} \text{نبدل في المعادلة ①} \\ 2(4)-5=2s+5 \\ s=-1 \end{cases}$$

للتأكد من صحة الحل نبدل في المعادلة ③

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2}(4)+3=1 \\ 2(-1)+5=3 \end{array}\right\} 1\neq 3$$

غير محققة أي المستقيمان غير متقاطعان إذن فهما لا يقعان في مستو واحد

50 — كيف نعين المسقط القائم لنقطة A على مستقيم d

قاعدة: نجد A' مسقط A على المستقيم d بدلالة t فيكون $\vec{u} \perp \overrightarrow{AA'}$ أي $\vec{u}.\overrightarrow{AA'} = 0$ ومنها نجد قيمة t الموافقة

مثال: أوجد A' المسقط القائم للنقطة $A(1,1,0)$ على المستقيم d حيث :

$$d:\begin{cases} x = t-2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in R$$

نفرض أن A' مسقط A على d فيكون

$$\vec{u}(1,0,1) \quad A'(t-2,3,t)$$

$$\overrightarrow{AA'}(t-2-1,3-1,t-0) = \overrightarrow{AA'}(t-3,2,t)$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{AA'} = 0 \Rightarrow t-3+0+t = 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{3}{2} \Rightarrow A'(\frac{3}{2}-2,3,\frac{3}{2}) \Rightarrow A'(\frac{-1}{2},3,\frac{3}{2})$$

51 — كيف نجد بعد نقطة A عن مستقيم d

قاعدة: نجد A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d فيكون بعد A عن d هو AA'

مثال: أوجد بعد النقطة $A(1,1,0)$ عن المستقيم d حيث :

$$d:\begin{cases} x = t-2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in R$$

نجد A' مسقط A على d

ولدينا $\vec{u}(1,0,1) \quad A'(t-2,3,t)$

$$\overrightarrow{AA'}(t-2-1,3-1,t-0) = \overrightarrow{AA'}(t-3,2,t)$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{AA'} = 0 \Rightarrow t-3+0+t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow A'(\frac{3}{2}-2,3,\frac{3}{2}) \Rightarrow A'(\frac{-1}{2},3,\frac{3}{2})$$

$$AA' = \sqrt{(\frac{-1}{2}-1)^2+(3-1)^2+(\frac{3}{2}-0)^2} = \sqrt{(\frac{-3}{2})^2+2^2+(\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9+16+9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$AA' = \frac{\sqrt{34}}{2}$ وهو بعد A عن d

52 — كيف نثبت أن مستقيمين يعينان مستوي ونجد معادلة ذلك المستوي

قاعدة: نثبت أن المستقيمان متقاطعان وذلك بالحل المشترك

مثال: أثبت أن المستقيمان يعينان مستوي ثم أوجد معادلة ذلك المستوي

$$d:\begin{cases} x = 2t-5 \\ y = t-2 \\ z = -\frac{1}{2}t+3 \end{cases} \quad t \in R \qquad d':\begin{cases} x = 2s+5 \\ y = 2 \\ z = 2s+3 \end{cases} \quad s \in R$$

$$\left.\begin{array}{l} 2t-5 = 2s+5 \ ① \\ t-2 = 2 \ ② \\ -\frac{1}{2}t+3 = 2s+3 \ ③ \end{array}\right\} ② \Rightarrow t = 4$$

نبدل في المعادلة ①

$$\begin{cases} 2(4)-5 = 2s+5 \\ s = -1 \end{cases}$$

للتأكد من صحة الحل نبدل في المعادلة ③

$$-\frac{1}{2}(4)+3 = 2(-1)+3 \Rightarrow 1 = 1$$

محققة المستقيمان متقاطعان فهما يعينان مستوي

لإيجاد معادلة المستوي أصبح لدينا نقطة وشعاعي توجيه (فقرة 21)

$$\left.\begin{array}{l} u(2,1,-\frac{1}{2}) \\ u'(2,0,2) \\ A(3,2,1) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \vec{n}.\vec{u} = 0 \Rightarrow 2a+b-\frac{1}{2}c = 0 \ ① \\ \vec{n}.\vec{u'} = 0 \Rightarrow 2a+2c = 0 \ ② \\ ② \Rightarrow a = -c \end{array}\right\}$$

بوضع $c = 2$ نجد $b = 5$ و $a = -2$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}(-2,5,2) \\ A(3,2,1) \end{array}\right\}$$

معادلة المستوي هي

$$-2(x-3)+5(y-2)+2(z-1) = 0$$

$$-2x+6+5y-10+2z-2 = 0$$

$$-2x+5y+2z-6 = 0$$

53	كيف ندرس تقاطع مستقيم مع كرة

قاعدة

بالحل المشترك حيث نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة الكرة ونحصل على معادلة بالمجهول t ونميز الحالات

1. للمعادلة حلين المستقيم يقطع الكرة في نقطتين بتعويض قيمة t في معادلة المستقيم نجد تلك النقطتين
2. للمعادلة حل وحيد المستقيم يمس الكرة في نقطة بتعويض قيمة t في معادلة المستقيم نجد تلك النقطة
3. ليس للمعادلة حلول المستقيم لا يشترك مع الكرة بأي نقطة

مثال

أوجد نقاط تقاطع الكرة S مع المستقيم d

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 35$$

$$d : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in R$$

بتعويض المعادلات الوسيطية في معادلة الكرة نجد $(t-2)^2 + 1^2 + t^2 = 35$

$$t^2 - 4t + 4 + 1 + t^2 = 35 \Rightarrow 2t^2 - 4t - 30 = 0$$

$$t^2 - 2t - 15 = 0 \Rightarrow (t-5)(t+3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 5 \Rightarrow (3,1,5) & \text{نقطة تقاطع} \\ t = -3 \Rightarrow (-5,1,-3) & \text{نقطة تقاطع} \end{cases}$$

54	كيف ندرس الوضع النسبي لمستوي و كرة

قاعدة

نجد d بعد مركز الكرة عن المستوي ونميز الحالات التالية

1. إذا كان $d < r$ المستوي يقطع الكرة في دائرة
2. إذا كان $d = r$ المستوي يمس الكرة في نقطة
3. إذا كان $d > r$ المستوي لا يقطع الكرة

مثال

ادرس الوضع النسبي للمستوي $P : x - 2y + 2z - 1 = 0$ والكرة $S : (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 9$

مركز الكرة $A(4,1,4)$ ونصف قطرها $r = 3$

$$d(A,p) = \frac{|4 - 2(1) + 2(4) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{|4 - 2 + 8 - 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

المستوي يمس الكرة $\Leftarrow d = r$

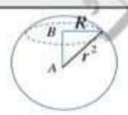
55	كيف نجد مركز ونصف قطر دائرة ناتجة من تقاطع مستوي و كرة نصف قطرها r مركزها A

قاعدة

نجد معادلة المستقيم d المار من مركز الكرة وشعاع توجيهه ناظم المستوي P

نجد B نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P فيكون مركز الدائرة هو هذه النقطة

نحسب نصف قطر الدائرة باستخدام فيثاغورث $R^2 = r^2 - AB^2$



مثال

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة

الناتجة من تقاطع المستوي P مع الكرة S

$$P : 2x + y - z + 2 = 0$$

$$S : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$\left.\begin{array}{ll} A(2,0,0) & \text{مركز الكرة} \\ \vec{n}(2,1,-1) & \text{ناظم المستوي} \end{array}\right\} \Rightarrow d : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in R$$

ندرس تقاطع المستقيم d مع المستوي P

$$\left.\begin{array}{l} 2(2t+2) + t + t + 2 = 0 \\ 4t + 4 + t + t + 2 = 0 \\ t = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

مركز الدائرة هو نقطة التقاطع $B(0,-1,1)$

$$AB = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$R^2 = 9 - 6 = 3$$

نصف قطر الدائرة $R = \sqrt{3}$