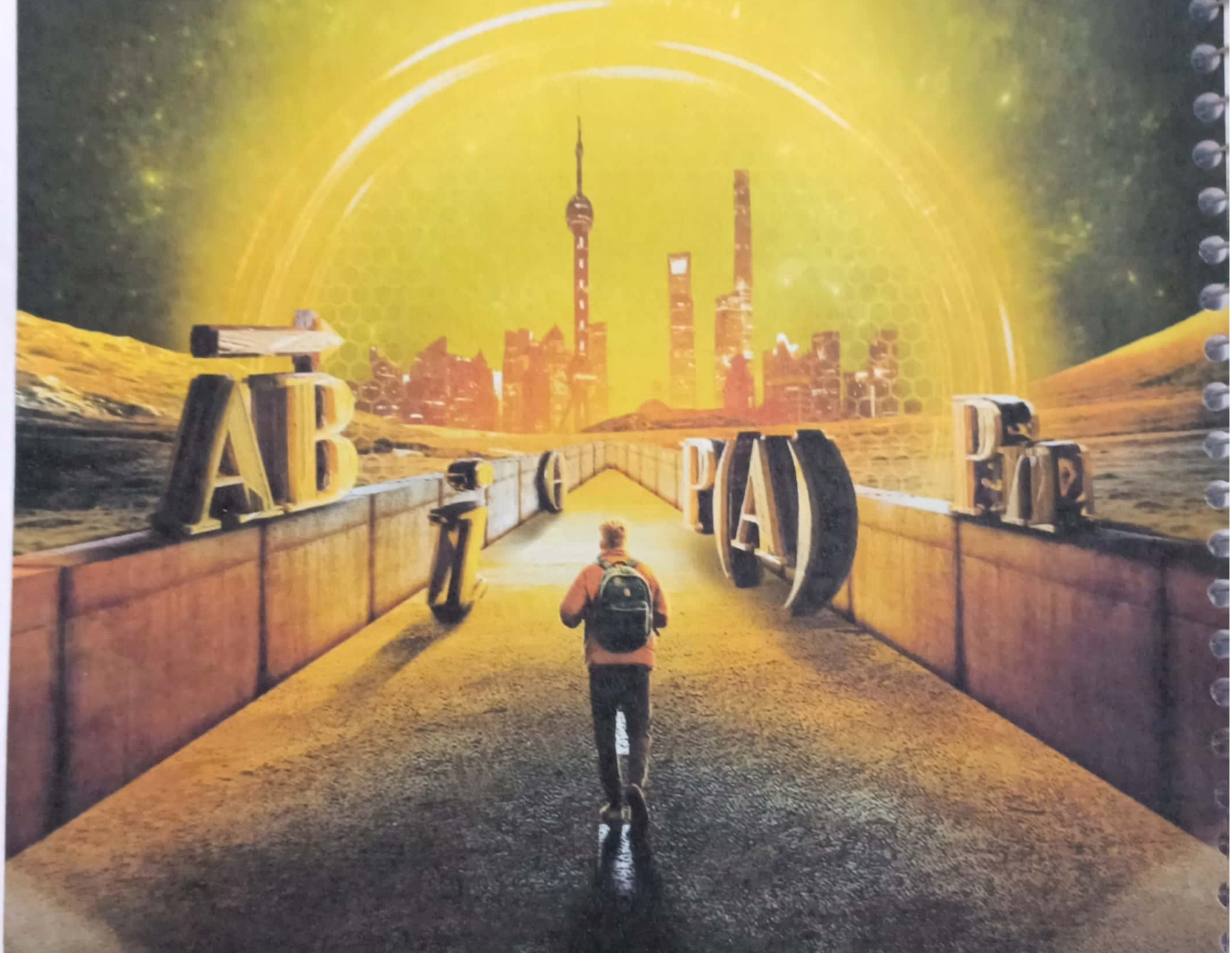
#لاتقلقوا
AHMAD TKRORY
MATHEMATICS TEACHER

الجزء الثاني

الرياضيات



اعداد المدرّس

أحمد تكروري

احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري

للتواصل والاستفسار
099 444 60 57

Mathematics is a set of abstract knowledge resulting from logical deductions applied to various mathematical objects such as sets, numbers, shapes, structures and transformations. Mathematics is also concerned with the study of topics such as quantity, structure, space, and change. There is not yet an agreed general definition of the term.

ABDULGHAFOR GRAPHIC DESIGN

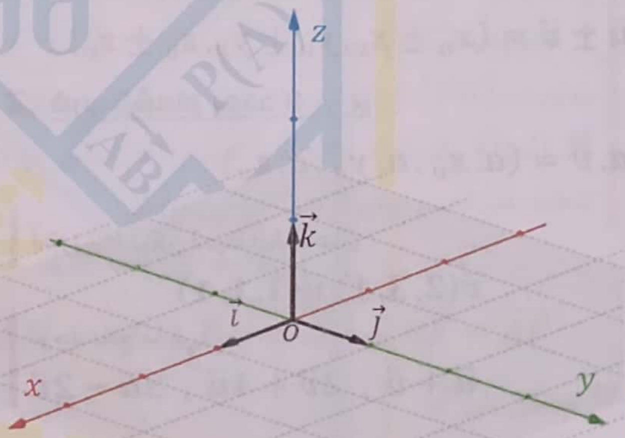
البحث (3+2+1): الأشعة

1. النقطة:

لها: x تدعى فاصلة و y تدعى ترتيب و z تدعى راقم

احداثيات النقطة: (x, y, z)

2. المستوى:



- O: مبدأ الاحداثيات
- ox: محور الفواصل
- oy: محور التراتيب
- oz: محور الرواقم
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة واحدية لأن طول كل منها $= 1$

العمليات على النقاط:

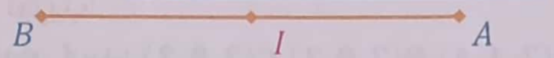
1. قانون البعد بين نقطتين: (طول قطعة مستقيمة)

ليكن $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$

البعد بين A , B:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. احداثيات منتصف قطعة مستقيمة:



$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

تدريب:

لتكن النقطتين $A(1, 1, 1)$ $B(0, 3, 4)$

1. احسب طول القطعة المستقيمة AB.
2. أوجد احداثيات منتصف القطعة AB.

1. $$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

2. لنفرض I منتصف القطعة AB

$$x_I = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, y_I = \frac{1+3}{2} = 2, z_I = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$$

3. الشعاع:

يتشكل الشعاع من نقطتين ويرمزله بـ $\longrightarrow$

صيغته العامة:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

(قليلة الاستخدام)

الصيغة المختصرة:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

(الصيغة الأكثر استخداماً)

4. طويلة الشعاع: (نظيم الشعاع)

$\vec{n}(a, b, c)$

يعني طول الشعاع ورمزه $\|\vec{n}\|$

قانونه:

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

احمد تكروري رياضيات   @Ahmad_Tkrory   احمد تكروري   099 444 60 57

تدريب:

لتكن النقاط $A(2,1,4)\ B(2,0,3)\ C(3,0,2)$

1. جد الأشعة التالية $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\ ,\overrightarrow{BC}$
2. أوجد طويلة الأشعة $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\ ,\overrightarrow{BC}$

1. $\overrightarrow{AB}(2-2\ ,0-1\ ,3-4) \rightarrow$
$\overrightarrow{AB}(0,-1\ ,-1)$
$\overrightarrow{AC}(3-2\ ,0-1\ ,2-4) \rightarrow \overrightarrow{AC}(1,-1,-2)$
$\overrightarrow{BC}(3-2\ ,0-0\ ,2-3) \rightarrow \overrightarrow{BC}(1,0,-1)$

2. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$
$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$
$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

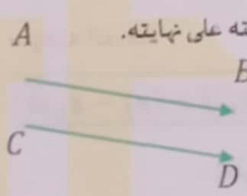
أنواع الأشعة:

وهي خمس أنواع:

1. الشعاع الصفري:

$\vec{0}$ هو شعاع انطبق بدايته على نهايته.

2. الشعاعان المتساويان:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

لهما ذات (الحامل – الجهة – الطويلة)

3. الشعاعان المتعاكسان:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$

لهما ذات (الحامل – الطويلة) وبجهتين متعاكسين

مجموعهما $\vec{0}$

تكرورية: $\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$

4. الشعاعان المتعاقبان:

هما شعاعان نهاية الأول بداية الثاني

5. الشعاعان المشتركان بالمبدأ:

هما شعاعان لهما البداية ذاتها.

العمليات على الأشعة:

وتكون حالتين:

1) جبرياً: بالمعادلات

ليكن لدينا الشعاعان

$$\vec{u}(x_u, y_u, z_u)\ ,\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$$

1. جمع وطرح الأشعة:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (x_u \pm x_v, y_u \pm y_v, z_u \pm z_v)$$

2. ضرب الشعاع بعدد $a \neq 0$

$$a.\vec{v} = (a.x_v\ , a.y_v\ , a.z_v)$$

تدريب: ليكن لدينا الشعاعان

$\vec{v}(2,3,1)\ \vec{u}(1,1,1)$

أوجد ناتج ما يلي:

$\vec{u}+\vec{v}\ ,\ 2\vec{v}+4\vec{u}\ ,\ 3\vec{u}-2\vec{v}$

$\vec{u}+\vec{v} = (1,1,1)+(2,3,1) = (3,4,2)$

$2\vec{v}+4\vec{u} = 2(2,3,1)+4(1,1,1)$
$= (4,6,2)+(4,4,4) = (8,10,6)$

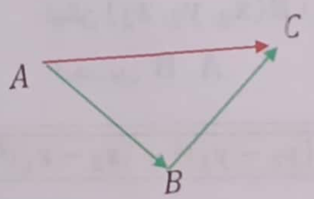
$3\vec{u}-2\vec{v} = 3(1,1,1)-2(2,3,1)$
$= (3,3,3)+(-4,-6,-2) = (-1,-3,1)$

2) بيانياً: بالرسم

1. جمع الأشعة: يوجد حالتين:

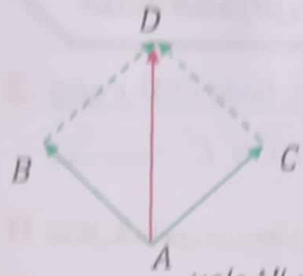
الشعاعان المتعاقبان: نستخدم شال

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

الشعاعان المشتركان بالمبدأ



علاقة متوازي الأضلاع

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

D رأس متوازي الأضلاع المنشأ من الشعاعين

تدرب صفحة 16

$ABCDFGH$ مكعب، I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$. في كل من الحالات الآتية، بين إذا كانت M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب، علل إجابتك.

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$

M تنطبق على F.

2. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$

M تنطبق على G

3. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$

M تنطبق على E.

4. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}$

حسب قاعدة متوازي الأضلاع فإن M تقع خارج المكعب ولا تنطبق على أحد رؤوس المكعب.

5. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}\right)$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}$

M تنطبق على B

في كل من الحالات الآتية، حدد موقع N المحققة للمساواة الشعاعية الآتية:

1. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق على J

2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق على J

3. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$

N تنطبق على I

في كل من الحالات الآتية، عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً.

1. $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BJ}$
2. $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$
4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$

التطبيقات على الأشعة:

ليكن الشعاعان $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$

1. الارتباط الخطي لشعاعين:

معنى الارتباط الخطي هو توازيهما

لإثبات أن شعاعين مرتبطين خطياً: لدينا طريقتين:

1) إما أحدهما ينتج عن الاخر بضربه بعدد $a \neq 0$

$$\vec{v} = a.\vec{u}$$

نستخدمها عندما يكون لدينا علاقة

2) أو تناسب مركبات الشعاعان أي أن:

$$\frac{x_v}{x_u} = \frac{y_v}{y_u} = \frac{z_v}{z_u}$$

نستخدمها عندما يكون لدينا مركبات

تدريب:

لتكن النقاط:

$A(-4, 1, 3)$ $B(-2, 0, 5)$ $C(0, -1, 7)$

❶ جد الأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

❷ أثبت أنهما مرتبطان خطياً

❶ $\overrightarrow{AB}(2, -1, 2)$ $\overrightarrow{AC}(4, -2, 4)$

❷ بطريقة أولى:

نستنتج أن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

بطريقة ثانية:

$$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = \frac{4}{2}$$

محققة

بالتالي $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً

2. وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة:

كيف نثبت أن A, B, C على استقامة واحدة:

1) نشكل شعاعين من منطلق واحد

2) نثبت أنهما مرتبطان خطياً

3. تعامد الأشعة

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$(x_u, y_u, z_u).(x_v, y_v, z_v) = 0$$

$$x_u.x_v + y_u.y_v + z_u.z_v = 0$$

تدريب:

أثبت أن الشعاعان متعامدان

$\vec{v}(2, 2, 4)$ $\vec{u}(2, 2, -2)$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$(2, 2, -2).(2, 2, +4) = 4 + 4 - 8 = 0$$

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

لإثبات أن $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ مرتبطة خطياً يجب أن نبرهن تحقق الشرطين:

1) نوجد شعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ ليسا مرتبطين خطياً.

2) نكتب الشعاع الثالث بدلالتهما أي أن:

$$\boxed{\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \ ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

099 444 60 57 احمد تكروري @Ahmad_Tkrory احمد تكروري رياضيات

تدريب:

لتكن النقاط $A(-1,1,3)$ $B(1,1,-1)$ $C(2,-1,1)$ $D(2,0,-1)$

1) أوجد الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

2) أثبت أن هذه الأشعة مرتبطة خطياً

1) $\overrightarrow{AB}(2,0,-4)$ $\quad \overrightarrow{AC}(3,-2,-2)$

$\overrightarrow{AD}(3,-1,-4)$

2) واضح أن $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

$$\frac{2}{3} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{-4}{-2}$$

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ -4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\beta \\ -2\beta \\ -2\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 3\beta \\ -2\beta \\ -4\alpha - 2\beta \end{bmatrix}$$

بالمطابقة:

$$3 = 2\alpha + 3\beta \quad ...(1)$$

$$-1 = -2\beta \quad ...(2)$$

$$4 = -4\alpha - 2\beta \quad ...(3)$$

من المعادلة الثانية نجد $\beta = \frac{1}{2}$ نعوض في المعادلة الأولى:

$$3 = 2\alpha + 3\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\alpha = 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

تكرورية أهم من حياتي:

عند حل جملة ثلاث معادلات بمجهولين:

1) نختار معادلتين فقط

2) نوجد قيمة المجهولين

3) نعوض قيمة المجهولين في المعادلة الثالثة

- فإذا تحققت المعادلة الثالثة فالأشعة مرتبطة خطياً
- وإذا لم تتحقق المعادلة فالأشعة غير مرتبطة خطياً

نعوض قيمة α, β في المعادلة الثالثة:

$$-4 = -4\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-4 = -3 - 1$$

$$-4 = -4$$

الأشعة $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً.

تدريب صفحة 24:

نتأمل النقاط في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(3,5,2)\ \ B(2,-1,3)\ \ C(0,-2,2)$

$D(-2,5,1)\ \ E(3,9,2)\ \ F(8,13,3)$

1. احسب احداثيات منتصفات القطع $[EF],[CD],[AB]$
2. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EF}$
3. عن احداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.
4. جد مركبات كل من الشعاعين:

$$\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$$

$$\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}$$

1. نفرض I_1 منتصف القطعة $[AB]$

$$I_1\left(\frac{3+2}{2},\frac{5-1}{2},\frac{2+3}{2}\right)$$

$$I_1\left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$$

نفرض I_2 منتصف القطعة $[CD]$

$$I_2\left(\frac{0-2}{2},\frac{-2+5}{2},\frac{2+1}{2}\right)$$

$$I_2\left(-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

نفرض I_3 منتصف القطعة $[EF]$

$$I_3\left(\frac{8+3}{2},\frac{13+9}{2},\frac{3+2}{2}\right)$$

$$I_3\left(\frac{11}{2},11,\frac{5}{2}\right)$$

2. $\overrightarrow{AB}=(2-3,-1-5,3-2)$

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-6,1)$$

$$\overrightarrow{CD}=(-2-0,5+2,1-2)$$

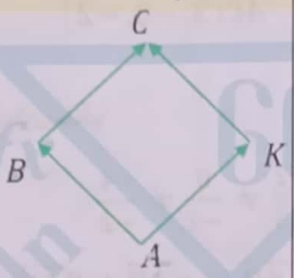
$$\overrightarrow{CD}=(-2,7,-1)$$

$$\overrightarrow{EF}=(8-3,13-9,3-2)$$

$$\overrightarrow{EF}=(5,4,1)$$

3. حتى يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع يجب أن يكون: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KC}$

$$\begin{bmatrix}-1\\-6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-x\\-2-y\\2-z\end{bmatrix}$$



بالمطابقة:

$$-1=-x\Rightarrow x=1$$

$$-6=-2-y\Rightarrow y=4$$

$$1=2-z\Rightarrow z=1$$

إذاً $K(1,4,1)$

$$\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$$

$$=3\begin{bmatrix}-1\\-6\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\7\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-18\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\14\\-2\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}-7\\-4\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}$$

$$\vec{v}=2\begin{bmatrix}-1\\-6\\1\end{bmatrix}-\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\\7\\-1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\-12\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-\frac{7}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15\\12\\3\end{bmatrix}$$

099 444 60 57 احمد تكروري @Ahmad_Tkrory احمد تكروري رياضيات

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 14 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

5 أيمكن تعيين b, a لتقع النقاط

$M(a, b, 2)$ $B(3, 2, 1)$ $A(2, 3, 0)$

على استقامة واحدة؟

لكي تقع النقاط على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً.

$\overrightarrow{AM} = (a-2, b-3, 2)$

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$

$$\frac{a-2}{1} = \frac{(b-3)}{-1} = \frac{2}{1}$$

(1) (2) (3)

بالمطابقة بين (3) و(1) نجد أن

$a - 2 = 2 \Rightarrow a = 4$

بالمطابقة بين (3) و(2) نجد:

$b - 3 = -2 \Rightarrow b = 1$

6 أيمكن تعيين a ليكون الشعاعان مرتبطان خطياً.

$\vec{v}(1, -2, a)$ $\vec{u}(2, a, 5)$

حتى يكون $\vec{v}, \vec{u}$ مرتبطان خطياً يجب أن يكون:

$$\frac{1}{2} = -\frac{2}{a} = \frac{a}{5}$$

(3) (2) (1)

بالمطابقة بين (3) و(2) نجد:

$a = -4$

بالمطابقة بين (1) و(3) نجد:

$2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

وهذا مرفوض إذاً لا يمكن تعيين a

7 في كل من الحالات الآتية بين إذا كانت النقاط C, B, A على استقامة واحدة

1 $A(3, -1, 2)$ $B(0, 2, 4)$ $C(2, 0, -3)$

1 $A(-4, 1, 3)$ $B(-2, 0, 5)$ $C(0, -1, 7)$

مركز الأبعاد المتناسبة: (م-أ-م)

يعني مركز التوازن

كيف نحدد مركز الأبعاد المتناسبة:

لتكن النقطتان المثقلتان $(A,\alpha),(B,\beta)$ يكون $(G,\alpha+\beta)$ م-أ-م لـ A,B إذا تحقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

حيث $\alpha+\beta\neq 0$

لتحديد مكانه: نحتاج إلى نقطتين مثقلتين فقط

إما:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta\ (B \text{ ثقل})}{\alpha+\beta\ (\text{ثقل م.أ.م})}\overrightarrow{AB}$$

أو:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha\ (A \text{ ثقل})}{\alpha+\beta\ (\text{ثقل م.أ.م})}\overrightarrow{BA}$$

> تكرورية: إذا كانت النقطتان $(A,\alpha),\ (B,\beta)$
> وكان $\alpha=\beta$ فإن G منتصف AB

تدريب:

لتكن النقطتان المثقلتان $(A,2)\ \ (B,2)$

1. عين ثقل G م-أ-م لـ A,B
2. عين موضع G

$(G,4)$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{4}\overrightarrow{AB}$$

أو:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{4}\overrightarrow{BA}$$

تدريب:

لتكن النقطتان المثقلتان $(A,1)\ (B,2)$

1. عين ثقل G م-أ-م لـ A,B
2. عين موضع G

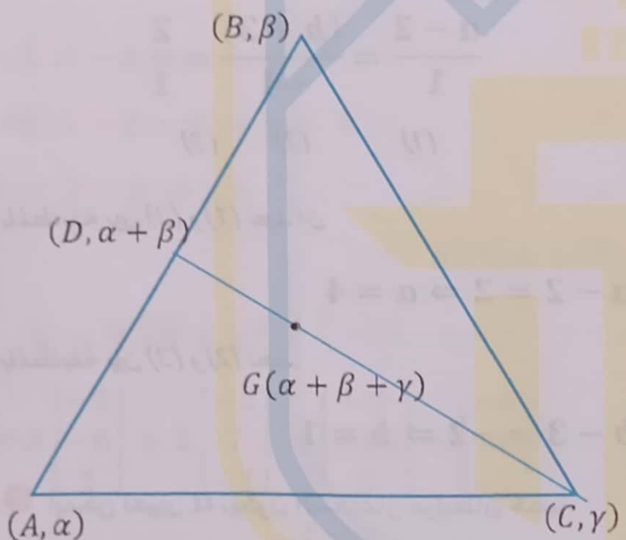
1. $(G,3)$
2. $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

الخاصة التجميعية:

لتكن النقاط $(A,\alpha)\ (B,\beta)(C,\gamma)$

وكان $(D\ ,\alpha+\beta)$ م-أ-م لـ A,B

فإن م-أ-م لـ D,C هو م-أ-م لكل الثلاثي والعكس صحيح



> تكرورية خطيرة:
>
> عندما يذكر أو ذكر في نص السؤال أن G مركز ثقل المثلث ABC أو رباعي الوجوه $ABCD$ هذا يعني:
>
> ◂ مثلث: G م-أ-م للنقاط $(A,1)\ (B,1)\ (C,1)$
>
> ◂ رباعي: G م-أ-م للنقاط $(A,1)\ (B,1)\ (C,1)\ (D,1)$

تدريب:

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم، G مركز ثقل رباعي الوجوه.
عين موضع G

بما أن G مركز ثقل الرباعي فإن G هي م-أ-م للنقاط $(A,1)\ (B,1)\ (C,1)\ (D,1)$

نفرض I م-أ-م لـ A, D فيكون ثقلها $(I,2)$ وتقع في منتصف AD

نفرض J م-أ-م لـ B, C وثقلها $(J,2)$ وتقع في منتصف BC.

وحسب الخاصة التجميعية فإن $(G,4)$ م-أ-م لـ I, J وتقع في منتصفهما.

كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة:

لدينا طريقتين:

1) نشكل شعاعين من منطلق واحد ونثبت أنهما مرتبطان خطياً.

(تستخدم عند وجود احداثيات النقاط)

2) أو أن نبرهن أن احدى النقاط هي م-أ-م للنقاط الباقية.

(تستخدم عند وجود أثقال للنقاط)

مثال محلول صفحة 29:

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G . I منتصف $[AD]$ ، J منتصف $[BC]$. أثبت أن G, J, I تقع على استقامة واحدة.

بما أن G مركز ثقل الرباعي فإن G هو م-أ-م للنقاط

$(A,1)\ (B,1)(C,1)\ (D,1)$

بما أن I منتصف $[AD]$ وثقل $(A,1)\ (D,1)$

بالتالي $(I,2)$ م-أ-م لـ A, D

بما أن J منتصف $[BC]$ وثقل $(B,1)\ (C,1)$

بالتالي $(J,2)$ م-أ-م لـ B, C

$(G,4)$ م-أ-م لكل الرباعي لأنه مركز ثقل الرباعي.

وحسب الخاصة التجميعية فإن $(G,4)$ م-أ-م لـ J, I

بالتالي I, J, G على استقامة واحدة.

تكرورية:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{B \text{ ثقل}}{G \text{ ثقل}}\overrightarrow{AB}$$

G م-أ-م لـ A, B

$(G, \text{المقام})$ $(B, \text{البسط})$ $(A, \text{المقام -- البسط})$

43/21:

$ABCD$ رباعي وجوه

F, E نقطتان تحققان:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

G مركز أبعاد متناسبة للرباعي.

1. أثبت أن E, F, G على استقامة واحدة.
2. عين موضع G على E, F

1. من العلاقات المعطاة نجد أن:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

E م-أ-م لـ B, C

$$\Leftarrow (B,3)\ (E,4)(C,1)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

F م-أ-م لـ A, D

$\Leftarrow (D,2)\ (A,1)\ (F,3)$

$(G,7)$ م-أ-م للرباعي $ABCD$

وحسب الخصة التجميعية

G م-أ-م لـ E,F

بالتالي E,G,F تقع على استقامة واحدة.

44/22: نتأمل مكعباً والنقاط L,K,J,I منتصفات $[AB],[EG],[BG],[AE]$ بالترتيب ولتكن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(E,1)\ (G,1)\ (B,1)\ (A,1)$

1. أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها على هذه القطعة.
2. أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ وعين موضعها على هذه القطعة.
3. استنتج أن K,L,J,I تقع في مستوي واحد وعين طبيعة الرباعي L,K,J,I.

1. بما أن I منتصف $[AE]$ فهي م-أ-م لـ

$(A,1)\ (E,1)$

إذاً $(I,2)$

بما أن J منتصف $[BG]$ فهي م-أ-م لـ

$(B,1)\ (G,1)$

إذاً $(J,2)$

وبما أن M م-أ-م للنقاط

$(A,1)\ (E,1)\ (G,1)\ (B,1)$

إذاً M م-أ-م للنقطتين $(J,2)\ (I,2)$

إذاً M تنتمي إلى $[IJ]$ وتقع في المنتصف.

2. بما أن K منتصف $[EG]$ فهي م-أ-م للنقاط

$(K,2)$ إذاً $(G,1)(E,1)$

بما أن L منتصف $[AB]$ فهي م-أ-م للنقاط

$(L,2)$ إذاً $(B,1)\ (A,1)$

بما أن M مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A,1)\ (E,1)\ (G,1)\ (B,1)$

إذاً M م-أ-م لـ $(L,2)\ (K,2)$

إذاً M تنتمي إلى $[KL]$ وتقع في المنتصف.

3. بما أن $[KL],[IJ]$ متناصفان مع M فالنقاط L,K,J,I تقع في مستو واحد والشكل الرباعي $LKJI$ متوازي أضلاع لتناصف قطريه.

40/9: $ABCD$ رباعي وجوه . a عدد حقيقي J,I هما على الترتيب منتصفا $[CD],[AB]$ و F,E نقطتان تحققان العلاقتين:

$\overrightarrow{BF} = a\,\overrightarrow{BC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AD}$

و H منتصف $[EF]$

أثبت أن I,J,H على استقامة واحدة.

من العلاقات نجد:

$$\overrightarrow{BF} = a\,\overrightarrow{BC}$$

$\Leftarrow F$ م-أ-م ل B,C

$(F,1)$ $\qquad$ $(B,1-a)\ (C,a)$

$$\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AD}$$

$\Leftarrow E$ م-أ-م ل AD

$(A,1-a)\ (E,1)$ $\qquad$ (D,a)

لكن H منتصف EF وثقل $(E,1)\ (F,1)$

بالتالي $(H,2)$ م-أ-م ل EF

حسب الخاصة التجميعية يكون $(H,2)$ لكل الرباعي

J منتصف CD وثقل $(C,a)\ (D,a)$

$\Leftarrow (J,2a)$ م-أ-م ل CD

I منتصف AB وثقل $(A,1-a)\ (B,1-a)$

$\Leftarrow (I,2-2a)$ م-أ-م ل A,B

ولدينا $(H,2)$ م-أ-م لكل الرباعي

فحسب الخاصة التجميعية يكون H م-أ-م لـ I, J ⇐ I, J, H على استقامة واحدة.

تكرورية امتحانية:

لإثبات أن نقطة ما M هي م-أ-م للنقاط $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ يجب أن نبرهن أن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}\ ;\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

تدريب سابق ص8:

لتكن النقاط

$A(-1,1,3)$ $\quad B(1,1,-1)$

$C(2,-1,1)$ $\quad D(2,0,1)$

1. جد الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$
2. أثبت أن هذه الأشعة مرتبطة خطياً.
3. أثبت أن D مركز أبعاد متناسبة لـ A, B, C المثقلة بأثقال يطلب تعيينها.

الطلب الأول والثاني محلولان سابقاً.

$$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

نضرب العلاقة السابقة بـ 4:

$$4\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

نزرع D حسب شال

$$4\overrightarrow{AD}=3(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$

$$4\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}$$

$$\vec{0}=5\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}-4\overrightarrow{AD}$$

$$\vec{0}=\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}$$

$$\vec{0}=-\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}$$

من العلاقة السابقة نجد أن $(D,4)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)(B,3)(C,2)$

إيجاد احداثيات مركز أبعاد متناسبة:

لتكن النقاط

$A(x_0,y_0,z_0)\ ,\alpha$

$B(x_B,y_B,z_B)\ ;\beta$

$C(x_c,y_c,z_c)\ ;\gamma$

لإيجاد احداثيات G مركز أبعاد متناسبة لـ A, B, C

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

تدريب:

لتكن النقاط التالية المثقلة

$A(1,0,2)\ B(2,1,3)\ C(0,1,1)$

حيث $(A,2)\ (B,3)\ (C,1)$

أوجد احداثيات G م-أ-م للنقاط A, B, C

$$x_G=\frac{2+6+0}{6}=\frac{5}{6}=\frac{4}{3}$$

$$y_G=\frac{0+3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$z_G=\frac{4+9+1}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

$$G\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

معادلة الكرة:

لكتابة معادلة الكرة نحتاج:

1. مركز الكرة (x_0, y_0, z_0)
2. نصف القطر R

شكل معادلة الكرة:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

تدريب:

أوجد معادلة الكرة التي مركزها $(3,1,0)$ ونصف قطرها 2

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=4$$

لتكن معادلة الكرة:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$$

عين مركزها ونصف قطرها

مركزها $(1,2,-1)$ نصف قطرها $R=\sqrt{2}$

الأسطوانة:

(علبة سمنة)

معادلاتها لها ثلاث أشكال:

1. محورها $\vec{i} \Leftarrow ox$

$$y^2+z^2=R^2$$

2. محورها $\vec{j} \Leftarrow oy$

$$x^2+z^2=R^2$$

3. محورها $\vec{k} \Leftarrow oz$

$$x^2+y^2=R^2$$

طولها:

$$h=b-a$$

تدريب:

أوجد معادلة أسطوانة محورها $(0,\vec{i})$ ومركزي قاعدتيها $A(1,0,0)$ $B(5,0,0)$ ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$

$$y^2+z^2=6\ ;1\le x<5$$

تدريب:

لتكن معادلة الأسطوانة:

$$x^2+y^2=9\ ;\ \ 0\le z\le 7$$

أي النقاط التالية تقع على الأسطوانة

$F(1,3,1)$ $D(3,0,3)$

حتى تنتمي F, D إلى الأسطوانة يجب أن نبرهن أن

$$F:\begin{cases}x^2+y^2=9\\0\le z\le 7\end{cases}\Rightarrow 1+9\neq 9$$

$F\notin$ الأسطوانة

$$D:\begin{cases}x^2+y^2=9\\0\le z\le 7\end{cases}\Rightarrow .0+9=9$$

$D\in$ الأسطوانة

المعلم المتجانس والكيفي:

1. أولاً: المعلم المتجانس:

1) هو $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

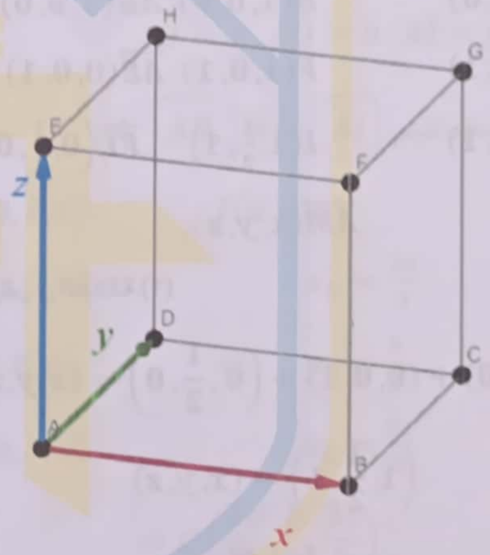
2) يستخدم لإيجاد احداثيات رؤوس المضلعات

3) حصراً مع الأشكال: المكعب

المكعب $ABCDEFGH$ فيه الضلع = الحرف

تكرورية: إذا لم يشير إلى طول ضلع المركب فهو 1

باختيار معلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$



$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

$G(1,1,1)$ $H(0,1,1)$

تكرورية: إذا أشار إلى طول ضلع المكعب

تدريب:

المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه a

باختيار معلم متجانس أوجد احداثيات رؤوسه

باختيار معلم متجانس $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$

$A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $C(a,a,0)$

$D(0,a,0)$ $E(0,0,a)$ $F(a,0,a)$

$G(a,a,a)$ $H(0,a,a)$

2. ثانياً: المعلم الكيفي:

1) ليس بالضرورة أن تكون أطوال أضلاعه متساوي ولا متعامدة

2) يستخدم مع الأشكال:

a. متوازي المستطيلات

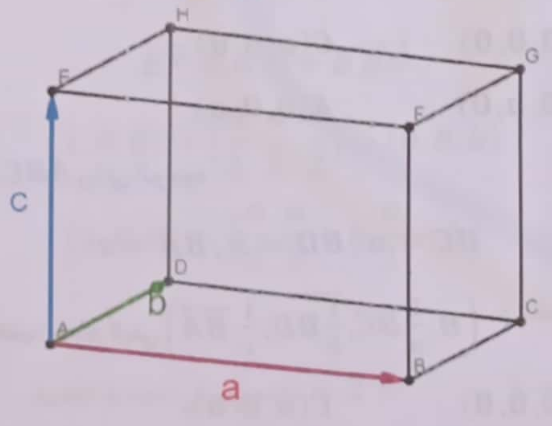
b. متوازي السطوح

c. رباعي الوجوه

1) متوازي المستطيلات: كل ضلعان متقابلان متساويان

$ABCDEFGH$

حيث $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$



باختيار معلم مناسب، أوجد احداثيات رؤوس المضلع

باختيار معلم كيفي $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{b}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{c}\overrightarrow{AE}\right)$

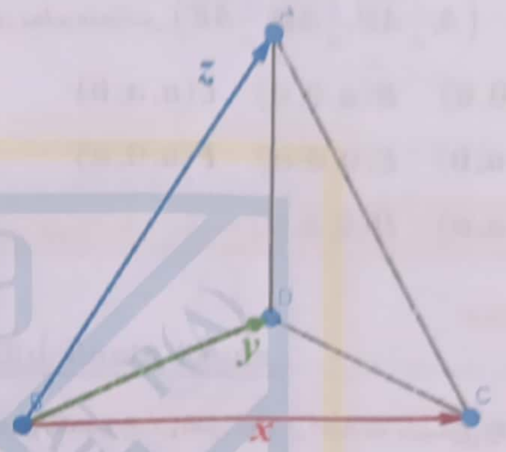
$A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $C(a,b,0)$

$D(0,b,0)$ $E(0,0,c)$ $F(a,0,c)$

$G(a,b,c)$ $H(0,b,c)$

2) رباعي الوجوه المنتظم: طول حرفه = طول ضلعه

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم



إذا لم يشير إلى طول الضلع (1):

باختيار معلم كيفي $\left(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)$

$B(0,0,0)$ $C(1,0,0)$

$D(0,1,0)$ $A(0,0,1)$

إذا ذكر أن طول ضلعه a :

باختيار معلم كيفي $\left(B,\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{a}\overrightarrow{BD},\frac{1}{a}\overrightarrow{BA}\right)$

$B(0,0,0)$ $C(a,0,0)$

$D(0,a,0)$ $A(0,0,a)$

$ABCD$ رباعي الوجوه

$BC=a\ ,BD=b\ ,BA=c$

باختيار معلم كيفي $\left(B,\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{b}\overrightarrow{BD},\frac{1}{c}\ \overrightarrow{BA}\right)$

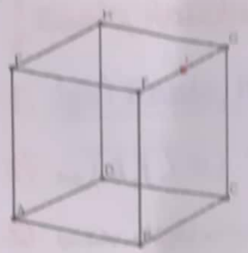
$B(0,0,0)$ $C(a,0,0)$

$D(0,b,0)$ $A(0,0,c)$

تدريب:

$ABCDEFGH$ مكعب ، I

منتصف الحرف $[FG]$



1 عين النقطة M المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$$

2 برهن صحة العلاقة:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$

1 نفرض $M(x,y,z)$

باختيار معلم متجانس $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$

$E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$ $\overrightarrow{AE}(0,0,1)$

$G(1,1,1)$ $I(1,\frac{1}{2},1)$ $\overrightarrow{FI}\left(0,\frac{1}{2},0\right)$

$\overrightarrow{AM}(x,y,z)$

نعوض في العلاقة (1)

$$(1,0,0)+(0,0,1)+\left(0\ ,\frac{1}{2},0\right)=(x,y,z)$$

$$\left(1,\frac{1}{2},1\right)=(x,y,z)$$

$$I=M$$

M تنطبق على I

$C(1,1,0)$ $\overrightarrow{CF}(0,-1,1)$

$\overrightarrow{AF}(1,0,1)$ $\overrightarrow{CB}(0,-1,0)$

نعوض في العلاقة (2)

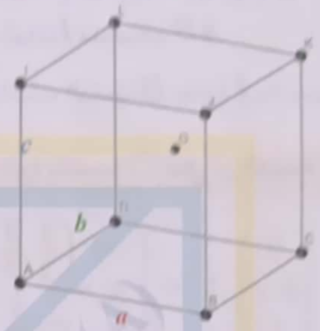
$$(1,0,0)+(0,-1,1)$$
$$=(1,0,1)+(0,-1,0)$$

$(1,-1,1)=(1,-1,1)$ محقق

تدريب:

$ABCDIJKL$ متوازي سطوح G مركز ثقل BIK

اثبت أن النقاط J, G, D على استقامة واحدة



بما أن G مركز ثقل BIK بالتالي G م-ا-م لـ B, I, K

ويكون $(B,1)\ (I,1)\ (K,1)$

نفرض $AB = a\ , AD = b\ , AI = c$

باختيار معلم كيفي $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{b}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{c}\overrightarrow{AI}\right)$

$D(0,b,0) \qquad J(a,0,c)$

$B(a,0,0) \qquad x_G = \frac{2a}{3}$

$I(0,0,c) \qquad \Rightarrow \quad y_G = \frac{b}{3}$

$K(a,b,c) \qquad z_G = \frac{2c}{3}$

$$\Rightarrow G\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{2c}{3}\right)$$

لنشكل شعاعين من منطلق واحد

$\overrightarrow{DG}\left(\frac{2a}{3}, -\frac{2b}{3}, \frac{2c}{3}\right) \quad \overrightarrow{DJ}(a, -b\ , c)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DJ}$

بالتالي $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DJ}$ مرتبطان خطياً

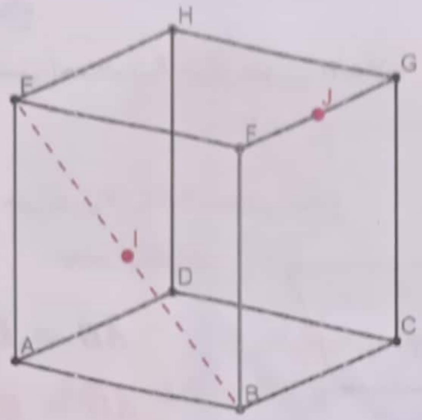
بالتالي D, J, G تقع على استقامة واحدة.

تدريب:

$ABCDEFGH$ مكعب، I منتصف BE ،

J منتصف FG

اثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}$ مرتبطة خطياً



باختيار معلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$I\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \qquad B(1,0,0) \qquad E(0,0,1)$

$J\left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \qquad G(1,1,1) \qquad F(1,0,1)$

$\overrightarrow{EF}(1,0,0) \qquad \overrightarrow{BG}(0,1,1)$

واضح أن $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BG}$ مستقلان خطياً لأن $\frac{1}{\frac{1}{2}} \neq \frac{0}{\frac{1}{2}}$

$$\overrightarrow{EF} = a\,\overrightarrow{IJ} + b\,\overrightarrow{BG}$$

$$(1,0,0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) + (0, b, b)$$

$$(1,0,0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} + b, \frac{a}{2} + b\right)$$

بالمطابقة:

$1 = \frac{a}{2}$ $\Leftarrow$ $a = 2$ نعوض في المعادلة الثانية

$0 = \frac{a}{2} + b \quad 0 = 1 + b \Leftarrow b = -1$ نعوض في الثالثة

$0 = \frac{a}{2} + b \quad 0 = 1 - 1$ محققة

فالأشعة مرتبطة خطياً

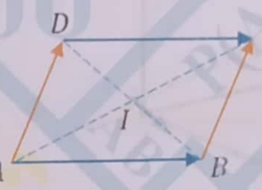
تدريب:

نتأمل في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط

$A(1,2,-3)$ $B(-1,3,3)$ $C(4,-1,2)$

1. أحسب إحداثيات D الذي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. أحسب إحداثيات I مركز متوازي الأضلاع.

1. حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع



يجب أن يتحقق

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

أو $$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$D(x, y, z)$ حيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-x \\ -1-y \\ 2-z \end{bmatrix}$$

بالمطابقة:

$$-2 = 4 - x \Rightarrow x = 6$$

$$1 = -1 - y \Rightarrow y = -2$$

$$6 = 2 - z \Rightarrow z = -4$$

2. إما I منتصف $[DB]$

أو I منتصف $[AC]$

ومنه $I\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

تدريب:

لتكن النقاط $A(3, 0, -1)$

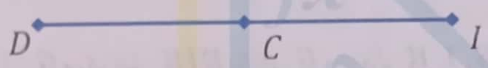
$B(-2, 3, 2)$ $C(1, 2, -2)$

1. جد إحداثيات I منتصف AB
2. جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة لـ C

ملاحظة: نظيرة بالنسبة لـC تعني أن النقطة C في المنتصف

1. $I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2.



$$x_c = \frac{x_I + x_D}{2}$$
$$2x_c = x_I + x_D$$
$$2x_c - x_I = x_D$$
$$2 - \frac{1}{2} = x_D$$
$$x_D = \frac{3}{2}$$

$$y_c = \frac{y_I + y_D}{2}$$
$$2y_c = y_I + y_D$$
$$2y_c - y_I = y_D$$
$$4 - \frac{3}{2} = y_D$$
$$y_D = \frac{5}{2}$$

$$z_c = \frac{z_I + z_D}{2}$$
$$2z_c - z_I = z_D$$
$$-4 - \frac{1}{2} = z_D$$
$$z_D = \frac{-9}{2}$$

$$D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$$

احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

تدريب:

لتكن النقطتين $A\,(2,3\,,-2)\quad B(5,-1,0)$

جد إن أمكن إحداثيات النقطة M في كل من الحالات:

الحالة الأولى:

$$\overrightarrow{MA} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

الحل: نفرض $M\,(x.y.z)$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بالمطابقة نجد:

$$2 - x = 6$$
$$x = -4$$
$$3 - y = -8$$
$$y = 11$$
$$-2 - z = 4$$
$$z = -6$$
$$M\,(-4\,.\,11\,.\,-6)$$

الحالة الثانية:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ 0-z \end{bmatrix}$$

بالمطابقة:

$$2 - x = 5 - x$$
$$2 \neq 5$$

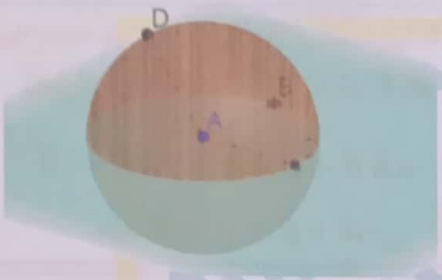
لا يمكن إيجاد إحداثيات M

تدريب:

لتكن النقاط $A(2,3,-1)\quad B(2,8,-1)$

$C(7,3,-1)\quad D(-1,3,3)$

أثبت أن B, C, D تقع على محيط كرة واحدة مركزها A ثم أوجد معادلة هذه الكرة



يجب أن نبرهن أن

$$AB = AD = AC$$

$$AB = \sqrt{0+25+0} = 5$$

$$AD = \sqrt{9+0+16} = 5$$

$$AC = \sqrt{25+0+0} = 5$$

هذا محقق أي أن $B.\,C.\,D$ تقع على محيط كرة مركزها A

معادلة الكرة تحتاج المركز $A(2,3,-1)$

ونصف القطر $R = 5$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$$

الرياضيات - الجزء الثاني

تدريب:

$ABCDEFGH$ مكعب أثبت أن K المعرفة بالعلاقة:

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

تقع في المستوي (BCG) وارسم النقطة K

تكرورية إمتحانية: لإثبات أن $K \in$ إلى المستوي (BCG)

يكفي أن نبرهن أن K م – أ – م لـ $B.C.G$

$$\alpha\overrightarrow{KB} + \beta\overrightarrow{KC} + \gamma\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

ندخل K حسب شال:

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KG}$$

$$\vec{0} = 2\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{AK}$$

$$\vec{0} = 2\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KG}$$

$$\vec{0} = -2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KG}$$

K م – أ – م لـ $B.C.G$

$(B.1)\ (C.-2)\ (G.3)\ (K.2)$

$K \in$ للمستوي (BCG)

تكرورية:

إذا كان G م – أ – م لـ $(A.\alpha)\ (B.\beta)$

1- إذا كان لـ $\alpha.\beta$ نفس الإشارة $\Leftarrow$ G يقع ضمن $[AB]$

2- إذا كان لـ $\alpha.\beta$ إشارتين مختلفتين $\Leftarrow$ G يقع خارج $[AB]$

رسم النقطة K

نفرض $(I.1)$ م – أ – م للنقاط $(C.-2)\ (G.3)$

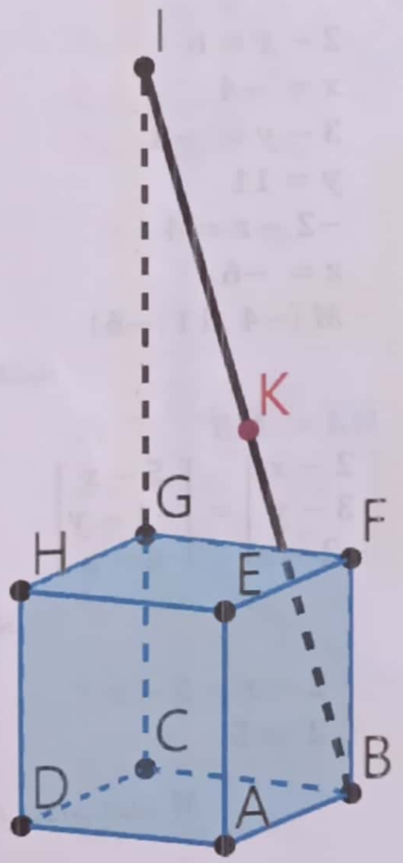
$$\overrightarrow{GI} = \frac{-2}{1}\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{GI} = -2\overrightarrow{GC}$$

في جهة معاكسة

لكن $(K.2)$ م – أ – م لـ $(I,1)\ (B,1)$

حسب الخاصية التجميعية $\Leftarrow$ K منتصف $[IB]$



تدريب:

$ABCD$ رباعي وجوه وفيه I, J نقطتان معرفتان وفق:

$$\overrightarrow{JC} = 2\,\overrightarrow{JD}\ ,\ \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$$

1. هل يمكن أن تنطبق إحدى النقطتين J, I على الأخرى؟
2. أثبت أنه أياً كانت النقطة M من الفراغ كان

$$\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} = -\,\overrightarrow{MI}$$
$$\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MD} = -\,\overrightarrow{MJ}$$

3. جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$$

1. من العلاقات السابقة:

$$\overrightarrow{JC} = 2\,\overrightarrow{JD}$$

ومنه فإن الشعاعين $\overrightarrow{JC}$ ، $\overrightarrow{JD}$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow$ C, D, J على استقامة واحدة

العلاقة الثانية:

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$$

ومنه فإن الشعاعين $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$

مرتبطان خطياً $\Leftarrow$ A, B, I على استقامة واحدة

ولكن CD, AB أضلاع رباعي الوجوه فلا يمكن أن ينطبق

$\Leftarrow$ I, J لا يمكن أن ينطبقان

2. $$\underset{M}{\overrightarrow{JC}} = 2\underset{M}{\overrightarrow{JD}}$$

ندخل M حسب شال:

$$\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{JM} + 2\overrightarrow{MD}$$
$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{JM}$$
$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

$$\underset{M}{\overrightarrow{IA}} = 2\underset{M}{\overrightarrow{IB}}$$

ندخل M حسب شال:

$$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

3.

تكرورية قبل الحل:

إذا ورد أوجد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق

1. الحالة الأولى:

$$\|\overrightarrow{MA}\| = K$$ نصف قطر

تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها K

2. الحالة الثانية:

$$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها AB

3. الحالة الثالثة:

$$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$$

تمثل مستوي محوري للقطعة AB

تكرورية قبل الحل:

إذا كان G م – أ – م للنقاط $(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)$

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\vec{0}$$

3

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

نفرض أن كان G م – أ – م للنقاط

$$(B,1)\ (C,1)\ (D,1)(G,3)$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MA}-3\,\overrightarrow{MG}\|$$

$$3\|\overrightarrow{MG}\|=3\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\|$$

حسب شال $GM+MA$

نقسم على 3

$$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{GA}\|$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA

4 طلب إضافي: عين مجموعة النقاط

$$\|\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=4$$

نفرض أن H م – أ – م للنقاط $(A,1)\ (B,2)\ (C,-1)$

$$\|2\overrightarrow{MH}\|=4\quad \|\overrightarrow{MH}\|=2$$

تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها 2

الجداء السلمي للأشعة في الفراغ:

الناتج هو عدد له ثلاث قوانين:

$$\vec{V}(x_1,y_1,z_1)\quad \vec{U}(x_2,y_2,z_2)$$

1 إذا علمنا إحداثيات الشعاعين:

$$\vec{V}.\vec{U}=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2$$

1 عند وجود زاوية بينهما θ

$$\vec{U}.\vec{V}=\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين الشعاعين $\vec{U},\vec{V}$

تكرورية هامة: دائماً يجب أن يكون الشعاعين من منطلق واحد

في القانون الثاني

1 مع وجود معطيات خاصة:

$$\|\vec{U}\| \text{ و } \|\vec{V}\| \text{ و } \|\vec{U}+\vec{V}\|$$

$$\vec{u}\,\vec{v}=\frac{1}{2}\,[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]$$

خواص الجداء السلمي:

1. $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$
2. $\vec{u}\,.\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
3. $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BA}\|$

تدريب:

لتكن النقاط $A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$

$C(0,0,1)$ $D(0,2,0)$ $E(1,1,1,)$

Mمنتصف $[AB]$

أحسب

$\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

$$\overrightarrow{AE}(0,1,1)\ \overrightarrow{AD}(-1,2,0)$$

ومنه $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}=2$

$$CM\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)\ \overrightarrow{OE}\,(1,1,1)\ M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

$$\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$$

نستنتج أن $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{OE}$ متعامدان

تدريب:

إذا علمت أن نظيم

$\vec{u}=5$ $\vec{v}=3$ $\vec{u}.\vec{v}=-4$

أحسب المقادير:

1. $\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})$

$$=\vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}=25-4=21$$

2. $\vec{v}(\vec{u}-\vec{v})$

$$\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}^2=-4-9=-13$$

1. $2\vec{u}(\vec{v}-3\vec{u})$

$$=2\vec{u}.\vec{v}-6\,\vec{u}^2=-8-150=-158$$

تدريب:

أطوال الأشعة

$\vec{u}=6$ $\vec{v}=8$ $\vec{u}+\vec{v}=10$

هل $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدان؟

$$\vec{u}\,\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$$

$$\frac{1}{2}[100-64-36]=\frac{1}{2}(0)=0$$

ومنه فإن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدان

تكرورية هامة:

1- لا يجوز استخدام الجداء السلمي في المعلم الكيفي.

2- يجوز استخدام الجداء السلمي في المعلم المتجانس.

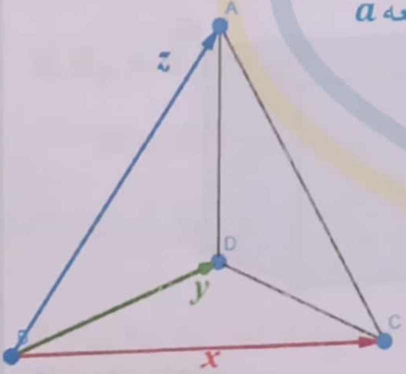
ملاحظة مثلث متساوي الأضلاع تكون أضلاعه متساوية

وزواياه متساوية 60°

تدريب:

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم كل وجه فيه مثلث متساوي

الأضلاع طول ضلعه a



1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\,.\,\|\overrightarrow{AC}\|.\cos 60$$

$$=a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AB}\|\,.\,\|\overrightarrow{AD}\|.\cos 60$$

$$= a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

ندخل A حسب شال

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

نستنتج أن

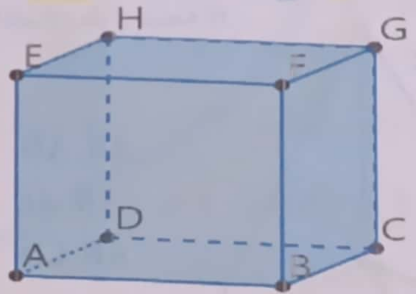
$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

متعامدان

تدريب:

$ABCDEFGH$ مكعب ضلعه a أحسب:

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$ و $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AG}$



باختيار معلم متجانس:

$$\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$$

$A(0,0,0)\ B\ (a,0,0) C\ (a,a,0)$

$D(0,a,0)\ E(0,0,a)\ F\ (a,0,a)$

$G(a,a,a)\ H\ (0,a,a)$

$\overrightarrow{AF}(a,0,a)\ \overrightarrow{AE}(0,0,a)\ \overrightarrow{CH}(-a,0,a)$

$\overrightarrow{HC}(a,0,-a)\ \overrightarrow{AG}(a,a,a)$

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = a^2$$

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH} = 0 + 0 + a^2 = a^2$$

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC} = a^2 - a^2 = 0$$

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AG} = a^2 + a^2 = 2a^2$$

تدريب:

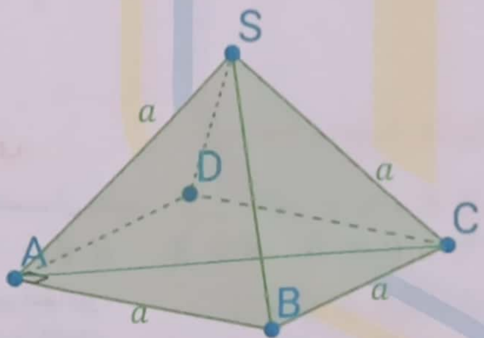
$S - ABCD$ هرم قاعدته مربع رأسه S

طول كل حرف = طول كل ضلع = a

ملاحظة: الأوجه الجانبية مثلثات متساوية الأضلاع

أحسب

1. $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$
2. $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$
3. $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$



الحل:

$$(SA)^{\rightarrow}.(SB)^{\rightarrow} = \|\overrightarrow{SA}\| . \|\overrightarrow{SB}\| \ .\cos 60$$

$$= a\,.\,a\,.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

ملاحظة: مجموع زوايا المثلث 180°

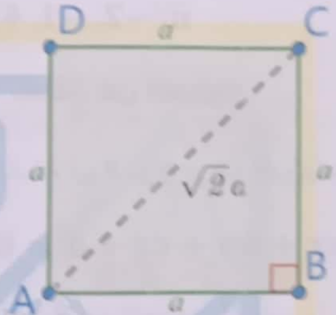
الرياضيات - الجزء الثاني

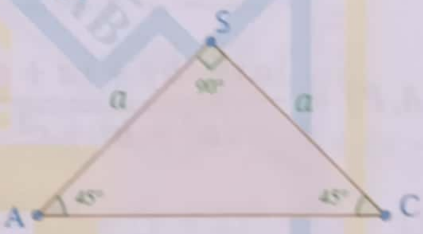
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

$$AC = \sqrt{2}a$$





❷

$$\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SC} = \|\overrightarrow{SA}\| . \|\overrightarrow{SC}\| . \cos 90 = 0$$

❸

$$-\overrightarrow{AS}\overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AS}\| . \|\overrightarrow{AC}\| . \cos 45$$

$$= -\sqrt{2}\, a \,.\, a . \frac{1}{\sqrt{2}} = -a^2$$

المستوي : P, Q

هو سطح لا بداية له ولا نهاية له يتألف من عدد لامتناهٍ من النقاط

معادلة المستوي تحتاج:

❶ نقطة $\in$ إليه (x_0, y_0, z_0)

❷ $\vec{n}\ (a, b, c)$ شعاع عمودي على معادلة المستوي ندعوه الناظم

شكل معادلة المستوي

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + C(z - z_0)}$$

طريقة الاستنتاج:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AM}$$

حيث: $\vec{n}(a, b, c)$ و $A\ (x_0, y_0, z_0)$ و $M\ (x, y, z)$

$$\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + C(z - z_0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

حالات معادلات المستوي :

1. المار من النقطة وتقبل ناظم:

تطبيق مباشر $\vec{n}(a, b, c)$ و $A\ (x_0, y_0, z_0)$

2. المستوى المار من نقطتين A و B ويعامد مستوى أخر Q

معادلة المستوي تحتاج نقطة $\in$ إليه نأخذ إحدى النقطتين B أو A

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ أي $\vec{n}.\vec{n}_Q = 0$

فتنتج معادلتين بالحل المشترك ينتج $\vec{n}(a, b, c)$

3. المستوى المار من نقطة A ويعامد مستويان P_1 و P_2

معادلة المستوي تحتاج: نقطة $\in$ إليه $A(x_0, y_0, z_0)$

نفرض

$$\vec{n}(a, b, c)$$

$$\vec{n}.\vec{n}_{p1} = 0 \qquad \vec{n}.\vec{n}_{p2} = 0$$

نوجد a, b, c

4. المستوى المار من نقطة ويوازي مستوى أخر

معادلة المستوي تحتاج نقطة ∋إليه $A(x_0, y_0, z_0)$

و $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ يوازي

5. هامة جداً : المستوى المار من ثلاث نقاط

A, B, C نشكل شعاعين من منطلق واحد ونثبت أنهما مستقلان خطياً ⇐ A, B, C تعين مستوياً معادلة المستوي تحتاج: نقطة ∋إليه A او B او C

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \quad \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

نوجد a, b, c من خلال المعادلتين

6. المستوى المحور للقطعة $[AB]$

طريقة أولى معادلة المستوي تحتاج : نقطة ∋إليه I منتصف $[AB]$

وناظم $\overrightarrow{AB}$ ⇐ انتبه

طريقة ثانية: $AM = BM$

تدريب:

اكتب معادلة المستوي المار من النقطة $A(2, 1, 3)$ ويقبل الناظم $\vec{n}(3, 1, 1)$

معادلة المستوي تحتاج نقطة ∋إليه $A(2, 1, 3)$

وناظم $\vec{n}(3, 1, 1)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$3(x - 2) + 1(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$3x - 6 + y - 1 + z - 3 = 0$$

$$3x + y + z - 10 = 0$$

تدريب: عين ناظم المستوي:

① $P: 3x + 2y - z = 0$

$$\vec{n}(3, 2, -1)$$

② $P: -2x - y + 4z + 2 = 0$

$$\vec{n}(-2, -1, 4)$$

بعد نقطة عن مستوي:

لتكن النقطة $A\ (x_A, y_A, z_A)$ وليكون المستوي

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

احسب بعد A عن المستوي P

$$dist(A, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

تدريب:

ليكن المستوي

$P: 3x + 2y + z - 2 = 0$

ولتكن النقطة $A\ (1, 0, 1)$ أحسب بعد A عن المستوي P

الحل:

$$dist(A, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\vec{n}(3, 2, 1)\ A(1, 0, 1)\ d = -2$$

$$dist(A, P) = \frac{|3 + 1 - 2|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{|2|}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{7}}{7}$$

تدريب:

لتكن النقطة $A(1,-2,1)$ ولدينا المستوي

$P: x+2y+z=0$

1. أحسب بعد A عن P
2. أوجد معادلة الكرة مركزها A وتمس P

الحل:

$$dist(A,P)=\frac{|1-4+1+0|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

معادلة الكرة تحتاج:

$$A(1,-2,1)$$

$$dist=R=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

تكرورية: عندما يمس مستوي كرة فإن $dist=R$

سؤال دورة:

1. اكتب معادلة الكرة التي مركزها O جد الاحداثيات ونصف قطره $\sqrt{3}$
2. أثبت أن المستوي: $P: x-y+z+3=0$ يمس الكرة

الحل:

1. معادلة الكرة تحتاج مركز $(0,0,0)$ ونصف القطر $R=\sqrt{3}$

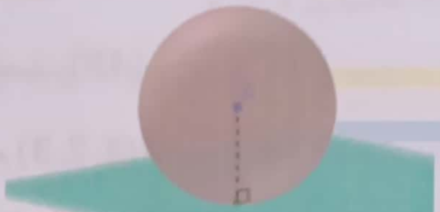
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$$x^2+y^2+z^2=3$$

2. يجب أن نبرهن أن $dist\ (O,P)=R$

$$dist(O,P)=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$$

المستوي يمس الكرة



تدريب:

اكتب معادلة المستوي المار من النقطة $A(2,1,1)$ والموازي للمستوي:

$P: 3x+2y-z+1=0$

الحل: معادلة المستوي تحتاج: نقطة تنتمي إليه

$$A(2,1,1)$$

وناظم $\vec{n}_P=\vec{n}(3,2,-1)$

تكرورية هامة: المستويان المتوازيات يقبلان ناظماً مشترك

$$\vec{n}_1=\vec{n}_2$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$3(x-2)+2(y-1)-1(z-1)=0$$

$$3x-6+2y-2-z+1=0$$

$$3x+2y-z-7=0$$

احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

تدريب:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(1,1,1)\ B(2,3,4)$

طريقة أولى معادلة المستوي المحوري تحتاج: نقطة تنتمي إليه

I منتصف $[AB]$ $I\left(\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2}\right)$

وناظم $\overrightarrow{AB}(1,2,3)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$1\left(x-\frac{3}{2}\right)+2(y-2)+3\left(z-\frac{5}{2}\right)=0$$

$$x-\frac{3}{2}+2y-4+3z-\frac{15}{2}=0$$

$$x+2y+3z-17=0$$

للتأكد نعوض I

طريقة ثانية:

$$AM=BM$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}$$

نربع الطرفين

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$$

بعد الإصلاح $x+2y+3z-17=0$

تدريب هام:

لتكن النقاط

$C(0,-1,-1)\ B(1,1,0)\ A(0,1,1)$

1. أثبت أن A,B,C تعيين مستوي (ليست على استقامة واحدة)
2. اكتب معادلة المستوي للنقاط A,B,C

الحل:

1. $\overrightarrow{AC}(0,-2,-2)\ \overrightarrow{AB}(1,0,-1)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلان خطياً ومنه A,B,C تعيين مستوي

A,B,C ليست على استقامة واحدة

2. معادلة المستوي تحتاج نقطة تنتمي إليه A,B,C نختار $B(1,1,0)$

وناظم

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$(a,b,c)(1,0,-1)=(a)-c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$-2c-2b=0$$

من المعادلتين نجد $a=1\ \ c=1$

ومنه $-2-2b=0 \Rightarrow b=-1$

$$\vec{n}(1,-1,1)$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$x-1-y+1+z=0$$

$$(ABC): x-y+z=0$$

تدريب:

أوجد معادلة المستوي المار النقطة $A(0,2,2)$ ويعامد كل من المستويين:

$$P: 2x - 2z + 6 = 0$$

$$Q: 4x - 2y - 6z + 4 = 0$$

معادلة المستوي تحتاج: نقطة تنتمي إليه $A(0,2,2)$ وناظم

$$\overrightarrow{nP}(2,0,-2)\ \overrightarrow{nQ}(4,-2,-6)$$

$$\vec{n}, \overrightarrow{nP} = 0$$

$$2a - 2c = 0$$

$$\vec{n}, \overrightarrow{nQ} = 0$$

$$4a - 2b - 6c = 0$$

نختار $c = 1$ ومنه فإن $a = 1$

$$4 - 2b - 6 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\vec{n}(1,-1,1)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$1(x - 0) + 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$$

$$x - y + 2 + z - 2 = 0$$

$$x - y + z = 0$$

تدريب:

اكتب معادلة المستوي المار من النقطتين $A(0,1,1)$ $B(1,1,0)$ ويعامد المستوي:

$$P: 2x - y - 3z + 5 = 0$$

الحل: معادلة المستوي تحتاج نقطة تنتمي إليه $A(0,1,1)$ وناظم

$$\vec{n}.\overrightarrow{nP} = 0$$

$$(a,b,c)(2,-1,-3) = 0$$

$$2a - b - 3c = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$(a,b,c)(1,0,-1) = 0$$

$$a - c = 0$$

نختار $a = 1$ فيكون $c = 1$

$$2 - b - 3 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\vec{n}(1,-1,1)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$x - y + z = 0$$

الوضع النسبي لمستويين:

ليكن لدينا:

$$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$$

$$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$$

ادرس الوضع النسبي بين P_2 و P_1

الحالة الأولى: $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow$ P_2 و P_1 متوازيان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

حالة خاصة:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

P_2 و P_1 متطابقان

الحالة الثانية: $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ مستقلان خطياً

$\Leftarrow$ P_2 و P_1 -1 متقاطعان ويوجد فصل مشترك

-2 متعامدان $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$

تدريب: ادرس الوضع النسبي للمستويين

1) $P: x + 2y + 4z - 5 = 0$
$Q: 2x + y - z + 1 = 0$

$\vec{n}_P(1,2,4) \quad \vec{n}_Q(2,1,-1)$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{4}{-1}$$

المركبات غير متناسبة $\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ مستقلان خطياً

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 2 + 2 - 4 = 0$$

ومنه فإن P, Q متعامدان

2) $P: x - 4y + 7 = 0$
$Q: x + 2y - z + 1 = 0$

$\vec{n}_p\ (1,-4,0)$

$\vec{n}_Q\ (1,2,-1)$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-4}{2} \neq \frac{0}{1}$$

المركبات غير متناسبة $\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ مستقلان خطياً

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 - 8 = -7 \neq 0$$

فالمستويين متقاطعان في فصل مشترك

3) $P: x - 2y + 3z - 1 = 0$
$Q: 2x - 4y + 6z + 5 = 0$

$\vec{n}_Q\ (2,-4,6) \qquad \vec{n}_p(1,-2,3)$

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6}$$

المركبات متناسبة ومنه فإن $\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ مرتبطان خطياً

P, Q متوازيان .

المستقيم d أو Δ:

هو خط يحوي عدد لا متناه من النقاط ولا بداية ولا نهاية له

معادلة المستقيم (المعادلات الوسيطية) تحتاج نقطة تنتمي إليه

$$(x_0, y_0, z_0)$$

وشعاع يوازيه ندعوه شعاع التوجيه $\vec{v}(a,b,c)$

شكل المعادلة الوسيطية:

1. مستقيم (AB)

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

حيث: $t \in R$

2. معادلة نصف مستقيم : $[AB)$

$t \in [0, +\infty[$

3. معادلة المستقيم للقطعة المستقيمة:

$[AB]$ حيث $t \in [0,1]$

نفس الشي بس الاختلاف إذا قال قطعة مستقيمة

حالات المستقيم:

بدي نقطة وبدي شعاع توجيه

1) معادلة المستقيم المار من النقطة $A\ (x_0, y_0, z_0)$ ويقبل شعاع التوجيه $\vec{v}(a,b,c)$ نطبق مباشر

1) معادلة مستقيم عمودي على المستوي P والمار من النقطة $A\ (x_0, y_0, z_0)$

معادلة مستقيم تحتاج : نقطة $A\ (x_0, y_0, z_0)$

ناظم = شعاع التوجيه $\vec{v}(a,b,c)$ لأن مستقيم عمودي على مستوي

3. معادلة المستقيم المعينة بالفصل المشترك P_1 وP_2 في الحلقة القادمة

4. معادلة المستقيم المار من $A\ (x_0, y_0, z_0)$ و $B\ (x_1, y_1, z_1)$

تحتاج نقطة تلتمي إليه وشعاع توجيه $\overrightarrow{AB}$

تدريب:

لتكن النقطتان $A(1,2,3)$ $B(0,1,3)$ أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم

الحل: معادلة المستقيم تحتاج $A(1,2,3)$

وشعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}(-1,-1,0)$

$$AB\begin{cases}x = 1 - t\\ y = 2 - t\\ z = 3\end{cases}$$

تدريب:

اكتب المعادلات الوسيطية لمستقيم المار من النقطة $A(2,1,3)$ ويعامد المستوي

$P: 2x + 3y - z + 1 = 0$

الحل: معادلة المستقيم تحتاج النقطة $A(2,1,3)$

وشعاع التوجيه $\vec{v}(2,3,-1)$

لان المستقيم يعامد المستوي

تكرورية عندما يعامد مستقيم مستوي ما فان ناظم المستوي هو نفسه شعاع التوجيه

$$d: \begin{cases}x = 2 + 2t\\ y = 1 + 3t\\ z = 3 - t\end{cases} \quad \text{حيث } t \in R$$

تدريب:

ليكن المستويان :

$P: 2x + y - z + 2 = 0$

$Q: x + 2y - z + 1 = 0$

1. أثبت أن P, Q متقاطعان

2. أوجد معادلة المستقيم d للفصل المشترك P, Q

1. الحل:

$\vec{n}_p(2,1,-1)$

$\vec{n}_Q(1,2,-1)$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1}$$

لندرس حالة التعامد:

$\vec{n}_P . \vec{n}_Q = 2 + 2 + 1 \neq 0$

غيرمتعامدان ومنه فانهما متقاطعان

2. $P: 2x + y - z + 2 = 0$

$Q: x + 2y - z + 1 = 0$

نختار $x = 0$

$y - z + 2 = 0$

$2y - z + 1 = 0$

بالطرح $-y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$1 - z + 2 = 0 \Rightarrow z = 3$

$A(0,1,3)$

نكرر العملية ونختار $y = 0$ فنحصل $B(-1,0,0)$

معادلة المستقيم تحتاج نقطة تلتمي إليه $B(-1,0,0)$

وشعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}(-1,-1,-3)$

$$d: \begin{cases}x = -1 - t\\ y = -t\\ z = -3t\end{cases}$$

حيث $t \in R$

الوضع النسبي لمستقيمان:

ليكن المستقيم d_1 وشعاع التوجيه $\overrightarrow{v_1}(a_1, b_1, c_1)$

ليكن المستقيم d_2 وشعاع التوجيه $\overrightarrow{v_2}(a_2, b_2, c_2)$

1. الحالة الأولى: يقعان في مستوى واحد

إما متوازيان $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_1$ مرتبطان خطياً

أو متقاطعان $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_1$ مستقلان خطياً

2. الحالة الثانية: لا يقعان في مستوى واحد

متخالفان $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_1$ مستقلان خطياً

للتمييز بين حالات الاستقلال الخطي نقوم بالحل المشترك

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين:

هل d_2 و d_1 يقعان في مستوي واحد؟

$$d_1\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

حيث: $t \in R$

$$d_2\begin{cases} x = -9s + 4 \\ y = -12s + 5 \\ z = 3s \end{cases}$$

حيث: $s \in R$

نوجد أشعة التوجيه لـ d_2 و d_1 أمثال المتحول t, s

$$\vec{v}_1(3, 4, -1)\ \vec{v}_2(-9, -12, 3)$$

$$\frac{3}{-9} = \frac{4}{-12} = \frac{-1}{3}$$

المركبات متناسبة $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_1$ مرتبطان خطياً

ومنه d_2 و d_1 متوازيان أي يقعان في مستوي واحد

سؤال دورة 40 درجة

ليكن المستقيمان

$$d_1\begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3 \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

حيث: $s \in R$

$$d_2\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

حيث: $t \in R$

1. أوجد شعاعي توجيه $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_1$
2. أدرس الوضع النسبي لـ d_2 و d_1

الحل:

$$\vec{v}_1(1, -3, -1)\ \vec{v}_2(1, -3, -3)$$

$$\frac{1}{1} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-1}{-3}$$

المركبات غير متناسبة $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_1$ مستقلان خطياً

إما متقاطعان أو متخالفان

بالحل المشترك:

> تكرورية : لحل جملة 3 معادلات بمجهولين
>
> 1- نأخذ معادلتين ونوجد مجهولين
>
> 2- نعوض في المعادلة الثالثة للتأكد إما محققة (متقاطعان) أو غير محقق (متخالفان)

$$s = t + 1 \ldots\ldots 1$$

$$-3s - 3 = -3t + 2 \ldots\ldots 2$$

$$-s + 1 = -3t + 3 \ldots\ldots 3$$

نعوض المعادلة الأولى في المعادلة الثالثة:

$$-t - 1 + 1 = -3t + 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

نعوض في المعادلة الأولى

$$s = \frac{5}{2}$$

نعوض في المعادلة الثانية للتأكد

$$-3\left(\frac{5}{2}\right) - 3 = -3\left(\frac{3}{2}\right) + 2$$

$$\frac{-15-6}{2} \neq \frac{-9+4}{2}$$

d_2 و d_1 متخالفان لا يقعان في مستوي واحد.

تدريب

ليكن المستقيمان :

$$d_1\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = 2-t \end{cases} \quad t \in R \text{ :حيث}$$

$$d_2\begin{cases} x = 2+3s \\ y = -1-s \\ z = 1+s \end{cases} \quad s \in R \text{ :حيث}$$

ادرس الوضع النسبي لـ d_2 و d_1

الحل:

$$\vec{v}_1(1,2,-1)\ \vec{v}_2(3,-1,1)$$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{1}$$

المركبات غير متناسبة $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_1$ مستقلان خطياً

بالحل المشترك:

$$1+t = 2+3s$$

$$-3+2t = -1-s$$

$$2-t = 1+s$$

من المعادلة 1 نجد $t = 1+3s$

نعوض في 3

$$2-1-3s = 1+s \Rightarrow s = 0$$

نعوض قيمة s فينتج $t = 1$ نعوض في 2 للتأكد.

$$-1 = -1$$

أي أن d_2 و d_1 متقاطعان وينتميان إلى مستوي واحد.

طلب إضافي: أوجد نقطة التقاطع:

إما نعوض $s = 0$ في المعادلات الوسيطية له أو

نعوض $t = 1$

في المعادلات الوسيطية له.

نعوض $s = 0$

$$x = 2 \quad y = -1 \quad z = 1$$

إحداثيات نقطة التقاطع: $(2,-1,1)$

تدريب

ليكن المستقيمان

$$d_1:\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

الفصل المشترك d_1

$$d:\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t-1 \end{cases} \quad t \in R \text{ حيث}$$

1. أعط تمثيلاً وسيطياً لـ d_1
2. ادرس الوضع النسبي لـ d_1 , d

الحل:

$$\vec{n}_1(3,-1,-2)\ \vec{n}_2(1,-1,-1)$$

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$$

المركبات غير متناسبة ومنه فإن $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$

$$3+1+2 \neq 0$$

متقاطعان

$$3x - y - 2z = 1$$

$$x - y - z = 0$$

نختار $x = 0$

$$-y-2z=1$$
$$-y-z=0$$

بالطرح $y=1, z=-1$

$$A(0,1,-1)$$

نكرر العملية ونختار $z=0$

$$3x-y=1$$
$$x-y=0$$

بالطرح نجد $x=\frac{1}{2}\ ,y=\frac{1}{2}$

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

معادلة المستقيم تحتاج النقطة $A(0,1,-1)$

وشعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},1\right)$

$$d_1\begin{cases} x=0+\frac{1}{2}s \\ y=1-\frac{1}{2}s \\ z=-1+s \end{cases}$$

حيث $S\in R$

$$\vec{v}_{d_1}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},1\right)\quad \vec{v}_d(1,-1,2)$$

نستنتج أن $\vec{v}_d=2\vec{v}_{d_1}$ الأشعة مرتبطة خطيا

أي أنهما متوازيان ومنه فان لـ d_1 , d ينتميان

لمستوي واحد (يقعان في مستوي واحد)

الوضع النسبي بين مستوي ومستقيم:

ليكن المستوي

$$P: ax+by+cz+d=0$$

والمستقيم

$$d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

حيث: $t\in R$

صيغة السؤال: درس الوضع النسبي بين d, P

لدراسة الوضع النسبي بين d, P نعوض إحداثيات d

في P ونميز ثلاث حالات

1 عدد = عدد $\Leftarrow$ d يقع ضمن P

2 قيمة = t

d يقطع P ولمعرفة نقطة التقاطع نعوض t في d

3 عدد $\neq$ عدد $d\|P$ متوازيان

تدريب:

ادرس الوضع النسبي لـ d, P

$$P: 2x+3y-z=0$$

$$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=8t-3 \end{cases}$$ حيث $t\in R$

1 نعوض إحداثيات d في P

$$2(t+1)+3(2t+1)-(8t-3)=0$$
$$2t+2+6t+3-8t+3=0$$
$$8\neq 0$$

$d\|P$ متوازيان

2

$$P: x-y+z=0$$

$$d:\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

حيث $t \in R$

نعوض إحداثيات d في P

$$2t - 1 - t + 1 - 3t = 0$$

$$t = 0$$

أي d يقطع P

صيغة ثانية للسؤال: أوجد نقطة التقاطع بين d, P

$$x = -1 \quad y = 0 \quad z = 1$$

$(-1, 0, 1)$ نقطة التقاطع بين d, P

حل جملة 3 معادلات بـ 3 مجاهيل

يوجد طريقتين

الحذف بالتعويض و غاوس

1. أولاً: طريقة الحذف بالتعويض:

1. نختار معادلتين
2. نوجد منها مجهولين بدلالة مجهول
3. نعوض قيمة المجهولين في المعادلة الثالثة (المعادلة التي لم نأخذها)

2. ثانياً طريقة غاوس: خطواتها:

1. يجب أن يكون أمثال x في السطر الأول 1 أو -1
2. نحذف x من السطر الثاني.
3. نحذف x من السطر الثالث
4. نحذف y من السطر الثالث
5. نبدأ الحل من الأسفل إلى الأعلى

تكرورية: بعد حل جملة المعادلات نلاحظ ثلاث حالات:

-1 قيمة $= z$ قيمة $= y$ قيمة $= x$

للمعادلات حل وحيد

-2 عدد = عدد

للمعادلات عدد لامتناه من الحلول

-3 عدد ≠ عدد

المعادلات مستحيلة الحل.

تدريب:

حل جملة المعادلات:

$$x - 2y + z = 1$$
$$2x - y + 3z = 0$$
$$x + y - z = 2$$

طريقة الحذف بالتعويض:

نختار المعادلة 1 و3

$$z = -x + 2y + 1$$

$$x = 2 - y + z$$

$$z = -2 + y - z + 2y + 1$$

$$z = \frac{-1 + 3y}{2}$$

نعوض z في x

$$x = 2 - y - \frac{1 + 3y}{2}$$

$$x = \frac{3 + y}{2}$$

نعوض x, z في المعادلة الثانية:

$$2\left(\frac{3 + y}{2}\right) - y + 3\left(\frac{-1 + 3y}{2}\right) = 0$$

الوضع النسبي لثلاث مستويات:

ليكن لدينا المستويات الآتية:

$$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$P_3: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

لدراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات

صيغة السؤال : ادرس الوضع النسبي لـ P_1, P_2, P_3

نحل جملة المعادلات الثلاثة ويوجد طريقتين

1. الحذف بالتعويض
2. غاوس

وبعد حل المعادلات نميز ثلاث حالات

1. عدد $\neq$ عدد المعادلات مستحيلة الحل

P_1, P_2, P_3 متوازية

2. عدد = عدد للمعادلات عدد لا متناه من الحلول

P_1, P_2, P_3 تتقاطع في فصل مشترك

3. $x =$ قيمة $\quad y =$ قيمة $\quad z =$ قيمة

للمعادلات حل وحيد

P_1, P_2, P_3 تتقاطع في نقطة واحدة

$$y = \frac{-1}{3}$$

نعوض y في z, x نجد $x = \frac{4}{3} \quad z = -1$

للعادلات حل وحيد

تدريب:

حل جملة المعادلات

$$x - 2y + z = 1$$
$$2x - y + 3z = 0$$
$$x + y - z = 2$$

طريقة غاوس:

نضرب المعادلة الأولى بـ -2 ونجمعها مع المعادلة الثانية

$$x - 2y + z = 1$$
$$3y + z = -2$$
$$x + y - z = 2$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -1 ونجمعها مع المعادلة الثالثة

$$x - 2y + z = 1$$
$$3y + z = -2$$
$$3y - 2z = 1$$

من المعادلة الثالثة نجد $z = -1$

نعوض في المعادلة الثانية $3y - 1 = -2$

$$y = \frac{-1}{3} \qquad x = \frac{4}{3}$$

للمعادلات حل وحيد

تدريب:

ادرس الوضع النسبي للمستويات

صيغة ثانية: (أوجد نقطة التقاطع للمستويات)

$$P: x + 3y - 3z - 4 = 0$$
$$Q: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$R: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

الحل:

نضرب المعادلة الأولى بـ -1 ونجمعها مع المعادلة الثانية

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$
$$-y + 2z = 0$$
$$2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -2 ونجمعها مع المعادلة الثالثة

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$
$$-y + 2z = 0$$
$$-3y + 4z + 3 = 0$$

نضرب المعادلة الثانية بـ -3 ونجمعها مع المعادلة الثالثة

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$
$$-y + 2z = 0$$
$$-2z = -3$$
$$z = \frac{3}{2}$$

نعوض في الثانية فنجد $y = 3$

نعوض في الأولى فنجد $x = \frac{-1}{2}$

للمعادلة حل وحيد P_1, P_2, P_3 يتقاطعان في نقطة واحدة

$$\left(\frac{-1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

تدريب: ادرس الوضع النسبي للمستويات:

$$P: x + 2y + z = 0$$
$$Q: 2x - y + 3z = 0$$
$$R: 3x - 4y + 5z = 0$$

الحل: نضرب المعادلة الأولى بـ -2 ونجمعها مع المعادلة الثانية

$$x + 2y + z = 0$$
$$-5y + z = 0$$
$$3x - 4y + 5z = 0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -3 ونجمعها مع المعادلة الثالثة

$$x + 2y + z = 0$$
$$-5y + z = 0$$
$$-10y + 2z = 0$$

نضرب المعادلة الثانية بـ -2 ونجمعها مع المعادلة الثالثة:

$$x + 2y + z = 0$$
$$-5y + z = 0$$
$$0 = 0$$

للمعادلات عدد لا متناه من الحلول

P_1, P_2, P_3 تتقاطع في فصل مشترك

بعد نقطة عن مستقيم (المسقط القائم)

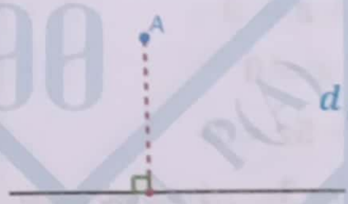
لتكن النقطة $A(x_1,y_1,z_1)$

وليكن المستقيم

$$d:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$$

حيث: $t\in R$

أحسب بعد A عن المستقيم d



1. نوجد $A'(x,y,z)$ المسقط القائم لـ A على المستقيم d

$$\overrightarrow{AA'}\perp\vec{v}_d$$

تنتج معادلة شبه معادلة المستوي

ثانياً نعوض إحداثيات المستقيم d فينتج لدينا قيمة $t=$

نعوض قيمة الـ t في d حتى نحصل على

$$A'(x,y,z)$$

يكفي أن نعوض

$$AA'=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

هي بعد A عن d

تدريب: لتكن النقطة $A(1,1,0)$
ولدينا المستقيم

$$d:\begin{cases}x=t-2\\ y=3\\ z=t\end{cases}$$

حيث: $t\in R$

احسب بعد النقطة A عن d

$$\overrightarrow{AA'}(x-1,y-1,z)$$

$$\vec{v_d}(1,0,1)$$

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{v}_d=0$$

$$x-1+z=0$$

$$x+z-1=0$$

نعوض إحداثيات d في المعادلة

$$t-2+t-1=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

نعوض في d

$$x=\frac{-1}{2}\quad y=3\quad z=\frac{3}{2}$$

نحسب AA_1 يكفي بعد A عن d

$$AA'=\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+(2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

بعد A عن d

تدريب: في معلم متجانس لتكن النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويان:

$$P: 2x-y+z-4=0$$
$$Q: x+y+2z-5=0$$

1. أثبت أن P, Q متقاطعان في فصل مشترك
2. أوجد معادلة المستقيم d للفصل المشترك P, Q
3. أحسب بعد النقطة A عن d

الحل: نوجد النواظم

$$\vec{n}_p(2,-1,1)\ \vec{n}_Q(1,1,2)$$

$$\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{2}$$

$\vec{n}_p, \vec{n}_Q$ مستقلان خطياً

$$\vec{n}_p.\vec{n}_Q=0$$

$$2 - 1 + 2 \neq 0$$

$\vec{n}_p$, $\vec{n}_Q$ غير متعامدان $\Leftarrow P, Q$ متقاطعان في فصل مشترك

-2

$$2x - y + z - 4 = 0$$
$$x + y + 2z - 5 = 0$$

نختار $x = 0$

$$-y + z - 4 = 0$$
$$y + 2z - 5 = 0$$

بالجمع نجد $z = 3$

نعوض في المعادلة الثانية فنجد $y = -1$

$$B(0, -1, 3)$$

بتكرار العملية نختار $z = 0$

$$2x - y - 4 = 0$$
$$x + y - 5 = 0$$

بالجمع

$$3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$$

نعوض في المعادلة الثانية فنجد

$$y = 2$$
$$C(3, 2, 0)$$

معادلة المستقيم d

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

حيث: $t \in R$

$$d: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3t \end{cases}$$

حيث: $t \in R$

نفرض $A_1(x, y, z)$ المسقط القائم لـ A على المستقيم d

$$\overrightarrow{AA_1}(x - 3, y + 1, z - 2)$$
$$\overrightarrow{v_d}(3, 3, -3)$$
$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{v}_d = 0$$
$$3x - 9 + 3y + 3 - 3z + 6 = 0$$

نقسم على 3

$$x + y - z = 0$$

نعوض إحداثيات d

$$3 + 3t + 2 - 3t + 3t = 0$$

ومنه نجد $t = \frac{-5}{9}$

نعوض t في d فنجد

$$x = \frac{4}{3} \quad y = \frac{1}{3} \quad z = \frac{5}{3}$$
$$A_1\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \sqrt{\left(\frac{-5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{9}}$$
$$= \frac{\sqrt{42}}{3}$$

تدريب في معلم متجانس نتأمل النقطتان

$A(2,5,3)\ B(-1,0,-1)$

والمستوي P يقبل الشعاعين

$\vec{v}(3,-1,-1)$ و $\vec{u}(1,1,-2)$

موجهين فيه (يقعان ضمن المستوي)

أثبت أن المستقيم AB عمودي على المستوي

الحل: يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{nP}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

$\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$

ونفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\overrightarrow{n_P}.\vec{u}=0$

$a+b-2c=0$

$\overrightarrow{n_P}.\vec{v}=0$

$3a-b-c=0$

نختار $c=1$

$a+b-2=0$

$3a-b-1=0$

بالجمع نجد $a=\frac{3}{4}$ و $b=\frac{5}{4}$

$\overrightarrow{n_P}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4},1\right)\ \overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$

$\overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{n_P}$

ومنه فإن $\overrightarrow{nP}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا

$\overrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي P

تدريب هام

نتأمل في معلم متجانس النقاط :

$A(2,0,1)\ B(1,-2,1)\ C(5,5,0)$
$D(-3,-5,6)\ E(3,1,2)$

1. أثبت أن النقاط A,B,C,D تنتمي إلى مستوي واحد
2. بين هل $E\in$ لمستوي واحد

الحل:

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$

$\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$

$\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$

$$\frac{-1}{3}\neq\frac{-2}{5}\neq\frac{0}{-1}$$

المركبات غير متناسبة ومنه فإن $\overrightarrow{AC}$ و $(\overrightarrow{AB})$ مستقلان خطياً

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}-5\\-5\\5\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$-5=-\alpha+3\beta$$
$$-5=-2\alpha+5\beta$$
$$5=-\beta$$

ومنه فإن $\alpha=-10$ و $\beta=-5$

$$\overrightarrow{AD}=-10\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$$

أي أن $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً وتنتمي لمستوي واحد

من الطلب السابق نجد أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً

$$\overrightarrow{AE}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix}$$

بالمطابقة:

$1=-\alpha+3\beta$ ...(1)

$1=-2\alpha+5\beta$ ...(2)

$1=-\beta$ ...(3)

من (3) نجد: $\beta=-1$ نعوض في (1): $1=\alpha-3$

$\Rightarrow \alpha=-4$

نعوض في (2) للتأكد: $1\neq +8-5=3$

بالتالي: المستوي $E\notin$

تدريب:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتان $A(2,5,3)$, $B(-1,0,-1)$ والمستوي P يقبل الشعاعين $\vec{v}(3,-1,-1)$, $\vec{u}(1,1,-2)$ موجهين له (يقعان ضمن P)

أثبت أن المستقيم AB عمودي على المستوي.

يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{AB},\vec{n}_P$ مرتبطين خطياً

$\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}_P.\vec{u}=0 \Rightarrow a+b-2c=0$

$\vec{n}_P.\vec{v}=0 \Rightarrow 3a-b-c=0$

نختار $c=1$:

$a+b-2=0$

$3a-b-1=0$

بالجمع:

$4a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{3}{4}+b-2=0 \Rightarrow b=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \vec{n}_P\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4},1\right)$

$\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$

$\overrightarrow{AB}=-4\vec{n}_P$

$\Leftarrow$ $\vec{n}_P,\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً.

(AB) عمودي على المستوي P.

المساحات:

- مساحة مربع = طول الضلع × طول الضلع $=S$
- مساحة المستطيل = الطول × الضلع $=S$
- مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع $=S$
- مساحة مثلث متساوي الأضلاع = $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- حجم رباعي الوجوه $V=\frac{1}{3}S.h$

مسألة أولى:

تتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(2,1,0)\ B(1,2,2)\ C(3,3,1)\ D(1,1,4)$

1. تحقق أن C,B,A تعين مستوياً، وأوجد معادلة المستوي (ABC).
2. اثبت أن ABC متساوي الأضلاع واحسب مساحته.
3. عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ العمودي على المستوي (ABC) ويمر من D.
4. أوجد احداثيات النقطة E المسقط القائم لـ D على المستوي (ABC).
5. استنتج بعد D عن المستوي (ABC).
6. احسب حجم الرباعي $ABCD$.
7. عين الأعداد الحقيقية γ,β,α لتكون E مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$.
8. اكتب معادلة الكرة التي مركزها D ويمس (ABC).

1. يجب أن نشكل شعاعين من منطلق واحد

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,2)\ \ \overrightarrow{AC}(1,2,1)$$

$$\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$$

المركبات غير متناسبة $\Leftarrow$ AC,AB مستقلان خطياً.

C,B,A تعين مستوياً.

معادلة المستوي (ABC)

$\vec{n}(a,b,c)$ — A أو B أو C

$A(2,1,0)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$(a,b,c).(-1,1,2)=0$$

$$-a+b+2c=0 \qquad ...(1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$(a,b,c).(1,2,1)=0$$

$$a+2b+c=0 \qquad ...(2)$$

نختار $c=1$

$$-a+b+2=0$$

$$a+2b+1=0$$

بالجمع

$$3b+3=0\Rightarrow b=-1$$

$$a-2+1=0\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow\vec{n}(1,-1,1)$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-2)-1(y-1)+1(z-0)=0$$

$$x-2-y+1+z=0$$

$$(ABC):\ x-y+z-1=0.$$

2. لإثبات أن المثلث متساوي الأضلاع يجب أن نبرهن أن:

$$AB=AC=BC$$

$$AB=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$AC=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC}(2,1,-1)$$

$$BC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

المثلث متساوي الأضلاع

$$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=6.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3. معادلة المستقيم Δ:

$$D(1,1,4)\in\Delta$$

$\vec{v}(1,-1,1)=\vec{n}$ لأن المستقيم عمودي على المستوي

$$(\Delta):\begin{cases} x = x_a + a.t \\ y = y_0 + b.t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + c.t \end{cases}$$

$$(\Delta):\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$$

تكرورية: عندما يكون المستقيم عامودي على المستوي (ABC) وطلب ايجاد النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي (ABC) مباشر نعوض إحداثيات المستقيم في معادلة المستوي.

3) بفرض أن $E(x,y,z)$ نعوض إحداثيات المستقيم Δ في معادلة المستوي (ABC)

$$1 + t - 1 + t + 4 + t - 1 = 0$$

$$3t = -3 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow x = 0, y = 2, z = 3 \Rightarrow E(0,2,3)$$

4) طريقة أولى: $DE = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

طريقة ثانية:

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|1-1+4-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

5)

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC}.h \ ; h = dist(D,(ABC))$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

6) E نقطة من المستوي ABC وبالتالي A, B, C, E تقع في مستو واحد.

يجب أن نثبت أن:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{EA} + \beta\overrightarrow{EB} + \gamma\overrightarrow{EC} = \vec{0}}$$

$\overrightarrow{EA}(2,-1,-3)$

$\overrightarrow{EB}(1,0,-1)$

$\overrightarrow{EC}(3,1,-2)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}$ مستقلان خطياً.

$$\overrightarrow{EA} = \alpha\overrightarrow{EB} + \beta\overrightarrow{EC}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

بالمطابقة:

$2 = \alpha + 3\beta$ ...(1)

$-1 = \beta$ ...(2)

$-3 = -\alpha - 2\beta$ ...(3)

من (2) نجد: $\beta = -1$ نعوض في (1) $2 = \alpha - 3$

نعوض في (3) للتأكد: $-3 = -5 + 2$ محقق

$$\overrightarrow{EA} = 5\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC}$$

$$\vec{0} = -\overrightarrow{EA} + 5\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC}$$

$\Leftarrow (E,3)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$$(A,-1)\ (B,5)\ (C,-1)$$

7) معادلة الكرة نحتاج:

- مركز الكرة: D
- نصف القطر: $R = dist(D,(ABC))$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$$

المسألة الثانية:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس النقاط:

$$C(1,1,3)\quad B(0,-2,2)\quad A(2,2,0)$$

1. اكتب معادلة المستوي P الذي يعامد المستقيم (BC) ويمر من النقطة A.
2. اكتب معادلة Q المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.
3. أثبت أن Q, P متقاطعان في فصل مشترك، ثم اكتب معادلة المستقيم Δ للفصل المشترك.
4. أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالشكل: $(ABC): 5x-2y+z=6$
5. عين إحداثيات G نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC).
6. أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)\ (B,1)\ (C,-12)$
7. عين مجموعة النقاط M التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-12\,\overrightarrow{MC}\| = 10\|\overrightarrow{OA}\|$$

1. معادلة المستوي P:

نقطة: $A(2,2,0)$ ناظم: $\vec{n}=\overrightarrow{BC}(1,3,1)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-2)+3(y-2)+1(z-0)=0$$

$$x-2+3y-6+z=0$$

$$P: x+3y+z-8=0$$

2. معادلة المستوي المحوري Q:

نقطة: I منتصف $[AB]$ ناظم: $\overrightarrow{AB}(-2,-4,2)$

$$-2(x-1)-4(y-0)+2(z-1)=0$$

$$-2x+2-4y+2z-2=0$$

$$Q: -2x-4y+2z=0$$

نقسم على -2:

$$Q: x+2y-z=0$$

3. يجب أن نبرهن أن $\vec{n}_Q, \vec{n}_P$ مستقلان خطياً.

$$\vec{n}_P(1,3,1)\qquad \vec{n}_Q(1,2,-1)$$

$$\frac{1}{1}\neq\frac{3}{2}\neq\frac{1}{-1}$$

المركبات غير متناسبة $\Leftarrow$ $\vec{n}_Q, \vec{n}_P$ مستقلان خطياً.

$$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q \overset{?}{=} 0$$

$$1+6-1\neq 0$$

Q, P متقاطعان في فصل مشترك.

لنوجد معادلة المستقيم Δ الفصل المشترك.

$$x+3y+z-8=0$$
$$x+2y-z=0$$

نختار $x=0$

$$3y+z-8=0$$
$$2y-z=0$$

بالجمع:

$$5y-8=0 \Rightarrow y=\frac{8}{5}$$

$$\frac{24}{5}+z-8=0 \Rightarrow z=\frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow D\left(0,\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$$

نكرر العملية ونختار $y=0$

$$x+z-8=0$$
$$x-z=0$$

$$2x=8 \qquad \Rightarrow x=4$$

$$z - 8 + 4 = 0 \Rightarrow z = 4$$

$$E(4, 0, 4)$$

معادلة المستقيم Δ

$E(4, 0, 4)$ $\quad \overrightarrow{ED}\left(-4, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = \frac{8}{5}t \\ z = 4 - \frac{4}{5}t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

④ طريقة أولى (نعوض النقاط): نعوض $A(2, 2, 0)$

$$5(2) - 2(2) + 0 = 6$$

$$10 - 4 = 6$$

$$\Rightarrow A \in (ABC)$$

نعوض $B(0, -2, 2)$

$$0 + 4 + 2 = 6$$

$$6 = 6$$

$$\Rightarrow B \in (ABC)$$

نعوض $C(1, 1, 3)$

$$5 - 2 + 3 = 6$$

$$6 = 6$$

$$\Rightarrow C \in (ABC)$$

⇐ معادلة المستوي (ABC) تعطى بالشكل:

$$5x - 2y + z = 6$$

طريقة ثانية: معادلة المستوي تحتاج:

نقطة: A أو B أو C $\quad$ ناظم: $\vec{n}(a, b, c)$

يجب أن نبرهن أن $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$

نوجد (a, b, c)

⑤ نعوض إحداثيات Δ في المستوي (ABC)

$$5(4 - 4t) - 2\left(\frac{8}{5}t\right) + 4 - \frac{4t}{5} = 6$$

$$20 - 20t - \frac{16}{5}t + 4 - \frac{4}{5}t = 6$$

$$-24t = -18$$

$$t = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

نعوض قيمة t في Δ

$$x = 4 - 4\left(\frac{3}{4}\right) = 4 - 3 = 1$$

$$y = \frac{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

$$z = 4 - \frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\right) = 4 - \frac{12}{20} = \frac{80 - 12}{20} = \frac{68}{20} = \frac{17}{5}$$

$$G\left(1, \frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$$

⑥ $A(2, 2, 0)$ $\ B(0, -2, 2)$ $\ C(1, 1, 3)$

$(A, 1)$ $\ (B, 1)$ $\ (C, -12)$

طريقة أولى:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2 + 0 - 12}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$$y_G = \frac{2 - 2 - 12}{-10} = \frac{-12}{-10} = \frac{6}{5}$$

$$z_G = \frac{0 + 2 - 36}{-10} = \frac{17}{5}$$

$G\left(1, \frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط A, B, C

$(A, 1)$ $\ (B, 1)$ $\ (C, -12)$ $\ (G, -10)$

طريقة ثانية:

G نقطة من المستوي ABC

$$\overrightarrow{GA} = a\,\overrightarrow{GB} + b\,\overrightarrow{GC}$$

يجب أن نبرهن أن:

$$\boxed{\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$$

$$\overrightarrow{GA}\left(1, \frac{4}{5}, -\frac{17}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{GB}\left(-1, -\frac{16}{5}, -\frac{7}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{GC}\left(0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GB}$ مستقلان خطياً.

$$\overrightarrow{GA} = a\,\overrightarrow{GB} + b\,\overrightarrow{GC}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{16}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

بالمطابقة:

$$1 = -a \quad ...(1)$$

$$\frac{4}{5} = -\frac{16}{5}a - \frac{1}{5}b \quad ...(2)$$

$$-\frac{17}{5} = -\frac{7}{5}a - \frac{2}{5}b \quad ...(3)$$

من المعادلة (1) نجد: $a = -1$

نعوض في (2): $b = 12$

نعوض في (3):

$$-17 = -7a - 2b$$

$$-17 = -7(-1) - 2(12)$$

$$-17 = 7 - 24$$

$$-17 = -17$$

محقق

$$\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} + 12\,\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 12\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

G مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$$(A, 1)\ (B, 1)\ (C, -12)\ (G, -10)$$

7. $$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 12\,\overrightarrow{MC}\right\| = 10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

من الطلب السابق نجد أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$$(C, -12)\ (B, 1)\ (A, 1)$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 12\overrightarrow{MC} = -10\,\overrightarrow{MG}$$

$$\left\|-10\,\overrightarrow{MG}\right\| = 10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

$$10\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

نقسم على 10

$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

تمثل M معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها OA.

المسألة الثالثة:

نتأمل في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين: $B(1,2,-2)$ $(2,3,1)$

وليكن d المستقيم الذي يعطى:

$$d:\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

1. عين التمثيل الوسيطي لـ Δ الذي يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{u}(1,2,-2)$ شعاع توجيه له.
2. عين إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين $(d),(\Delta)$
3. أثبت أن $\vec{n}(2,-2,-1)$ ناظم المستوي P ثم اكتب معادلته.
4. اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطة B ويعامد المستقيم (Δ).
5. عين إحداثيات النقطة E المسقط القائم لـ B على المستقيم (Δ)
6. احسب بعد النقطة B عن المستقيم (Δ).
7. أثبت أن المستويين Q,P متعامدان.
8. احسب بعد النقطة $M(1,4,5)$ عن المستويين Q,P
9. استنتج بعد M عن الفصل المشترك للمستويين P,Q.

معادلة المستقيم Δ:

1. نقطة $A(2,3,1)$ شعاع $\vec{u}(1,2,-2)$

$$\Delta:\begin{cases} x = x_0 + a.s \\ y = y_0 + b.s \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + c.s \end{cases}$$

$$\Delta:\begin{cases} x = 2 + s \\ y = 3 + 2s \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

2. حتى نعين نقطة التقاطع يجب أن نبرهن أن أشعة التوجيه لـ d,Δ مستقلة خطياً.

$$\vec{v_d}(0,-1,2) \quad \vec{v_\Delta}(1,2,-2)$$

نلاحظ أن $\vec{v_\Delta},\vec{v_d}$ مستقلان خطياً.

بالحل المشترك نجد:

$1 = 2 + s$ ...(1)

$1 - t = 3 + 2s$ ...(2)

$3 + 2t = 1 - 2s$ ...(3)

من (1) نجد: $s = -1$ نعوض في (3): $3 + t = 1 + 2$

$$\Rightarrow t = 3 - 3 = 0$$

نعوض في (2) للتأكد $1 = 1$ محققة.

نعوض $t = 0$ في d أو نعوض $s = -1$ في Δ

$$\Rightarrow x = 1, y = -1, z = 3 \Rightarrow C(1,1,3)$$

هي نقطة التقاطع بين d,Δ

> تكرورية: عندما يطلب كتابة معادلة المستوي المعين بالمستقيمين:
>
> - نقطة تنتمي إلى المستوي: هي نقطة التقاطع بين المستقيمين.
> - ناظم: نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ فيكون:
>
> $$\vec{n}.\vec{u}_1 = 0 \quad , \quad \vec{n}.\vec{u}_2 = 0$$
>
> فنوجد a,b,c

3. معادلة المستوي P:

نقطة التقاطع بين المستقيمين $C(1,1,3)$

$$\vec{n}(a,b,c)$$

$\vec{n}.\vec{v}_d = 0 \Rightarrow -b + 2c = 0$ ...(1)

$\vec{n}.\vec{v}_\Delta = 0 \Rightarrow a + 2b - 2c = 0$ ...(2)

نفرض $c = -1$ ونعوض في (1) $\Leftarrow b = -2$

نعوض في (2)

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow \vec{n}(2, -2, -1)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$2(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 3) = 0$$

$$P:\ 2x - 2y - z + 3 = 0$$

4 معادلة المستوي Q

$$B(1, 2, -2)$$

$$\vec{n}_Q = \vec{v}_\Delta \Rightarrow \vec{n}_Q(1, 2, -2)$$

$$1(x - 1) + 2(y - 2) - 2(z + 2) = 0$$

$$Q: x + 2y - 2z - 9 = 0$$

5 نفرض $E(x, y, z)$ نعوض إحداثيات Δ في معادلة المستوي Q

$$2 + s + 2(3 + 2s) - 2(1 - 2s) - 9 = 0$$

$$2 + s + 6 + 4s - 2 + 4s - 9 = 0$$

$$9s = 3 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

نعوض $s = \frac{1}{3}$ في Δ حتى نحصل على $E(x, y, z)$

$$x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$y = 3 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

$$z = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$E\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

6 تكافئ بعد B عن المستقيم Δ

$$BE = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{25}{9} + \frac{49}{9}} = \sqrt{\frac{90}{9}} = \sqrt{10}$$

7 $\vec{n}_Q(1, 2, -2)\ \vec{n}_P(2, -2, -1)$

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q = 2 - 4 + 2 = 0$$

Q, P متعامدان

8 $M(1, 4, 5)$

$$dist(M, P) = \frac{|2 - 8 - 5 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{8}{3}$$

$$dist(M, Q) = \frac{|1 + 8 - 10 - 9|}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}$$

$$\left(dist(M, d')\right)^2 = \left(dist(M, P)\right)^2 + \left(dist(M, Q)\right)^2$$

$$\left(dist(M, d')\right)^2 = \frac{64}{9} + \frac{100}{9} = \frac{164}{9}$$

$$dist(M, d') = \sqrt{\frac{164}{9}} = \frac{2\sqrt{41}}{3}$$

المسألة الرابعة:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه

$AB = 4\ , AD = 2, AE = 3$

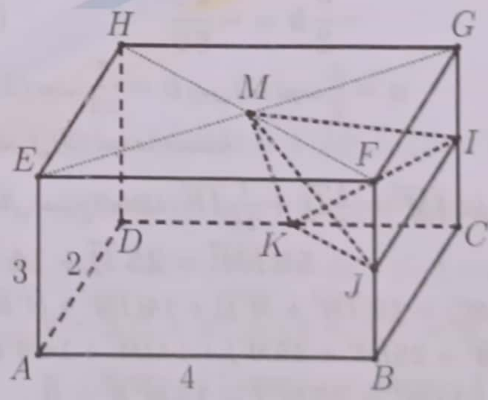
والنقاط K, J, I هي منتصفات الأضلاع $[CD], [BF], [CG]$ بالترتيب.

M مركز الوجه $EFGH$

نفرض $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ معلم متجانس

والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات M, K, J, I
2. احسب $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ ثم استنتج طبيعة المثلث IJK.
3. احسب طول IJ ، IK ثم احسب مساحة المثلث IJK.
4. أثبت أن $\vec{n}(3, 0, -4)$ ناظم للمستوي IJK ثم اكتب معادلته.
5. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ العمودي على المستوي IJK والمار من النقطة M.
6. استنتج M' المسقط القائم للنقطة M على المستقيم Δ أو على المستوي IJK
7. احسب بعد M عن المستوي IJK
8. احسب حجم رباعي الوجوه $MIJK$
9. أثبت أن M' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(K, \gamma)\ (J, \beta)\ (I, \alpha)$ حيث γ, β, α أعداد حقيقية يطلب تعيينها.



1. $A(0,0,0)\ B(4,0,0)$
$C(4,2,0)\ D(0,2,0)$

$E(0,0,3)\ F(4,0,3)\ \ G(4,2,3)\ H(0,2,3)$

$I\left(4, 2, \frac{3}{2}\right)\ \ J\left(4, 0, \frac{3}{2}\right)\ \ K(2,2,0)$

M هي منتصف $[EG]$ أو منتصف $[FH]$

$M(2,1,3)$

2. $\overrightarrow{IJ}(0,-2,0) \qquad \overrightarrow{IK}\left(-2, 0, -\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = 0$

$\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IJ}$ متعامدان

مثلث قائم في I

3. $IJ = \sqrt{4} = 2$

$$IK = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$S_{IJK} = \frac{IK.IJ}{2} = \frac{5}{2}$$

4. من الطلب السابق $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IJ}$ مستقلان خطياً

K, J, I تعين مستوياً

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$

$\vec{n}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow -2a - \frac{3}{2}c = 0$

$\Rightarrow -4a - 3c = 0$

نفرض $a = 3 \Leftarrow -4a + 12 = 0 \Leftarrow c = -4$

$\vec{n}(3, 0, -3)$

معادلة المستوي:

الرياضيات - الجزء الثاني

نقطة تنتمي إليه: $K(2,2,0)$

شعاع ناظم: $\vec{n}(3,0,-4)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$3(x-2)+0-4(z-0)=0$$

$$3x-4z-6=0$$

5 معادلة المستقيم Δ:

نقطة تنتمي إليه: $M(2,1,3)$

شعاع موجه: بما أن المستقيم عامودي على المستوي فإن $\vec{n}=\vec{v}_D(3,0,-4)$

$$(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$$

$$(\Delta):\begin{cases}x=2+3t\\ y=1\qquad ;t\in\mathbb{R}\\ z=3-4t\end{cases}$$

6 نفرض $M'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة M على المستوي IJK أو على المستقيم Δ

نعوض إحداثيات Δ في معادلة المستوي IJK:

$$3x-4z-6=0$$

$$3(2_{3t})-4(3-4t)-6=0$$

$$25t=12$$

$$t=\frac{12}{25}$$

نعوض t في Δ:

$$x=2+\frac{36}{25}=\frac{86}{25}$$

$$y=1$$

$$z=3-\frac{48}{25}=\frac{27}{25}$$

$$M'\left(\frac{86}{25},1,\frac{27}{25}\right)$$

7

$$dist(M,(IJK))=\frac{|6+0-12-6|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12}{5}$$

8

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{12}{5}=2$$

M' نقطة من المستوي IJK وبالتالي فإن النقاط M',K,J,I تقع في مستوٍ واحد.

وبما أن الشعاعين $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IJ}$ غير مرتبطين خطياً فإنه يوجد عددين حقيقيين b , a يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{IM'}=a\,\overrightarrow{IJ}+b\,\overrightarrow{IK}$$

$$\left(-\frac{14}{25},-1,-\frac{21}{50}\right)=a(0,-2,0)+b\left(-2,0,-\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{14}{25},-1,-\frac{21}{50}\right)=(0,-2a,0)+\left(-2b,0,-\frac{3}{2}b\right)$$

$$\left(-\frac{14}{25},-1,-\frac{21}{50}\right)=\left(-2b,-2a,-\frac{3}{2}b\right)$$

بالمطابقة نجد

$$-2b=-\frac{14}{25}\qquad(1)$$

$$-2a=-1\qquad(2)$$

$$-\frac{3}{2}b=-\frac{21}{50}\qquad(3)$$

من (1) نجد: $b=\frac{7}{25}$ ومن (2) نجد: $a=\frac{1}{2}$

نعوض في (3) نجدها محققة

وبالتالي تصبح العلاقة: $\overrightarrow{IM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}+\frac{7}{25}\overrightarrow{IK}$ تكافئ

$$50\,\overrightarrow{IM'}=25\,\overrightarrow{IJ}+14\,\overrightarrow{IK}$$

$$50(\overrightarrow{IM'})=25(\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{M'J})+14(\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{M'K})$$

$$50\overrightarrow{IM'}=25\overrightarrow{IM'}+25\overrightarrow{M'J}+14\overrightarrow{IM'}+14\overrightarrow{M'K}$$

$$11\overrightarrow{IM'}-25\overrightarrow{M'J}-14\overrightarrow{M'K}=\vec{0}$$

$$11\overrightarrow{IM'}+25\overrightarrow{JM'}+14\overrightarrow{KM'}=\vec{0}$$

بما أن $11+25+14 \neq 0$ فإن M' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,11)$ $(J,25)$ $(K,14)$

تكرورية امتحانية:

شكل ديكارتي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=A$$

- $A>0$ تمثل معادلة كرة مركزها (x_0,y_0,z_0) و $R=\sqrt{A}$
- $A=0$ تمثل إحداثيات نقطة (x_0,y_0,z_0)
- $A<0$ تمثل مجموعة خالية ϕ

تدريب:

عين مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

1. $x^2+y^2+z^2-2x+6y-z=0$

إتمام إلى مربع كامل.

$$x^2-2x+y^2+6y+z^2-2=0$$

$$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2-2=0$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

$12>0$ تمثل معادلة كرة مركزها $(1,-3,0)$

$$R=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

2. $x^2+y^2+z^2-10+2z+26=0$

$$x^2-10x+y^2+z^2+2z+26=0$$

$$x^2-10x+25-25+y^2+z^2+2z+1-1+26=0$$

$$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$$

$A=0$ تمثل إحداثيات نقطة $(5,0,-1)$

تكرورية أهم من حياتي:

في الإتمام إلى مربع كامل يجب أن يكون أمثال المتحول من الدرجة الثانية واحد حصراً.

3. $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

$$x^2+x+y^2+y+z^2+z=0$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

تمثل كرة مركزها $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ و $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

$$x^2-4x+y^2+z+5=0$$

$$x^2-4x+4-4+y^2+z^2+5=0$$

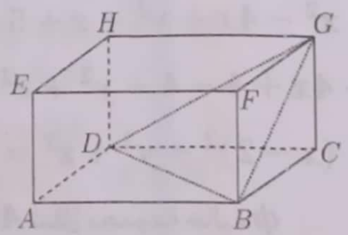
$$(x-2)^2+y^2+z^2=-1$$

$A=-1<0$ تمثل مجموعة خالية ϕ

المسألة الخامسة:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $AB = BC = 2\ , AE = 1$ ونتأمل معلماً متجانساً $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\ , \overrightarrow{AE}\right)$

1. أوجد إحداثيات النقاط A, B, C, D.
2. اكتب معادلة المستوي GDB.
3. اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (EC).
4. عين إحداثيات M نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي GDB.
5. أثبت أن M مركز ثقل المثلث GDB
6. لتكن I منتصف $[EM]$ عين $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ لتكون I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(E,\alpha)\ (B,\beta)\ (D,\gamma)\ (G,\delta)$



1. $A(0,0,0)\ \ B(2,0,0)$
$C(2,2,0)\ \ D(0,2,0)$

$E(0,0,1)\ \ F(2,0,1)\ \ G(2,2,1)\ \ H(0,2,1)$

2. نشكل شعاعين من منطلق واحد

$\overrightarrow{GD}(-2,0,-1)\ \ \overrightarrow{GB}(0,-2,-1)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GD}$ مستقلان خطياً.

$\Leftarrow B, D, G$ تعين مستوياً.

معادلة المستوي (GDB)

$\vec{n}(a,b,c)\qquad G(2,2,1)$

$\vec{n}.\overrightarrow{GD} = 0 \Rightarrow -2a - c = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{GB} = 0 \Rightarrow -2b - c = 0$

نفرض $c = -2$

$-2a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

$-2b + 2 = 0 \Rightarrow b = 1$

$\vec{n}(1,1,-2)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$x - 2 + y - 2 - 2z + 2 = 0$

$x + y - 2z - 2 = 0$

3. معادلة المستقيم (EC):

$\overrightarrow{EC}\,(2,2,-1)\qquad C(2,2,0)$

$$(EC): \begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + c.t \end{cases}$$

$$(EC): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + 2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

4. صيغة ثانية للسؤال:

ادرس الوضع النسبي بين (EC) والمستوي GDB.

نعوض إحداثيات المستقيم (EC) في معادلة المستوي GBD

$x + y - 2z - 2 = 0$

$2 + 2t + 2 + 2t - 2(-t) - 2 = 0$

$2t + 2t + 2t = -2$

$\Rightarrow 6t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

نعوض t في معادلة المستقيم (EC)

$x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

المسألة السادسة:

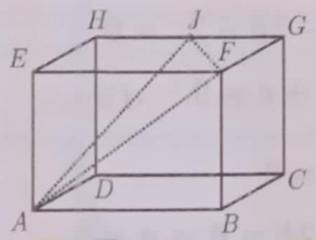
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه

$AE = AD = 2, AB = 4$ ولتكن J منتصف

$[HG]$ ونتأمل معلماً متجانساً

$\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$

1. أوجد إحداثيات النقاط J, C, F, A
2. احسب المسافة بين $[JF], [AJ]$
3. أثبت أن المثلث AFJ مثلث قائم في J واحسب مساحته.
4. أثبت أن $\vec{n}(1, 1, -2)$ ناظم على المستوي AFJ ثم اكتب معادلته.
5. احسب بعد C عن AFJ.
6. استنتج حجم رباعي الوجوه $AFJC$.



1. $A(0,0,0)$ $B(4,0,0)$ $C(4,2,0)$

$D(0,2,0)$ $E(0,0,2)$ $F(4,0,2)$

$G(4,2,2)$ $H(0,2,2)$ $J(2,2,2)$

2. $\overrightarrow{JF}(2,-2,0)$

$$JF = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AJ}(2,2,2)$$

$$AJ = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

3. لإثبات أن المثلث AFJ قائم في J

$$y = \frac{4}{3}$$

$$z = \frac{1}{3}$$

$$M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

5.

$$x_M = \frac{x_G + x_B + x_D}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y_M = \frac{y_G + y_B + y_D}{3} = \frac{2+0+2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$z_M = \frac{z_G + z_B + z_D}{3} = \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

M مركز ثقل المثلث GDB.

6. I منتصف $[EM]$ $(M,3)$ $(E,3)$

M مركز ثقل المثلث DBG

$(M,3)$ مركز أبعاد متناسبة لـ DBG

$(D,1)\ (B,1)\ (G,1)\quad (M,3)$

حسب الخاصة التجميعية

I مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(D,1)\ (B,1)\ (G,1)\ (E,3)$

$$1+1+1+3 \neq 0$$

$$(I,6)$$

طريقة أولى: حسب عكس فيثاغورث

طريقة ثانية:

$$\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JF}=0$$

$$(-2,-2,-2).(2,-2,0)=0$$

$$-4+4+0=0$$

$$\overrightarrow{JA}\perp\overrightarrow{JF}$$

⇐المثلث قائم في J

$$S_{AFJ}=\frac{JF.AJ}{2}=\frac{2\sqrt{2}.2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$$

4 نلاحظ أن $\overrightarrow{JA}\,,\overrightarrow{JF}$ مستقلان خطياً.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{JA}=0$$

$$-2a-2b-2c=0$$

$$a+b+c=0 \quad ...(1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{JF}=0$$

$$2a-2b=0\Rightarrow a=b$$

$$c=-2\,,b=1\,,a=1\Rightarrow\vec{n}(1,1,-2)$$

معادلة المستوي AFJ

$A(0,0,0)$ $\quad$ $\vec{n}(1,1,-2)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$x+y-2z=0$$

5 $dist(C,(AFJ))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\frac{|4+2|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

6 $V=\frac{1}{3}S_{AFJ}.h=\frac{1}{3}2\sqrt{6}.\sqrt{6}=4$

المسألة السابعة:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

$A(2,4,3)$ $B(4,-2,3)$ $C(1,-1,1)$

$D(3,3,-3)$ $E(0,2,1)$ $F(1,2,3)$

$N(2,2,-2)$ $H(-2,-2,-2)$

والمستوي $Q:3x-3y+2z+4=0$

1 أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة ثم اكتب معادلة المستوي (ABC).

2 اكتب معادلة المستوي P المار من N و D والعمودي على المستوي (ABC)

3 احسب بعد F عن Δ الفصل المشترك للمستويين $(ABC),P$

4 جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من D وعمودي على المستوي (ABC).

5 جد D' مسقط D على المستوي (ABC).

6 أثبت أن المستويات $Q,P,(ABC)$ تتقاطع في النقطة E.

7 أثبت أن المستوي (ABC) يقطع الكرة التي مركزها D وتمر من H ثم جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن التقاطع.

8 أعط معادلة للمجموعة ϵ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ ما طبيعة ϵ؟

1 $\overrightarrow{AB}(2,-6,0)$ $\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$

$$\frac{2}{-1}\neq\frac{-6}{-5}\neq\frac{0}{-2}$$

المركبات غير متناسبة

$\Leftarrow A, B, C$ ليست على استقامة واحدة

معادلة المستوي (ABC)

$\vec{n}(a, b, c)$ $\quad A(2, 4, 3)$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2a - 6b = 0 \Rightarrow a - 3b = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow -a - 5b - 2c = 0$

$b = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow -3 - 5 = 2c$

$\Rightarrow c = -4$

$\vec{n}(3, 1, -4)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$3(x - 2) + 1(y - 4) - 4(z - 3) = 0$$

$$3x - 6 + y - 4 - 4z + 12 = 0$$

$$(ABC):\ 3x + y - 4z + 2 = 0$$

② معادلة المستوي P:

$\vec{n}_P(a, b, c)$ $\quad D$ أو N

$\vec{n}_P.\vec{n}_{ABC} = 0 \Rightarrow 3a + b - 4c = 0$

$\overrightarrow{DN}(-1, -1, 1)$

$\vec{n}_P.\overrightarrow{DN} = 0$

$$-a - b + c = 0$$

نفرض $c = 1$

$3a + b - 4 = 0$

$-a - b + 1 = 0$

$2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$\vec{n}_P\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ $\quad \vec{n}_Q(3, -1, 2)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$3(x - 2) -- (y - 2) + 2(z + 2) = 0$

$3x - y + 2z = 0$

$P: 3x - y + 2z = 0$

تكرورية هامة جداً:

عندما يطلب حساب بعد نقطة عن فصل مشترك Q, P يوجد طريقتين.

■ الطريقة الأولى:

نوجد معادلة للمستقيم الفصل المشترك Δ ثم نوجد بعد نقطة عن مستقيم (مسقط قائم)

■ الطريقة الثانية: نحسب بعد النقطة عن المستوي P.ثم نحسب بعد نفس النقطة عن المستوي Q ثم نطبق:

$$\boxed{dist(A, d) = \sqrt{\left(dist(A, P)\right)^2 + \left(dist(A, Q)\right)^2}}$$

③

$$dist(F, P) = \frac{|3 - 2 + 6|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

④ معادلة المستقيم Δ:

$\vec{n}_{ABC} = \vec{v}(3, 1, -4)$ $\quad D(3, 3, -3)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 3 + y \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

⑤ نفرض $D'(x, y, z)$ المسقط القائم لـ D على المستوي ABC

نعوض احداثيات Δ في معادلة المستوي

$3(3+3t)+(3+t)-4(-3-4t)+2 = 0$

$26t=-26 \Rightarrow t=-1$

نعوض إحداثيات D:

$x=0\,, y=2\,, z=1 \Rightarrow D'(0,2,1)$

6

$3x+y-4z=-2$ ...(1)

$3x-y+2z=0$ ...(2)

$3x-3y+2z-4$ ...(3)

نضرب المعادلة الأولى بـ -1 ونجمعها مع الثانية والثالثة

$3x+y-4z=-2$

$-2y+6z=2$

$-4y+6z=-2$

نضرب المعادلة الثانية بـ -2 ونجمعها مع الثالثة

$3x+y-4z=-2$

$-2y+6z=2$

$-6z=-6$

$\Rightarrow z=1 \Rightarrow -2y+6=2 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow 3x+2-4=-2 \Rightarrow x=0$

$(0,2,1)$

نصف قطر الكرة التي مركزها $D(3,3,-3)$ وتمر من $H(-2,-2,2)$ هو:

$R=DH$

$=\sqrt{(-2-3)^2+(-2-3)^2+(2+3)^2}$

$=\sqrt{25+25+25}=\sqrt{75}$

بعد مركز الكرة D عن المستوي (ABC) هو $\sqrt{26}$

وبالتالي نصف قطر دائرة المقطع هو: $r^2=75-26=49 \Rightarrow r=7$

بفرض $M(x,y,z)$:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=3$

$\Rightarrow (x-2,y-4,z-3).(x-4,y+2,z-3)=3$

$x^2-6x+8+y^2-2y-8+(z-3)^2=3$

$\Rightarrow (x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)+(z-3)^2=3+19+1$

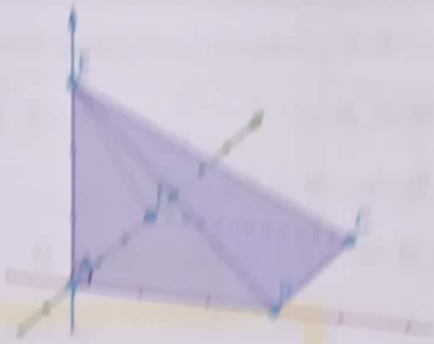
$\Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=13$

مجموعة النقاط ϵ هي كرة مركزها $\Omega(3,1,3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{13}$

المسألة الثامنة:

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E قاعدته مربع طول ضلعه 3. $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA=3$ نختار معلم متجانس $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

1. عين إحداثيات E,D,C,B,A
2. جد معادلة المستوي (EBC)
3. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).
4. استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي السقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC)
5. احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$



1 $A(0,0,0)\ B(3,0,0)$

$C(3,3,0)\ D(0,3,0)\ E(0,0,3)$

2 معادلة المستوي EBC

$\overrightarrow{EB}(3,0,3) \quad \overrightarrow{EC}(3,3,-3)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}$ مستقلان خطياً

معادلة المستوي:

$B, C, E \qquad \vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0 \Rightarrow 3a - 3c = 0 \Rightarrow a = c$

$\vec{n}.\overrightarrow{EC} = 0 \Rightarrow 3a + 3b - 3c = 0 \Rightarrow b = 0$

$a = 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow \vec{n}(1,0,1)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$1(x - 3) + 0 + 1(z - 0) = 0$$

$$\boxed{x + z - 3 = 0}$$

3 معادلة المستقيم

$A(0,0,0)$ شعاع توجيه الناظم

$\vec{v} = \vec{n}(1,0,1)$

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

4 $H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

نفرض $H(x,y,z)$ المسقط القائم لـ E على المستوي (EBC).

نعوض إحداثيات d في معادلة المستوي (EBC)

$t + t = 3 \Rightarrow 2t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 0, z = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

5 $V = \frac{1}{3} S_{EBC}.h$

EBC مثلث قائم في B

$S_{EBC} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{BC}(0,3,0)$

$\overrightarrow{BE}(-3,0,3)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = 0$

$0 + 0 + 0 = 0$

المثلث قائم في B

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9} = 3$

$\|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$dist(A,(EBC)) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$V = \frac{1}{3} . \frac{9\sqrt{2}}{2} . \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$

تمرين هام جداً:

المستقيمان L, L' معرفان وسيطياً وفق:

$$L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

$$L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z=-1+2s \end{cases}$$

1. أثبت أن L, L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيينها.
2. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين L', L

1. $\vec{v}_L(0,-1,-2)\ \ \vec{v}_{L'}(-5,-2,2)$

نلاحظ أن $\vec{v}_L, \vec{v}_{L'}$ مستقلان خطياً فالمستقيمان إما متخالفان أو متقاطعان

بالحل المشترك:

$$-1=4-5s$$
$$1-t=3-2s$$
$$1-2t=-1+2s$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$-5s=-5 \Rightarrow s=1$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$1-t=3-2 \Rightarrow t=0$$

نعوض في الثالثة للتأكد

$$1-2(0)=3-2 \Rightarrow 1=1$$

محققة فالمستقيمان متقاطعان

$$\Rightarrow x=-1\ , y=1, z=1$$

نقطة التقاطع:

$$(-1,1,1)$$

2. معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L, L'

$$\vec{n}(a,b,c) \qquad (-1,1,1)$$

$$\vec{n}.\vec{v}_L=0 \Rightarrow -b-2c=0$$

$$\vec{n}.\vec{v}_{L'}=0 \Rightarrow -5a-2b+2c=0$$

نختار قيمة c:

$$\Rightarrow \boxed{c=1}$$

نعوض في المعادلة الأولى:

$$\Rightarrow -b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

نعوض في المعادل الثالثة:

$$\Rightarrow -5a+4+2=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{6}{5}}$$

$$\vec{n}\left(\frac{6}{5},-2,1\right)$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\frac{6}{5}(x+1)-2(y-1)+1(z-1)=0$$

$$\frac{6}{5}x+\frac{6}{5}-2y+2+z-1=0$$

$$\boxed{\frac{6}{5}x-2y+z+\frac{11}{5}=0}$$

في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط التالية:

$A(1, 0, -1)$ $B(2, 2, 3)$
$C(3, 1, -2)$ $D(-4, 2, 1)$

1. بين أن C, B, A ليست على استقامة واحدة (تعين مستوي)
2. اكتب معادلة المستوي (ABC).
3. أثبت أن (ABC) مثلث قائم واحسب مساحته.
4. عين بعد D عن المستوي (ABC).
5. احسب حجم الرباعي $DABC$.
6. عين W مركز الكرة التي معادلتها
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$$
وعين R.
7. هل (ABC) يمس الكرة؟
8. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من W ويعامد (ABC).
9. ليكن المستوي Q الذي معادلته:
$$Q: x + y - z - 1 = 0$$
هل $Q, (ABC)$ متعامدان؟
10. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ' الفصل المشترك لـ $(ABC), Q$
11. ادرس الوضع النسبي بين Δ', Δ.
12. اكتب معادلة المستوي المحوري P للقطعة $[MN]$ حيث $M(1, 0, 0)$ $N(-1, 0, 2)$
13. ادرس الوضع النسبي بين $(ABC), P, Q$
14. عين إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC.
15. عين إحداثيات G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 3)$ $(B, -1)$ $(C, 1)$
16. عين مجموعة النقاط M :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$$

---

1. يجب أن نبرهن أن $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً.

$\overrightarrow{AB}(1, 2, 4)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}(2, 1, -1)$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{4}{-1}$$

المركبات غير متناسبة

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً $\Leftarrow$ C, B, A ليست على استقامة واحدة.

2. معادلة المستوي (ABC)

نقطة تنتمي إليه (C, B, A) $\quad$ ناظم $\vec{n}(a, b, c)$

$A(1, 0, -1)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (a, b\ c)(1, 2, 4) = 0$$
$$\Rightarrow a + 2b + 4c = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(2, 1, -1) = 0$$
$$\Rightarrow 2a + b - c = 0$$

نختار قيمة لـ c:

$\boxed{c = 1}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a + 2b + 4 = 0 \\ 2a + b - 1 = 0 \end{array}$$

نضرب المعادلة الثانية بـ -2 ونجمعها مع الأولى

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a + 2b + 4 = 0 \\ -4a - 2b + 2 = 0 \\ \hline -3a + 6 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2}$$

نعوض قيمة a في المعادلة الثانية:

$$\Rightarrow 2 + 2b + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

$\Rightarrow \vec{n}(2,-3,1)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$

$$2x-2-3y+z+1=0$$

$$\boxed{(ABC):\ 2x-3y+z-1=0}$$

3 طريقة (1): حسب عكس فيثاغورث

$$(BC)^2=(AC)^2+(AB)^2$$

طريقة (2): يجب أن نبرهن أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$$(1,2,4).(2,1,-1)=0\Rightarrow 2+2-4=0\Rightarrow 0=0$$

محققة بالتالي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ متعامدان في A

$\Leftarrow$ ABC مثلث قائم في A

$$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}$$

$$AB=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$$

$$AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{7\times 3}\times\sqrt{3\times 2}}{2}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$$

4 بعد D عن المستوي:

$D(-4,2,1)\quad,(ABC):2x-3y+z-1=0$

$$dist(D,(ABC))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

5

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=7$$

6

$$x^2+y^2+z^2-6z+2y-15=0$$

إتمام إلى مربع كامل:

$$x^2+y^2+2y+z^2-6z-15=0$$

$$x^2+y^2+2y+1-1+z^2-6z+9-9-15=0$$

$$x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$$

تمثل كرة مركزها $W(0,-1,3)$ ونصف قطرها $R=5$

7

تكرورية:

لبرهان أن المستوي يمس الكرة يجب أن نبرهن:

$$\boxed{dist(W,(ABC))=R}$$

$$dist(W,(ABC))=\frac{|0+3+3-1|}{\sqrt{14}}=\frac{5}{\sqrt{14}}\neq 5$$

8 معادلة المستقيم Δ

نقطة تنتمي إليه: $W(0,-1,3)$

شعاع توجيه، وبما أنه يعامد المستوي فإن $\vec{n}=\vec{v}(2,-3,1)$

$$\Delta:\begin{cases}x=x_0+a.t\\ y=y_0+b.t\quad;t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+c.t\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 3t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

9

$$Q: x + y - z - 1 = 0$$

$\vec{n}_Q(1, 1, -1)$, $\vec{n}_{ABC}(2, -3, 1)$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-3} \neq -\frac{1}{1}$$

غير مرتبطان خطياً.

$$\vec{n}_Q . \vec{n}_{ABC} = 0$$

$$2 - 3 - 1 \neq 0$$

$\vec{n}_{ABC}, \vec{n}_Q$ غير متعامدين وهما متقاطعان في فصل مشترك.

10 نحل جملة المعادلتين:

$$2x - 3y + z - 1 = 0$$
$$x + y - z - 1 = 0$$

نفرض $x = 0$

$$-3y + z - 1 = 0$$
$$y - z - 1 = 0$$

بالجمع

$$-2y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = -1, z = -2 \Rightarrow E(0, -1, -2)$$

نكرر العملية باختيار $y = 0$

$$2x + z - 1 = 0$$
$$x - z - 1 = 0$$

بالجمع

$$3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} - 1 = z \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$$

معادلة المستقيم Δ'

نقطة تنتمي إليه F, E

شعاع توجيه $\overrightarrow{EF}\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$

$$\Delta': \begin{cases} x = \frac{2}{3}s \\ y = -1 + s \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = -2 + \frac{5}{3}s \end{cases}$$

11 دراسة الوضع النسبي بين Δ', Δ

$\vec{v}_{\Delta}(2, -3, 1)$ $\vec{v}_{\Delta'}\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$

نلاحظ أن $\vec{v}_{\Delta}, \vec{v}_{\Delta'}$ مستقلان خطياً، فهما إما متقاطعان يقعان في مستو واحد أو متخالفـان لا يقعان في أي مستو واحد.

بالحل المشترك.

$$\frac{2}{3}s = 2t$$
$$-1 + s = -1 - 3t$$
$$-2 + \frac{5}{3}s = 3 + t$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$2s = t \Rightarrow s = 3t$$

نعوض في الثانية :

$$-1 + 3t = -1 - 3t \Rightarrow t = 0$$

نعوض في الثالثة

$-2 \neq 3$ غير محققة

المستقيمان متخالفان ولا يقعان في مستو واحد.

⑫ معادلة المستوي المحوري P:

نقطة تنتمي إليه: I منتصف $[MN]$

$I(0,0,1)$

شعاع توجيه $\overrightarrow{MN}(-2,0,2)$

$$-2x+2z-2=0$$

$$\boxed{P: x-z+1=0}$$

⑬

$$x+y-z-1=0$$
$$2x-3y+z-1=0$$
$$x-z+1=0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -2 ونجمعها مع الثانية

$$x+y-z-1=0$$
$$-5y+3z+1=0$$
$$x-z+1=0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -1 ونجمعها مع الثالثة

$$x+y-z-1=0$$
$$-5y+3z+1=0$$
$$-y+2=0$$

$$\boxed{y=2}$$

$$-10+3z+1=0 \Rightarrow \boxed{z=3}$$

$$\Rightarrow x+2-3-1=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

المستويات تتقاطع في نقطة واحدة $(2,2,3)$

تكرورية:

إحداثيات مركز ثقل المثلث :

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$$
$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$
$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

⑭ G مركز ثقل المثلث ABC

$$A(1,0,-1)\ B(2,2,3)\ C(3,1,-2)$$

$$x_G=2\ , y_G=1\ , z_G=0 \quad G(2,1,0)$$

⑮

تكرورية:

لتعيين احداثيات G' مركز الأبعاد المتناسبة

$(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)$

$$x'_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$y'_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$z'_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$x'_G=\frac{3-2+3}{3}=\frac{4}{3}$$
$$y'_G=\frac{0-2+1}{3}=-\frac{1}{3}$$
$$z'_G=\frac{-3-3-2}{3}=-\frac{8}{3}$$
$$\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{8}{3}\right)$$

تكرورية:

عندما يكون H مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)$ فإن

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MH}$$
$$;\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

⑯ H مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A,1)\ (B,1)\ (C,1)$

$$\|3\overrightarrow{MA}\|=6 \Rightarrow \|\overrightarrow{MH}\|=2$$

تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{2}$


M A T H   O N L I N E
مجموعات واقع و ONLINE.
#لاتقلقوا
AHMAD TKRORY
MATHEMATICS TEACHER
Ahmad Tkrory
MATHMATICS TEACHER
الـ 600
مسألة وقت
افتتاح التسجيل لدورات الرياضيات
2024 - 2025
M A T H   O N L I N E
احمد تكروري رياضيات
@Ahmad_Tkrory
احـمـد تـكـروري
حلب - الفرقان - مفرق السكن الجامعي
CONTACT US ON MOBILE
099 444 60 57