الأوراق الذهبية

التابع اللوغاريتمي

$$\sum f(a+b)=c$$

$$A=\frac{ab+c}{d}$$

MATH PLUS+

إعداد المدرسين:

رام عبدو:
0931647631

يوسف حرستاني:
0993177182

محمد البتور:
0932325694

تحوي هذه الأوراق على تمارين و أفكار مهمة في التابع اللوغاريتمي

التابع اللوغاريتمي

$\ln x :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

يكون $\ln x > 0$ عندما $x \in]1,+\infty[$ ويكون $\ln x < 0$ عندما $x \in]0,1[$ ويكون $\ln x = 0$ عندما $x = 1$.

مجموعة تعريف $f(x) = \ln x$ هي $D =]0,+\infty[$

مجموعة تعريف $f(x) = \ln g(x)$ هي $g(x) > 0$

أي مجموعة تعريف اللوغاريتم: المضمون أكبر تماماً من الصفر.

حل معادلة لوغاريتمية:

$$\ln[f(x)] = \ln[g(x)]$$

نوجد شرط الحل: تقاطع مجموعتي التعريف (أو مجموعة تعريف الأبسط)

نحل المعادلة $f(x) = g(x)$ ونأخذ الحلول التي توفق شرط الحل.

حل متراجحة لوغاريتمية:

$$\ln[f(x)] \leq \ln[g(x)]$$

نوجد شرط الحل: مجموعة تعريف الأصغر.

نحل المتراجحة $f(x) \leq g(x)$.

نأخذ تقاطع شرط الحل مع حلول المتراجحة السابقة.

خواص في اللوغاريتم:

$\boxed{1}$ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\boxed{2}$ $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

$\boxed{3}$ $\ln a^m = m.\ln a$

مشتق تابع لوغاريتمي:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln[g(x)] \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

كيف نبرهن أنّ $f(x) = \ln[g(x)]$ اشتقاقي على I؟

يجب تحقق شرطين:

1- $g(x)$ اشتقاقي على I.

2- $g(x)$ موجب تماماً على I.

نهاية تابع لوغاريتمي:

$$\lim_{x\to0} \ln x = -\infty \,,\ \lim_{x\to0} x.\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \,,\ \lim_{x\to0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \,,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \,,\ \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\underbrace{\log(x)}_{\text{لأن أساسه 10}} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

معلومة:

كيف نعرف إشارة $\ln\big(g(x)\big)$ ؟؟؟

نقارن $g(x)$ بالواحد، مثلاً:

$$\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$$

$$\frac{x}{x+3} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+3}\right) < 0$$

♦ ملاحظة ♦:

ممنوع استخدام أي خاصة قبل إيجاد مجموعة التعريف (نوجد مجموعة التعريف ثم نستخدم الخواص)

تمرين:

حل كلاً من المعادلات:

$\boxed{1}$ $\mathbf{\ln(2x-3) + \ln(x+1) = 2.\ln(-x+9)}$

$\boxed{2}$ $\mathbf{\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3.\ln 2}$

$\boxed{3}$ $\mathbf{(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0}$

الحل:

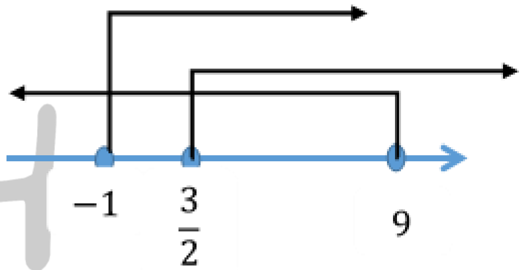
$\boxed{1}$ $\ln(2x-3)+\ln(x+1)$

$= 2.\ln(-x+9)$

$$2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$$

$$x+1\geq 0 \Rightarrow x>-1$$

$$-x+9>0 \Rightarrow x<9$$



$$D=\left]\frac{3}{2},9\right[$$

$$\ln[(2x-3)(x+1)]=\ln(-x+9)^2$$

$$(2x-3)(x+1)=(-x+9)^2$$

$$2x^2+2x-3x-x$$

$$=x^2-18x+81$$

$$x^2-17x+84=0$$

$$(x+21)(x-4)=0$$

ومنه $x=4$ مقبول أو $x=-21$ مرفوض.

$\boxed{2}$ $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3.\ln 2$

$$D_1:\mathbb{R}\backslash\{2\}$$

$$D_2: x+4>0\ ,D_2=]-4,+\infty[$$

$$D=]-4,+\infty[\backslash\{2\}$$

$$\ln[|x-2|(x+4)]=\ln 8$$

$$|x-2|(x+4)=8$$

ومنه إما:

$$(x+2)(x+4)=8$$

$$x^2+2x=0$$

$$x(x+2)=0$$

إما $x=0$ مقبول أو $x=-2$ مقبول.

أو:

$$(x-2)(x+4)=8$$

$$x^2+2x-16=0$$

$$\Delta=68\ ,\qquad \sqrt{\Delta}=2\sqrt{17}$$

$x_1=-1+\sqrt{17}$ مقبول

$x_2=-1-\sqrt{17}$ مرفوض

$\boxed{3}$ $(\ln x-3)(\ln x+1)=0$

$$D=]0,+\infty[$$

إما $\ln x=3$ ومنه $x=e^3$ مقبول.

أو $\ln x=-1$ ومنه $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ مقبول.

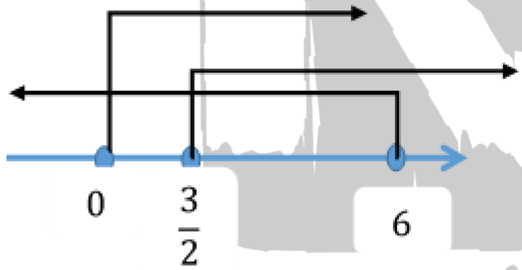
تمرين:

حل المعادلة:

$$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$

الحل:

$$2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$$



$$6-x>0 \Rightarrow x<6$$

$$x>0$$

$$D=\left]\frac{3}{2},6\right[$$

$$ln\sqrt{2x-3}=ln\,(6-x)-ln\sqrt{x}$$

$$ln\sqrt{2x-3}=ln\frac{6-x}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{2x-3}=\frac{6-x}{\sqrt{x}}$$

نربع الطرفين:

$$2x-3=\frac{(6-x)^2}{x}$$

محمد البتور 0932325694 يوسف حرستاني0993177182 رام عبدو 0931647631

$$x^2 + 9x - 36 = 0$$
$$(x+12)(x-3) = 0$$

ومنه إما $x = -12$ مرفوض

أو $x = 3$ مقبول.

تمرين:

حل:

$$\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0 \ : \ D =]0, +\infty[$$

الحل:

$$(\ln x - 2)(\ln x - 1) = 0$$

ومنه إما $\ln x = 2$ ومنه $x = e^2$ مقبول

أو $\ln x = 1$ ومنه $x = e$ مقبول

تمرين:

أثبت أنَّه أياً كانت $x > 0$ فإنَّ $\ln x \le x - 1$

الحل:

ندرس اطراد التابع $f(x) = \ln x - x + 1$

على $]0, +\infty[$، f مستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

نلاح أنه أياً كانت $x > 0$ فإنَّ $f(x) \le 0$:

$$\ln x - x + 1 \le 0$$
$$\ln x \le x - 1$$

تمرين:

أثبت أنه أياً كانت $x > 0$ فإنَّ $\ln x < 2\sqrt{x}$، ثمَّ استنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

الحل:

ندرس اطراد التابع $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$

على المجال $]0, +\infty[$، f مستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - x}{x\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = 0$$

ومنه إما $x = 0 \notin D$ او $x = 1$ بالتالي

$$f(1) = -2$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$

نلاحظ من الجدول أنه أياً كان $x > 0$ فإنَّ:

$f(x) \le -2$ و $\ln x - 2\sqrt{x} \le -2 < 0$

أي: $\ln x < 2\sqrt{x}$

استنتاج النهاية:

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x}$$
$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 = \lim_{x\to+\infty} 0$$

ومنه حسب الإحاطة يكون:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ملاحظة:

نلجأ إلى دراسة الاطراد عند حل معادلة لوغاريتمية أو متراجحة لوغاريتمية عندما يكون مجموع (طرح) تابعين لوغاريتمي كثير حدود أو كسري.

تمرين:

1- حل المعادلة:

$$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3 - x) - \ln\sqrt{x+1}$$

الحل:

$$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$$

$$x + 1 \geq \Rightarrow x > -1$$
$$D =]0,3[$$
$$\ln\sqrt{2x} = \ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$$
$$\sqrt{2x} = \frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$$
$$\sqrt{2x(x+1)} = 3 - x$$

نربع الطرفين:

$$2x(x+1) = (3-x)^2$$
$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$(x+9)(x-1) = 0$$

ومنه إما $x = -9$ مرفوض أو $x = 1$ مقبول.

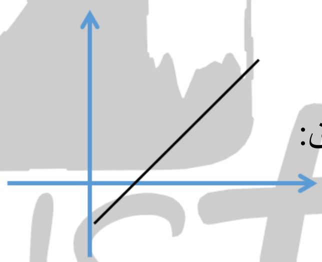
2- ارسم في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط $\ln x = \ln(y+1)$

الحل:

نرسم المستقيم:

$$x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1$$

x	0	1
y	-1	0



نأخذ جزء من المستقيم الذي يحقق:

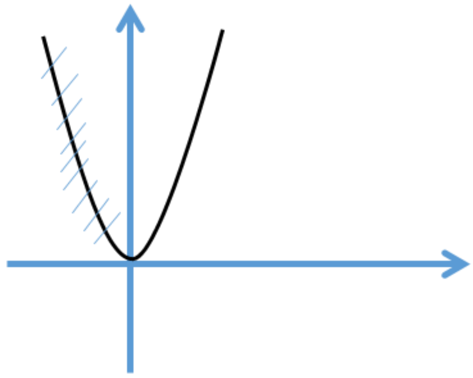
$y + 1 > 0$, $x > 0$

$\Rightarrow y > -1$, $x > 0$

3- ارسم مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق $\ln y = 2\ln x$

الحل:

الشرط $x > 0$, $y > 0$ بالتالي نرسم $\ln y = 2\ln x$ أي $y = x^2$ فمجموعة النقاط M هي جزء من القطع المكافئ.



تمرين:

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$(\ln x)(\ln y) = -12$$
$$\ln x + \ln y = 1$$

الحل:

شرط الحل: $x > 0$, $y > 0$

$$(\ln x)(\ln y) = -12$$
$$\ln x + \ln y = 1$$

نفرض $\ln x = a$ و $\ln y = b$ عندئذٍ:

$$a.b = -12 \ldots (1)$$
$$a + b = 1 \ldots (2)$$

من (2) نجد $b = 1 - a$ نعوض في (1):

$$a(1-a) = -12 \Rightarrow a^2 - a - 12 = 0$$
$$(a-4)(a+3) = 0$$

ومنه إما $a = 4$ ومنه $b = -3$

أي يكون $\ln x = 4 \Rightarrow x = e^4$ و $\ln y =$ $3 \Rightarrow y = e^{-3}$

أو $a = -3$ ومنه $b = 4$

أي يكون $\ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$ و $\ln y = 4 \Rightarrow y = e^4$

مجموعة الحلول $S =$ $\{(e^{-3}, e^4), (e^4, e^{-3})\}$

تمرين:

أوجد نهاية كل من:

$$\boxed{1}\ \boldsymbol{f(x)=(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right) : x\to+\infty}$$

$$\boxed{2}\ \boldsymbol{f(x)=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2x+2}-2} : x\to 1}$$

$$\boxed{3}\ \boldsymbol{f(x)=\frac{\sqrt{x}-3}{\ln x}\ :\ x\to+\infty}$$

$$\boxed{4}\ \boldsymbol{f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)-\frac{2}{x}}$$

الحل:

$$\boxed{1}\ \boldsymbol{f(x)=(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right) : x\to+\infty}$$

بفرض $\frac{1}{x+1}=t$ بالتالي $x+1=\frac{1}{t}$

فإنّ $t\to 0$: $x\to+\infty$

$$f(x)=(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\ln(1+t)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\boxed{2}\ \boldsymbol{f(x)=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2x+2}-2} : x\to 1}$$

$$f(x)=\frac{\ln(2-x)\ \left[\sqrt{2x+2}+2\right]}{\left[\sqrt{2x+2}-2\right]\left[\sqrt{2x+2}+2\right]}$$

$$f(x)=\frac{\ln(2-x)\ \left[\sqrt{2x+2}+2\right]}{2x-2}$$

$$f(x)=\frac{\ln(2-x)}{(1-x)}\cdot\frac{\sqrt{2x+2}+2}{-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+1-x)}{1-x}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

بالتالي:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}+2}{-2}=-2$$

إذاً $\lim_{x\to1}f(x)=1(-2)=-2$

$$\boxed{3}\ \boldsymbol{f(x)=\frac{\sqrt{x}-3}{\ln x}\ :\ x\to+\infty}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}-\frac{3}{\ln x}=\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)^2}-\frac{3}{\ln x}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}-\frac{3}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{t}{\ln t}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\ln x}=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty-0=\infty$$

$$\boxed{4}\ \boldsymbol{f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)-\frac{2}{x}}$$

حالة عدم تعيين $\infty-\infty$

$$f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)-\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln(1)-\frac{2}{\infty}=0-0=0$$

تمرين:

أثبت أنَّ $\boldsymbol{f}$ اشتقاقي على المجال $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ :\ I=\left]0,+\infty\right[}$$

الحل:

$\frac{1}{x}$ اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$

$1+\frac{1}{x}$ اشتقاقي على I وموجب تماماً عليه بالتالي

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I.بالتالي f اشتقاقي على I

لأن مجموع تابعين اشتقاقيين على I هو تابع اشتقاقي على I.

تمرين:

$\boxed{1}$ **ليكن $\boldsymbol{f}$ تابع معرف كما يلي:**

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{x-\ln x}}$$

تيقن أنَّ $\boldsymbol{f}$ معرف على $\left]0,+\infty\right[$

$\boxed{2}$ **ليكن التابع:**

$$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases}0 & : x=0\\ \dfrac{x}{x-\ln x} & : x>0\end{cases}}$$

-1 أثبت أنَ g مستمر عند الصفر.

-2 ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر.

-3 عيّن إن أمكن المماس للخط C عند مبدأ الإحداثيات.

-4 ادرس تغيرات g عندما $x > 0$.

الحل:

1 $\ln x$ معرف على $]0,+\infty[$ بالتالي لنحل المعادلة $x - \ln x = 0$، لنشكل التابع:

$$h(x) = x - \ln x$$

ندرس اطراده على $]0,+\infty[$:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

نلاحظ أنَّ $h(x) \geq 1$ أي المقام لا ينعدم بالتالي $D_f =$ $]0,+\infty[$

2 -1 استمرار g:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x - \ln x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$$

بالتالي g مستمر عند الصفر.

2 قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x - \ln x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x - \ln x} = 0$$

إذن g اشتقاق عند الصفر

3 ميل المماس عند $x = 0$ يساوي الصفر

المماس في المبدأ $(0,0)$ هو $y - 0 = 0(x - 0)$ أي $y = 0$.

4 تغيرات g:

g مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$ بالتالي:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = 1$$

$$g(x) = \frac{x}{x - \ln x}$$

$$g'(x) = \frac{x - \ln x - (x - \ln x)'(x)}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{x - \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right)x}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

$$g'(x) = 0 \,, \ln x = 1 \,, x = e$$

$$, g(e) = \frac{e}{e-1}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	

تمرين:

ليكن f تابع معرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$\boldsymbol{f(x) = x - \ln x}$$

-1 **اوجد $f(1)$, $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.**

-2 **استنتج $\lim_{x\to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1}$.**

الحل:

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ و $f(1) = 1$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}, f'(1) = 0$$

حسب تعريف المشتق:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(x)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1} = 0$$

تمرين:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{\ln x}\right)$$

أثبت أنَّ f اشتقاقي على $]1, +\infty[$ ثمَّ أوجد $f'(x)$.

الحل:

$x + 3 > 0$ في المجال $]1, +\infty[$

$\ln x > 0$ في المجال $]1, +\infty[$

بالتالي $\frac{x+3}{\ln x} > 0$ في المجال $]1, +\infty[$

وإنَّ $\frac{x+3}{\ln x}$ اشتقاقي في المجال $]1, +\infty[$

فيكون f اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{\ln x}\right)' \cdot \left(\frac{\ln x}{x+3}\right)$$

$$= \frac{\ln x - \frac{1}{x}(x+3)}{\ln^2 x} \cdot \frac{\ln x}{x+3}$$

$$= \frac{x\ln x - x - 3}{x(x+3)\ln x}$$

تمرين:

$$f(x) = x + 3 - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Delta: y = x + 2$$

أثبت أنَّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[1 - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$$

بفرض $\frac{1}{x} = t$ فيكون $x = \frac{1}{t}$ ومنه عندما $x \to +\infty$ فإنَّ $t \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[1 - \frac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1 - 1 = 0$$

أي Δ مقارب مائل للخط البياني عند $+\infty$.

مسألة (1):

ادرس تغيرات التابع وانم جدولاً بها وارسم الخط البياني:

$$\boxed{1}\ f(x) = \frac{1}{x.\ln x} \quad , \quad D_f =]0, +\infty[$$

الحل:

f مستمر واشتقاقي على كل من $]0,1[\,,\,]1,+\infty[$:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{0 - (x.\ln x)'}{(x.\ln x)^2} = \frac{-\left(\ln x + \frac{1}{x}x\right)}{(x.\ln x)^2}$$

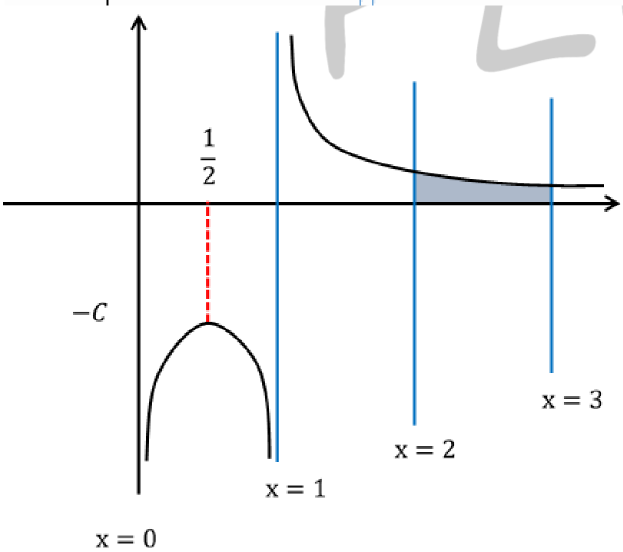
$$f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x.\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}(-1)} = -e$$

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$ ‖		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -e$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$		$\searrow$	0



طلبات إضافية:

1- ناقش بيانياً حسب قيم $\lambda \in \mathbb{R}$ عدد حلول المعادلة $f(x) = \lambda$

الحل:

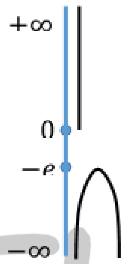
$\lambda \in]-\infty, -e[$ فإنَّ للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلان:

$\lambda \in]-e, 0[$ ليس للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلول

$\lambda \in]0, +\infty[$ للمعادلة $f(x) = \lambda$ حل وحيد:

$\lambda = -e$ للمعادلة حل وحيد

$\lambda = 0$ ليس للمعادلة $f(x) = \lambda$ حل



2- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x = 2$ و $x = 3$ والمحور xx'

الحل:

$$S = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x.\ln x}\,dx$$

$$= \int_2^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = [\ln(\ln x)]_2^3$$

$$S = (\ln(\ln 3)) - (\ln(\ln 2)) = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$$

مسألة (2):

ليكن f تابع معرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$$

1- اكتب معادلة كل مقارب أفقي وشاقولي للخط C وادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3- أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في I ثمَّ أثبت أنَّ $\alpha \in]0, 1[$

4- ارسم كل مقارب وجدته ثمَّ ارسم C.

5- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = e$ و $x = 1$.

الحل:

1- $I =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)}{x}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$y = 1$ مقرب أفقي في جوار $-\infty$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x + \ln x}{x} - 1 = \frac{\ln x}{x}$$

المقام موجب تماماً

البسط: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C يقع تحت Δ		C يقع فوق Δ

$(1,1)$ نقطة مشتركة بين C والمقارب.

2- f مستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(x + \ln x)'x - 1(x + \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x + 1 - x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e \Rightarrow f(e) = \frac{e + 1}{e}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{e+1}{e}$	↘ 1

3- في المجال $]0, e[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً عليه،

$$0 \in f(]0, e[) = \left]-\infty, \frac{e+1}{e}\right[$$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $]0, e[$

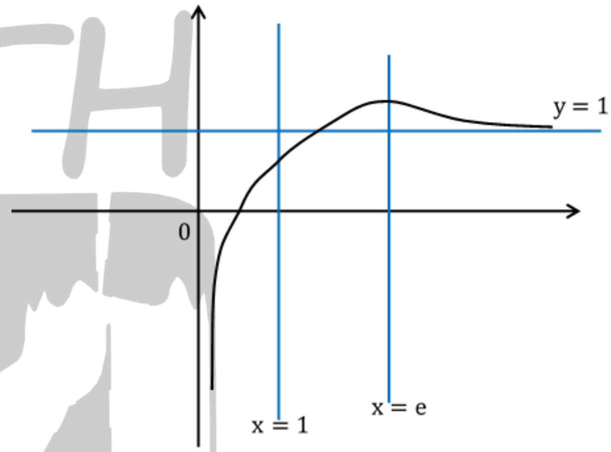
في المجال $]e,+\infty[$ لا يوجد للمعادلة $f(x)=0$ حل لأن $0\notin f(]0,e[)$ بالتالي $f(x)=0$ حل وحيد في $]e,+\infty[$ وليكن α:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0} f(x) &= -\infty < 0\\ f(1) &= \frac{e+1}{e} > 0\end{aligned}\right\} f(1)$$

$$\times \lim_{x\to0} f(x) < 0$$

بالتالي الحل الوحيد هو $\alpha \in]0,1[$

-4



-5 مساحة السطح المحصور:

$$S=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e 1+\frac{\ln x}{x}dx$$

$$=\int_1^e\left[1+\frac{1}{x}\ln x\right]dx=\left[x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

$$=\left[e+\frac{(\ln e)^2}{2}-\left(1+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right)\right]$$

$$=e+\frac{1}{2}-1=e-\frac{1}{2}$$

مسألة (3):

$$f(x)=x-2+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$$

-1 أثبت أنَّ $\Delta: y=x-2$ مقارب لـ C ثمَّ ادرس وضع C بالنسبة للمقارب Δ.

-2 احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف D_f.

-3 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

-4 ارسم كل مقارب وجدته ثمَّ ارسم C.

-5 استنتج رسم C_1 للتابع $f_1(x)=2-x+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

الحل:

-1 $f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=\ln(1)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$ و $+\infty$

الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

نلاحظ أنه أيا كانت $x\in]-\infty,-2[$ فإنَّ:

$$\frac{x}{x+2}>1$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)>0$$

C يقع فوق Δ في المجال $]-\infty,-2[$

وكذلك أيا يكن $]0,+\infty[$ فإنَّ:

$$\frac{x}{x+2}<1$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)<0$$

C يقع تحت Δ في المجال $]0,+\infty[$

-2 $D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty-2+\ln 1=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$

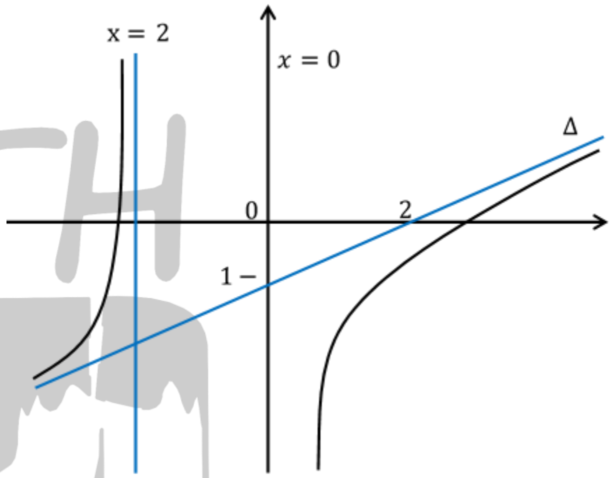
$x=0$ مقارب شاقولي

$x=-2$ مقارب أفقي

-3 f مستمر واشتقاقي على D_f:

$$f'(x) = 1 + \left(\frac{x}{x+2}\right)'\left(\frac{x+2}{x}\right)$$
$$= 1 + \frac{2}{x(x+2)} > 0$$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



استنتاج الرسم لـ C_1:

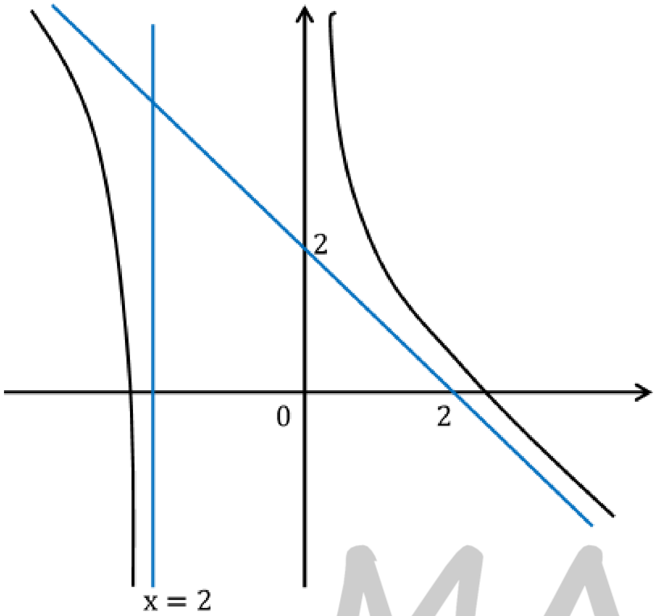
$$f_1(x) = 2 - x + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$
$$f_1(x) = -\left[x - 2 - \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-1}\right]$$
$$f_1(x) = -\left[x - 2 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)\right]$$
$$f_1(x) = -f(x)$$

C_1 هو نظير C بالنسبة للمحور xx'

$$(x, y) \to (x, -y)$$
$$\Delta: \begin{cases}(0,-2) \to (0,2)\\ (2,0) \to (2,0)\end{cases}$$

كان التقارب $x = -2$ نحو oy^+ أصبح نحو oy^-

$x = 0$ يصبح نحو oy^+



مسألة (4):

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، وادرس مل للخط C من مستقيمات مقاربة.

2- ارسم كل مقارب وجدته ثمّ ارسم C.

3- بفرض M_1, M_2, M_3, M_4 ثلاث نقاط معرفة كما يلي:

M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل.

M_2 نقطة من C مماسة منها يمر من المبدأ.

M_3 نقطة من C مماسة منها يوازي مجور الفواصل.

M_4 ينعدم فيها المشتق الثاني.

a- احسب فواصل هذه النقاط.

b- أثبت أنَّ تلك الفواصل هي ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية وأوجد أساسها.

الحل:

1- f مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\right]=0$$

$x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$y=0$ مقارب أفقي عند $+\infty$

$$f'(x)=\frac{(x+\ln x)'.x-1(1+\ln x)}{x^2}$$

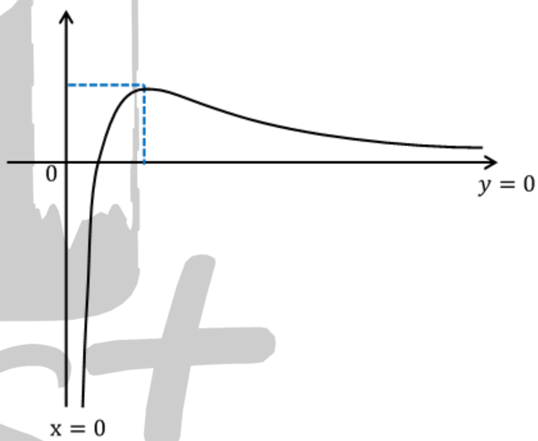
$$f'(x)=\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow f(1)=1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

-2



3- M_1 نقطة تقاطع مع xx' ومنه:

$$y=0\ \Rightarrow\ f(x)=0\Rightarrow 1+\ln x=0$$

$$\ln x=-1\Rightarrow x=e^{-1}\Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

M_2 المماس عندها يمر من المبدأ:

بما أن المماس يمر من المبدأ فمعادلته $y=mx$

$$M=f'(x)=-\frac{\ln x_2}{x_2^2}$$

$$\left(x_2,\frac{1+\ln x_2}{x_2}\right)$$

نعوض في معادلة المماس:

$$\frac{1+\ln x_2}{x_2}=-\frac{\ln x_2}{x_2^2}x_2$$

$$\Rightarrow \frac{1+\ln x_2}{x_2}=-\frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$x_2=-\ln x_2\Rightarrow 1=-2\ln x_2$$

$$\Rightarrow \ln x_2=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=e^{-\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ x_2=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

M_3 المماس في M_3 يوازي xx' أي $m=$

$$f'(x_3)=0$$

$$f'(x_3)=0\Rightarrow -\frac{\ln x_3}{x_3^2}=0$$

$$\Rightarrow \ln x_3=0$$

ومنه $x_3=1$

M_4 ينعدم عندها المشتق الثاني:

$$f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(-\ln x)}{x^4}$$

$$=\frac{-x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-1+2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow -1+2\ln x=0$$

$$\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=\sqrt{e}$$

$\boxed{b}$ فواصل النقاط M_4,M_3,M_2,M_1 هي على الترتيب $\sqrt{e},1,\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{e}$

$$\frac{x_2}{x_1}=\sqrt{e}\,,\frac{x_3}{x_2}=\sqrt{e}\,,\frac{x_4}{x_3}=\sqrt{e}$$

إذن x_4,x_3,x_2,x_1 أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $q=\sqrt{e}$

تمرين (1):

أثبت أنَّه أياً كانت $x \in]-1, +\infty[$ فإنَّ:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$$

الحل:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

نوحد المقامات:

$$f'(x) = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

$$x = , f(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$$f(x) \leq 0$$

$$\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \leq 0$$

تمرين (2):

ليكن C_1, C_2 خطين بيانيين للتابعين:

$$f_1(x) = 2e^{x-1} - 2$$

$$f_2(x) = \ln(2x-1)$$

برهن أنَّ C_1, C_2 متماسان في نقطة $A(1,0)$

الحل:

نصور الـ (1):

$$f_1(1) = 0 , f_2(1) = 0$$

$$f_1(1) = f_2(1) = 0$$

الشرط الأول محقق

f_1 اشتقاقي على $\mathbb{R}$

f_2 اشتقاقي على $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$f_1'(x) = 2.e^{x-1} \Rightarrow f_1'(1) = 2$$

$$f_2'(x) = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow f_2'(1) = 2$$

$$f_1'(1) = 2 = f_2'(1)$$

الشرط الثاني محقق.

C_1, C_2 متماسان في A.

تمرين (3):

في كل حالة مما يأتي، جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة المعطاة:

$\boxed{1}$ $2^n \leq 100$

الحل:

نأخذ ln للطرفين:

$$\ln 2^n \leq \ln 100$$

$$\ln 2^n \leq \ln 10^2$$

$$n \ln 2 \leq 2 \ln 10$$

حسب خواص اللوغاريتم:

$$n = \frac{2 \ln 10}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 > 0$$

$$n \leq \frac{2 \ln 5.2}{\ln 2} = \frac{2(1.7 + 0.7)}{0.7}$$

$$n \in [6.5 , 4.3 , 2.1]$$

تقريباً $n \leq 6$

$\boxed{2}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

الحل:

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \ln 10^{-2}$$

$$n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq -2 \ln 10$$

$$n \geq \frac{-2 \ln 10}{-\ln \frac{1}{3}} = \frac{-2 \ln 5.2}{-\ln 3}$$

$$= \frac{-2[\ln 5 + \ln 2]}{-\ln 3} = \frac{2(2.4)}{1.1}$$

$$n \in [5,6,7,8, \dots]$$

$$n \geq 4$$

تمرين:

حل كل متراجحة أو معادلة فيما يأتي:

$\boxed{1}$ $\mathbf{\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)}$

الحل:

$$x > -11 \Rightarrow]-11, +\infty[$$
$$x + 11 = x^2 + 5x + 6$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x+5)(x-1) = 0$$

ومنه إما $x = 1$ مقبول

أو $x = -5$ مقبول

$\boxed{2}$ $\mathbf{\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)}$

الحل:

$$-3x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow]-\infty, 0[$$
$$-3x = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x+4)(x-1) = 0$$

ومنه إما $x = 1$ مرفوض لأن $x < 0$

أو $x = -4$ مقبول لأن $x < 0$

$\boxed{3}$ $\mathbf{\ln(x-2) = \ln(x^2 - 2)}$

الحل:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow]2, +\infty[$$
$$x - 2 = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-1) = 0$$

ومنه إما $x = 0$ مرفوض

او $x = 1$ مرفوض

ومنه مستحيلة الحل

$\boxed{4}$ $\mathbf{\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)}$

الحل:

$$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$$
$$2x = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$$

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$
$$\notin D$$

مرفوض

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \in D$$

مقبول