حل ورقة عمل بحث النهايات والاستمرار

أولاً : التمرين الأول :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4-x}-2}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}-2}{\sqrt{x+1}-1} \times \frac{\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}+2} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{4-x-4}{x+1-1} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{4-x}+2}$$

$$= \frac{-x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{4-x}+2)} = \frac{-(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{4-x}+2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \sqrt{1-\cos^2 x}}{x} = \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{1-\cos^2 x}}{x} = \frac{x^2 - \sqrt{\sin^2 x}}{x} = \frac{x^2 - |\sin x|}{x}$$

$$= x - \frac{|\sin x|}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - \frac{\sin x}{x} = -1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^3 x} = \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)} = \frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

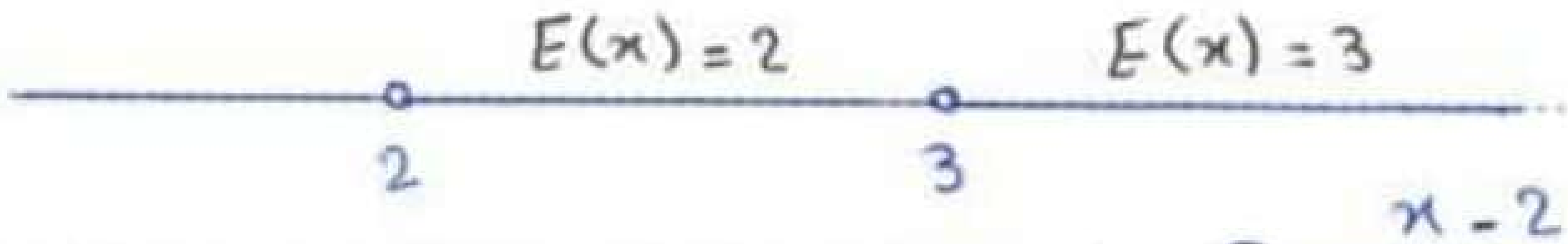
$$= \frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x+\cos^2 x)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2}{3}$$

4] $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\sqrt{x^2-5} - \dfrac{2x^2}{x-1} = +\infty - \infty$

$f(x) = 3\sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x^2}\right)} - \dfrac{2x^2}{x-1} = 3|x|\sqrt{1-\frac{5}{x^2}} - x\dfrac{2x}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[3\sqrt{1-\frac{5}{x^2}} - \dfrac{2x}{x-1}\right] = +\infty(3-2) = +\infty$

التمرين الثاني :



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6} & ; x < 3 \\[2ex] \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} & ; x > 3 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \dfrac{1}{-0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \dfrac{\cancel{x-3}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = \dfrac{1}{1} = 1$

بما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)$ اذاً ليس للتابع نهاية عند 3

التمرين الثالث :

1] $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = f(-2) = \dfrac{-3}{3} = -1$

2] $f(f(x)) = \dfrac{2f(x)+1}{1-f(x)} = \dfrac{2\dfrac{2x+1}{1-x}+1}{1-\dfrac{2x+1}{1-x}} = \dfrac{\dfrac{4x+2+1-x}{\cancel{1-x}}}{\dfrac{1-x-2x-1}{\cancel{1-x}}}$

$$= \frac{3x+3}{-3x} = \frac{x+1}{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{-x} = -1$$

التمرين الرابع :

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2 \quad \text{و} \quad f(1) = 2$$

بما أن $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$ إذاً f مستمر عند 1

التمرين الخامس : نفرض أن $f(x) = x^3+x+1$ فتصبح المعادلة $f(x)=0$

f معرف ومستمر واشتقاقي على R : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = 3x^2+1 > 0$$

أصبح لدينا f مستمر ومتزايد تماماً على R فإن $f(R)=R$

وبما أن $0 \in R$ إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in R$

وبالتالي فإن للمعادلة $x^3+x+1=0$ حل وحيد $\alpha \in R$

$f(-1) = -1$, $f(0) = 1$

بما أن $f(-1) \cdot f(0) < 0$ إذاً $\alpha \in]-1,0[$

التمرين السادس :

نفرض $t = \frac{1}{x}$ ومنه $x = \frac{1}{t}$ ، لما $x \to +\infty$ فإن $t \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos t} = \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{\frac{1}{t}(1-\cos t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\frac{1}{t}(2\sin^2 \frac{1}{2}t)} = \lim_{t \to 0} \frac{2\sin \frac{1}{2}t \cdot \cos \frac{1}{2}t}{2(\frac{1}{t}) \sin^2 \frac{1}{2}t}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cos \frac{1}{2}t}{\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t}} = 2 \quad ; \quad \lim_{t \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t} = 1 \quad \text{حيث}$$

التمرين السابع :

1) $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{3}{+0} = +\infty$

2) $f(x) > 10^4 \Rightarrow \frac{2x-1}{(x-2)^2} > 10^4$

$\Rightarrow 2x-1 > 10^4 (x-2)^2 \Rightarrow 2(x-2+2)-1 > 10^4 (x-2)^2$

$\Rightarrow 2(x-2)+3 > 10^4 (x-2)^2 \qquad \boxed{t = x-2}$

$\Rightarrow 2t+3 > 10^4 t^2 \Rightarrow 10^4 t^2 - 2t - 3 < 0$

$10^4 t^2 - 2t - 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4(10)^4(-3) = 4 + 120000 = 120004$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} \simeq 346$

$t_1 = \frac{2-346}{2(10)^4} = \frac{-344}{2(10)^4} = -172 \times 10^{-4} = -0.017$

$t_2 = \frac{2+346}{2(10)^4} = \frac{348}{2(10)^4} = 174 \times 10^{-4} = 0.017$

ومنه $-0.017 < t < 0.017$

$\Rightarrow |t| < 0.017$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0.017}$

التمرين الثامن : $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad x \in R$

$$2x-1 \leq 2x+\sin x \leq 2x+1$$

$x \to +\infty$ ومنه $x-2>0$

$$\frac{2x-1}{x-2} \leq \frac{2x+\sin x}{x-2} \leq \frac{2x+1}{x-2}$$

$$\frac{2x-1}{x-2} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2$$

حسب مبرهنة الحصر (1) نجد :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

التمرين التاسع

بما أن f مستمرة في R فهي مستمرة عند -1 و عند 0

- $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = f(-1)$

$A+B = 1+2B \Rightarrow A = 1+B \quad ...(1)$

- $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0)$

$2B = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} 2A\frac{\sin 2x}{2x} + B \Rightarrow 2B = 2A+B \Rightarrow B = 2A \ ...(2)$

حيث $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$

بتعويض (2) في (1) نجد : $A = 1+2A$ ومنه $\boxed{A=-1}$ بتعويض في (2)

نجد : $\boxed{B=-2}$

ثانياً: المسألة الأولى:

1. نفرض $t = x^2 - 3x + 5$

لما $x \to \mp\infty$ عندئذ $t \to +\infty$ ومنه

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$$

2. a. $x^2 - 3x + 5$

$$= x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 5$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{20}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

b. نتحقق أن تكون معادلة المقارب المائل من الشكل $y = \left| x - \frac{3}{2} \right|$

عند $+\infty$ يكون $\Delta_1 : y = x - \frac{3}{2}$

عند $-\infty$ يكون $\Delta_2 : y = -x + \frac{3}{2}$

$$f(x) - y_{\Delta_1} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} - \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{\cancel{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} + \frac{11}{4} - \cancel{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_{\Delta_1}\right) = \frac{\frac{11}{4}}{+\infty} = 0$$

إذاً Δ_1 مقارب مائل لـ (C) في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} - \left(-x + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} + \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} - \left(x - \frac{3}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - y_{\Delta_2}\right) = \frac{\frac{11}{4}}{+\infty} = 0$$

إذاً Δ_2 مقارب مائل لـ (C) في جوار $-\infty$

c. $$f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{\frac{11}{4}}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} + \left(x - \frac{3}{2}\right)} > 0$$

إذاً (C) فوق Δ_1 في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{\frac{11}{4}}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} - \left(x - \frac{3}{2}\right)} > 0$$

إذاً (C) فوق Δ_2 في جوار $-\infty$

المسألة الثانية :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$

2) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x} = \dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}} = -1 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$f(x) - ax = \sqrt{x^2-2x+3} - (-x) = \sqrt{x^2-2x+3} + x$

$= \dfrac{\cancel{x^2}-2x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+3}-x} = \dfrac{-2x+3}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}(-2+\frac{3}{x})}{\cancel{x}[-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1]} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

$\Rightarrow \boxed{b=1}$

b. معادلة المقارب المائل من الشكل $y = ax+b$ ومنه :

$\Delta : y = -x+1$ مقارب مائل لـ (C) في جوار $-\infty$

c.

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2-2x+3} - (-x+1) = \sqrt{x^2-2x+3} + (x-1)$

$= \dfrac{x^2-2x+3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}-(x-1)} = \dfrac{x^2-\cancel{2x}+3-x^2+\cancel{2x}-1}{\sqrt{x^2-2x+3}-(x-1)}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{x^2-2x+3}-(x-1)} > 0$

إذاً (C) فوق Δ في جوار $-\infty$

المسألة الثالثة :

1) $1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline & - & & + & & - \end{array}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & ; \quad I_1=[-1,1] \\ \sqrt{x^2-1} & \quad I_2=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\end{cases}$$

2) $f(x)-y_{\Delta_1}=\sqrt{x^2-1}-x=\dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}+x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta_1})=\dfrac{-1}{+\infty}=0$

إذاً $\Delta_1: y=x$ مقارب مائل لـ (C) في جوار $+\infty$

وبما أن $f(x)-y_{\Delta_1}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}<0$

إذاً (C) تحت Δ_1 في جوار $+\infty$

$f(x)-y_{\Delta_2}=\sqrt{x^2-1}+x=\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\Delta_2})=\dfrac{-1}{+\infty}=0$

إذاً $\Delta_2: y=-x$ مقارب مائل لـ (C) في جوار $-\infty$

وبما أن $f(x)-y_{\Delta_2}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}<0$

إذاً (C) تحت Δ_2 في جوار $-\infty$

$f(x)-y_{\Delta_1}=0 \Rightarrow \sqrt{|1-x^2|}-x=0 \Rightarrow \sqrt{|1-x^2|}=x$

نربع الطرفين بشرط $x>0$

$|1-x^2| = x^2$

إما $1-x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ والسالب مرفوض

ومنه نجد أن Δ_1 يقطع (C) في النقطة $N_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

أو $1-x^2 = -x^2$ مستحيلة الحل

$f(x) - y_{\Delta_2} = 0 \Rightarrow \sqrt{|1-x^2|} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{|1-x^2|} = -x$

نربع الطرفين بشرط $x < 0$

$|1-x^2| = x^2$

إما $1-x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ والموجب مرفوض

ومنه نجد أن Δ_2 يقطع (C) في النقطة $N_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

أو $1-x^2 = -x^2$ مستحيلة الحل

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta_1}$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ_1	$N_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	C تحت Δ_1 في جوار $+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$f(x)-y_{\Delta_2}$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ_2 في جوار $-\infty$	$N_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	C فوق Δ_2

3) f معرف ومستمر في المجالين I_1, I_2 والاشتقاق في كل من المجالات

$]-\infty,-1[\ ,\ ]-1,1[\ ,\ ]1,+\infty[$

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad f(-1) = f(1) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & ; x \in\ ]-1,1[\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & ; x \in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[\end{cases}$$

في المجال I_1 : $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

في المجال I_2 :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin I_2$

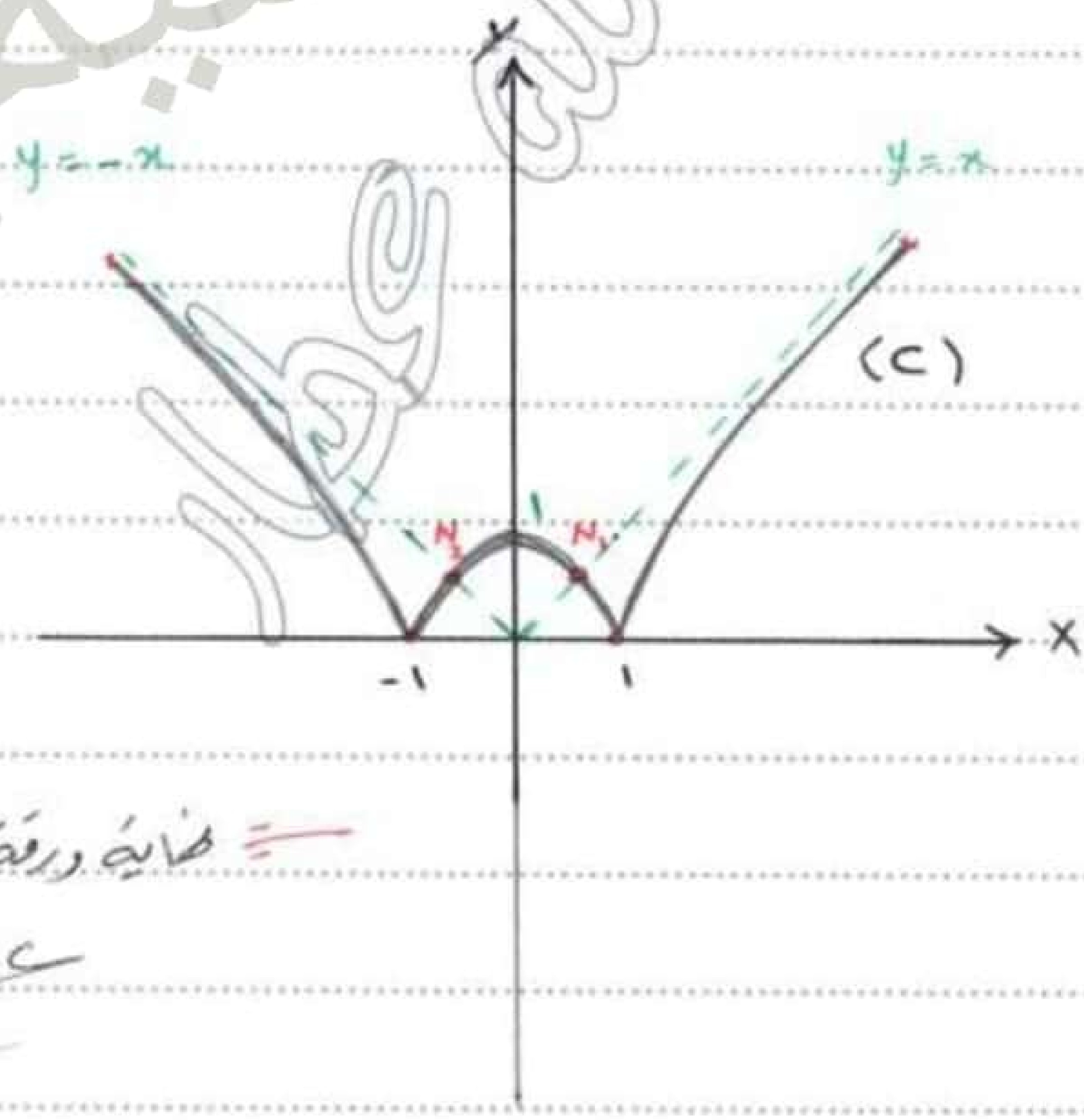
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

$f(-1) = f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى شاملة

$f(0) = 1$ قيمة حدية كبرى

$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$

4)



نهاية ورقة العمل