# الرياضيات

# Mathmatics

# 2024

## قسم الهندسة

## Geometry section

### الفصل الأوّل

By Pixel team

تم كتابة و تنظيم و تنسيق هذا الكتاب
من قبل فريق بيكسل - Pixel التعليمي.

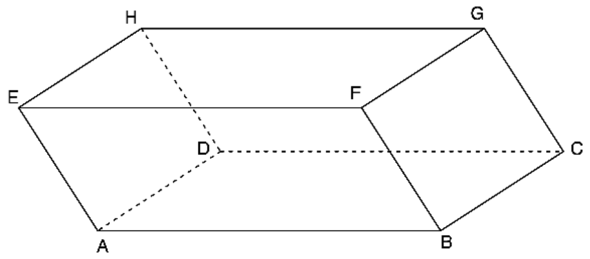
## المحتويات


| العنوان | الصفحة | العنوان | الصفحة |
|---|---|---|---|
| أولاً: الأشعة في الفراغ | 1 | رابعاً: المسافة في الفراغ | 11 |
| مثال أساسي | | خامساً:ملاحظات في المجسمات | 16 |
| علاقات شعاعية مميزة | | الهرم | |
| ثانياً: المعلم في الفراغ | 4 | المعادلة الديكارتية للأسطوانة | 17 |
| تذكرة | | المعادلة الديكارتية للمخروط | 18 |
| قواعد في المعلم | | سادساً: التمثيلات الوسيطية لمستقيم في الفراغ | 20 |
| الارتباط الخطي لشعاعين | 7 | سابعاً: الارتباط الخطي لثلاث أشعة | 23 |
| ثالثاً: أشكال ومعالم مميزة | 9 | هندسيًّا | |
| المكعب | | شعاعيًّا | |
| متوازي المستطيلات | | تحليليًّا | |


**! هام جداً**

هذا الكتاب لا يُعد بديلاً عن الكتاب الرسمي المقدم من وزارة التربية السورية وإنّما هو عرض للمعلومات بشكل مبسَّط لمساعدة الطالب على فهم المنهاج بشكل أفضل. وعليه فإنَّ المصدر الأساسي للدراسة هو كتاب الرياضيات (الجزء الثاني) المقدَّم من وزارة التربية السورية ونحن غير مسؤولين عن عدم الالتزام بمصدر الدراسة الأساسي شاكرين حُسن تفهمكم.

## 1 مثال أساسي




ABCDEFGH متوازي سطوح

1 الأشعة البديلة $\vec{u} = \vec{v}$

نفس الجهة

نفس المنحى $(\vec{u} \parallel \vec{v})$

نفس الطول



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EB}$

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC}$

2 جمع الأشعة:

a. طريقة شال:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$

b. طريقة متوازي الأضلاع:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC}$

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HF}$

3 ثلاثية الأضلاع:

هي ثلاث اضلاع تشترك برأس واحدة.

مجموع أشعة ثلاثية الأضلاع هو القطر الفراغي ابتداءاً من رأس الثلاثية.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF}$

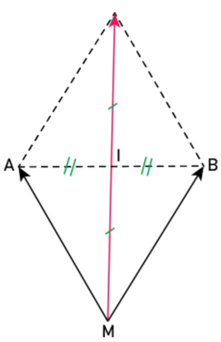
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC}$

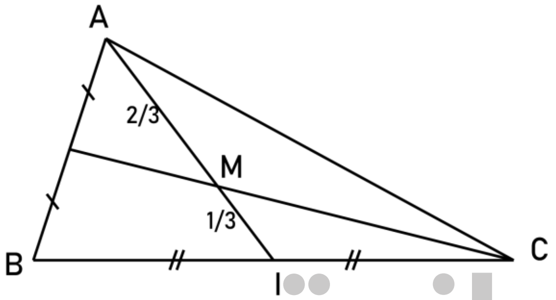


## 2 علاقات شعاعية مميزة

1 علاقة المتوسط:

$\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}}$






② مركز ثقل المثلث:

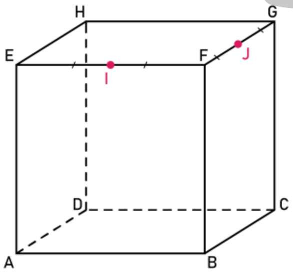
بفرض M مركز ثقل المثلث ABC:

1. M نقطة تلاقي المتوسطات.

2. $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

3. علاقة مركز الأبعاد $\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}}$






**تمرين 1 صفحة 16** ABCDEFGH مكعب. I منتصف [EF] وJ منتصف [FG].

① في كل من الحالات الاتية بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب وعلل إجابتك.

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$

$M$ تنطبق على $F$

2. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AG}$

$M$ تنطبق على $G$

3. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$

$M$ تنطبق على $E$

4. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AK}$

$M$ تنطبق على $K$ حيث $K$ نظيرة $C$ بالنسبة لـ$G$ إذاً $M$ خارج المكعب.

5. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

$M$ تنطبق على $B$ حيث $O$ مركز المكعب

**طريقة ثانية لحل رقم 5**

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{HB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

$$M = B$$

**طريقة ثالثة لحل رقم 5**

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{AD}} + \cancel{\overrightarrow{AE}} + \cancel{\overrightarrow{DA}} + \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{EA}})$$

$$= \frac{1}{2}2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow M = B$$

② في كل من الحالات الاتية حدد موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

1. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AJ} \Longrightarrow N = J$

2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ}$

$= \overrightarrow{AJ} \Longrightarrow N = J$

3. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$

$N = I$



③ في كل من الحالات الاتية عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد فقط (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً.

1. $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BJ}$

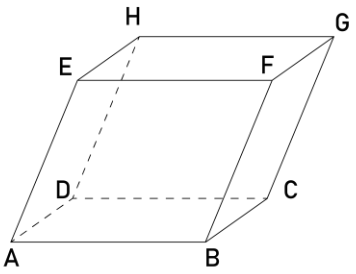
2. $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$

4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF})$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI}$




تمرين 2 صفحة 16 ABCDEFGH متوازي سطوح.

1 أثبت صحة المساواة الشعاعية في كل من الحالات الاتية:

| | |
|---|---|
| 1. $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$<br>$l_1=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}$<br>$=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}=l_2$ | 2. $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$<br>$l_1=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$<br>$l_1=l_2$ |
| 3. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$<br>$l_1=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}$<br>$=\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$<br>$l_1=l_2$ | 4. $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}$<br>$l_1=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}$<br>$=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}$<br>$=\overrightarrow{FD}=l_2$ |



2 وضّع النقاط P وQ وR بحيث يكون:

1. $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$$
$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$
$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$
$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

P منتصف BG

2. $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$$
$$\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{EQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$$

Q منتصف EG

3. $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})$$
$$\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DA})$$
$$\overrightarrow{DR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$$

R منتصف DE

3 اختزل الشعاع $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}$ واستنتج أنّ هذا المجموع مرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$.

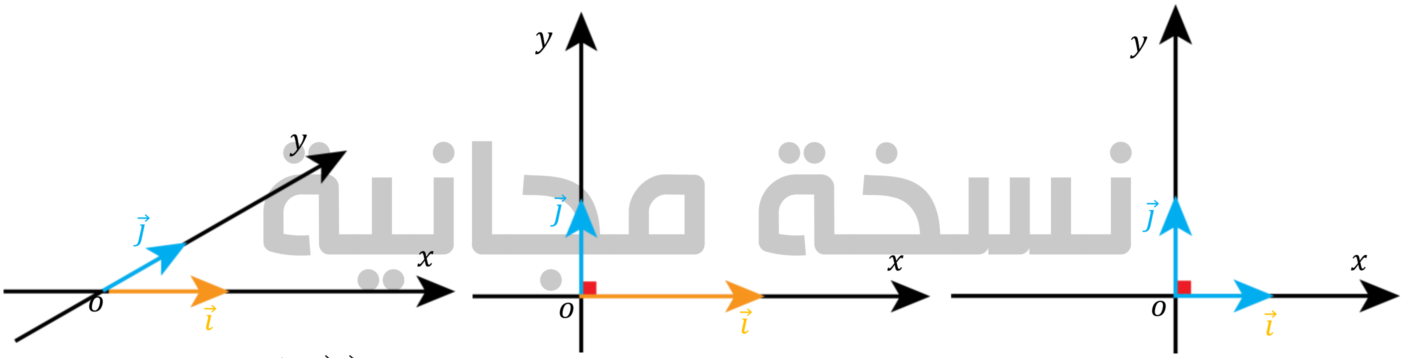
$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AH}$ ومنه مرتبط خطياً مع $\overrightarrow{AH}$

4 اختزل الشعاع $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}$ واستنتج أنّ هذا المجموع مرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{DF}$ ومنه مرتبط خطياً مع $\overrightarrow{DF}$

## 1 تذكرة

**1 المعلم في المستوي:**



معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\vec{i}\perp\vec{j}$ $\quad \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$

معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\vec{i}\perp\vec{j}$

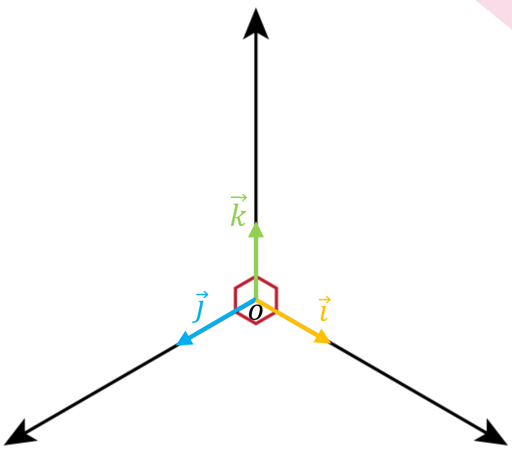
معلم كيفي $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير متعامدين

**2 المعلم في الفراغ:**

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس في الفراغ حيث:

1. الأشعة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى.
2. $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|$



## 2 قواعد في المعلم

في معلم في الفراغ لدينا النقاط :

$A(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2,)$ $C(x_3,y_3,z_3)$

**1 إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة:**

$I$ | منتصف $AB$

$$I\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

**2 إحداثيات مركز ثقل مثلث:**

$I$ مركز ثقل المثلث $ABC$

$$I\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

**3 مركبات شعاع:**

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

## تمرين 1 صفحة 24

نتأمل النقاط $F(8,13,3)$ $E(3,9,2)$ $D(-2,5,1)$ $C(0,-2,2)$ $B(2,-1,3)$ $A(3,5,2)$ في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في الفراغ.

1. احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ $[CD]$ $[EF]$

- لتكن $O_1$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

$$O_1\left(\frac{3+2}{2},\frac{5-1}{2},\frac{3+2}{2}\right) \Longrightarrow O_1\left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$$

- لتكن $O_2$ منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$

$$O_2\left(\frac{0-2}{2},\frac{-2+5}{2},\frac{2+1}{2}\right) \Longrightarrow O_2\left(-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

- لتكن $O_3$ منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$

$$O_3\left(\frac{3+8}{2},\frac{9+13}{2},\frac{2+3}{2}\right) \Longrightarrow O_3\left(\frac{11}{2},11,\frac{5}{2}\right)$$

2. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)\quad \overrightarrow{CD}(-2,7,1)\quad \overrightarrow{EF}(5,4,1)$$

3. عيِّن إحداثيات النقطة $K$ بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

نفترض إحداثيات $K(x,y,z)$ يكون الشكل الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع إذا كانت: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KC}$

$$\begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-2-y\\2-z\end{pmatrix}$$

$$-x=-1 \Longrightarrow x=1$$

$$-2-y=-6 \Longrightarrow y=4$$

$$2-z=1 \Longrightarrow z=1$$

$$K(1,4,1)$$

4. جد مركبات كل من الشعاعين:

$$\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$$

$$\vec{u}=3(-1,-6,1)+2(-2,7,-1)$$

$$\vec{u}=(-3,-18,3)+(-4,14,-2)$$

$$\vec{u}=(-7,-4,1)$$

$$\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}$$

$$\vec{v}=2(-1,-6,1)-\frac{1}{2}(-2,7,-1)+3(5,4,1)$$

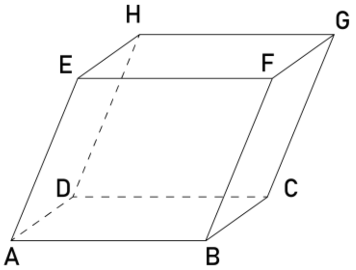
$$\vec{v}=(-2,-12,2)+\left(1,\frac{-7}{2},\frac{1}{2}\right)+(15,12,3)$$

$$\vec{v}=(14,\frac{-7}{2},\frac{11}{2})$$

## تمرين 2 صفحة 24

في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ تُعطى إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح ABCDEFGH المرسوم جانباً وهي:

$E(3,-1,3)$ $C(-3,2,0)$ $B(1,3,-1)$ $A(2.1,-1)$ جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.



- لدينا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإذا افترضنا $D(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-x \\ 2-y \\ 0-z \end{pmatrix}$$

$$-3 - x = -1 \Rightarrow x = -2$$
$$2 - y = 2 \Rightarrow y = 0$$
$$0 - z = 0 \Rightarrow z = 0$$
$$D(-2,0,0)$$

- لدينا $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ فإذا فترضنا $F(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$$
$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 1$$
$$z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$$
$$F(2,1,3)$$

- ولدينا $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ نفرض أنّ $G(x,y,z)$

نجد أنّ $G(-2,0,4)$ (على المسودة)

- لدينا $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ نفرض أنّ $H(x,y,z)$

نجد أنّ $H(-1,-2,4)$ (على المسودة)



**تمرين 3 صفحة 24** لدينا في معلم للفراغ النقاط $A(3,0,-1)$ و $B(-2,3,-2)$ و $C(1,2,-2)$

1. جد إحداثيات النقطة $I$ منتصف $[AB]$

$$I\left(\frac{3-2}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{2-1}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2. جد إحداثيات النقطة $D$ نظيرة $I$ بالنسبة لـ $C$

إذا كانت $D$ نظيرة $I$ بالنسبة إلى $C \Leftarrow C$ منتصف $ID$

نفرض $D(x,y,z)$ فيكون

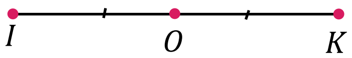
$$x_C = \frac{x_D + x_I}{2} \qquad y_C = \frac{y_D + y_I}{2} \qquad z_C = \frac{z_D + z_I}{2}$$

$$1 = \frac{x_D + \frac{1}{2}}{2} \qquad 2 = \frac{y_D + \frac{3}{2}}{2} \qquad -2 = \frac{z_D + \frac{1}{2}}{2}$$

$$x_C = \frac{3}{2} \qquad y_C = \frac{5}{2} \qquad z_C = \frac{-9}{2}$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$$

- طلب إضافي: جد $K$ نظيرة $I$ بالنسبة إلى المبدأ $O$




$$K\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

3. جد إحداثيات النقطة $M$ التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

نفرض $M(x,y,z)$ فيكون:

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2 = -11 \Rightarrow x = -13$$
$$y - 3 = 9 \Rightarrow y = 12$$
$$z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$$
$$M(-13,12,2)$$



4. جد إحداثيات النقطة $N$ التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$

نفرض $N(x,y,z)$ فيكون:

$$\begin{pmatrix} 3-x \\ -y \\ -1-z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \\ -2-z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3-x \\ -y \\ -1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2x \\ 4-2y \\ -4-2z \end{pmatrix}$$
$$3-x = 2-2x \Longrightarrow x=-1$$
$$-y = 4-2y \Longrightarrow y = 4$$
$$-1-z = -4-2z \Longrightarrow z=-3$$
$$N(-1,-4,-3)$$



## 3 الارتباط الخطي لشعاعين

الشعاعين الغير صفريين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيًّا $\Longleftrightarrow$ هندسياً: حامل $\vec{u}$ $\parallel$ حامل $\vec{v}$

شعاعياً: $\vec{u} = t.\vec{v} \quad ; \quad t \in R$

تحليلياً: في معلم من الفراغ بفرض $\vec{u}(a_1,b_1,c_1)$ و $\vec{v}(a_2,b_2,c_2)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

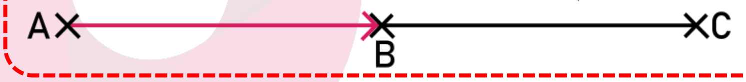
بشرط $a_2 \neq 0$ و $b_2 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$

**ملاحظة**

تساوي شعاعين $\vec{v} = \vec{u}$ أي أنَّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متساويين ومتوازيين (متسايرين) يكفي ذلك لإثبات أنَّ الرباعي متوازي أضلاع.

**ملاحظة**

النقاط $A$ و $B$ و $C$ تقع على استقامة واحدة $\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً.




**تمرين 4 صفحة 24** لدينا النقطتان $A(2,3,-2)$ و $B(5,-1,0)$ جِد إن أمكن، في كل حالة، إحداثيات النقطة $M$ المحققة للعلاقة المفروضة.

① $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$

نفرض أنَّ $M(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} 2-x=6 \Longrightarrow x=-4 \\ 3-y=-8 \Longrightarrow y=11 \\ -2-z=4 \Longrightarrow z=-6 \end{matrix}$$

$$M(-4,11,-6)$$

② $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

نفرض أنَّ $M(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} 5-x \\ -1-x \\ 0-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{pmatrix}$$

$5-x = 2-x$ مستحيلة

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Longrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 0$$
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{BA} = 0 \Longrightarrow A = B$$

وهذا مستحيل لأنَّ $A \neq B$ ومنه لا يمكن تعيين $M$ في هذه الحالة



③ $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = 0$

$$-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 0$$
$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 0$$

$\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$ نفس العلاقة الأولى

④ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow A = B$$

وهذا مستحيل لأنَّ $A \neq B$ ومنه لا يمكن تعيين $M$ في هذه الحالة

**تمرين 5 صفحة 24** أيمكن تعيين $a$ و $b$ لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة؟

تكون النقاط على استقامة واحدة عندما يكون $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA}$ مرتبطين خطيًّا.

$$\overrightarrow{MA}(2-a,3-b,0-2)$$
$$\overrightarrow{AB}(3-2,2-3,1)=(1,-1,1)$$
في حالة ارتباط خطي لشعاعين تتناسب مركباتهما أي $\Leftarrow \frac{2-a}{2}=\frac{3-b}{-1}=\frac{-2}{1}$

$3-b=2 \Rightarrow b=1$ و $2-a=-2 \Rightarrow a=4$

والنقطة $M$ هي $M(4,1,2)$

❖ طريقة ثانية: (الأفضل)

$$\overrightarrow{AM}=t*\overrightarrow{AB} \quad ;t\in R$$
$$\begin{pmatrix} a-2 \\ b-3 \\ 2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$a-2=t \ldots\ldots\ldots 1$$
$$b-3=-t \ldots\ldots\ldots 2$$
$$2=t \ldots\ldots\ldots 3$$

نعوض 3 في 1 نجد $\boxed{a=4}$

نعوض 3 في 2 نجد $\boxed{b=1}$

**تمرين 6 صفحة 24** أيمكن تعيين $a$ و$b$ ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,5)$ و$\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطيًا؟

يكون الشعاعان مرتبطين خطياً عندما تتناسب مركباتهما: $\frac{2}{1}=\frac{-2}{a}=\frac{a}{5}\ ;a\neq 0$

من النسبة الأولى والثانية $a=-1$ ومن النسبة الثالثة نجد أنّ $a^2=-10$ وهذا مستحيل فلا يمكن تعيين $a$

❖ طريقة ثانية:

$u$ و $v$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow \vec{u}=t*\vec{v}\,;t\in R$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2=t\ldots\ldots\ldots 1 \\ a=-2t\ldots\ldots\ldots 2 \\ 5=at\ldots\ldots\ldots 3 \end{matrix}$$

من 1 نجد $t=2$ نعوض في 2 نجد $a=4$ نتحقق في 3: $5 \stackrel{?}{=} (-4)(2) \Leftarrow 5\neq 8$

غير محققة ومنه لا يمكن تعيين $a$

**تمرين 7 صفحة 24** في كلٍّ من الحالات الاتية، بيِّن إذا كانت النقاط $A$ و$B$ و$C$ تقع على استقامة واحدة.

❶ $A(3,-1,2)\quad B(0,2,4)\quad C(2,0,-3)$

$$\overrightarrow{AB}=(-3,3,2)\ ,\overrightarrow{AC}(-1,1,-5) \Rightarrow \frac{-3}{-1}=\frac{3}{1}\neq\frac{2}{-5}$$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيًّا فالنقاط $A$ و$B$ و$C$ لا تقع على استقامة واحدة

---

❷ $A(-4,1,3)\quad B(-2,0,5)\quad C(0,-1,7)$

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,2)\ ,\overrightarrow{AC}(4,-2,4) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيًّا فالنقاط $A$ و$B$ و$C$ تقع على استقامة واحدة

---

❸ $A(1,-1,0)\quad B(1,-1,4)\quad C(1,-1,-3)$

$$\overrightarrow{AB}(0,0,4)\ ,\overrightarrow{AC}(0,0,3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيًّا فالنقاط $A$ و$B$ و$C$ تقع على استقامة واحدة

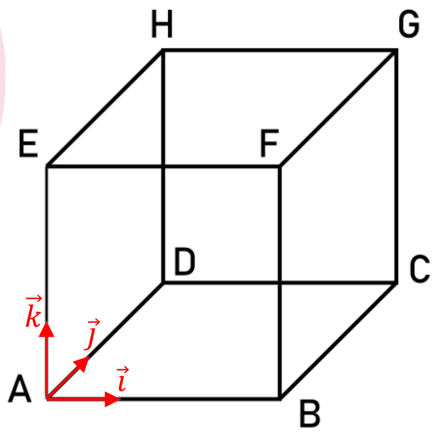
**ملاحظة**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\vec{u}(0,2,1)$<br>$\vec{v}(0,3,2)$ | $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$<br>غير مرتبطين | $\vec{u}(0,1,0)$<br>$\vec{v}(0,0,1)$ | $\vec{u} \neq t * \vec{v}$<br>غير مرتبطين |
| $\vec{u}(2,0,3)$<br>$\vec{v}(4,0,6)$ | $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$<br>مرتبطين | $\vec{u}(3,0,0)$<br>$\vec{v}(5,0,0)$ | مرتبطان لأنّ:<br>لأنّ $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{v}$<br>$[\frac{3}{5}(5,0,0) = (3,0,0)]$ |
| $\vec{u}(3,0,2)$<br>$\vec{v}(0,1,3)$ | $\frac{0}{1} \neq \frac{2}{3}$<br>غير مرتبطين | لا نضع صفر في المقام عند دراسة الارتباط | |

## 3 أشكال ومعالم مميزة

### 1 المكعب

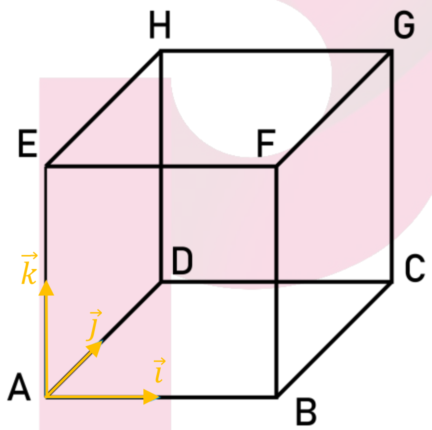
معالم متجانسة:




مكعب طول ضلعه 3

$(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$

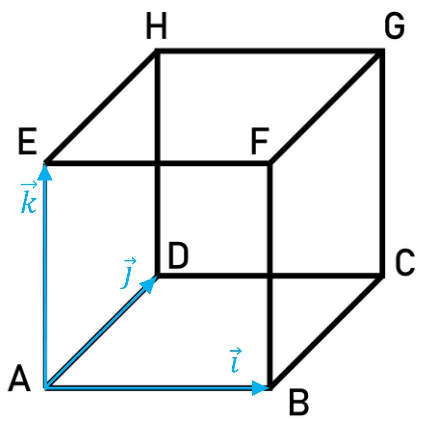
$A(0,0,0)$
$B(3,0,0)$
$C(3,3,0)$
$D(0,3,0)$
$E(0,0,3)$
$F(3,0,3)$
$G(3,3,3)$
$H(0,3,3)$




مكعب طول ضلعه 2

$(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

$A(0,0,0)$
$B(2,0,0)$
$C(2,2,0)$
$D(0,2,0)$
$E(0,0,2)$
$F(2,0,2)$
$G(2,2,2)$
$H(0,2,2)$



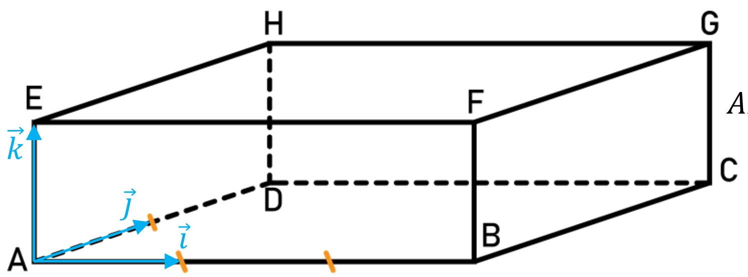

مكعب طول ضلعه 1

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$A(0,0,0)$
$B(1,0,0)$
$C(1,1,0)$
$D(0,1,0)$
$E(0,0,1)$
$F(1,0,1)$
$G(1,1,1)$
$H(0,1,1)$

### 2 متوازي المستطيلات

ABCDEFGH متوازي مستطيلات أبعاده $AB = 3$ و $AD = 2$ و $AE = 1$

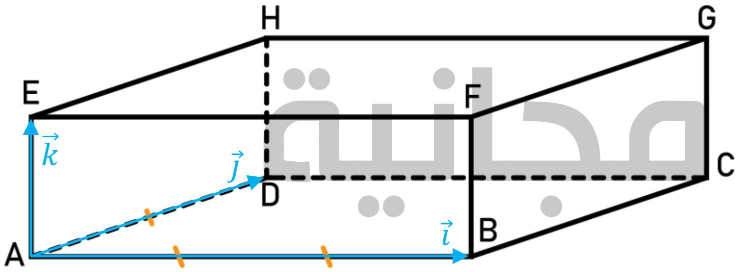


① معلم متجانس: $(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

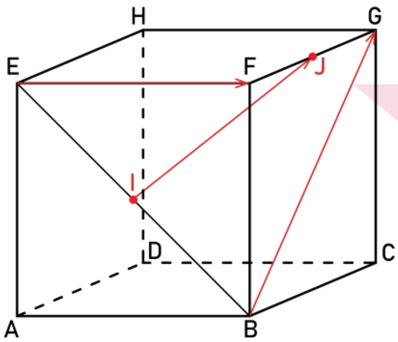
| | | | |
|---|---|---|---|
| $D(0,2,0)$ | $C(3,2,0)$ | $B(3,0,0)$ | $A(0,0,0)$ |
| $H(0,2,1)$ | $G(3,2,1)$ | $F(3,0,1)$ | $E(0,0,1)$ |

② معلم متعامد: $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ (غير متجانس)

| | |
|---|---|
| $E(0,0,1)$ | $A(0,0,0)$ |
| $F(1,0,1)$ | $B(1,0,0)$ |
| $G(1,1,1)$ | $C(1,1,0)$ |
| $H(0,1,1)$ | $D(0,1,0)$ |




**مثال صفحة 18** (هذا التمرين تابع لفقرة "الارتباط الخطي لثلاث أشعة" التي سيرد شرحها لاحقاً)




ABCDEFGH مكعب، النقطة $I$ منتصف $[BE]$ والنقطة $J$ منتصف $[FG]$

أثبت أنَّ الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيّاً.

ليس واضحاً من الشكل وجود شعاعين مرتبطين خطيّاً من بين الأشعة الثلاثة وقد لا يكون ذلك صحيحاً.

لنحاول إذاً التعبير عن $IJ$ بدلالة $EF$ و $BG$ وهما غير مرتبطين خطيّاً لأنهما متعامدان، لأجل ذلك نستفيد من علاقة شال.

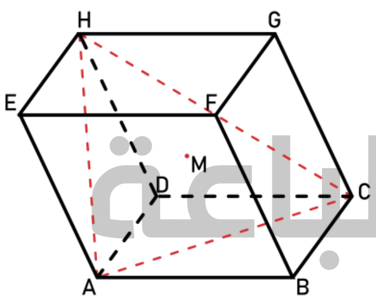
فعلى سبيل المثال:

$$1 \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$$
$$2 \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ}$$

فإذا أخذنا في الحسبان أنَّ $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ بدا طبيعياً أن نجمع 1 و 2 طرفاً مع طرف فنجد:

$2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + (\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GJ})$ إذاً $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}$ ومنه $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$

وهذا يثبت الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$




**تدريب** ABCDEFGH متوازي سطوح فيه $M$ مركز ثقل المثلث $ACH$ أثبت أنَّ النقاط $D$ و $M$ و $F$ تقع على استقامة واحدة. (تدريب شبيه بالمثالين المحلولين صفحة 23 و15)

باختيار المعلم $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ نجد $D(0,0,0)$ و $F(1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) \\ C(0,1,0) \\ H(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$ مركز ثقل المثلث

$\overrightarrow{DM}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \overrightarrow{DF}(1,1,1)$ مرتبطان خطيّاً لأنَّ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

إذاً $D, M, F$ تقع على استقامة واحدة

❖ طريقة ثانية:

$M$ مركز ثقل المثلث $ACH$:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MH}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}\Longrightarrow 3\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$$

$$\Longrightarrow 3\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}\Longrightarrow \overrightarrow{DF}=-3\overrightarrow{MD}$$

$\overrightarrow{MD}$ و $\overrightarrow{DF}$ مرتبطان خطيًّا إذاً $F,D,M$ تقع على استقامة واحدة.



## 4 المسافة في الفراغ

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $B(x_2,y_2,z_2)$ و $A(x_1,y_1,z_1)$ والشعاع $\vec{u}(a,b,c)$ عندئذٍ:

دستور البعد بين نقطتين (طول قطعة مستقيمة)

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

طول الشعاع

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

**تمرين 2 صفحة 27** فيما يأتي، بيّن هل المثلث $ABC$ قائم؟ هل هو متساوي الساقين؟ هل هو متساوي الأضلاع؟

**2** $A(1,3,-2)\ ,B(2,-1,0)\ ,C(6,-3,-1)$

$AB=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}$

$AC=\sqrt{25+36+1}=\sqrt{62}$

$BC=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$

$BC=AB \Longrightarrow ABC$ متساوي الساقين

$AB^2+BC^2=21+21=42\neq AC^2$

المثلث ليس قائم

**1** $A(1,3,-1)\ ,B(3,6,-2)\ ,C(0,4,0)$

$AB=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

$AC=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$BC=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$

$AB^2+AC^2=14+3=17=BC^2$

حسب فيثاغورث المثلث $ABC$ قائم في $A$

**تمرين 1 صفحة 27** احسب نظيم $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في كل من الحالات الاتية:

**2** $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}\ ,\ v=\vec{i}+5\vec{k}\ ,\ \vec{w}=\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j}+\vec{k}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{2+3+1}=\sqrt{6}$

**1** $\vec{u}(2,-2,3)\ ,\ \vec{v}(4,-4,-2)\ ,\ \vec{w}(4,1,-2)$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{16+16+4}=6$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21}$



**تمرين 3 صفحة 27** لدينا النقطتان $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$. بيّن أي النقاط $C$ أو $D$ أو $E$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$، في حالة $C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$ و $E(3,2,1)$.

| $E$ | $D$ | $C$ |
|---|---|---|
| $EA = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$ | $DA = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$ | $CA = \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59}$ |
| $EB = \sqrt{0+4+0} = 2$ | $DB = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$ | $CB = \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59}$ |
| $EA \neq EB \Leftarrow E$ لا تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$ | $DA = DB \Leftarrow D$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$ | $CA = CB \Leftarrow C$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$. |

**ملاحظة**

**المستوي المحوري لقطعة مستقيمة**

**هو مستو يعامد هذه القطعة في منتصفها، كل نقطة من هذا المستوي تكون متساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة.**

**طلب إضافي** أعطِ المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

أياً كان $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

$$AM = BM$$

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2+(z-1)^2}$$

نربع وننشر

$$\cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} + 2z + 1 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} - 2z + 1$$

$$-4x - 4y + 4z + 20 = 0 \quad (\div(-4))$$

$$\boxed{x + y - z - 5 = 0}$$

**تمرين 4 صفحة 27** تتأمّل النقاط $A(1,1,\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و $C$ نظيرة $A$ بالنسبة إلى المبدأ $O$. أثبت أنّ المثلث $ABC$ مثلث قائم ومتساوي الساقين.

إذا كانت $C$ نظيرة $A$ بالنسبة إلى المبدأ $O$ فإنّ $C(-1,-1,-\sqrt{2})$ ونجد:

$$AB^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + (-\sqrt{2}-1)^2 + (0-\sqrt{2})^2 = 8$$

$$BC^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + (-\sqrt{2}+1)^2 + (-\sqrt{2}-0)^2 = 8$$

$$CA^2 = (1+1)^2 + (1+1)^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{2})^2 = 16$$

ونجد أنّ $AB = BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

كما نجد أنّ $AB^2 + BC^2 = 8 + 8 = 16 = CA^2$

فالمثلث قائم الزاوية في $B$ ومتساوي الساقين (حسب عكس فيثاغورث).

**تمرين 5 صفحة 27** تتأمّل النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(2,8,-1)$ و $C(7,3,-1)$ و $D(-1,3,3)$ و $E(5,3,3)$. أثبت أنّ $B$ و $C$ و $D$ و $E$ تقع على كرة واحدة مركزها $A$.

نحسب الأطوال $AE, AD, AC, AB$

$AE = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$ $\quad AB = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$ $\quad AB = AC = 5$ (بعد الحساب)

إذاً $E, D, C, B$ تقع على كرة واحدة مركزها $A$ ونصف قطرها 5

طلب إضافي أعطِ المعادلة الديكارتية للكرة السابقة.

ملاحظة
معادلة كرة مركزها $(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها $R$:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

أياً كانت $M(x,y,z)$ نقطة من الكرة فإنَّ:

$$AM = 5$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = 5$$

نربع: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$

تمرين 16 صفحة 42 جِد على محور الفواصل نقطة $C$ متساوي البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$.

إذا كانت $C$ تقع على محور الفواصل فإنَّ $C(x,0,0)$ وإنَّ: $CA = CB$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (0+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-5)^2 + (0+1)^2}$$

نربع وننشر: $x^2 - 4x + 4 + 1 + 9 = x^2 + 25 + 1$

$$-4x + 14 = 26 \Longrightarrow -4x = 12 \Longrightarrow x = -3$$

والنقطة $C$ هي $C(-3,0,0)$

تمرين 17 صفحة 42 ليكن $\alpha$ عدداً حقيقيّاً، ولنتأمَّل النقاط الثلاث $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$. أثبت أنَّ المثلث $ABC$ متساوي الساقين أياً كان $\alpha$. أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

$$AC^2 = (-1-3)^2 + (1-1)^2 + (\alpha+3)^2$$

$$AC^2 = 16 + (\alpha+3)^2$$

$$BC^2 = (-1+1)^2 + (1-5)^2 + (\alpha+3)^2$$

$$BC^2 = 16 + (\alpha+3)^2$$

نلاحظ أنَّ $AC^2 = BC^2 = 16 + (\alpha+3)^2$ ⟸ $AC = BC$ مثلث متساوي الساقين رأسه $C$ أياً تكن $\alpha$

* نحسب $AB$: $AB^2 = (3+1)^2 + (1-5)^2 + (-3+3)^2$

$$AB^2 = 32 \Longrightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا كانت:

$$AC = AB \Longrightarrow AC^2 = AB^2$$

$$16 + (\alpha+3)^2 = 32 \Longrightarrow (\alpha+3)^2 = 16 \Longrightarrow \alpha + 3 = \mp 4$$

ملاحظة
للسهولة لا نفك التربيع

$$\alpha + 3 = +4 \Longrightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha + 3 = -4 \Longrightarrow \alpha = -7$$

توجد قيمتان لـ $\alpha$ تجعل المثلث متساوي الأضلاع.

**تمرين 18 صفحة 42** نتأمّل النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-1,4,2)$.

1. أوجد نقطة متساوية البعد عن $A$ و $B$.
2. أوجد العدد الحقيقي $\lambda$ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن $A$ و $B$.
3. أثبت أنّ $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط: $3x-3y-2z+8=0$



**الحل:** الطلب 1:

لتكن $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ متساوية البعد عن طرفيها $A$ و $B$.

$$z_I=\frac{0+2}{2}=1 \qquad , \quad x_I=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2} \qquad , \quad y_I=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$I\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$$

**الطلب 2:** تكون $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن $A$ و $B$ عندما:

$$AC=BC$$

$$AC^2=BC^2$$

$$(1-2)^2+(1-1)^2+(\lambda-0)^2=(1+1)^2+(1-4)^2+(\lambda-2)^2$$

$$1+\cancel{\lambda^2}=4+9+\cancel{\lambda^2}-4\lambda+4$$

$$4\lambda=16\Longrightarrow\lambda=4$$

**الطلب 3:** بما أنّ النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ $\Longleftarrow$ $MA=MB$

$$MA^2=MB^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2=x^2+2x+1+y^2-8y+16+z^2-4z+4$$

$$6x-6y-4z+16=0 \quad (\div 2)$$

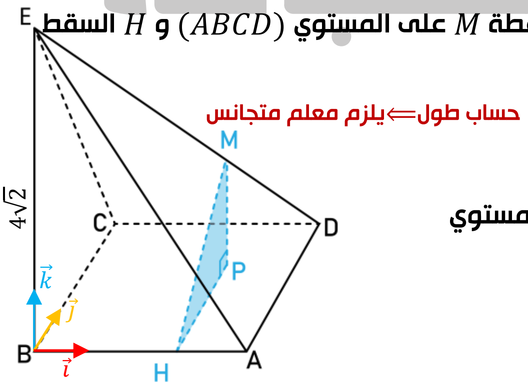
$$3x-3y-2z+8=0$$

والعلاقة الأخيرة تعيّن مستوياً (محورياً) نقاطه متساوي البعد عن $A$ و $B$.



**تمرين 8 صفحة 39** $ABCDE$ هرم رأسه $E$ وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $EB=4\sqrt{2}$ و $AB$

4. $M$ نقطة من القطعة $[ED]$ تحقق $3\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE}$. لتكن $P$ المسقط القائم للنقطة $M$ على المستوي $(ABCD)$ و $H$ السقط القائم للنقطة $P$ على المستقيم $(AB)$. احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$.




مبدأ المعلم $B$ لأننا نحتاج معلم متجانس (ثلاثية متعامدة)

باعتبار $EB$ مستقيم عمودي على المستوي فهو يعامد جميع المستقيمات في المستوي

$$\left(B;\frac{1}{4}\overrightarrow{BA},\frac{1}{4}\overrightarrow{BC},\frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{BE}\right)$$

$B(0,0,0)$ , $A(4,0,0)$ , $C(0,4,0)$ , $E(0,0,4\sqrt{2})$ , $D(4,4,0)$

لدينا $M(x,y,z)$ , $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$

$$3\begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-12=-4 \Longrightarrow x=\frac{8}{3} \\ 3y-12=-4 \Longrightarrow y=\frac{8}{3} \\ 3z-0=4\sqrt{2} \Longrightarrow z=\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array}\right\} \quad M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

$P$ هو مسقط $M$ على القاعدة

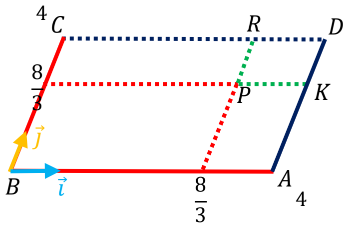
$$P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$$

$H$ مسقط $P$ على $ox$

$$H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$$

$$HM = \sqrt{0+\frac{64}{9}+\frac{32}{9}}$$

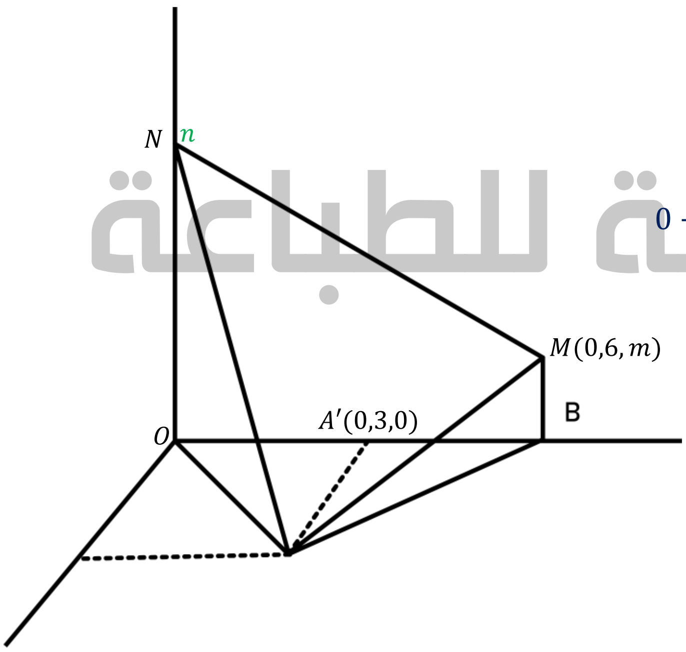
$$HM = \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$




طلب إضافي: أوجد $K$ مسقط $P$ على $AD$ وأوجد $R$ مسقط $P$ على $CD$.

$$K\left(4,\frac{8}{3},0\right) \quad , \quad R\left(\frac{8}{3},4,0\right)$$

تمرين 20 صفحة 42: $m$ و $n$ عددان حقيقيان موجبان يحققان $0 < m < n$. نتأمّل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و$B(0,6,0)$ و$M(0,6,m)$ و$N(0,0,n)$ في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. عيّن $m$ و $n$ ليكون المثلث $MAN$ قائماً في $A$ وحجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$.




* $AMN$ قائم في $A$

حسب فيثاغورث $MN^2 = AN^2 + AM^2$

$$0+36+(n-m)^2 = 3+9+4^2+3+9+m^2$$

$$36+n^2-2mn+m^2 = 24+n^2+m^2$$

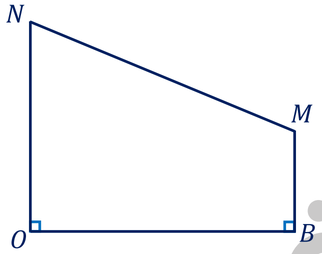
$$-2mn = -12 \Longrightarrow \boxed{m.n = 6 \cdots\cdots 1}$$

* حجم المجسم $5\sqrt{3}$

$$V = \frac{1}{3}S_?.h_?$$

- مساحة القاعدة $S$:

$$S=\frac{ON+BM}{2}\times OB=\frac{\sqrt{0+0+n^2}+\sqrt{0+0+m^2}}{2}\times\sqrt{0+36+0}\Longrightarrow S=3(n+m)$$




- ارتفاع الهرم $h$:

$$h=AA'$$

بحيث $A'(0,3,0)$ مسقط $A$ على القاعدة (مسقط $A$ على $oy$)

$$\Longrightarrow h=AA'=\sqrt{3+0+0}\Longrightarrow h=\sqrt{3}$$

نعوض:

$$V=\frac{1}{3}S.h$$

$$5\sqrt{3}=\frac{1}{3}.3(n+m).\sqrt{3}$$

$$\boxed{m+n=5\cdots\cdots (2)}$$

من (1) و (2) مع مراعاة الشرط $n>m>0$ نجد: $m=2$ , $n=3$

## 5 ملاحظات في المجسمات

المجسمات

موشور: مكعب، متوازي سطوح، اسطوانة

قاعدتين:

$$V=S.h$$

هرم: رباعي وجوه، مخروط

رأس وقاعدة:

$$V=\frac{1}{3}S.h$$

### 1 الهرم

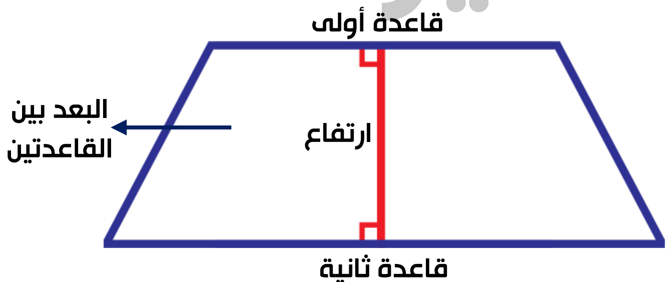
- حجم الهرم:

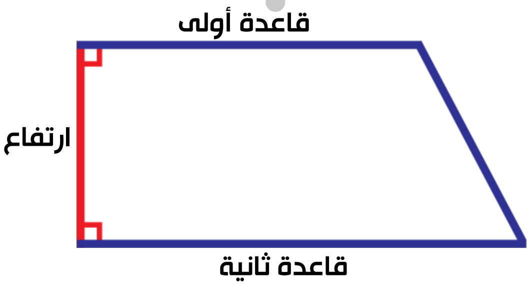
$$V=\frac{1}{3}S.h$$

- مساحة قاعدة $S$:

| | |
|---|---|
| مربع: $S=(\text{الضلع})^2$ | مثلث قائم: جداء القائمين $S=\frac{1}{2}$ |
| مستطيل: $S=$ الطول $\times$ العرض | مثلث متساوي الاضلاع: $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ |
| شبه منحرف: $S=\frac{\text{مجموع القاعدتين المتوازيتين}}{2}\times$ الارتفاع | |





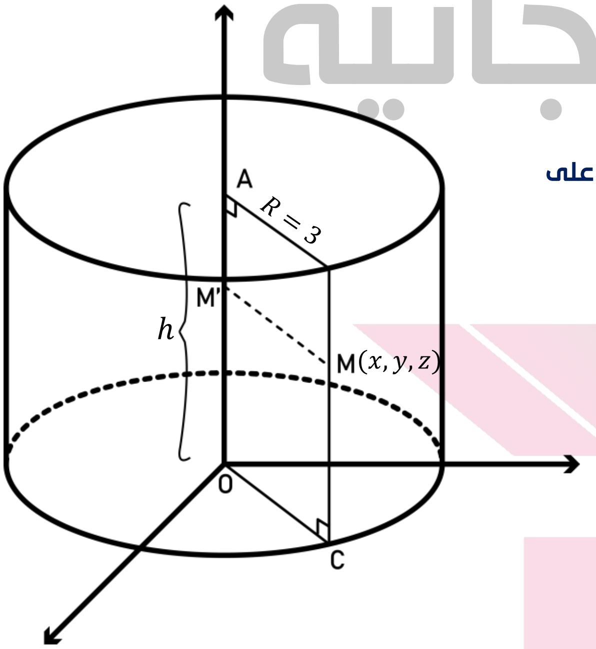
- ارتفاع الهرم $h$:

طول العمود النازل من الرأس إلى القاعدة $h$، $dist$(القاعدة, الرأس) (قانون $dist$ نأخذه فيما بعد)

بعد الرأس عن مسقط الرأس على القاعدة

## 2 المعادلة الديكارتية للأسطوانة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ استنتج المعادلة الديكارتية لأسطوانة ناتجة عن دوران المستطيل $OABC$ حول $oz$ دورة كاملة بحيث $A(0,0,7)$ و $AB=3$.




**الاستنتاج:**

أياً كانت $M(x,y,z)$ نقطة من الأسطوانة فتكون $M'(0,0,z)$ مسقط $M$ على $oz$ وبالتالي:

$$M'M=R$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=R$$

نربّع:

$$\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$$

اي أنّ:

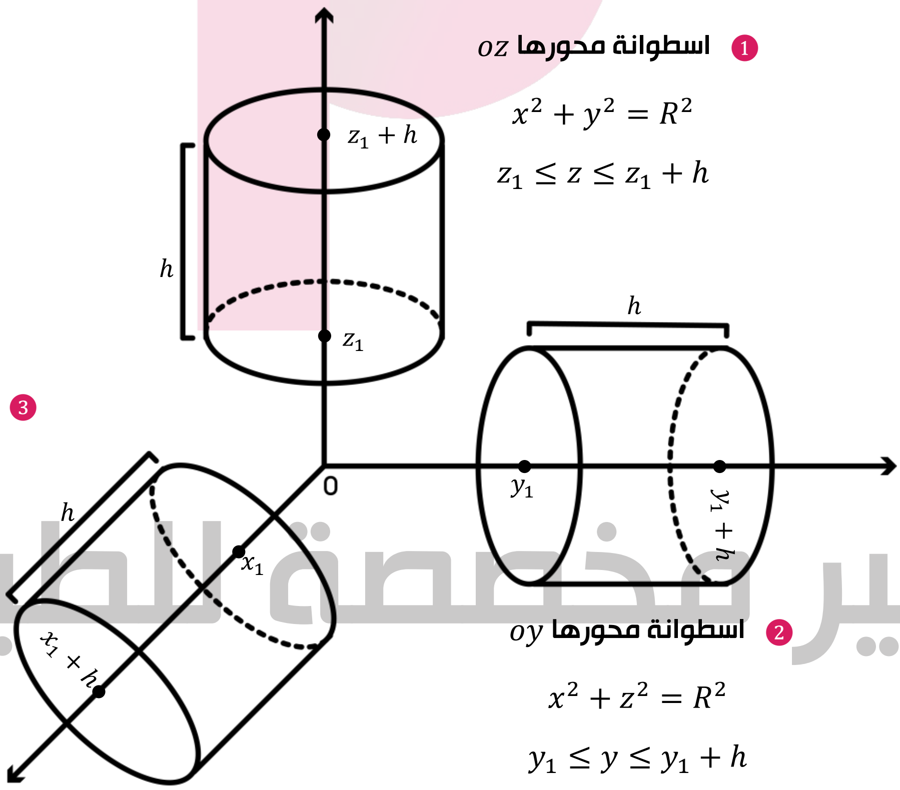
$$\begin{cases}x^2+y^2=9\\ 0\le z\le 7\end{cases}$$

**تعميم**

1. اسطوانة محورها $oz$

$$x^2+y^2=R^2$$

$$z_1\le z\le z_1+h$$




3. اسطوانة محورها $ox$

$$y^2+z^2=R^2$$

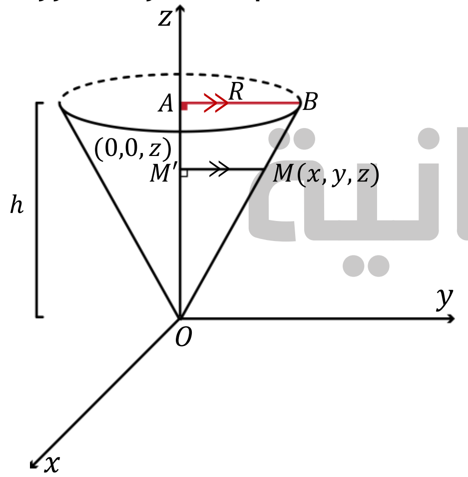
$$x_1\le x\le x_1+h$$

2. اسطوانة محورها $oy$

$$x^2+z^2=R^2$$

$$y_1\le y\le y_1+h$$

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ استنتج المعادلة الديكارتية لمخروط ناتج عن دوران المثلث $OAB$ القائم في $A$ حول $oz$ دورة كاملة، بحيث $A(0,0,7)$ و $AB=3$.




**الاستنتاج**: أياً كانت $M(x,y,z)$ نقطة من المخروط فإنَّ $M'(0,0,z)$ مسقط $M$ على $oz$ وبالتالي:

في المثلث $OAB$ حسب مبرهنة النسب الثلاث نجد:

$$\frac{OA}{OM'}=\frac{AB}{M'M}=\frac{OB}{OM}$$

$$\frac{h}{z}=\frac{R}{M'M}\Longrightarrow M'M=\frac{R}{h}z$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\frac{R}{h}z$$

نربِّع:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{R^2}{h^2}z \\ 0\le z\le h \end{cases}$$

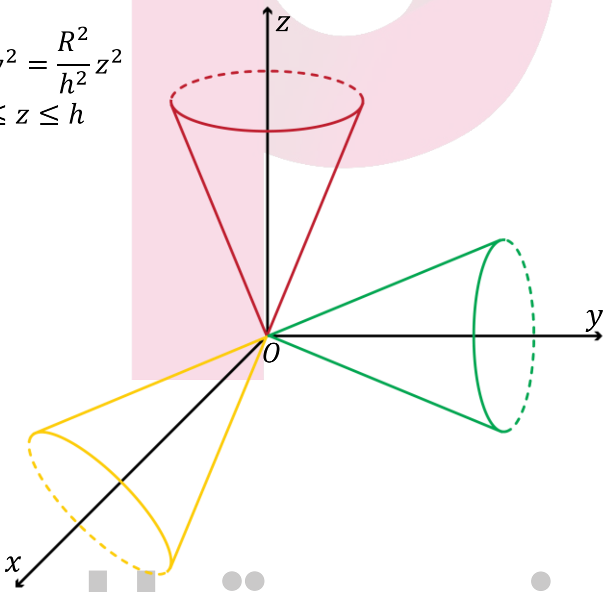
**تعميم**

1 مخروط محوره $oy$

$$\begin{cases} x^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}y^2 \\ 0\le y\le h \end{cases}$$

2 مخروط محوره $oz$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{R^2}{h^2}z^2 \\ 0\le z\le h \end{cases}$$




3 مخروط محوره $ox$

$$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}x^2 \\ 0\le x\le h \end{cases}$$

**مثال** مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل بالشكل $\begin{matrix} x^2+z^2=25 \\ 1\le y\le 4 \end{matrix}$

1 صِف مجموعة النقاط $M$.

2 أي من النقاط $A(3,2,4)$ , $B(4,5,2)$ , $C(\sqrt{2},1,0)$ تنتمي للمجموعة السابقة.

3 احسب حجم المجسم الناتج من مجموعة النقاط $M$.

**الحل**: الطلب 1: مجموعة النقاط $M$ تمثل اسطوانة محورها $oy$ نصف قطرها $R=5$ ارتفاعها $h=3$ ملركزي قاعدتيها $(0,1,0)$ و $(0,4,0)$.

الطلب 2:

نعوض $A$ في المعادلة
$9+16=25$ محققة
نعوض $A$ في الشرط
$1 \leq y_A = 2 \leq 4$ محقق
ومنه $A$ تنتمي للأسطوانة.

نعوض $B$ في الشرط
$1 \leq y_B = 5 \leq 4$ غير محقق
ومنه $B$ لا تنتمي للأسطوانة.

نعوض $C$ في المعادلة
$2+0=2.5$ غير محققة
ومنه $C$ لا تنتمي للأسطوانة.



الطلب 3: $V = S.h = \pi R^2 . h = \pi(25)(3) = 75\pi$

**مثال** مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل بالشكل $\begin{cases} y^2+z^2 = \frac{9}{25}x^2 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$

1. صِف مجموعة النقاط $M$.
2. أي من النقاط $A(5,\sqrt{3},\sqrt{6})$ , $B(6,\sqrt{6},\sqrt{3})$ , $C(5,2,0)$ تنتمي للمجموعة السابقة.
3. احسب حجم المجسم الناتج من مجموعة النقاط $M$.

الحل: الطلب 1: مجموعة النقاط $M$ تمثل مخروط محوره $ox$ ونصف قطر قاعدته $R=3$ وارتفاعه $h=5$ ومركز قاعدته $(5,0,0)$ رأسه $(O)$

الطلب 2:

نعوض $A$ في المعادلة
$3+6 = \frac{9}{25}(25)$ محققة
نعوض $A$ في الشرط
$0 \leq x_A = 5 \leq 5$ محقق
ومنه $A$ تنتمي للمخروط.

نعوض $B$ في الشرط
$0 \leq x_B = 6 \leq 5$ غير محققة
ومنه $B$ لا تنتمي للمخروط

نعوض $C$ في المعادلة
$4+0 = \frac{9}{25}(25)$ غير محققة
ومنه $C$ لا تنتمي للمخروط

الطلب 3: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(9)(5) = 15\pi$

**تمرين 4 صفحة 33** a. جِد معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{j})$ وقاعدتها الدائرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها 2.

b. أعد السؤال السابق في حالة مركز قاعدة الأسطوانة هو النقطة $Q(0,8,0)$.

الحل: a: $\begin{cases} x^2+z^2 = 4 \\ y \in R \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2+z^2 = 4 \\ y \in R \end{cases}$ سطح اسطواني $\Longrightarrow$ في حال لم يعطي المركزين معاً



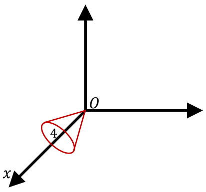
**تمرين 6 صفحة 33** صِف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات

$1 \leq z \leq 4$ و $x^2+y^2=25$

مجموعة النقاط تمثّل اسطوانة محورها $oz$ ونصف قطر قاعدتها $(5)$، مركزي قاعدتيها $(0,0,1)(0,0,4)$، ارتفاعها $h=3$

**تمرين 5 صفحة 33** اسطوانة محورها $(O,\vec{i})$ مركز قاعدتها $T(3,0,0)$ و $R=\sqrt{6}$ $\begin{cases} y^2+z^2 = 6 \\ x \in R \end{cases}$

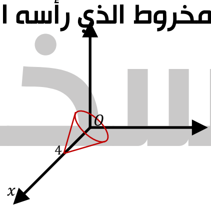
**تمرين 4 صفحة 34** اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه $O$ ومحوره $(O,\vec{\imath})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3.



$$y^2+z^2=\frac{9}{16}x^2$$
$$0\le x\le 4$$

**طلب إضافي** اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه النقطة $(4,0,0)$ ومحوره $(O,\vec{\jmath})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها 3.





$$y^2+z^2=\frac{9}{16}x^2$$
$$0\le x\le 4$$

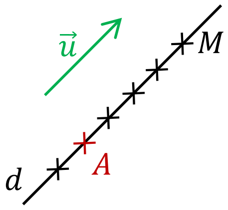
جهة المتراجحة ثابتة

## 6 التمثيلات الوسيطية لمستقيم في الفراغ

في معلم في الفراغ $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، لدينا المستقيم $d$ مار من النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ ويقبل $\vec{u}(a,b,c)$ شعاعاً موجهاً له.

أياً كانت $M(x,y,z)$ نقطة من $d$ فإنّ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيًا $\Leftrightarrow t\in R \quad ; \quad \overrightarrow{AM}=t.\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



$$d:\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} ; \quad t\in R$$

تسمّى هذه المعادلات بالتمثيل الوسيطي للمستقيم $d$

**ملاحظات هامّة**

1. $M(at+x_0,bt+y_0,ct+z_0)$ تسمّى مجموعة نقاط المستقيم $d$.
2. للمستقيم الواحد عدد غير منتهي من التمثيلات الوسيطية المتكافئة.
3. كل قيمة لـ $t$ من $R$ تعطي نقطة من $d$.

**مثال 1** أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $d$ المار من $A(-1,3,1)$ ويقبل الشعاع $\vec{u}(3,5,4)$ موجهاً له. ثم أعطِ نقطة $B$ من $d$ مغايرة لـ$A$.

$$d\begin{cases} A(-1,3,1) \\ \vec{u}(3,5,4) \end{cases}$$

$$d\begin{cases} x=3t-1 \\ y=5t+3 \\ z=4t+1 \end{cases} ; \quad t\in R$$



* نعوض $t=100$ في $d$:

$$\left.\begin{aligned} x&=300-1=299 \\ y&=500+3=503 \\ z&=400+1=401 \end{aligned}\right\} B(299,503,401)$$

**مثال 2** أعطِ تمثيلاً وسيطيًا للمستقيم $d$ المار من $A(3,4,-1)$ $B(2,0,1)$ وهل $C(0,4,1)$ تنتمي إلى $d$؟

$$d\begin{cases} B(2,0,1) \\ \overrightarrow{AB}(-1,-4,2) \end{cases}$$

$$d\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-4t \\ z=2t+1 \end{cases} ; \quad t\in R$$

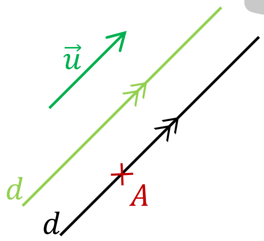
نعوض $C$ في $d$:

$$0 = -t + 2 \Longrightarrow t = 2$$

$$4 = -4t \Longrightarrow t = -1$$

وهذا تناقض إذاً $C \notin d$

مثال 3 أعطِ تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم $d$ المار من $A(-1,3,0)$ ويوازي المستقيم $d':\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = 3t + 1 \\ z = t - 5 \end{cases}$ وهل $C(5,12,3)$ تنتمي إلى $d$؟




$$d \begin{cases} A(-1,3,0) \\ \vec{U}_d = \vec{U}_{d'}(2,3,1) \end{cases}$$

$$d \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 3 \quad ; \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$$

نعوض $C$ في $d$:

$$5 = 2t - 1 \Longrightarrow t = 3$$

$$12 = 3t + 3 \Longrightarrow t = 3$$

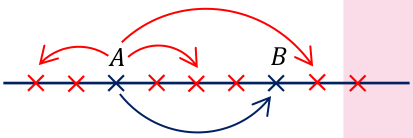
$$3 = t \Longrightarrow C \in d \text{ إذاً}$$

نتائج هامة (تمرين 2 صفحة 84) نتأمّل النقطتين $A(-2,1,0)$ و $B(2,3,1)$. أعطِ تمثيلاً وسطيّاً لكل من:

1. المستقيم $(AB)$.
2. القطعة المستقيمة $[AB]$.
3. نصف المستقيم $[AB)$.
4. نصف المستقيم $[BA)$.

1: المستقيم $(AB)$

$$d \begin{cases} A(-2,1,0) \\ \overrightarrow{AB}(4,2,1) \end{cases}$$




$$\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$$

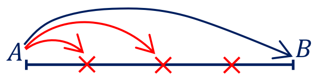
$$d \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1 \quad ; \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$$

* المستقيم $(AB)$

| النقطة | الموجه | $t \in R$ |
|---|---|---|
| $A$ | $\overrightarrow{AB}$ | |
| أو | أو | |
| $B$ | $\overrightarrow{BA}$ | |

2: القطعة المستقيمة $[AB]$

$$[AB]: \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1 \quad ; \quad t \in [0,1] \\ z = t \end{cases}$$




$$\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$$

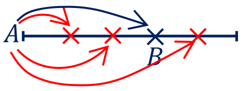
* القطعة المستقيمة $[AB]$

| النقطة | الموجه | $t \in [0,1]$ |
|---|---|---|
| $A \longrightarrow$ | $\overrightarrow{AB}$ | |
| أو | أو | |
| $B \longrightarrow$ | $\overrightarrow{BA}$ | |

3: نصف المستقيم $[AB)$

$A(-2,1,0)$ , $\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ ← $[AB)$

$$[AB):\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0,+\infty]$$



$\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$

* نصف المستقيم $[AB)$

| النقطة | الموجه | |
|---|---|---|
| $A$ | $\overrightarrow{AB}$ | $t \in [0,+\infty]$ |
| المغلقة | | |



4: نصف مستقيم $[BA)$

$B(2,3,1)$ , $\overrightarrow{BA}(-4,3,-1)$ ← $[BA)$

$$[BA):\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = -2t + 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad ; \quad t \in [0,+\infty]$$

**تمارين**

1 $$[AB]:\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \quad ; \quad t \in [0,1]$$

هل $K(-1,2,2)$ تنتمي لـ $[AB]$؟

نعوض

$$-1 = -t + 1 \Longrightarrow t = 2$$
$$2 = t$$
$$2 = 3t - 4 \Longrightarrow t = 2$$

القطعة $K \notin [AB]$ لأنّ $t = 2$ لا تنتمي للمجال $[0,1]$ ولكن $K$ تنتمي للمستقيم $(AB)$

2 $$[AB]:\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \quad ; \quad t \in [0,1]$$

أعطِ نقطة $C$ من $[AB]$ مغايرة لـ $A$ و $B$ لا نعوض $(0)$ أو $(1)$

نعوض $t = \frac{1}{2}$

$$x = 2\left(\frac{1}{1}\right) - 1 \Longrightarrow x = 0$$
$$y = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$$
$$z = \frac{3}{2} - 4 = \frac{3-8}{2} = -\frac{5}{2} \Longrightarrow z = -\frac{5}{2}$$
$$C\left(0,\frac{1}{2},\frac{-5}{2}\right)$$



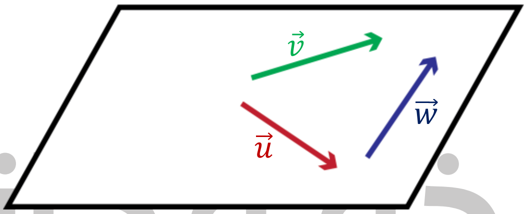
3 $$\begin{cases} x^2 + z^2 = y^2 \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$$ المجاهيل الثلاثة موجودة

صِف مجموعة النقاط $M$

مجموعة النقاط $M$ تمثل مخروط رأسه $(O)$ مركز قاعدته $(0,5,0)$ نصف قطر قاعدته $R = 5$ وارتفاعه $h = 5$.

## 1 هندسياً

الأشعّة $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ مرتبطة خطيّاً ⇔ الأشعّة $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ تقع هي أو بدائلها في مستوٍ واحد.






## 2 شعاعيّاً

مبرهنة $(4)$

الأشعّة $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ مرتبطة خطيّاً ⇔

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad ; \quad a,b \in R$$

**تذكرة**

تعيين المستوي:

1. بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أو مستقيم ونقطة خارجه.
2. مستقيمين ونقطة خارجه.
3. بشعاعين موجهين للمستوي (موازيين) وغير مرتبطين خطيًا.

## 3 تحليليّاً

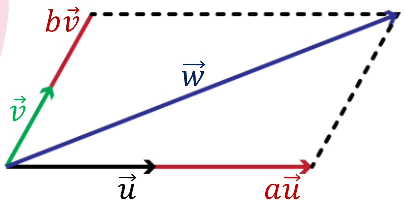
الأشعّة $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ مرتبطة خطيّاً ⇔

1. نثبت أنَّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيّاً.
2. نبحث عن $a\,,b$ من $R$ تحقق: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

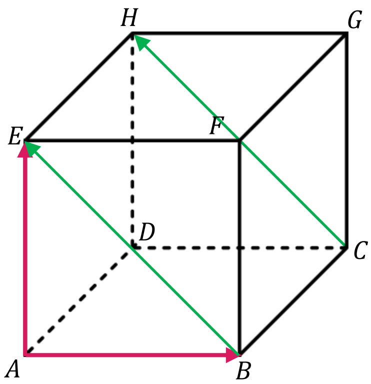
**نتيجة:**

الشعاعان $\vec{u}\,,\vec{v}$ مرتبطان خطيًا عندئذٍ:

أيًا كان $\vec{w}$ فإنَّ $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ مرتبطة خطيًا.

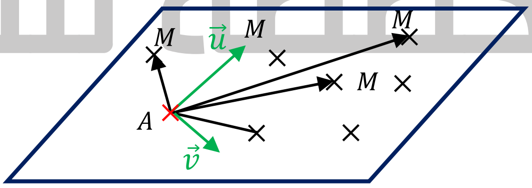



**مثال** الأشعة $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AE}\,,\overrightarrow{CH}$ مرتبطة خطيّاً لأنَّ بديل $\overrightarrow{CH}$ هو $\overrightarrow{BE}$ يقع في مستوٍ واحد مع $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AE}$




**تدريب** استنتج المعادلة الديكارتية للمستوي $P$ المار من $A(3,-1,0)$ ويقبل $\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(1,3,0)$ شعاعي توجيه له.






- نلاحظ أنَّ $\vec{u}\,,\vec{v}$ غير مرتبطين خطيّاً لأنَّ $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{0}{3}\right)$
- أيّاً كانت $M$ نقطة من $P$ فإنَّ: $\overrightarrow{AM}\,,\vec{u}\,,\vec{v}$ مرتبطة خطيّاً

إذاً حسب المبرهنة $(4)$:

$$\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

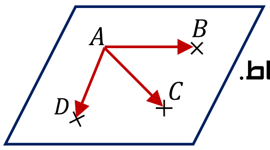
$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0+3b \\ 2a+0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x-3 = a+b \cdots (1) \\ y+1 = 3b \cdots\cdots (2) \\ z = 2a \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{matrix}$$

من (3) نجد $a = \frac{1}{2}z$ ومن (2) نجد $b = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ نعوض في (1): $x - 3 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$

$$\boxed{P:\ -x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z + \frac{10}{3} = 0}$$

**نتيجة**




لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد يكفي إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة مشكّلة من هذه النقاط.

أي أنَّ: $A$ , $B$ , $C$ , $D$ تقع في مستوٍ واحد $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AC}$ , $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطيًاً.

**تمرين 4 صفحة 20** $ABCD$ رباعي وجوه. و $M$ هي النقطة المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ عبِّر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$. واستنتج أنَّ $M$ تنتمي إلى المستوي $(ABC)$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

$A, B, C, D, E$ في مستوٍ واحد

$\cancel{\Uparrow}\Downarrow$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}$ مرتبطة خطياً

حسب المبرهنة (4): $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً إذاً $A, B, C, M$ تقع في مستوٍ وحيد $\Longleftarrow$ $M \in (ABC)$.

**تمرين 4 صفحة 36** نتأمّل في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، النقاط الاتية: $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,5,0)$ و $D(-3,-5,6)$ و $E(3,1,2)$. أثبت انتماء النقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ إلى مستوٍ واحد $P$، وتبيّن إذا كانت النقطة $E$ تنتمي إلى المستوي $P$.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB}(-1,-2,0) \\ \overrightarrow{AC}(3,5,-1) \\ \overrightarrow{AD}(-5,-5,5) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

نلاحظ أنَّ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيّاً لأنَّ $\frac{-2}{5} \neq \frac{-1}{3}$

(مركبات غير متناسبة)

نبحث عن $a$ و $b$ من $R$ تحقق:

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\-2a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3b\\5b\\-b\end{pmatrix}$$

$-a+3b=-5 \cdots\cdots (1)$

$-2a+5b=-5 \cdots\cdots (2)$

$-b=5 \cdots\cdots (3)$

من $(3)$ نجد $\boxed{b=-5}$ نعوض $b$ في $(1)$ نجد $\boxed{a=-10}$ $-a-15=-5 \Rightarrow -a=10 \Rightarrow$

تتحقق في $(2)$: $-2(-10)+5(-5)\stackrel{?}{=}-5 \Rightarrow 20-25=-5$ محققة

ومنه حسب المبرهنة $(4)$ $\overrightarrow{AD}=-10\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً $\Leftarrow$ إذاً النقاط $D,C,B,A$ تقع في مستوٍ واحد $(P)$

$E$ نبحث عن $\alpha$ , $\beta$ من $R$ تحقق:

معادلة مستوي

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha+3\beta\\-2\alpha+5\beta\\-\beta\end{pmatrix}$$

$-\alpha+3\beta=1 \cdots\cdots (1)$

$-2\alpha+5\beta=1 \cdots\cdots (2)$

$-\beta=1 \cdots\cdots (3)$

من $(3)$ نجد $\beta=-1 \Leftarrow$ نعوض في $(1)$: $\alpha=-4 \Leftarrow -\alpha-3=1 \Rightarrow$

تتحقق في $(2)$:

$-2(-4)+5(-1)\stackrel{?}{=}1 \Rightarrow 8-5\stackrel{?}{=}1$ غير محققة

إذاً $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطيًّا إذاً $E\notin P$

❖ طريقة ثانية:

بما أنّ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيّاً، نوجد معادلة المستوي $P=(ABC)$

* أياً كانت $M(x,y,z)$ نقطة من $P$، فإنّ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ مرتبطة خطياً ومنه حسب المبرهنة $(4)$:

$$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+3b\\-2a+5b\\-b\end{pmatrix}$$

$-a+3b=x-2 \cdots\cdots (1)$

$-2a+5b=y \cdots\cdots (2)$

$-b=z-1 \cdots\cdots (3)$

من $(3)$ نجد $\boxed{b=-z+1}$ $\Leftarrow$ نعوض في $(1)$:

$$-a-3z+3=x-2 \Rightarrow \boxed{a=-x-3z+5}$$

نعوض في ② :

$$2x + 6z - 10 - 5z + 5 = y$$

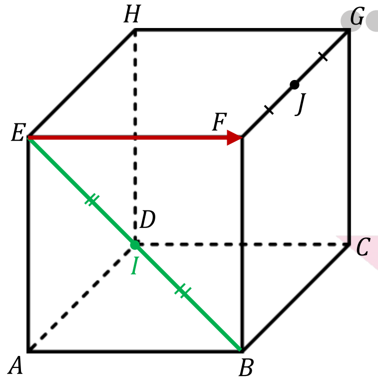
$$\boxed{P: 2x - y + z - 5 = 0}$$

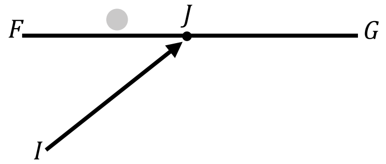
* نعوض $D$ في $P$ : $\Leftarrow 0 = 0$ محققة $\Leftarrow D \in P$

* نعوض $E$ في $P$: $\Leftarrow 2 = 0$ غير محققة $\Leftarrow E \notin P$



**مثال محلول صفحة 18** $ABCDEFGH$ مكعب. النقطة $I$ منتصف $[BE]$ و $J$ منتصف $[FG]$. أثبت أنَّ الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيّاً.




$$2\overrightarrow{IJ} = \underset{\downarrow E}{\overrightarrow{IF}} + \underset{\downarrow B}{\overrightarrow{IG}}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG}$$

متعاكسان $\vec{0}$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

حسب المبرهنة $(4)$ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{EF}$ مرتبطة خطيّاً.

❖ **طريقة ثانية:**

باختيار المعلم المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ :

$$E(0,0,1)\ , F(1,0,1), B(1,0,0), G(1,1,1), I\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\ , J\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$\overrightarrow{EF}(1,0,0)$

$\overrightarrow{BG}(0,1,1)$ نلاحظ أنَّ $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ غير مرتبطين خطيّاً

$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

نبحث عن $a$ و $b$ من $R$ يحققان:



$$\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{BG} + b\overrightarrow{EF}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ ومنه $a = \frac{1}{2}\ ,\ b = \frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

حسب المبرهنة $(4)$ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{EF}$ مرتبطة خطيّاً.

**تمرين 15 صفحة 42** نتأمّل في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم $d$ المار بالنقطة $A(2,0,5)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$، والمستقيم $d'$ المار بالنقطة $B(2,2,-1)$ والموجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$. والمطلوب:

1. أثبت أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيّاً.
2. أثبت أنّ $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيّاً.
3. استنتج أنّ المستقيمين $d\,,d'$ متقاطعان في نقطة $I$ يُطلب تعيينها.



$d \rightarrow A(2,0,5)\,,\ \vec{u}(2,5,-1)$

$d' \rightarrow B(2,2,-1)\,,\ \vec{v}(1,2,1)$

الحل: الطلب 1: $\left(\frac{2}{1} \neq \frac{5}{2}\right)$ إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيّاً

الطلب 2: نبحث عن $a$ و $b$ من $R$ تحقق:

$$\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 5a+2b \\ -a+b \end{pmatrix}\right) \Leftarrow \begin{cases} 2a+b=0 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 5a+2b=2 \cdots\cdots (2) \\ -a+b=-6 \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

من (1) و (3) بالطرح: $3a = 6 \Longrightarrow \boxed{a=2}$

نعوض في (1): $\boxed{b=-4}$

نتحقق في (2):

$$5(2)+2(-4) \stackrel{?}{=} 2 \Longrightarrow 2 \stackrel{?}{=} 2 \text{ محققة}$$

حسب المبرهنة (4) : $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيّاً.

الطلب 3: من الطلب 1: $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيّاً إذاً $d\,,d'$ غير متوازيين.

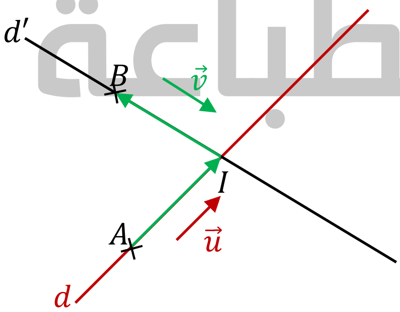
من الطلب 2: $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيّاً $d\,,d'$ في مستوٍ واحد.

وبالتالي $d\,,d'$ متقاطعان بنقطة $I$

* تعيين النقطة $I$: لدينا

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$$






بما أنّ $\overrightarrow{AI}\,,\vec{u}$ مرتبطان خطيّاً و $\overrightarrow{IB}\,,\vec{v}$ مرتبطان خطيّاً فإنّ $\overrightarrow{AI} = 2\vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{IB} = -4\vec{v}$

بفرض $I(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AI} = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \\ z-5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2=4 \Longrightarrow x=6 \\ y-0=10 \Longrightarrow y=10 \\ z-5=-2 \Longrightarrow z=3 \end{array}\right) \Longrightarrow I(6,10,3)$$

❖ طريقة ثانية: لحل المسألة بطرح سؤال الكتاب

$$d: \begin{cases} x=2t+2 \\ y=5t \\ z=-t+5 \end{cases} ; \quad t \in R \qquad\qquad d': \begin{cases} x=\alpha+2 \\ y=2\alpha+2 \\ z=\alpha-1 \end{cases} ; \quad \alpha \in R$$

* وبالحل المشترك (نقطة تقاطع)

$$2t+2=\alpha+2 \cdots\cdots (1)$$
$$5t=2\alpha+2 \cdots\cdots\cdots (2)$$
$$-t+5=\alpha-1 \cdots\cdots (3)$$

من $(1)$ $\alpha=2t \Longleftarrow$ نعوض في $(3)$ $-t+5=2t-1$

$$\boxed{t=2} \Longrightarrow \alpha=2(2) \Longrightarrow \boxed{\alpha=4}$$

نتحقق في $(2)$:

$$5(2) \stackrel{?}{=} 2(4)+2$$

$10=10$ محققة

يوجد حل وحيد إذاً المستقيمان يتقاطعان بنقطة $I$

نعوض $t=2$ في $d$ (أو $\alpha=4$ في $d'$)

$$\left.\begin{array}{r} x=4+2=6 \\ y=10 \\ z=-2+5=3 \end{array}\right) \Longrightarrow I(6,10,3)$$

**تمرين 5 صفحة 37** في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$، والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$. $d$ هو المستقيم المار بالنقطة $A$ والموجه بالشعاع $\vec{u}$، و $d'$ هو المستقيم المار بالنقطة $B$ والموجه بالشعاع $\vec{v}$.

أثبت أنّ المستقيمين $d$ و $d'$ متقاطعان، ثم عيِّن $I$ نقطة تقاطعهما.

* نعلم أنَّ $\vec{u}$ , $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيّاً لأنَّ $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{2}$

* نبحث عن $a$ و $b$ من $R$ يحققان:

$$\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$a+2b=0 \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$b=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$-2a-3b=-2 \cdot\cdot (3)$$

- بما أنّ $\vec{u}$ , $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيّاً فإنّ $d, d'$ غير متوازيين

- بما أنّ $\vec{u}$ , $\vec{v}$ , $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيّاً $d$ , $d'$ في مستوٍ واحد.

ومنه $d, d'$ متقاطعين بنقطة $I$

من ② نجد $b = -2$ نعوض في ①: $a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 4$

تحقق في ③:
$$-2(4) - 3(-2) = -2$$

$$-8 + 6 = -2 \Longrightarrow -2 = -2 \text{ محققة}$$

ومنه
$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

حسب المبرهنة $(4)$ : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيًا



- تعيين $I$ نقطة تقاطع المستقيمين:

لدينا
$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

بما أنّ $\overrightarrow{AI}$ , $\vec{u}$ مرتبطين خطيًا و $\overrightarrow{IB}$ , $\vec{v}$ مرتبطين خطيًا

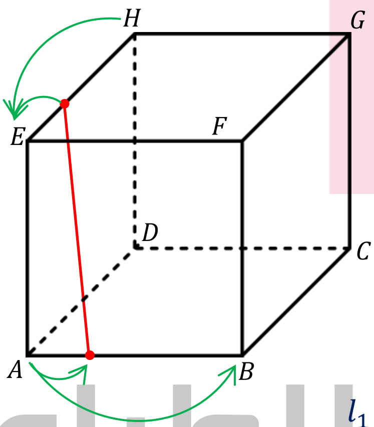
فإنّ $\overrightarrow{AI} = 4\vec{u}$ و $\overrightarrow{IB} = 2\vec{v}$

بفرض $I(x, y, z)$:
$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$I(7, -1, -7) \Longleftarrow \begin{cases} x = 7 \Longleftarrow x - 3 = 4 \\ y = -1 \Longleftarrow y + 1 = 0 \\ z = -7 \Longleftarrow z - 1 = -8 \end{cases}$$

**تمرين 5 صفحة 20** $ABCDEFGH$ مكعب. فيه $M$ نقطة تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$، و$N$ نقطة تحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. أثبت أنّ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$
2. أتكون الأشعة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيًا؟




يُفضّل زرع $\overrightarrow{EA}$ لأنّ $\overrightarrow{ME}$ و $\overrightarrow{AN}$ يوجد لهما علاقة جاهزة

الحل: الطلب 1:
$$l_1 = \overrightarrow{MN}$$

$$l_1 = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}$$

$$l_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$l_1 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{EA}$$

حيث لدينا
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$$



$$l_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA} = l_2$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

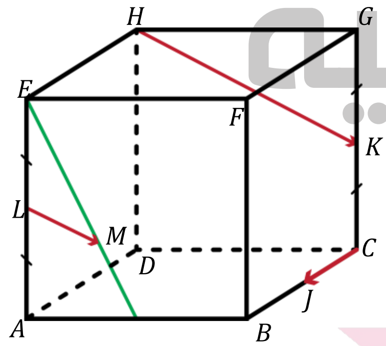
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}}$$

حسب المبرهنة $(4)$: $\overrightarrow{MN}$ , $\overrightarrow{EA}$ , $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيًا.

**تمرين 6 صفحة 20** $ABCDEFGH$ مكعب. $I$ و $J$ و $K$ و $L$ هي بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و $[AE]$. ولتكن $M$ النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$.




1. لماذا $M$ هي مركز ثقل المثلث $AEB$؟
2. أتكون الأشعة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيًا؟

الطلب 1: $M$ تقع على المتوسط $EI$ ولدينا $\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$ $\Leftarrow$ $M$ مركز ثقل $EAB$

الطلب 2: $LB$ متوسط و $M$ مركز ثقل المثلث $\Leftarrow$ $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LB}$

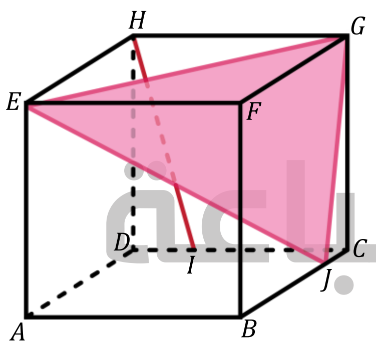
$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{HG})$$

$$\boxed{\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK}} \quad *$$

من * نجد: $\overrightarrow{LM}$ , $\overrightarrow{HK}$ مرتبطان خطيًا ومنه $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيًا.

**تمرين 6 صفحة 38** لنتأمّل المكعب $ABCDEFGH$. النقطة $I$ من الحرف $[CD]$ تحقق المساواة $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة $J$ من $[BC]$ تحقق المساواة $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. أثبت أنّ المستقيم $(HI)$ يوازي المستوي $(EGJ)$.




فكرة الحل: إثبات أنّ $\overrightarrow{HI}$ مرتبط خطيًا مع شعاعين (غير مرتبطين خطيًا) في المستوي $(EGJ)$.

نأخذ معلماً متجانساً $\left(D; \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}\right)$

$E(4,0,4)$ , $G(0,4,4)$, $H(0,0,4)$, $J(1,4,0)$, $I(0,1,0)$

- $\overrightarrow{EG}(-4,4,0)$
  $\overrightarrow{EJ}(-3,4,-4)$
  $\overrightarrow{HI}(0,1,-4)$
- $\overrightarrow{EG}$ , $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطيًا لأنّ $\left(\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{4}\right)$

- نبحث عن $a$ و $b$ من $R$ تحقق:

$$\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{EG} + b\overrightarrow{EJ}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-3\\4\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4a-3b\\4a+4b\\-4b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-4a-3b=0\cdots①\\4a+4b=1\cdots\cdots②\\-4b=-4\cdots\cdots\cdots③\end{cases}$$

**ملاحظة**
ليكون الشعاع مرتبط خطيًا مع شعاعين غير مرتبطين في مستوي يجب أن يوازي المستوي ليقع بديله في المستوي.

من ③ نجد $\boxed{b=1}$ ، نعوض في ①: $\boxed{a=\frac{-3}{4}}$

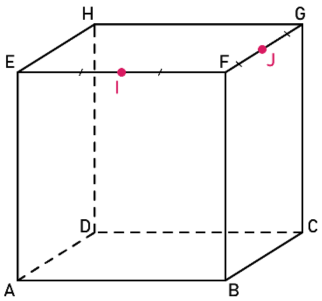
نتحقق في ②: $4\left(\frac{-3}{4}\right)+4(1)\overset{?}{=}1\Rightarrow-3+4=1$ **محققة**

$$\Rightarrow\overrightarrow{HI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$$

حسب المبرهنة $(4)$: $\overrightarrow{HI}$ , $\overrightarrow{EJ}$ , $\overrightarrow{EG}$ مرتبطة خطيًا ومنه $(HI)\parallel(EGJ)$.

-توجد طريقة ثانية للحل-

**تمرين 3 صفحة 20** $ABCDEFGH$ مكعب. $I$ منتصف $[EF]$ و $J$ منتصف $[FG]$.




❶ أتنتمي النقطة $J$ إلى المستوي $(ABI)$؟

❷ أتقع الأشعة $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AI}$ , $\overrightarrow{AJ}$ في مستوٍ واحد؟

الحل: الطلب 1: $(FG)$ يعامد $(ABI)$ في $F$

لم ينتمي إليه

$J\in(FG)$

إذاً $J\notin(ABI)$

الطلب 2:

لدينا $J\notin(ABI)$

$\Leftrightarrow$

$A$ , $B$ , $I$ , $J$ ليست في مستوٍ واحد

$\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AI}$ , $\overrightarrow{AJ}$ ليست مرتبطة خطيًا

$\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AI}$ , $\overrightarrow{AJ}$ ليست في مستوٍ واحد

**تمرين 1 صفحة 20** $A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. أثبت أنَّ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AC}$ , $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيًا.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

حسب المبرهنة $(4)$: $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AC}$ , $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيًا

**ملاحظة**
أي ثلاث نقاط في الفراغ يتشكل منها ثلاث أشعة اجباري مرتبطة خطيًا لأنها تقع في مستوٍ واحد.

❖ طريقة ثانية:

$A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقاط متمايزة عندئذٍ:

ليست على استقامة واحدة

$\Downarrow$

تشكل مستوي وحيد

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيًا

على استقامة واحدة

$\Downarrow$

تشكل عندئذٍ عدد غير منتهي من المستويات

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيًا

مرتبطين (ثلاث نقاط على استقامة واحدة)



**السؤال الرابع صفحة 208** نتأمّل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$.

1. بيِّن أنَّ النقاط $A$ و $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة.
2. بيِّن أنَّ النقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ تقع في مستوٍ واحد.

**الحل: الطلب 1:**

نلاحظ أنَّ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيًا $\Longleftarrow$ $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)\\ \overrightarrow{AC}(3,-2,1)\end{matrix}\right)$

لأنَّ $\frac{-1}{-2} \neq \frac{9}{3}$ مركبات غير متناسبة

**الطلب 2:** بما أنَّ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيًا

نبحث عن $a$ و $b$ من $R$ تحقق:

$$\overrightarrow{DC}(4,-1,0)$$

$$\overrightarrow{DC} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}9a+3b\\-a-2b\\-a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}9a+3b = 4 \cdots\cdots (1)\\ -a-2b = -1 \cdots (2)\\ -a+b = 0 \cdots\cdots (3)\end{cases}$$

من (3) نجد $\boxed{b = a}$ نعوض في (2) نجد:

$$-a - 2a = -1 \Rightarrow -3a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$$

ومنه $\boxed{b = \frac{1}{3}}$

نتحقق في (1):

$$9 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} \stackrel{?}{=} 4$$

$3 + 1 = 4$ محققة

ومنه $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

حسب المبرهنة (4): $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيًا

ومنه النقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ تقع في مستوٍ واحد

تمرين 13 صفحة 41 نتأمّل في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$.

1. أثبت أنّ النقاط $A$ و $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة.
2. عيِّن $m$ حتى تقع النقطة $M(m,1,3)$ في المستوي $(ABC)$.
3. جِد علاقة بين $x$ و $y$ تجعل النقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D(x,y,3)$ تنتمي إلى مستوٍ وحيد.

**الحل: الطلب 1:**



$$\overrightarrow{AB}(-2,0,-1) \qquad \overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$$

غير مرتبطين خطيًّا لأنّ $\left(\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}\right)$

إذاً النقاط $A$ و $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة.

**الطلب 2:** ∗ نوجد معادلة المستوي $(ABC)$

∗ أيّاً كانت $N(x,y,z)$ نقطة من $(ABC)$ فإنّ $\overrightarrow{AN}$ , $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيّاً

إذاً يوجد $a$ و $b$ من $R$ تحقق: $\overrightarrow{AN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+0 \\ 0-b \\ -a-3b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-3=-2a \cdots\cdots (1) \\ y-2=-b \cdots\cdots (2) \\ z-1=-a-3b \cdots (3) \end{cases}$$

من (1): $\boxed{a = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$

من (2): $\boxed{b = -y + 2}$

نعوض في (3): $z - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 3y - 6$

$$\boxed{(ABC): x + 6y - 2z - 13 = 0}$$

نعوض $M$ في $(ABC)$: $m + 6 - 6 - 13 = 0$

$$\boxed{m = 13}$$

**الطلب 3:** $A$ , $B$ , $C$ , $D$ في مستوٍ واحد $\Leftrightarrow D \in (ABC)$

نعوض $D$ في $(ABC)$: $\Leftarrow x + 6y - 6 - 13 = 0 \Leftarrow \boxed{x + 6y - 19 = 0}$



تمرين 14 صفحة 41 لتكن $\varepsilon$ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقة: $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

1. أثبت أنّ النقاط $A(7,1,0)$ و $B(5,0,0)$ و $C(2,0,1)$ تنتمي إلى المجموعة $\varepsilon$.
2. أثبت أنّ النقاط $A$ و $B$ و $C$ تحدد مستوياً $P$.
3. a. أثبت أنّ مركبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y-3z, y, z)$.
   b. استنتج أنّ $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$. ماذا تستنتج من ذلك؟
4. بالعكس، أثبت أنّ أيّة نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي $P$ تحقق المعادلة: $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

الحل: الطلب 1:

نعوض $A$ في $\varepsilon$: محققة $0=0 \Longleftarrow A \in \varepsilon$ | نعوض $B$ في $\varepsilon$ محققة $0=0 \Longleftarrow B \in \varepsilon$ | نعوض $C$ في $\varepsilon$ محققة $0=0 \Longleftarrow C \in \varepsilon$

الطلب 2: $\overrightarrow{AC}(-5,-1,1)$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}(-2,-1,0)$

غير مرتبطين خطياً لأنً $\left(\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{-1}\right)$

إذاً $A$ و $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة فهي تحدد مستوياً $P$

الطلب 3 a: $\overrightarrow{BM} = (x-5, y, z) \quad \Longrightarrow$

لدينا: $x - 2y + 3z - 5 = 0$

$$x - 5 = 2y - 3z$$

نعوض $\overrightarrow{BM}(2y - 3z, y, z)$

b:

$$l_2 = y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$$

$$l_2 = y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y-3z\\y\\z\end{pmatrix}$$

نستنتج أنً $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيًاً

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow M \in (ABC) \Longleftrightarrow$ تقع في مستوٍ واحد $A$, $B$, $C$, $M$

$$P = \varepsilon : x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$A$, $B$, $C$ تنتمي إلى $\varepsilon$
$A$, $B$, $C$ تحدد $P$
$\varepsilon = P$

الطلب 4:

$M \in P$

$\Longleftrightarrow$

$A$, $B$, $C$, $M$ تقع في مستوٍ واحد

$\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيًاً

$$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix}x-5\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-3b\\a\\b\end{pmatrix}$$

$x - 5 = 2a - 3b \cdots\cdots$ (1)
$y = a \cdots\cdots\cdots\cdots$ (2)
$z = b \cdots\cdots\cdots\cdots$ (3)

نعوض (2) و (3) في (1) $\qquad x - 5 = 2y - 3z$

$$\boxed{x - 2y + 3z - 5 = 0}$$

Pixel - بكسل