التابع اللوغاريتمي النيبري

مبرهنة وتعريف:

يوجد تابع واحد معرف واشتقاقي على R_+^*، ينعدم عند $x = 1$ ومشتقه على R_+^* هو التابع $x \longmapsto \frac{1}{x}$

يسمى هذا التابع تابع اللوغاريتم النيبري ونرمز إليه $\ln$.

ملاحظة: نعتبر التابع $\ln$ هو التابع المعرف بالعلاقة $f(x) = \ln x$

التابع $\ln$ يحقق

معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ ينعدم عند $x = 1$ مشتقه على $]0,+\infty[$ هو $f'(x) = \frac{1}{x}$

نتائج هامة :

1) مجموعة تعريف التابع $\ln$ هي $]0,+\infty[= R_+^*$

$\ln(1) = 0 \quad , \quad \ln(e) = 1$ حيث $e \simeq 2.7$.

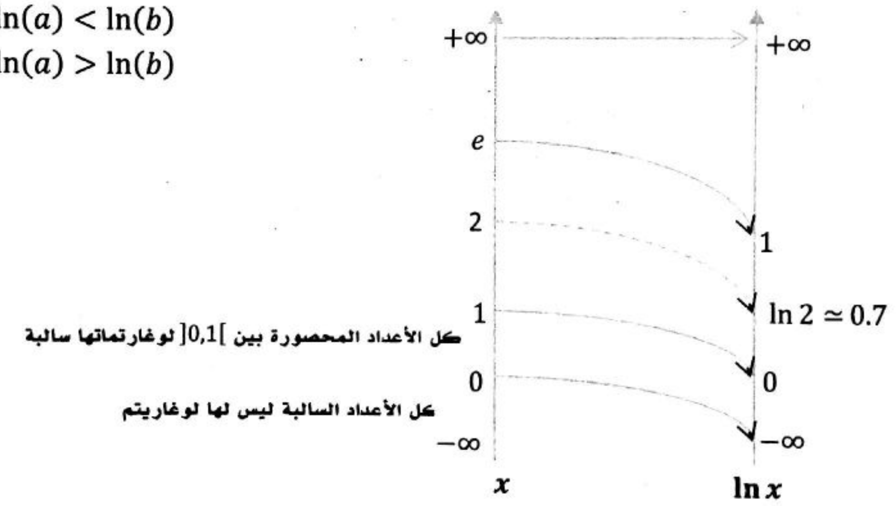
التابع $\ln$ اشتقاقي على R_+^* و $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

التابع $\ln$ مستمر على R_+^* لأنه اشتقاقي على هذا المجال.

2) التابع $\ln$ متزايد تماماً على R_+^* لأن $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ حيث $x > 0$

3) أياً كان العددان الموجبان تماماً b, a عندئذ:

- $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$
- $a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$



مما سبق نستنتج ما يلي:

- $x = 1 \Leftrightarrow \ln(1) = 0$
- $x \in\ ]0,1[\Leftrightarrow \ln(x) < 0$
- $x \in\ ]1,+\infty[\Leftrightarrow \ln(x) > 0$

مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي من الشكل $f(x) = \ln[g(x)]$:

$$D = \{x \quad : \quad g(x) > 0\}$$

أي مجموعة قيم x التي تجعل ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر.

ملاحظة عن حل المتراجحات بشكل عام :

- كل متراجحة من الدرجة الأولى لإيجاد مجموعة حلولها ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى طرف آخر (لا نحتاج إلى دراسة إشارة).
- كل متراجحة من الدرجة الثانية فما فوق او متراجحة كسرية لإيجاد مجموعة حلولها نعدمها وندرس إشارتها.

Scanned by CamScanner

تمرين: أوجد مجموعة تعريف كل تابع من التوابع الآتية:

- $f(x) = \ln(x^2)$

شرط الحل $x^2 > 0$

نلاحظ ان المتراجحة محققة دائماً إلا عند $x = 0$

ومنه : $D = R^*$

- $f(x) = \ln(6 - 3x)$

f معرف عندما $6 - 3x > 0$

$6 > 3x$

$2 > x$

$D =]-\infty, 2[$

- $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

f معرف عندما $x^2 - 3x > 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$ $x = 3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2 - 3x$		+	0	−	0	+	
$x^2 - 3x > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

- $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$

f معرف عندما $\frac{x+1}{3-x} > 0$ متراجحة كسرية

$x + 1 = 0$ $3 - x = 0$

$x = -1$ $x = +3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+	
$3-x$		+		+	0	−	
$\frac{x+1}{3-x}$		−	0	+	‖	−	
$\frac{x+1}{3-x} > 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$D =]-1, 3[$

- $f(x) = \ln\sqrt{x-2}$

f معرف عندما $\sqrt{x-2} > 0$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$D =]2, +\infty[$

- $f(x) = \ln|x+2| - \ln|2x|$

f معرف عندما

$x + 2 \neq 0$, $2x \neq 0$

$x \neq -2$, $x \neq 0$

$D = R \setminus \{-2, 0\}$

****

خواص اللوغاريتم:

أياً كان العددان الحقيقيان الموجبان تماماً b, a عندئذ:

- $\ln(a^n) = n \ln a \quad : n \in N^* \ , a > 0$
- $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = -\ln b$

Scanned by CamScanner

طريقة حل المعادلة $\ln(g(x)) = \ln(h(x))$ او المتراجحة $\ln(g(x)) \le \ln(h(x))$:

- نوجد D_g مجموعة قيم x التي تجعل $g(x) > 0$.
- نوجد D_h مجموعة قيم x التي تجعل $h(x) > 0$.
- مجموعة تعريف المعادلة او المتراجحة السابقة هي $D = D_g \cap D_h$
- نحل المعادلة $g(x) = h(x)$ او المتراجحة $g(x) \le h(x)$ والحل الذي ينتمي إلى D هو حل المعادلة (أو المتراجحة) اللوغاريتمية.

ملاحظة:

i. إذا كانت المعادلة اللوغاريتمية لا تحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها نختار الطرف الأبسط فتكون مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف المعادلة اللوغاريتمية.
إذا كانت المتراجحة اللوغاريتمية لاتحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها نختار الطرف الأصغر في المتراجحة فتكون مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف المتراجحة اللوغاريتمية.

ii. إذا كانت المعادلة اللوغاريتمية او (المتراجحة اللوغاريتمية) تحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها نتبع الطريقة النظامية السابقة.

****

تمرين: حل المعادلات أو المتراجحات الآتية:

$$2\ln(x) = \ln(2x^2 - 8x)$$

حظ أن المعادلة تحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم

شرط الحل:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

$2x^2 - 8x > 0$

$2x^2 - 8x = 0 \quad (\div 2)$

$x(x-4) = 0$

إما $x = 0$ او $x = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$2x^2 - 8x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x^2 - 8x > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D_2 =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 =]4, +\infty[$

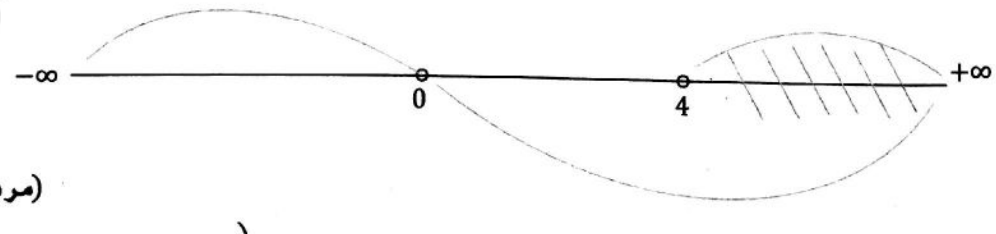
$2\ln x = \ln(2x^2 - 8x)$

$\ln x^2 = \ln(2x^2 - 8x)$

$x^2 = 2x^2 - 8x$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x-8) = 0$



إما $x = 0 \notin$ (مرفوض)

او $\boxed{x = 8} \in D$ (وهو حل المعادلة السابقة)

$$\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$$

لاحظ ان المعادلة لا تحتاج إلى استخدام خواص اللوغاريتم لحلها لذلك نختار مجموعة تعريف التابع الأبسط:

شرط الحل $3x - 4 > 0$

$x > \frac{4}{3}$

$D = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

Scanned by CamScanner

$\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$

$3x-4=x^2-4$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

إما $x=0 \notin D$ (مرفوض)

أو $\boxed{x=3} \in$ (وهو حل المعادلة السابقة)

$\ln(x^2-4)\leq\ln(-3x)$

لاحظ: لا نحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها لذلك نأخذ مجموعة تعريف الطرف الأصغر

f معرف عندما $x^2-4>0$

$(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow$ إما $x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2-4>0$	محققة			غير محققة		محققة	

$D=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$\ln(x^2-4)\leq\ln(-3x)$

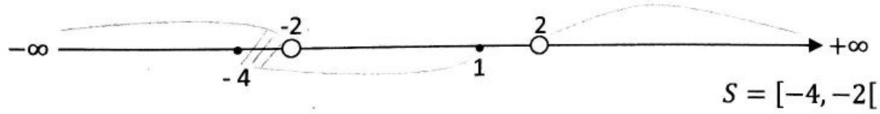
$x^2-4\leq-3x$

$x^2+3x-4\leq0$

$(x+4)(x-1)=0 \Rightarrow$ إما $x=-4$ أو $x=1$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2+3x-4\leq0$	غير محققة			محققة		غير محققة	

$x\in[-4,1]$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة : $S=[-4,-2[$

****

تدريب صفحة 154:

1) في الحالات الآتية عين قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً :

- $\ln(x-3)$

  التابع معرف عندما $x-3>0$

  $x>3$

  $D=]3,+\infty[$

- $\ln(x^2)$

  التابع معرف عندما $x^2>0$

  (محققة دائماً إلا عند $x=0$)

  $D=R^*$

- $\frac{1}{x}\ln(1+x)$

  $\underbrace{x\neq0 \qquad 1+x>0}_{\text{التابع معرف عندما}}$

  $x>-1$

  $D=]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

- $\ln(1-x)$

  التابع معرف عندما $1-x>0$

  $1>x$

  $D=]-\infty,1[$

Scanned by CamScanner

- $\frac{1}{\ln x}$

التابع معرف عندما

$$\overbrace{\ln x \neq 0 \qquad\qquad x > 0}$$

$x \neq 1$

$D =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

- $\ln(x^2 + 4x)$

$x^2 + 4x > 0$ التابع معرف عندما

$x(x+4) = 0$

إما $x = 0$ او $x = -4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$x^2 + 4x$		+	0	−	0	+	
$x^2 + 4x > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$

- $\ln(x^2 - 3x + 2)$

$x^2 - 3x + 2 > 0$ التابع معرف عندما

$(x-2)(x-1) = 0$

إما $x = 2$ او $x = 1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	−	0	+	
$x^2 - 3x + 2 > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

- $\ln|x+1| - \ln|x-1|$

التابع معرف عندما

$$\overbrace{x + 1 \neq 0 \qquad\qquad x - 1 \neq 0}$$

$x \neq -1 \qquad\qquad x \neq 1$

$D = R \setminus \{-1,1\}$

- $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

متراجحة كسرية $\frac{x-3}{2-x} > 0$ التابع معرف عندما

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		−	−	−	0	+	
$2-x$		+	0	−	−	−	
$\frac{x-3}{2-x}$		−	‖	+	0	−	
$\frac{x-3}{2-x} > 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$D =]2,3[$

Scanned by CamScanner

f (2 هو التابع المعرف على R_+^* وفق $I = R_+^*$ وفق $f(x) = 2 + \ln x$ بين ان f اشتقاقي على I واحسب $\acute{f}(x)$ واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها (1).

الحل: التابع $\ln x$ معرف واشتقاقي على R_+^*
التابع (2) معرف واشتقاقي على R

$\Rightarrow$ f شتقاقي على R_+^*

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$$

إيجاد معادلة المماس:

$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$

$m = \acute{f}(1) = 1$

$x = 1$

$: f(1) = 2 + 0 = 2$

$(1,2)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 2 = 1(x - 1)$$
$$y = x + 1$$

---

f (3 هو التابع المعرف على R_+^* وفق $I = R_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln$.

1. أثبت ان f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $\acute{f}(x)$.

التابع $\ln x$ معرف واشتقاقي على R_+^*
التابع $\frac{1}{x}$ معرف واشتقاقي على R^*

$\Rightarrow$ فالتابع f اشتقاقي على R_+^*

$$\acute{f}(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1 + x}{x^2}$$

2. نظم جدولاً يبين جهة اطراد f.

f اشتقاقي على R_+^* ومنه:

$$\acute{f}(x) = \frac{-1 + x}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + x = 0$$

$$\boxed{x = 1} \quad : \quad f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

3. استنتج من المعادلة السابقة ان $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

من جدول الاطراد نلاحظ ان :

$$\left.\begin{array}{l} x \in]0,1[\quad \Rightarrow f(x) > 1 \\ x \in [1, +\infty[\Rightarrow f(x) \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq 1 \quad , \quad x \in I \text{ أياً يكن}$$

---

4) حل المعادلات الآتية:

1) $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$

شرط الحل $2x > 0$ ومنه $x > 0$

$D =]0, +\infty[$

$\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$

$2x = x^2 - 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \notin D$ (مرفوض)

$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = \boxed{1 + \sqrt{2}} \quad \in D$ (مقبول)

Scanned by CamScanner

2) $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$

شرط الحل $-3x > 0$ ومنه $x < 0$

$D =]-\infty, 0[$

$ln(-3x) = ln(x^2 - 4)$

$-3x = x^2 - 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x + 4)(x - 1) = 0$

إما $\boxed{x = -4}$ $\in D$ (مقبول)

او $x = 1$ $\notin D$ (مرفوض)

---

3) $\ln(x - 2) = \ln(2)$

شرط الحل $x - 2 > 0$ ومنه $x > 2$

$D =]2, +\infty[$

$\ln(x - 2) = \ln(2)$

$x - 2 = 2$

$\boxed{x = 4}$ $\in D$ (مقبول)

4) $\ln(x - 2) = \ln(x^2 - 2)$

شرط الحل $x - 2 > 0$ ومنه $x > 2$

$D =]2, +\infty[$

$\ln(x - 2) = \ln(x^2 - 2)$

$x - 2 = x^2 - 2$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

إما $x = 0$ $\notin D$ (مرفوض)

او $x = 1$ $\notin D$ (مرفوض)

اذاً المعادلة السابقة مستحيلة الحل.

---

5) حل المتراجحات الآتية :

1) $\ln(x - 2) \leq \ln(2x - 1)$

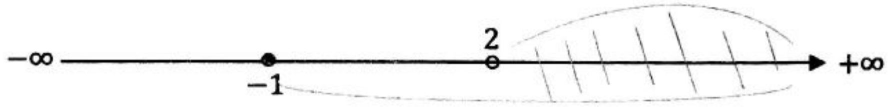
شرط الحل $x - 2 > 0$ ومنه $x > 2$

$D =]2, +\infty[$

$\ln(x - 2) \leq \ln 0(2x - 1)$

$x - 2 \leq 2x - 1$

$-1 \leq x$: $x \in [-1, +\infty[$



مجموعة حلول المتراجحة هي $S =]2, +\infty[$

---

2) $\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$

شرط الحل $x^2 - 1 > 0$

$(x - 1)(x + 1) = 0$

إما $x = 1$ او $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - 1 > 0$	محققة		غير محققة		محققة		

$D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$

$2x \geq x^2 - 1$

$x^2 - 2x - 1 \leq 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

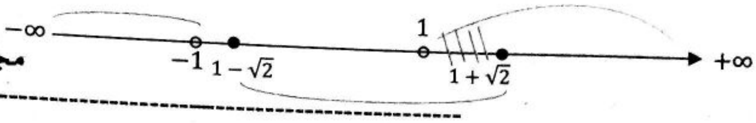
حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2-2x-1	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2-2x-1 \le 0$	غير محققة		محققة		غير محققة

$x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

$S =]1, 1+\sqrt{2}]$ مجموعة حلول المتراجحة هي



---

3) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln(x)$

$x > 0$ شرط الحل

$D =]0, +\infty[$

$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln(x)$

$1+\frac{2}{x} \ge x$

بما ان $x > 0$ نضرب المتراجحة بـ x

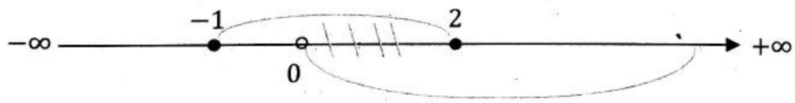
$x + 2 \ge x^2$

$x^2 - x - 2 \le 0$

$(x-2)(x+1) = 0 \implies$ إما $x = 2$ أو $x = -1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2-x-2 \le 0$	غير محققة		محققة		غير محققة

$x \in [-1, 2]$



$S =]0, 2]$ مجموعة حلول المتراجحة هي

---

4) $\ln x \le \ln(x^2 - 2x)$

$x > 0$ شرط الحل

$D =]0, +\infty[$

$\ln x \le \ln(x^2 - 2x)$

$x \le x^2 - 2x$

$x^2 - 3x \ge 0$

$x(x-3) = 0 \implies$ إما $x = 0$ أو $x = 3$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
x^2-3x	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2-3x \ge 0$	محققة		غير محققة		محققة

$x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

$S = [3, +\infty[$ مجموعة حلول المتراجحة هي

Scanned by CamScanner

تدريب صفحة 157:

1- بسط كتابة الأعداد الآتية:

3) $c = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$
$= \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\ln 2$

2) $b = \ln\frac{1}{16}$
$= \ln 1 - \ln 16$
$= 0 - \ln 2^4 = -4\ln 2$

1) $a = \ln 3 + \ln\frac{1}{3}$
$= \ln 3 + \ln 1 - \ln 3 = 0$

2- اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$, $\ln$:

$c = \ln 250$
$= \ln(125 \times 2)$
$= \ln 125 + \ln 2$
$= \ln(5)^3 + \ln 2$
$= 3\ln 5 + \ln 2$

$b = \ln\frac{16}{25}$
$= \ln 16 - \ln 25$
$= \ln(2)^4 - \ln(5)^2$
$= 4\ln 2 - 2\ln 5$

$a = \ln 50$
$= \ln(25 \times 2)$
$= \ln 25 + \ln 2$
$= \ln(5)^2 + \ln 2$
$= 2\ln 5 + \ln 2$

3- اثبت ان $l\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right) = 0$

$L_1 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$
$= \ln\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$
$= \ln(4-3) = \ln(1) = 0 = L_2$

4- في كل من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x, y دون استعمال آلة حاسبة:

1) $x = \ln 5$, $y = \ln 2 + \ln 3$

$$\left.\begin{array}{l} x = \ln 5 \\ y = \ln 2 + \ln 3 = \ln(2.3) = \ln 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x < y$$

2) $x = 2\ln 3$, $y = 3\ln 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\ln 3 = \ln(3)^2 = \ln 9 \\ y = 3\ln 2 = \ln(2)^3 = \ln 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x > y$$

5- فيما يلي بسط كتابة كل من b, a:

$b = \ln\sqrt{216} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$
$= \ln\sqrt{216} - \ln\sqrt{27} + \ln\sqrt{75} - \ln 15$
$= \ln\sqrt{\frac{216}{27}} + \ln\sqrt{25 \times 3} - \ln 15$
$= \ln\sqrt{8} + \ln 5\sqrt{3} - \ln 15$
$= \frac{1}{2}\ln 8 + \ln\left(\frac{5\sqrt{3}}{15}\right)$
$= \frac{1}{2}\ln(2)^3 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$= \frac{3}{2}\ln 2 - \ln\sqrt{3}$
$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$

$a = \ln 567 - \ln 72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\frac{1}{27}$
$a = \ln 567 + \ln\frac{1}{27} - \left(\ln 72 + \ln\frac{7}{8}\right)$
$= \ln\left(\frac{567}{27}\right) - \ln\left(72 \times \frac{7}{8}\right)$
$= \ln(21) - \ln(63)$
$= \ln\left(\frac{21}{63}\right)$
$= \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$= \ln 1 - \ln 3$
$= -\ln 3$

Scanned by CamScanner

التابع اللوغاريتمي النيبري

6- اثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x > 0$

$$\ln(1+x^2) = 2\ln\ \ + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$L_2 = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \ln(x^2+1) = L_1$$

$$\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$L_2 = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \ln(x+1) = L_1$$

7- في كل من الحالتين الآتيتين، جد مجموعة قيم x التي تحقق المساواة:

1) $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x-1)$

شرط الحل:

$x^2 - x > 0$

$x(x-1) = 0$

إما $x = 0$

أو $x = 1$

$x > 0$

$x \in \left]0, +\infty\right[$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$x \in \left]1, +\infty\right[$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$x^2 - x > 0$	محققة	غير محققة	محققة	

$x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

$-\infty$ 0 1 $+\infty$

ومنه فإن مجموعة قيم x هي المجال: $\left]1, +\infty\right[$

---

2) $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

شرط الحل:

$\frac{x-1}{x+2} > 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$x \in \left]1, +\infty\right[$

$x + 2 > 0$

$x > -2$

$x \in \left]-2, +\infty\right[$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0 $+$	
$x + 2$	$-$	0 $+$	$+$	
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$	$\Vert$ $-$	0 $+$	
$\frac{x-1}{x+2} > 0$	محققة	غير محققة	محققة	

$x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

$-\infty$ -2 1 $+\infty$

ومنه فإن مجموعة قيم x هي المجال: $\left]1, +\infty\right[$

Scanned by CamScanner

ملاحظة: في التمرين السابق نستطيع إيجاد مجموعة تعريف الطرف الأيمن لأن الطرف الأيمن هو مقصور الطرف الأيسر بعد استخدام خواص اللوغاريتم.

8- في كل حالة مما يأتي: جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة المعطاة:

1) $2^n \leq 100$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\ln 2^n \leq \ln 100$$
$$n\ln 2 \leq \ln 100$$
$$n \leq \frac{\ln 100}{\ln 2}$$
$$n \leq \frac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln 2}$$
$$n \leq \frac{2\ln 2 + 2\ln 5}{\ln 2}$$

حيث : $\begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \end{pmatrix}$

$$n \leq \frac{2(0.7) + 2(1.6)}{0.7}$$
$$n \leq \frac{1.4 + 3.2}{0.7}$$
$$n \leq 6.57$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي
$\{0,1,2,3,4,5,6\}$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{100}$$
$$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \ln\frac{1}{100}$$
$$-n\ln 3 \leq -\ln 100$$
$$n \geq \frac{-\ln 100}{-\ln 3}$$
$$n \geq \frac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln 3}$$
$$n \geq \frac{2\ln 2 + 2\ln 5}{\ln 3}$$

حيث : $\begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \\ \ln 3 \approx 1.1 \end{pmatrix}$

$$n \geq \frac{2(0.7) + 2(1.6)}{1.1}$$
$$n \geq 4.18$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي
$\{5,6,7, \dots\dots\}$

---

3) $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\frac{2}{10} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$\ln\left(\frac{2}{10}\right) \geq \ln\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$\ln\left(\frac{2}{10}\right) \geq n\ln\frac{2}{5}$$
$$\frac{\ln\left(\frac{2}{10}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \leq n$$
$$\frac{\ln 2 - \ln 2 - \ln 5}{\ln 2 - \ln 5} \leq n$$
$$\frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} \leq n$$

حيث : $\begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \end{pmatrix}$

$$\frac{1.6}{0.9} \leq n$$
$$1.77 \leq n$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي
$\{2,3,4, \dots\dots\}$

4) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\left(\frac{103}{100}\right)^n \geq 2$$
$$\ln\left(\frac{103}{100}\right)^n \geq \ln 2$$
$$n\ln\frac{103}{100} \geq \ln 2$$
$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 103 - \ln 100} \quad ; \begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \\ \ln 103 \approx 4.63 \end{pmatrix}$$
$$n \geq \frac{0.7}{4.63 - 4.60}$$
$$n \geq \frac{0.7}{0.03}$$
$$n \geq 23.33$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي
$\{24,25,26, \dots\dots\}$

Scanned by CamScanner

-9 حل كل متراجحة او معادلة فيما ياتي:

1) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

شرط الحل:

$x > 0$ $\quad x \in]0, +\infty[$

$x + 4 > 0$ $\quad x > -4$ $\quad x \in]-4, +\infty[$

$2x > 0$ $\quad x > 0$ $\quad x \in]0, +\infty[$

$D =]0, +\infty[$

$2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

$\ln x^2 = \ln[(x+4)(2x)]$

$\ln x^2 = \ln(2x^2 + 8x)$

$x^2 = 2x^2 + 8x$

$x^2 + 8x = 0$

$x(x+8) = 0$

إما $x = 0 \quad \notin D$ (مرفوض)

او $x = -8 \quad \notin D$ (مرفوض) فالمعادلة مستحيلة الحل

---

2) $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

شرط الحل:

$x > 0$ $\quad x \in]0, +\infty[$

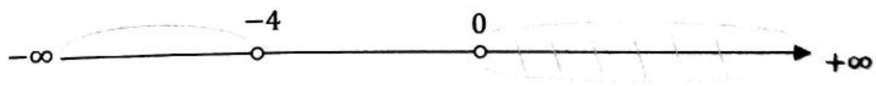
$2x^2 + 8x > 0 \quad (\div 2)$

$x(x+4) = 0$

إما $x = 0$ او $x = -4$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$x^2 + 4x$	$+$	$0 \quad -$	0	$+$
$x^2 + 4x > 0$	محققة	غير محققة		محققة

$x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$



$D =]0, +\infty[$

$2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

$\ln x^2 = \ln(2x^2 + 8x)$

$x^2 = 2x^2 + 8x$

$x^2 + 8x = 0$

$x(x+8) = 0$

إما $x = 0 \quad \notin D$ (مرفوض)

او $x = -8 \quad \notin D$ (مرفوض) فالمعادلة مستحيلة الحل

---

3) $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$

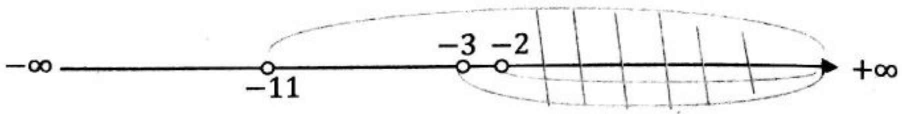
شرط الحل:

$x + 11 > 0$ $\quad x > -11$ $\quad x \in]-11, +\infty[$

$x + 3 > 0$ $\quad x > -3$ $\quad x \in]-3, +\infty[$

$x + 2 > 0$ $\quad x > -2$ $\quad x \in]-2, +\infty[$

Scanned by CamScanner



$D =]-2, +\infty[$

$\ln(x + 11) = \ln(x + 3) + \ln(x + 2)$

$\ln(x + 11) = \ln[(x + 3)(x + 2)]$

$\ln(x + 11) = \ln(x^2 + 5x + 6)$

$x + 11 = x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

إما $x = -5 \quad \notin D$ (مرفوض) أو $\boxed{x = 1} \quad \in D$ (مقبول)

---

4) $\ln(x + 11) = \ln(x + 3)\,(x + 2)$

المعادلة لا تحتاج إلى استخدام خواص اللوغاريتم نختار الطرف الأبسط.

شرط الحل: $x + 11 > 0$ **ومنه** $x > -11$

$D =]-11, +\infty[$

$\ln(x + 11) = \ln(x + 3)(x + 2)$

$(x + 11) = (x + 3)(x + 2)$

$x + 11 = x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

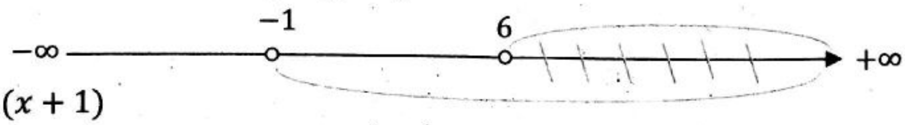
إما $\boxed{x = -5} \quad \in D$ (مقبول) أو $\boxed{x = 1} \quad \in D$ (مقبول)

---

5) $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x - 6) + \ln(x + 1)$

شرط الحل:

$x - 6 > 0$	$x + 1 > 0$
$x > 6$	$x > -1$
$x \in]6, +\infty[$	$x \in]-1, +\infty[$



$D =]6, +\infty[$

$\ln 4 + \ln 2 = \ln(x - 6) + \ln(x + 1)$

$\ln(4 \times 2) = \ln[(x - 6)(x + 1)]$

$\ln 8 = \ln(x^2 - 5x - 6)$

$8 = x^2 - 5x - 6$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x - 7)(x + 2) = 0$

إما $\boxed{x = 7} \quad \in D$ (مقبول) أو $x = -2 \quad \notin D$ (مرفوض)

---

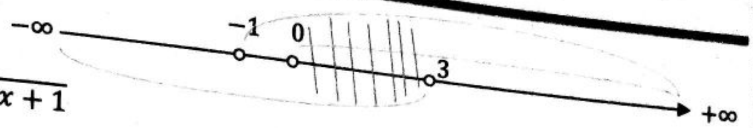
6) $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3 - x) - \ln\sqrt{x + 1}$

شرط الحل:

$2x > 0$	$3 - x > 0$	$\sqrt{x + 1} > 0$
$x > 0$	$3 > x$	$x + 1 > 0$
$x \in]0, +\infty[$	$x \in]-\infty, 3[$	$x > -1$
		$x \in]-1, +\infty[$

Scanned by CamScanner

$D =]0,3[$



$$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$$
$$\ln(2x) = 2\ln(3-x) - 2\ln\sqrt{(x+1)}$$
$$\ln 2x = \ln(3-x)^2 - \ln(x+1)$$
$$\ln 2x = \ln\frac{(3-x)^2}{x+1}$$
$$2x = \frac{(3-x)^2}{x+1}$$
$$2x(x+1) = (3-x)^2$$
$$2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2$$
$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$(x+9)(x-1) = 0$$

إما $x = -9 \quad \notin D$ (مرفوض)

او $\boxed{x = 1} \quad \in D$ (مقبول)

---

7) $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

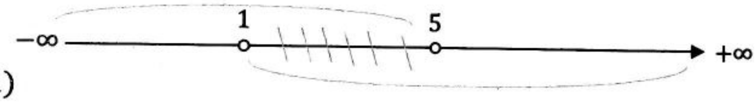
شرط الحل :

$5 - x > 0$ | $x - 1 > 0$

$5 > x$ | $x > 1$

$x \in]-\infty, 5[$ | $x \in]1, +\infty[$

$D =]1,5[$

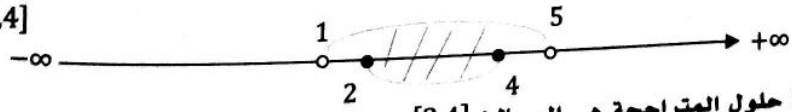


$$\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$$
$$\ln 3 \leq \ln[(5-x)(x-1)]$$
$$\ln 3 \leq \ln(-x^2 + 6x - 5)$$
$$3 \leq -x^2 + 6x - 5$$
$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0$$
$$x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

$(x-4)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow$ إما $x = 4$ او $x = 2$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - 6x + 8 \leq 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$x \in [2,4]$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي المجال: $[2,4]$

---

8) $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln$

شرط الحل :

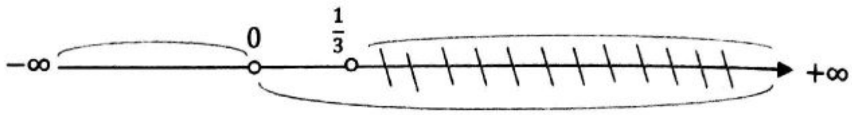
$3x^2 - x > 0$ | $x > 0$

$x(3x-1) = 0$ | $x \in]0, +\infty[$

إما $x = 0$ او $x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x^2-x$	$+$	0 $-$	0	$+$
$3x^2-x>0$	محققة	غير محققة		محققة

$x \in]-\infty,0[\cup]\frac{1}{3},+\infty[$



$D =]\frac{1}{3},+\infty[$

$\ln(3x^2-x) \le \ln x + \ln 2$

$\ln(3x^2-x) \le \ln(2x)$

$3x^2-x \le 2x$

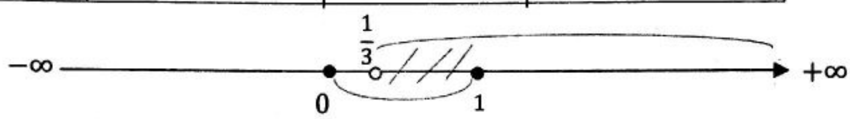
$3x^2-3x \le 0 \quad (\div 3)$

$x(x-1)=0$

إما $x=0$ أو $x=1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$3x^2-3x$	$+$	0 $-$	0	$+$
$3x^2-3x \le 0$	غير محققة	محققة		غير محققة

$x \in [0,1]$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي المجال: $]\frac{1}{3},1]$

---

9) $\ln(6x+4) \le \ln(3x^2-x-2)$

المتراجحة لا تحتاج إلى استخدام خواص اللوغاريتمنأخذ مجموعة تعريف الطرف الأصغر.

$6x+4>0$ شرط الحل

$6x>-4$

$x>\frac{-2}{3}$

$D =]-\frac{2}{3},+\infty[$

$\ln(6x+4) \le \ln(3x^2-x-2)$

$6x+4 \le 3x^2-x-2$

$3x^2-7x-6 \ge 0$

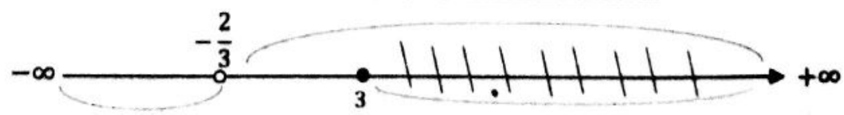
$3x^2-7x-6 = 0$

$\Delta = 49-4(3)(-6) = 121 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$

$x_1 = \frac{7-11}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{7+11}{6} = 3$

x	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$	3	$+\infty$
$3x^2-7x-6$	$+$	0 $-$	0	$+$
$3x^2-7x-6 \ge 0$	محققة	غير محققة		محققة

$x \in]-\infty,\frac{-2}{3}] \cup [3,+\infty[$



مجموعة حلول المتراجحة هي $[3,+\infty[$

Scanned by CamScanner

10) $3\ln x > \ln(3x-2)$

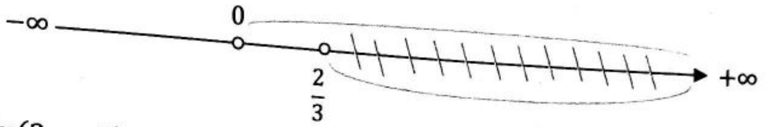
شرط الحل:

$x > 0$ | $3x - 2 > 0$

$x \in]0, +\infty[$ | $x > \frac{2}{3}$

$x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

$D = \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

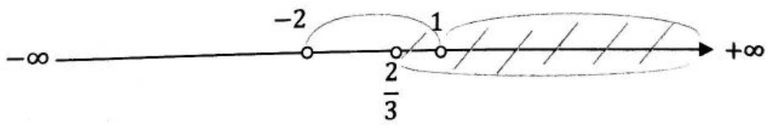


$$3\ln x > \ln(3x-2)$$
$$\ln x^3 > \ln(3x-2)$$
$$x^3 > 3x - 2$$
$$x^3 - 3x + 2 > 0$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$
$$x^3 - x - 2x + 2 = 0$$
$$x(x^2-1) - 2(x-1) = 0$$
$$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0$$
$$(x-1)[x(x+1) - 2] = 0$$
$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$
$$(x-1)(x+2)(x-1) = 0$$
$$(x-1)^2(x+2) = 0$$

إما $x = 1$ ، أو $x = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$(x-1)^2(x+2) > 0$		غير محققة		محققة		محققة	

$x \in]-2, 1[\cup]1, +\infty[$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي المجال: $\left]\frac{2}{3}, 1\right[\cup]1, +\infty[$

-10 في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ مجموعة النقاط المحققة للشرط المشار إليه:

1) $\ln x = \ln(y+1)$

شرط الحل:

$x > 0$ | $y + 1 > 0$

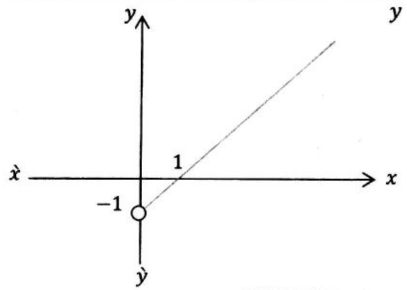
$x \in]0, +\infty[$ | $y > -1$

$y \in]-1, +\infty[$

$$\ln x = \ln(y+1)$$
$$x = y + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x - 1}$$

Scanned by CamScanner

النقاط $M(x,y)$ تمثل نصف مستقيم محمول على المستقيم $y = x - 1$



2) $\ln y = 2\ln x$

شرط الحل:

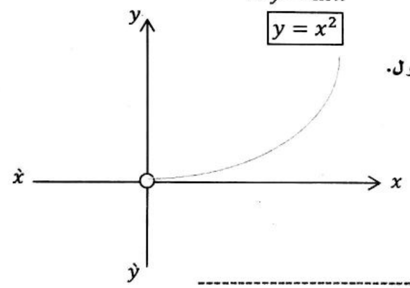
$$\overbrace{\begin{matrix} y > 0 & & x > 0 \\ y \in]0,+\infty[& & x \in]0,+\infty[\end{matrix}}$$

$\ln y = 2\ln x$

$\ln y = \ln x^2$

$\boxed{y = x^2}$

النقاط $M(x,y)$ تمثل جزء من قطع مكافئ موجود في الربع الأول.



3) $\ln x + \ln y = 0$

شرط الحل:

$$\overbrace{\begin{matrix} x > 0 & & y > 0 \\ x \in]0,+\infty[& & y \in]0,+\infty[\end{matrix}}$$

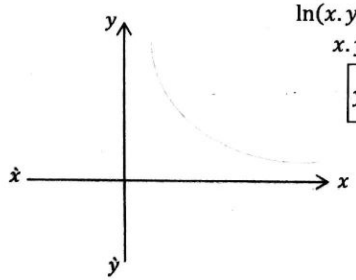
$\ln x + \ln y = 0$

$\ln(x.y) = \ln 1$

$x.y = 1$

$\boxed{y = \frac{1}{x}}$

النقاط $M(x,y)$ تمثل فرع القطع الزائد الموجود في الربع الأول.



****

Scanned by CamScanner

التابع اللوغاريتمي النيبري

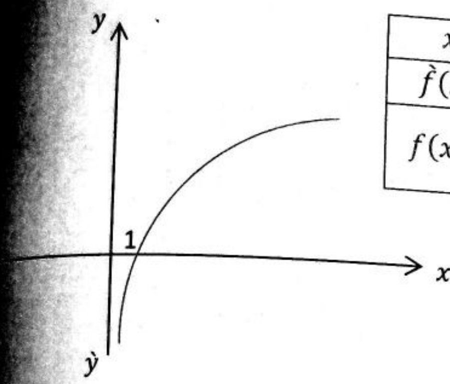
[redacted]

مبرهنة:

دراسة التابع اللوغاريتمي $f(x) = \ln(x)$

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $D =]0, +\infty[$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x} > 0$$



x	0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty \longrightarrow$	$+\infty$

نقطة مساعدة : C قطع $x\acute{x}$ اي $f(x) = 0$

$\ln x = 0$

$x = 1$ $\quad (1,0)$

ملاحظة هامة:

1) اياً كان $x \in R$ فإن $\ln e^{x} = x$ $\qquad$ 2) اياً كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $e^{\ln} = x$

المعادلة $\ln x = m$ (m عدد حقيقي)

اعتماداً على دراسة التابع اللوغاريتمي نجد انه اياً كان العدد $m \in R$ كان للمعادلة $\ln x = m$ حل وحيد في $]0, +\infty[$

مثال: حل المعادلة الآتية :

$$\mathbf{\ln(x + 1) = 2}$$

المعادلة معرفة عندما $x + 1 > 0$ اي $x > -1$ ومنه $D =]-1, +\infty[$

$$\ln(x + 1) = \ln e^2$$
$$x + 1 = e^2$$
$$x = e^2 - 1 \in D$$

اي للمعادلة حل وحيد

مثال: حل المتراجحة الآتية :

$$\mathbf{\ln(x + 1) \geq 2}$$

المتراجحة معرفة عندما $x + 1 > 0$ اي $x > -1$ ومنه $D =]-1, +\infty[$

$$\ln(x + 1) \geq \ln e^2$$
$$x + 1 \geq e^2$$
$$x \geq e^2 - 1$$

ومنه $x \in [e^2 - 1, +\infty[$ وبالتالي مجموعة الحلول هي $S = [e^2 - 1, +\infty[$.

****

دراسة تابع لحل متراجحة:

1- ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد فنحصل على احد الشكلين $f(x) < 0$ او $f(x) > 0$.

2- ندرس اطراد التابع $f(x)$.

3- من جدول الاطراد ومن سطر $f(x)$ نحصل على حل المتراجحة.

مثال: اثبت صحة المتراجحة $\mathbf{\ln(x + 1) \leq x}$ اياً يكن $x > -1$

المتراجحة السابقة تكافئ

$$x - \ln(x + 1) \geq 0$$
$$f(x) = x - \ln(x + 1)$$

وائل زمارية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0932480990

Scanned by CamScanner

f اشتقاقي على المجال $]-1,+\infty[$

$$\acute{f}(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0} \ : \quad f(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	↘	0	↗	

من جدول الاطراد أياً كانت $x \epsilon]-1,+\infty[$ فإن:

$$f(x) \geq 0$$

اي $x - \ln(x+1) \geq 0$

$$x \geq \ln(x+1)$$

المتراجحة لسابقة محققة اياً يكن $x > -1$

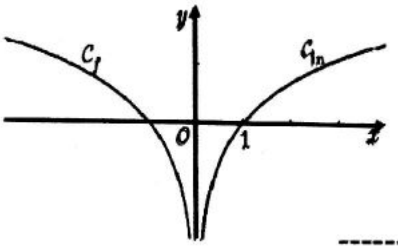
****

تدرب صفحة 162:

1) **انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \longmapsto \ln x$ ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية:**

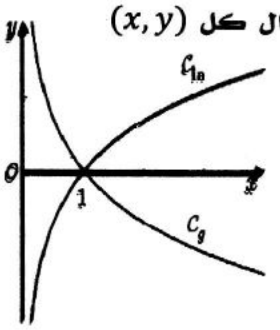
$x \longmapsto \ln(-x)$

C_f الخط البياني للتابع $x \longmapsto \ln(-x)$ ينتج عن الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(-x,y)$ اي C_f نظير C_{ln} بالنسبة لـ $y\acute{y}$



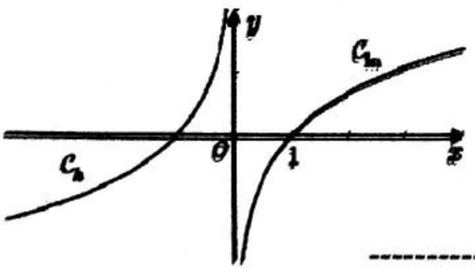
$x \longmapsto -\ln x$

C_g الخط البياني للتابع $x \longmapsto -\ln x$ ينتج عن الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(x,-y)$ اي C_g نظير C_{ln} بالنسبة لـ $x\acute{x}$



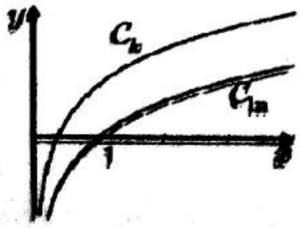
$x \longmapsto -\ln(-x)$

C_h الخط البياني للتابع $x \longmapsto -\ln(-x)$ ينتج عن الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(-x,-y)$ اي C_h نظير C_{ln} بالنسبة لمبدا الإحداثيات $O(0,0)$



$x \longmapsto 1 + \ln x$

C_k الخط البياني للتابع $x \longmapsto 1 + \ln x$ ينتج من الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(x,1+y)$ اي C_k ينتج عن C_{ln} بانسحاب شعاعه $\vec{J}$.



Scanned by CamScanner

التابع اللوغاريتمي النيبري

2) اثبت ان $\ln x \le 2(\sqrt{x}-1)$ اياً يكن $x>0$ واستنتج ان $2<e<4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x.

- لإثبات المتراجحة ندرس اطراد التابع:

$$2(\sqrt{x}-1)-\ln x \ge 0$$

$$(x)=2(\sqrt{x}-1)-\ln x \quad ; \quad D=]0,+\infty[$$

f اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=1} \; : f(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ من جدول الاطراد ان اياً كانت $x\in]0,+\infty[$ فإن: $f(x)\ge 0$

$$2(\sqrt{x}-1)-\ln x \ge 0 \Rightarrow \ln x \le 2(\sqrt{x}-1)$$

- الآن من المتراجحة المثبتة $\ln x \le 2(\sqrt{x}-1)$

* نختار $x=\frac{1}{e}$ فيكون:

$$\ln\frac{1}{e} \le 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}}-1\right)$$

$$-1 \le 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}}-1\right)$$

$$-\frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{1}{e}}-1$$

$$\frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{1}{e}}$$

$$\frac{1}{4} \le \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad e \le 4$$

* نختار $x=e$ فيكون:

$$\ln e \le 2(\sqrt{e}-1)$$

$$1 \le 2(\sqrt{e}-1)$$

$$\frac{1}{2} \le (\sqrt{e}-1)$$

$$\frac{1}{2}+1 \le \sqrt{e}$$

$$\frac{3}{2} \le \sqrt{e}$$

$$2.25=\frac{9}{4} \le e$$

ومنه نستطيع ان نكتب $2<e$

وبالتالي نستنتج ان $\boxed{2<e<4}$

---

3) في كل من الحالتين الآتيين، قارن بين العددين x، y دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $x=\ln e^3-2 \quad , \quad y=\ln(e\sqrt{e})$

$$\left.\begin{array}{l} x=\ln e^3-2=3-2=1 \\ y=\ln(e\sqrt{e})=\ln\left(e.e^{\frac{1}{2}}\right)=\ln e^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y>x$$

2) $x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3 \quad , \quad y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

$$\left.\begin{array}{l} x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3=3\ln\frac{1}{e}=3(-1)=-3 \\ y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2=\ln\frac{1}{e}\times\ln\frac{1}{e}=-1\times -1=1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y>x$$

وائل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

Scanned by CamScanner

4) حل كل متراجحة او معادلة مما يلي:

1) $\ln(1-x)=-2$

المعادلة معرفة عندما $1-x>0$ ومنه $1>x$ اي :

$D=]-\infty,1[$

$\ln(1-x)=-2$

$\ln(1-x)=\ln e^{-2} \Rightarrow 1-x=e^{-2}$

$$x=1-\frac{1}{e^2}=\frac{e^2-1}{e^2}\in D$$

اي للمعادلة حل وحيد $x=\frac{e^2-1}{e^2}$

---

2) $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

المعادلة معرفة عندما $(x-2>0)\cap(x+1>0)$

$(x>-1)\cap(x>2)$

$D=]2,+\infty[$

$\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=2$$

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=\ln e^2$$

$$\frac{x-2}{x+1}=e^2$$

$$x-2=e^2(x+1)$$

$$x-2=e^2x+e^2$$

$$x-e^2x=e^2+2$$

$$x(1-e^2)=e^2+2$$

$x=\frac{e^2+2}{1-e^2}<0\notin D$ المعادلة مستحيلة الحل

---

3) $(\ln x)^2=16$

المعادلة معرفة عندما $x>0$ اي : $D=]0,+\infty[$

و منه : $(\ln x)^2=16$

إما $\ln x=4\Rightarrow x=e^4\in D$

او $\ln x=-4\Rightarrow x=e^{-4}\in D$

وبالتالي مجموعة الحلول هي $S=\{e^{-4},e^4\}$

4) $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

المعادلة معرفة عندما $x>0$ اي : $D=]0,+\infty[$

إما $\ln x-1=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e\in D$

او $\ln x+2=0\Rightarrow \ln x=-2\Rightarrow x=e^{-2}\in D$

وبالتالي مجموعة الحلول هي $S=\{e^{-2},e^2\}$

---

5) $\ln(2-x)\geq 1$

المتراجحة معرفة عندما $2-x>0$ ومنه $x<2$ اي :

$D=]-\infty,2[$

$\ln(2-x)\geq 1$

$\ln(2-x)\geq \ln e^1$

$2-x\geq e$

$x\leq 2-e$

اي $x\in]-\infty,2-e]$

وبالتالي مجموعة الحلول هي $S=]-\infty,2-e]$

---

6) $\ln\frac{1}{x}>2$

المتراجحة معرفة عندما $\frac{1}{x}>0$ اي :

$D=]0,+\infty[$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)>2$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)>\ln e^2$$

$$\frac{1}{x}>e^2$$

$$x<\frac{1}{e^2}$$

ومنه $x\in\left]-\infty,\frac{1}{e^2}\right[$ وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S=\left]0,\frac{1}{e^2}\right[$$

****

مشتق التابع $\ln[g(x)]$:

إذا كان g تابعاً اشتقاقياً على المجال I وموجباً تماماً على I ، عندئذٍ :

التابع $x\longmapsto \ln[g(x)]$ اشتقاقي على I ، و $x\longmapsto\frac{g'(x)}{g(x)}$ هو تابعه المشتق على I.

****

Scanned by CamScanner

تمرين: في كل مما يلي اثبت ان التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

1) $f(x) = \ln x - \ln(x+1) \quad : \quad D =]0, +\infty[$

$x \mapsto x$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : $x \mapsto \ln x$ اشتقاقي على D

$x \mapsto x+1$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : $x \mapsto \ln(x+1)$ اشتقاقي على D

وبما ان f مجموع تابعين اشتقاقيين على D فإن f اشتقاقي على D.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

2) $f(x) = \ln(1-x^2) \quad : \quad D =]-1, 1[$

$x \mapsto 1-x^2$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : f اشتقاقي على D.

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) \quad : \quad D =]-1, 3[$

$x \mapsto \frac{x+1}{3-x}$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : f اشتقاقي على D.

$$f'(x) = \frac{\frac{1(3-x)-(-1)(x+1)}{(3-x)^2}}{\frac{x+1}{3-x}} = \frac{3-x+x+1}{\frac{(x+1)}{(3-x)}(3-x)^2} = \frac{4}{(x+1)(3-x)}$$

4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad : \quad D = R$

$x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : f اشتقاقي على D.

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

****

مبرهنات في نهايات التابع اللوغاريتمي:

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \quad ; \quad n \in N^*$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

****

تمرينات صفحة 165:

1) **جد كلاً من النهايات الآتية:**

① $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = $ [redacted] $= 0$

② $\lim_{x\to 0}\left((x^2-x)\ln x\right)$

$\lim_{x\to 0}\left((x^2-x)\ln x\right) = \lim_{x\to 0}\left((x-1)x\ln x\right)$

$=$ [redacted] $= 0$

وائل زهترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال ...0990

Scanned by CamScanner

③ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

نجري تغيير في المتحول:

$\sqrt{x}=t \quad , \quad x\to+\infty$

$x=t^2 \quad , \quad t\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\ln t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{2\ln t}=\frac{1}{2}(+\infty)=+\infty$

---

2) <u>فيما يأتي، حد نهاية التابع f عند اطراف مجالات تعريفه:</u>

1) $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

$\underbrace{x>0 \qquad\qquad x\neq 0}$

شرط اللوغاريتم ، شرط الكسر

$D=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

---

2) $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$

$\underbrace{x>0 \qquad\qquad x\neq 0}$

شرط اللوغاريتم ، شرط الكسر

$D=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{0-(-\infty)}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=?$ $\left(\infty-\infty\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$f(x)=\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}=1-\frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$

3) $f(x)=x-\ln x$

$D=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=0-(-\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=?$ $\left(\infty-\infty\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$f(x)=x-\ln x=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$

---

4) $f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

f معرف عندما $1+\frac{1}{x}>0$ اي $\frac{x+1}{x}>0$ ندرس إشارته :

$x+1=0 \to x=-1 \quad , \quad x=0$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$\frac{x+1}{x}>0$	محققة		غير محققة		محققة

ومنه $D=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=?$ $\left(-\infty\times0\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=?$ $\left(+\infty\times0\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

Scanned by CamScanner

طريقة اولى لإزالة عدم التعيين : نجري تغيير في المتحول: نفرض $\frac{1}{x}=t$ ومنه : $x=\frac{1}{t}$

$x\to+\infty$, $t\to 0^+$ ، $x\to-\infty$, $t\to 0^-$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to 0^-}\left[\frac{1}{t}+\frac{\ln(1+t)}{t}\right]=-\infty+1=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t}+\frac{\ln(1+t)}{t}\right]=+\infty+1=+\infty$$

طريقة ثانية لإزالة عدم التعيين :

$$f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]=-\infty(1+0)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]=+\infty(1+0)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-1+(-1)\ln\left(1+\frac{1}{(-1)}\right)=-1+(-1)(-\infty)=+\infty$$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$)

$$f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x+x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$f(x)=x+x[\ln(x+1)-\ln x]=x+x\ln(x+1)-x\ln x$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0+0-0=0$$

---

5) $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

$\underbrace{x>0 \qquad\qquad x\neq 0}$ شرط للوغاريتم ، شرط الكسر

$D=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty+\infty=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0-(+\infty)=-\infty$

---

6) $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$

$\underbrace{x>0 \qquad\qquad x\neq -1}$ شرط للوغاريتم ، شرط الكسر

$D=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{0}{1}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$)

$$f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}=\frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{1+0}=+\infty$

---

7) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

$\underbrace{x>0 \qquad\qquad \ln x\neq 0}$ شرط للوغاريتم ، شرط الكسر

$x\neq 1$

$D=]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{-\infty}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

---

8) $f(x)=x(1-\ln x)$

f معرف عندما $x>0$ اي : $D=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=?$

(حالة عدم تعيين من الشكل $0\times(+\infty)$)

$f(x)=x(1-\ln x)=x-x\ln x$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=0-0=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-\infty)=-\infty$

Scanned by CamScanner

9) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

f معرف عندما $\frac{x+1}{x-4} > 0$ ندرس إشارة الكسر: $x - 4 = 0 \to x = +4$, $x + 1 = 0 \to x = -1$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$		
$x+1$	$-$ $\quad$ 0	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$ $\quad$ 0	$+$
$\frac{x+1}{x-4}$	$+$ $\quad$ 0	$-$ $\quad$ ||	$+$
$\frac{x+1}{x-4} > 0$	محققة	غير محققة	محققة

ومنه $D =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \ln\frac{0}{-5} = \ln 0 = -\infty$, $\lim_{x\to4^+} f(x) = \ln\left(\frac{5}{0^+}\right) = +\infty$

---

10) $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$

$$\underbrace{x > 0}_{\text{شرط اللوغاريتم}} \qquad \underbrace{x \neq 0}_{\text{شرط الكسر}}$$

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty(-\infty - 1) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $0 \times \infty$)

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

11) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

$$\underbrace{x > 0}_{\text{شرط اللوغاريتم}} \qquad \underbrace{\ln x \neq 0}_{\text{شرط الكسر}}$$

$x \neq 1$

$D =]0,1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$)

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

---

12) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 + \ln(1) - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$)

$$f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x = x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

---

3) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

-1 لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C ؟

$$f(x) - y_d = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1) = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_d] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}\right] = 0$$

ومنه $d: y = x + 1$ مقارب مائل للخط C عند الـ $+\infty$.

Scanned by CamScanner

2- ادرس الوضع النسبي للخطين C و d.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_d = 0 \\ \dfrac{-\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} - \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_d$	▨	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	▨	d فوق C	$(1,2)$	d تحت C	

4) في كل مما يأتي، اثبت أن التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'

$f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$; $I =]2, +\infty[$

لدينا التابع $x \longmapsto x - 2$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln(x-2)$ اشتقاقي على I.

والتابع $x \longmapsto x + 2$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln(x+2)$ اشتقاقي على I.

ومنه فإن f تابع اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين على I.

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2-x+2}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4}$$

$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $I =]1, +\infty[$

لدينا التابع $x \longmapsto \frac{x-1}{x+1}$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ اشتقاقي على I

ومنه فإن f تابع اشتقاقي على I ، نكتب f بالشكل: $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $I =]0, +\infty[$

لدينا التابع $x \longmapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي وموجب تماماً على I

والتابع $x \longmapsto 1 + \frac{1}{x}$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I.

ومنه فإن f تابع اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين على I.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

$f(x) = \ln(1 + x^2)$, $I = R$

لدينا التابع $x \longmapsto 1 + x^2$ اشتقاقي وموجب تماماً على I

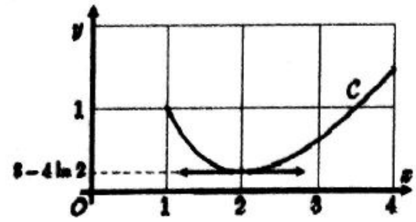
ومنه $\ln(1 + x^2)$ اشتقاقي على I ومنه f اشتقاقي على I.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Scanned by CamScanner

تمرينات ومسائل صفحة 171

1) نتأمل تابعاً f معرفاً على المجال $I = [1,4]$ وفق $f(x) = ax + b + \ln x$ حيث c و b و a اعداد حقيقية نهدف إلى تعيينها. نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع.



1- اثبت ان f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $\acute{f}(x)$.

$$f(x) = ax + b + \ln x$$

لاحظ ان: $ax + b$ ابع صحيح فهو اشتقاقي على R.

$c\ln x$ ابع لوغاريتمي اشتقاقي على $]0,+\infty[$

إذاً $f(x)$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ فهو اتقاقي على اي مجال جزئي منه، فهو اشتقاقي على $I = [1,4]$.

$$\acute{f}(x) = a + \frac{c}{x}$$

2- استفد من المعلومات المدونة على الشكل لإثبات ان :

$$2a + b + c\ln 2 = 3 - 4\ln 2 \quad , \quad 2a + c = \quad , \quad a + b = 1$$

* لخط البياني يمر بالنقطة $(1,1)$ فإن :

$f(1) = 1$

$a(1) + b + c\ln(1) = 1$

$\boxed{a + b = 1}$

* المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 2$ افقي عندئذ : $\acute{f}(2) = 0$

$a + \frac{c}{2} = 0 \qquad (\times 2)$

$\boxed{2a + c = 0}$

* الخط البياني يمر بالنقطة $(2, 3 - 4\ln 2)$ فإن:

$f(2) = 3 - 4\ln 2$

$a(2) + b + c\ln(2) = 3 - 4\ln 2$

$\boxed{2a + b + c\ln 2 = 3 - 4\ln 2}$

3- جد قيم c و b و a ثم اكتب عبارة $f(x)$:

① $a + b = 1 \longrightarrow b = 1 - a$

② $2a + c = 0 \longrightarrow c = -2a$

③ $2a + b + c\ln 2 = 3 - 4\ln 2$

نعوض في ③

$2a + 1 - a - 2a\ln 2 = 3 - 4\ln 2$

$a - 2a\ln 2 = 2 - 4\ln 2$

$a(1 - 2\ln 2) = 2(1 - 2\ln 2)$

$a = \frac{2(1 - 2\ln 2)}{1 - 2\ln 2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$b = 1 - a = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

$c = -2a = -2(2) = -4 \Rightarrow \boxed{c = -4}$

اصبح: $\boxed{f(x) = 2x - 1 - 4\ln x}$

---

2) ليكن a, b عددين حقيقيين. في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$. النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من C ، والمماس للخط البياني C في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$ استفد من هذه المعطيات لتعين a و b.

$f(x) = ax + b \quad \frac{1}{x}\ln x$

$A(1,0) \in C \Rightarrow f(1) = 0$

$\boxed{a + b = 0} \qquad (*)$

المماس في A يوازي $y = 3x + 2$ إذاً $m_y = m_{\text{مماس}}$

$m_y = 3 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \acute{f}(1) = 3$

$\acute{f}(x) = a + \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}.\frac{1}{x}\right)$

$\acute{f}(x) = a - \frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}$

$\acute{f}(1) = 3$

$a - 1.\ln(1) + 1 = 3$

$a + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

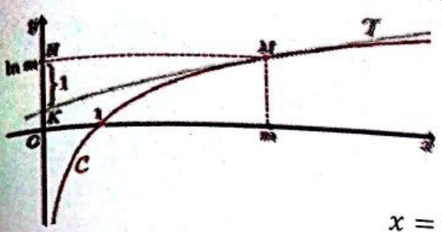
نعوض قيمة a في $(*)$:

$2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$

$$\boxed{f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x}\ln x}$$

Scanned by CamScanner

3) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، رسمنا C هو الخط البياني للتابع $\ln$ لتكن M نقطة من C فاصلتها m.



-1 جد بدلالة m معادلة للمماس T للخط C في النقطة M.

$$x = m \;:\; f(m) = \ln(m) \quad : M(m, \ln m)$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \acute{f}(m) = \frac{1}{m}$$

$$y - y_m = \text{ميل}\,(x - x_m)$$

معادلة المماس من الشكل :

$$y - \ln m = \frac{1}{m}(x - m) \Rightarrow y = \frac{x}{m} - 1 + \ln m$$

-2 لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس T مع هذا المحور.

a) اثبت ان ترتيب النقطة K يساوي $\ln(m) - 1$ أياً يكن $m > 0$.

Kنقطة تقاطع المماس مع $y\acute{y}$ اي $x = 0$نعوض في معادلة المماس:

$$y = 0 - 1 + \ln(m) \;\Rightarrow\; y = \ln(m) - 1$$

$$K(0, \ln(m) - 1)$$

b) استنتج ان: $\overrightarrow{KH} = \vec{j}$.

$$\overrightarrow{KH} = (x_H - x_K)\vec{i} + (y_H - y_K)\vec{j}$$
$$= (0 - 0)\vec{i} + (\ln(m) - \ln(m) + 1)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{KH} = \vec{j}$$

c) استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط C من نقطة كيفية منه.

بفرض M نقطة ما من C نأخذ مسقطها على محور التراتيب وليكن H. ثم ناخذ صورة H وفق انسحاب $-\vec{j}$ ولتكن K فيكون المماس للخط C في النقطة M هو المستقيم (MK).

---

4) كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان.

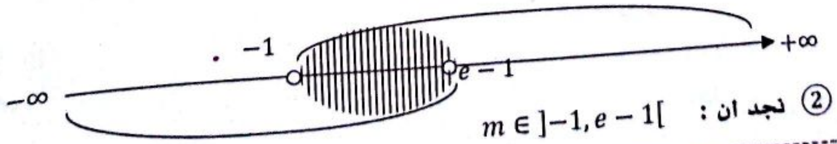
المعادلة معرفة عندما: $m + 1 > 0$ ومنه $\boxed{m > -1}$ ①

$$x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\ln(m+1) = 4[1 - \ln(m+1)]$$

يكون للمعادلة جذران مختلفان يجب ان يكون $\Delta > 0$

$$4[1 - \ln(m+1)] > 0 \quad (\div 4)$$
$$1 - \ln(m+1) > 0$$
$$1 > \ln(m+1)$$
$$\ln e^1 > \ln(m+1)$$
$$e > m + 1$$
$$\boxed{e - 1 > m} \quad ②$$



من تقاطع ① و ② نجد ان : $m \in]-1, e-1[$

5) لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

-1 جد نهاية هذه المتتالية:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 1 = 0$$

-2 نضع $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \dots \dots + u_n$

a) اثبت ان $S_n = \ln(n+1)$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \dots \dots + u_n$$
$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln\left[2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right]$$
باستخدام خواص اللوغاريتم

$$S_n = \ln(n+1)$$

b) ما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

---

6) اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $f: x \mapsto x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y = x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x + 1 \;= -x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1$$
$$= -x.\frac{1}{x}.\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} + 1 = -\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} + 1$$

نجري تغيير في المتحول : نفرض $\frac{1}{x} = t$ ، $x \to +\infty \;\Rightarrow\; t \to 0$

$$f(x) - y = -\frac{\ln(1+t)}{t} + 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{t\to0}\left[-\frac{\ln(1+t)}{t} + 1\right] = -1 + 1 = 0$$

مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ ، و معادلته :

$$f(x) - y = 0 \;\Rightarrow\; y = f(x) \;\Rightarrow\; \boxed{y = x - 1}$$

---

7) نتأمل التابع f المعرف على $I = R_+^*$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x), & x > 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

احسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x}$ واستنتج ان f اشتقاقي عند الصفر

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2(1 - \ln x) - 0}{x} = x(1 - \ln x) = x - x\ln x$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right) = 0 - 0 = 0 \in R$$

ومنه حسب تعريف قابلية الاشتقاق يكون f اشتقاقي عند (0) من اليمين .

Scanned by CamScanner

التابع اللوغاريتمي النيبري

8) التوابع الآتية معرفة على $I = \mathbb{R}_+^*$. ادرس تغيرات كل منها وارسم خطه البياني:

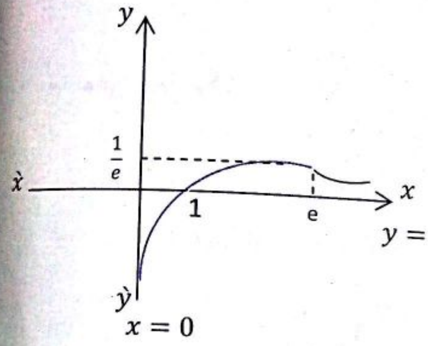
1) $f: x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{-\infty}{+0} = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{f}(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ \acute{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e} : f(e) = \frac{1}{e}$$



x	0			e			$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$		0

نقطة مساعدة : C قطع $x\grave{x}$ أي $y = 0$

$$\frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 : x = 1$$

إذاً $A(1,0)$ نقطة تقاطع C مع $x\grave{x}$

---

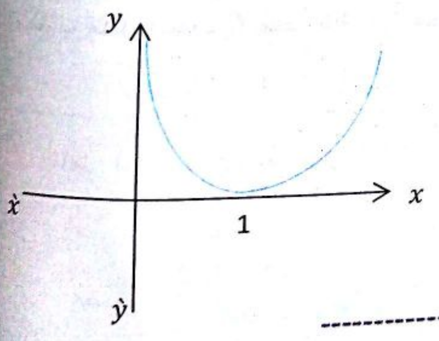
2) $f: x \longmapsto (\ln x)^2$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{f}(x) = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x} \\ \acute{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \quad : \quad f(1) = 0$$



x	0		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

---

3) $f: x \longmapsto \frac{1}{x} + \ln x$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

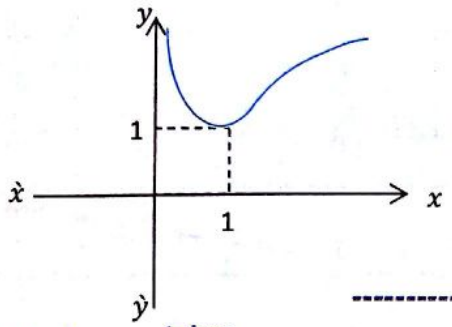
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = ?$ $\quad$ (حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$)

$$f(x) = \frac{1 + x\ln x}{x}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow +\infty$ يقع على يمين مقاربه عند C و $y\acute{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\acute{f}(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}\\ \acute{f}(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} : f(1) = 1$$



x	0		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

---

4) $f: x \longmapsto \frac{1-\ln x}{x}$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow +\infty$ يقع على يمين مقاربه عند C و $y\acute{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

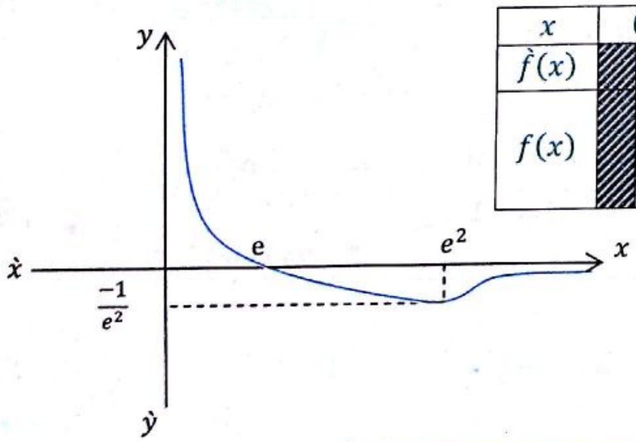
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =? \quad \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow +\infty$ عند $x\acute{x}$ مقارب منطبق على $y = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\acute{f}(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}.x - 1(1-\ln x)}{x^2} = \dfrac{-1-1+\ln x}{x^2} = \dfrac{-2+\ln x}{x^2}\\ \acute{f}(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}-2 + \ln x = 0\\ \ln x = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = e^2}\end{array}$$

$$\boxed{x = e^2} \quad : f(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^2} = \frac{1-2}{e^2} = \frac{-1}{e^2}$$



x	0		e^2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{e^2}$	↗	0

نقطة مساعدة : C قطع $x\acute{x}$ أي $y = 0$

$\frac{1-\ln x}{x} = 0$

$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$(e, 0)$ نقطة تقاطع C مع $\acute{x}$

---

5) $f: x \longmapsto x - \ln x$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad +\infty$ يقع على يمين مقاربه عند C و $y\acute{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

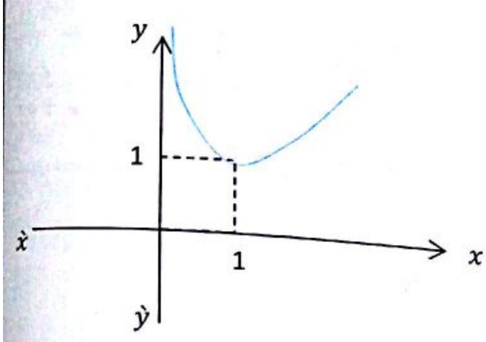
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =? \quad \left(+\infty - \infty\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

Scanned by CamScanner

$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-0) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} : f(1) = 1$



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	

6) $f: x \longmapsto x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty \Longrightarrow$ $x=0$ مقارب منطبق على $y\acute{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $(+\infty - \infty$ حالة عدم تعيين من الشكل$)$

$f(x) = x\left(x - 8 + \frac{8}{x} + \frac{6\ln x}{x}\right)$

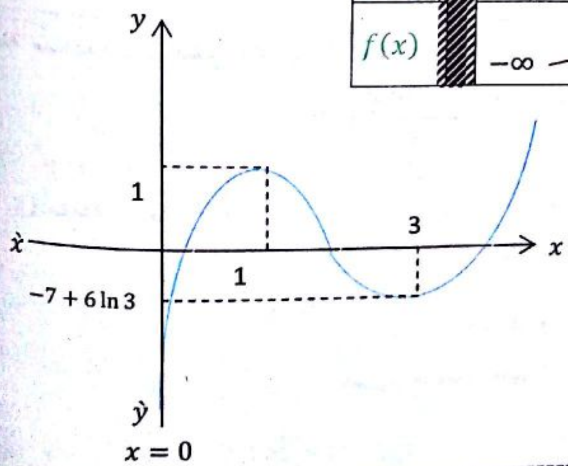
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 8 + 0 + 0) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x} \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ (x-3)(x-1) = 0 \end{array}$

إما $\boxed{x=3}$ $: f(3) = -7 + 6\ln 3$

أو $\boxed{x=1}$ $: f(1) = 1$

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow$	$-7+6\ln 3$	$\nearrow +\infty$	



9) في كل مما يلي، اثبت ان التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب $\acute{f}(x)$.

1) $f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$: $]e, +\infty[$

f معرف عندما: $\ln(\ln x) > 0$

$\ln(\ln x) > \ln 1$

ln متزايد تماماً: $\ln x > 1 \quad \Leftarrow \quad \ln x > \ln e$

$x > e$

ومنه f اشتقاقي على $]e, +\infty[$

$$\acute{f}(x) = \frac{[\ln(\ln x)]'}{\ln(\ln x)} = \frac{1}{\ln(\ln x)} . [\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln(\ln x)} . \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$
$$= \frac{1}{\ln(\ln x)} . \frac{1}{\ln x} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \, [\ln(\ln x)]}$$

---

2) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)$: $]1, +\infty[$

$(x+1)$ اشتقاقي وموجب تماماً على $]1, +\infty[$ ، $\ln x$ اشتقاقي وموجب تماماً على $]1, +\infty[$.

ومنه $\frac{x+1}{\ln}$ اشتقاقي وموجب تماماً على $]1, +\infty[$ إذا f اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$\acute{f}(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)'}{\frac{x+1}{\ln x}} = \frac{\frac{\ln x - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x)^2}}{\frac{x+1}{\ln x}} = \frac{\ln x - \frac{(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} . \frac{\ln x}{x+1}$$
$$= \frac{\frac{x \ln x - x - 1}{x}}{(\ln x)(x+1)} = \frac{x \ln x - x - 1}{x(x+1)(\ln x)}$$

---

10) حساب لوغاريتمي :

نفرض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحققان $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$ ، احسب $\frac{a}{b}$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln(a \times b)}{2}$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(a \times b)$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln(a \times b)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\sqrt{a \times b}$$
$$\frac{a+b}{3} = \sqrt{a \times b}$$
$$\frac{(a+b)^2}{9} = a.b$$
$$(a+b)^2 = 9\, a.b$$

$$a^2 + 2a.b + b^2 = 9a.b$$
$$a^2 - 7a.b + b^2 = 0 \qquad \div \ (a.b) \neq 0$$
$$\frac{a}{b} - 7 + \frac{b}{a} = 0 \qquad \text{نفرض } \left(\frac{a}{b} = t\right)$$
$$t - 7 + \frac{1}{t} = 0 \qquad (\times t)$$
$$t^2 - 7t + 1 = 0$$
$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45 \ \Rightarrow \ \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{5}$$
$$t_1 = \frac{a}{b} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} > 0$$
$$t_2 = \frac{a}{b} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} > 0$$

Scanned by CamScanner

11)حل جملة معادلتين :

a عدد حقيقي موجب تماماً، حل في R^2 جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x.y = a^2 & ① \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 & ② \end{cases}$$

لاحظ ان $a > 0$ (فرضاً) ، $\underbrace{x > 0 \;,\; y > 0}_{②\ \text{من}}$

$$x.y = a^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{a^2}{x}} \quad *$$

نعوض في المعادلة الثانية :

$$(\ln x)^2 + \left[\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)\right]^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2$$

$$(\ln x)^2 + [\ln a^2 - \ln x]^2 - \frac{5}{2}(\ln a)^2 = 0$$

$$(\ln x)^2 + [2\ln a - \ln x]^2 - \frac{5}{2}(\ln a)^2 = 0$$

$$(\ln x)^2 + 4(\ln a)^2 - 4\ln a \ln x + (\ln x)^2 - \frac{5}{2}(\ln a)^2 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ $(\ln x)$:

$$2(\ln x)^2 - 4\ln a \ln x + \frac{3}{2}(\ln a)^2 = 0$$

$$\Delta = 16(\ln a)^2 - 4(2)\left(\frac{3}{2}\right)(\ln a)^2 = 16(\ln a)^2 - 12(\ln a)^2 = 4(\ln a)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\ln a$$

إما : $\ln x = \dfrac{4\ln a - 2\ln a}{2(2)} = \dfrac{1}{2}\ln a = \ln a^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{a}$

$$\ln x = \ln\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a}} \xrightarrow{\text{نعوض في}*} y = \frac{a^2}{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{y = a\sqrt{a}}$$

او : $\ln x = \dfrac{4\ln a + 2\ln a}{2(2)} = \dfrac{3}{2}\ln a = \ln a^{\frac{3}{2}} = \ln\sqrt{a^3}$

$$\ln x = \ln\sqrt{a^3} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a^3}} \xrightarrow{\text{نعوض في}*} y = \frac{a^2}{\sqrt{a^3}} = a^2.a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{a}}$$

حل جملة المعادلتين هو : $(x,y) = (\sqrt{a^3}, \sqrt{a})$ ، $(x,y) = (\sqrt{a}, a\sqrt{a})$

---

12)مسألة وجود : أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحققان $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$

تدلنا هذه المساواة إلى وجود تابع معرف على $]0,+\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، لندرس تغيراته:

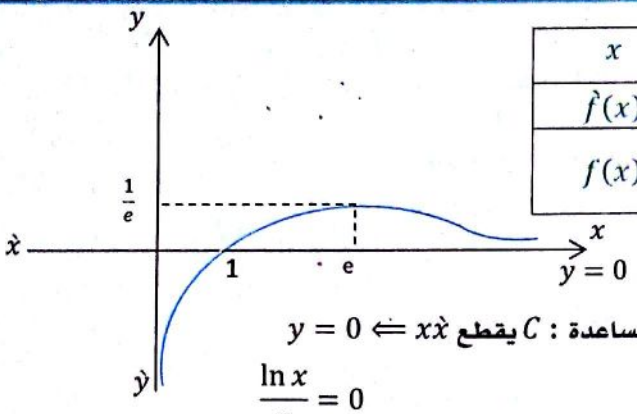
$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\acute{y}$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

$$\left.\begin{aligned} \acute{f}(x) &= \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ \acute{f}(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e} : f(e) = \frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



نقطة مساعدة : C يقطع $x\grave{x}$ $\Leftarrow y = 0$

$$\frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\ln x = 0$$
$$x = 1$$

C يقطع $x\grave{x}$ في $(1,0)$

لنناقش $f(x) = \lambda$

$\lambda \in]-\infty, 0[$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda = 0$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ للمعادلة حلين مختلفين

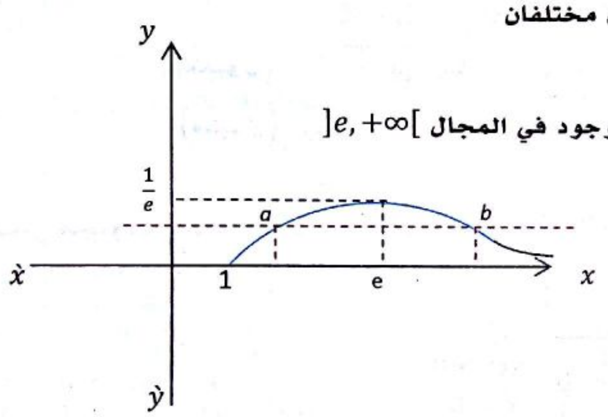
$\lambda = \frac{1}{e}$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ المعادلة مستحيلة الحل.

ومنه الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلان مختلفان

يجب ان يكون $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ ، بما ان $\lambda \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$.

فإن أحد الجذرين موجود في المجال $]1, e[$ والجذر الآخر موجود في المجال $]e, +\infty[$



$$f(a) = f(b) = \lambda$$
$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$
$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$$

---

14) حل كلاً من المعادلات الآتية :

1) $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

$|x+2| > 0$

$x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$

$D_1 = R\backslash\{-2\}$

$|x-2| > 0$

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D_2 = R\backslash\{2\}$

$$D = R\backslash\{-2,2\}$$
$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$$
$$\ln(|x+2|.|x-2|) = 0$$
$$\ln(|x^2-4|) = 0$$
$$\ln(|x^2-4|) = \ln 1$$
$$|x^2-4| = 1$$

$x^2 - 4 = -1$

$x^2 = 3$

$\boxed{x = +\sqrt{3}} \in D$ (مقبول)

$\boxed{x = -\sqrt{3}} \in D$ (مقبول)

$x^2 - 4 = 1$

$x^2 = 5$

$\boxed{x = +\sqrt{5}} \in D$ (مقبول)

$\boxed{x = -\sqrt{5}} \in D$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة: $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

Scanned by CamScanner

2) $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

$|x-2| > 0$

$x \neq 2$

$D_1 = R\setminus\{2\}$

$x+4 > 0$

$x > -4$

$D_2 = \ ]-4,+\infty[$

$$D = D_1 \cap D_2 =]-4,+\infty[\setminus\{2\} =]-4,2[\cup]2,+\infty[$$

$$\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$$

$$\ln[|x-2|(x+4)] = \ln 2^3$$

$$\ln[|x-2|(x+4)] = \ln 8$$

$$|x-2|(x+4) = 8$$

إما

$(x-2)(x+4) = 8$

$x^2 + 2x - 8 = 8$

$x^2 + 2x - 16 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-16) = 68 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{17}$

$x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{17}}{2} = \boxed{-1+\sqrt{17}}$ (مقبول)

$x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{17}}{2} = -1-\sqrt{17}$ (مرفوض)

أو

$(x-2)(x+4) = -8$

$x^2 + 2x - 8 = -8$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

إما $\boxed{x=0}$ (مقبول)

أو $\boxed{x=-2}$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة: $S = \{-2\ ,\ 0\ ,\ -1+\sqrt{17}\}$

---

3) $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$|2x+3| > 0$

$2x+3 \neq 0$

$x \neq \frac{-3}{2}$

$D_1 = R\setminus\left\{\frac{-3}{2}\right\}$

$|x-1| > 0$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D_2 = R\setminus\{1\}$

$|x| > 0$

$x \neq 0$

$D_3 = R\setminus\{0\}$

$$D = R\setminus\left\{\frac{-3}{2}, 0, 1\right\} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, 0\right[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$$

$$\ln(|2x+3||x-1|) = \ln|x|^2$$

$$\ln(|2x^2+x-3|) = \ln x^2$$

$$|2x^2+x-3| = x^2$$

$2x^2 + x - 3 = -x^2$

$3x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 36 = 37 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{37}$

$\boxed{x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}} \in D$ (مقبول)

$\boxed{x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{6}} \in D$ (مقبول)

$2x^2 + x - 3 = x^2$

$x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 12 = 13 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$

$\boxed{x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}} \in D$ (مقبول)

$\boxed{x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}} \in D$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة: $S = \left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, \frac{-1-\sqrt{37}}{6}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

Scanned by CamScanner

15)في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين :

1
$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ \ln x+\ln y=\ln 3 & (2) \end{cases}$$

المعادلة معرفة بشرط $\overbrace{x>0 \text{ و } y>0}^{(2) \text{ من}}$

لدينا

$$\ln x+\ln y=\ln 3$$
$$\ln(x.y)=\ln 3$$
$$x.y=3$$
$$\boxed{x=\frac{3}{y}} \quad (*)$$

نعوض في (1) :
$$\left(\frac{3}{y}\right)^2+y^2=10$$

نضرب بـ y^2
$$\frac{9}{y^2}+y^2=10$$
$$9+y^4=10y^2$$
$$y^4-10y^2+9=0$$
$$(y^2-9)(y^2-1)=0$$

إما $y^2-9=0$
$$(y-3)(y+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=3} \xrightarrow{(*) \text{ نعوض في}} \boxed{x=1} & \text{(مقبول)} \\ y=-3\notin D & \text{(مرفوض)} \end{cases}$$

أو $y^2-1=0$
$$(y-1)(y+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1} \xrightarrow{(*) \text{ نعوض في}} \boxed{x=3} & \text{(مقبول)} \\ y=-1\notin D & \text{(مرفوض)} \end{cases}$$

مجموعة حلول جملة المعادلتين هي : $(1,3)$, $(3,1)$

2
$$\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 & (1) \\ 3\ln x-5\ln y=4 & (2) \end{cases}$$

المعادلة معرفة بشرط $x>0$ و $y>0$

نضرب المعادلة (1) بـ 5 ونجمع مع المعادلة (2):

$$10\ln x+5\ln y=35$$
$$3\ln x-5\ln y=4 \quad +$$
$$13\ln x=39$$
$$\ln x=3$$
$$\boxed{x=e^3}$$

نعوض في (1):
$$2\ln e^3+\ln y=7$$
$$6+\ln y=7 \Rightarrow \ln y=1 \Rightarrow y=e$$

حل جملة المعادلتين هو: $(x,y)=(e^3,e)$

3
$$\begin{cases} (\ln x).(\ln y)=-12 & (1) \\ \ln(x.y)=1 & (2) \end{cases}$$

المعادلة معرفة بشرط $\underbrace{x>0 \text{ و } y>0}_{(1) \text{ من}}$

$$\ln(x.y)=1$$
$$\ln x+\ln y=1$$
$$\boxed{\ln y=1-\ln x} \quad (*)$$

Scanned by CamScanner

$\ln x.(1-\ln x) = -12$

نعوض في (1):

$\ln x - \ln^2 x = -12 \Rightarrow \ln^2 x - \ln x - 12 = 0$

$(\ln x - 4)(\ln x + 3) = 0$

$\ln x = 4$

$x = e^4$

نعوض في $(*)$:

$\ln y = 1 - \ln e^4 = 1 - 4$

$\ln y = -3$

$y = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

$(x,y) = \left(e^4, \frac{1}{e^3}\right)$

$\ln x = -3$

$x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

نعوض في $(*)$:

$\ln y = 1 - \ln e^{-3} = 1 + 3$

$\ln y = 4$

$y = e^4$

مجموعة حلول جملة المعادلتين هي : $(x,y) = \left(\frac{1}{e^3}, e^4\right)$ ، $(x,y) = \left(e^4, \frac{1}{e^3}\right)$

---

16) حل كلاً من المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$ والمتراجحة $(\ln\ )^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$.

شرط الحل $x > 0$

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

$(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$

$\ln x = 3$

$\ln x = \ln e^3$

$x = e^3$

$\ln x = -1$

$\ln x = \ln e^{-1}$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

حل المتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$ بالاستفادة من حل المعادلة السابقة:

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$		محققة		غير محققة		محققة	

حلول المتراجحة: $S = \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e^3, +\infty[$

---

17) ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

-1 a) تحقق ان $P(-1) = 0$.

$P(-1) = -2 + 5 - 1 - 2 = 0$

b) استنتج ان $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

$x = -1$ جذر للمعادلة $P(x)$

$(x+1)$ هو عامل من عوامل $P(x)$ بإجراء القسمة التقليدية نجد:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 + x - 2 & x+1 \\ \hline 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline 3x^2 + x - 2 & \\ 3x^2 + 3x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$

c) حل المتراجحة $P(x) \leq 0$.

ندرس إشارة $P(x)$:

$P(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$

إما $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ او $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x = \frac{-3-5}{4} = -2$ ، $x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x) \leq 0$		محققة		غير محققة		محققة		غير محققة	

حلول المتراجحة: $]-\infty,-2] \cup \left[-1,\frac{1}{2}\right]$

2- استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

$$\overbrace{2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)}$$

$x > 0$
$]0,+\infty[$

$2x+5 > 0$
$x > \frac{-5}{2}$
$\left]-\frac{5}{2},+\infty\right[$

$2 - x > 0$
$x < 2$
$]-\infty,+2[$

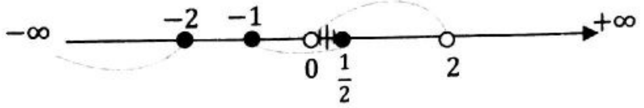
ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي $\boxed{D =]0,2[}$ (1)

$2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$
$\ln x^2 + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$
$\ln[x^2(2x+5)] \leq \ln(2-x)$
$\ln(2x^3+5x^2) \leq \ln(2-x)$

$2x^3 + 5x^2 \leq 2 - x$
$2x^3 + 5x^2 + x - 2 \leq 0$
$P(x) \leq 0$

من جدول الطلب السابق نجد ان : $\boxed{x \in]-\infty,-2] \cup \left[-1,\frac{1}{2}\right]}$ (2)

من تقاطع (1) و (2) نجد:



إذاً حل المتراجحة السابقة: $\left]0,\frac{1}{2}\right]$

---

18) ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

1) اثبت أن f تابع فردي.

$*x \in]-1,1[\Rightarrow -x \in]-1,1[$ "محقق"

$*f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1} \overset{\text{خواص اللوغاريتم}}{\cong} -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$

فالتابع f فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

2) a) اثبت ان f اشتقاقي على I.

$x \mapsto \left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ تابع اشتقاقي وموجب تماماً على المجال I ومنه فإن f اشتقاقي على I.

b) ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$.

$f(0) = \ln(1) = 0$

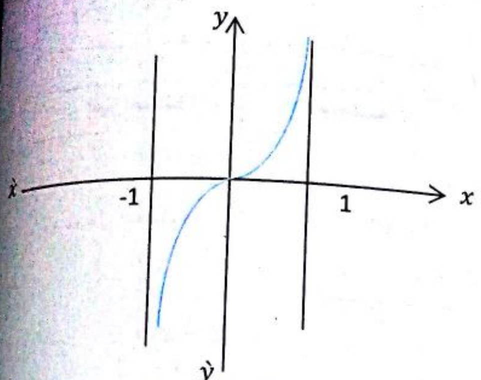
$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow \quad +\infty$ عند $+\infty$ مقاربه يسار على يقع C و $y\acute{y}$ يوازي مقارب $x = 1$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)} = \frac{(1)(1-x)-(-1)(x+1)}{(1-x)^2} \times \frac{(1-x)}{(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

$f'(x)$ لا ينعدم و البسط موجب والمقام موجب حسب مجموعة التعريف اي ان : $f'(x) > 0$

Scanned by CamScanner



x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

3) ارسم الخط البياني للتابع f.
التابع f فردي خطهالبياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ.
نرسم C_1الخط البياني للتابع f على المجال $[0,1[$
ونرسم C_2 نظير C_1 بالنسبة للمبدأ.
فيكون $C = C_1 \cup C_2$ هو الخط البياني للتابع f على I

---

19)ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I وارسم خطه البياني:

1) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $\quad , I =]1, +\infty[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1, +\infty[$

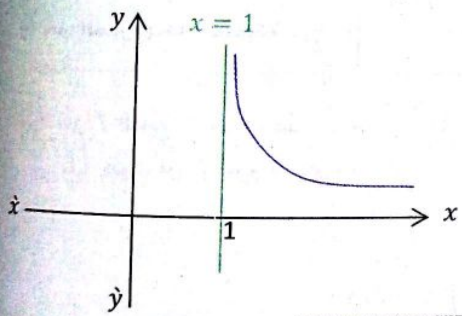
$\lim_{x \to 1^{>}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow$ $x = 1$ مقارب شاقولي يوازي $y\acute{y}$ و C على يمين المقارب عند $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

$$f'(x) = \frac{-\left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right)}{x^2\ln^2 x} = \frac{-\ln x - 1}{x^2 \ln^2 x}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \notin I$

$f'(x)$ لا ينعدم و البسط سالب و المقام موجب أي ان $f'(x) < 0$



x	1	$+\infty$
$f'(x)$		−
$f(x)$	$+\infty$	0

---

2) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ $\quad , I = R$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

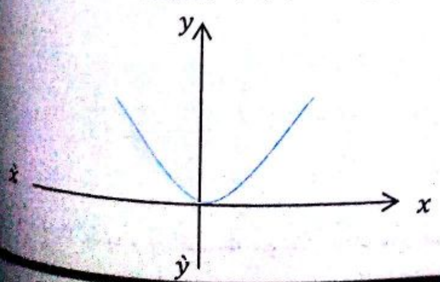
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} : f(0) = \ln(1) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



3) $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, $I=]0,+\infty[$

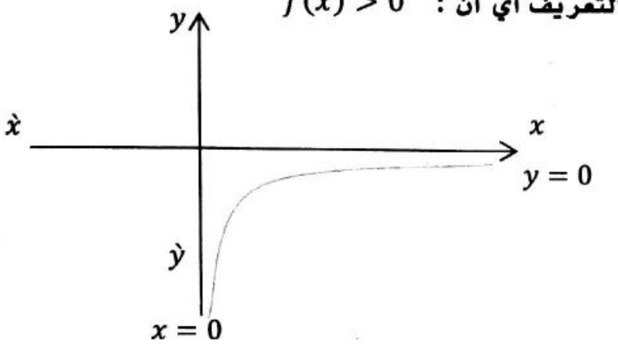
f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow$ $x=0$ مقارب شاقولي منطبق على $y\acute{y}$ و C يقع على يمين المقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \Rightarrow$ $y=0$ مقارب افقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$\acute{f}(x)$ لا ينعدم و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف اي ان : $\acute{f}(x)>0$



x	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow 0$

---

20)في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

-1 اثبت ان $g(x)\le f(x)$ أيا يكن x من I.

$$\begin{aligned}h(x)&=g(x)-f(x)\\&=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\\&=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x+1}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to-1} h(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad \left[\lim\limits_{x\to-1}(x+1)\ln(x+1)=0\right.$ علماً ان$\left.\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$

$h(x)$ اشتقاقي على المجال $]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned}\acute{h}(x)&=\acute{g}(x)-\acute{f}(x)\\&=\left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right)-\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)}\\&=\frac{1-(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{1-x-1}{(x+1)^2}=\frac{-x}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

$\acute{h}(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$: $h(0)=0$

x	-1		0		$+\infty$
$\acute{h}(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ ان: $\underbrace{h(x)}\le 0$ أياً يكن $x\in]-1,+\infty[$

$g(x)-f(x)\le 0$

$g(x)\le f(x)$

Scanned by CamScanner

-2 اثبت ان C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

*لنثبت ان $f(0) = g(0)$

$$(f(0) = 0\ ,\ g(0) = 0) \Rightarrow f(0) = g(0) = 0 \qquad (1)$$

إذاً النقطة التي فاصلتها $x = 0$ هي نقطة مشتركة بين الخطين C_f و C_g

*لنثبت ان $f'(0) = g'(0)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(0) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1$$

نجد ان $\qquad (2) \qquad g'(0) = f'(0) = 0$

من (1) و (2) نجد ان الخطين C_f و C_g متماسان في المبدأ إذاً يقبلان مماساًمشتركاً ووجدنا ان ميله $= 1$

(وبما انه يمر من مبدأ الإحداثيات)إذاً معادلته من الشكل $y = x$

-3 ادرس تغيرات كل من f و g وارسم الخطين C_f و C_g مستفيداً من رسم المماس المشترك.

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad : D =]-1, +\infty[$$

f معرف واشتقاقي على المجال $]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = -1$ مقارب $//yy'$ و C_f على يمين المقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$f'(x)$ لا ينعدم و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف $f'(x) > 0$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \qquad : D =]-1, +\infty[$$

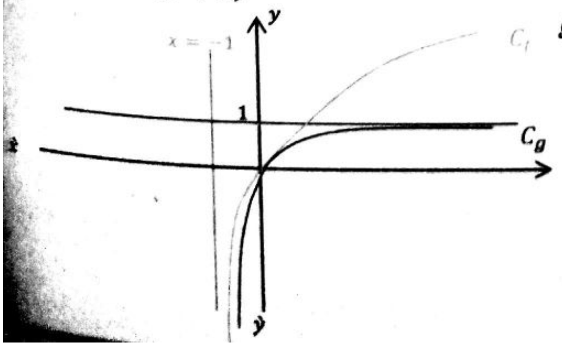
g معرف واشتقاقي على المجال $]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = -1$ مقارب $//yy'$ و C_g على يمين المقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 \quad \Rightarrow$ $y = 1$ مقارب افقي $//xx'$ عند $+\infty$

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$g'(x)$ لا ينعدم و البسط موجب و المقام موجب اي ان $g'(x) > 0$



x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$-\infty \nearrow$	1

Scanned by CamScanner

21) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]1, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \implies$ $x = 1$ مقارب يوازي $y\acute{y}$ و C يقع على يمين المقارب عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\acute{f}(x) = 1 + 2\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = 1 + \frac{2(-1)}{x(x-1)}$$

$$= 1 + \frac{-2}{x(x-1)} = 1 - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)-2}{x(x-1)} = \frac{x^2-x-2}{x(x-1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)}$$

$\acute{f}(x) = 0 \implies$ إما $\boxed{x = 2}$: $f(2) = 3 + 2\ln 2$

او $x = -1 \notin I$ (مرفوض)

x	1		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$3 + 2\ln 2$	↗	$+\infty$

2- اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط في جوار $+\infty$

لنوجد : $f(x) - y_d$

$$f(x) - y_d = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x - 1$$

$$f(x) - y_d = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - y_d) = 0 \implies$ إذاً $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d

$$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

$$f(x) - y_d > 0$$

إذاً فوق المقارب .

الوضع النسبي: $x > x - 1$

$$\frac{x}{x-1} > 1$$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

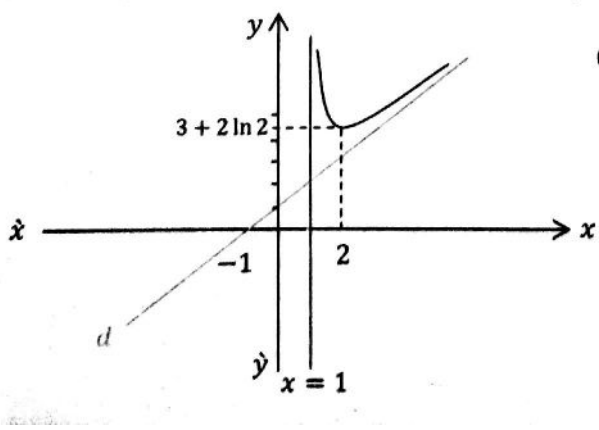
4- ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

رسم المقارب:

$d: y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0

$(0,1)$, $(-1,0)$



التابع اللوغاريتمي النيبري

22) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1- اثبت ان f متزايد تماماً على I.

f معرف و مستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$= 1 + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{(x+1)}} = 1 + \frac{+1}{x(x+1)} = \frac{x(x+1)+1}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x}$$

$$= 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

$1 - 4(1)(1) = -3 < 0$ (مستحيلة الحل)

اي ان $f'(x)$ لا ينعدم ،وإشارة البسط دائماً توافق إشارة x^2 والمقام موجب حسب مجموعة التعريف

اي ان $f'(x) > 0$ فالتابع f متزايد تماماً على I.

2- اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

$$- y_d = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x + 4$$

$$- y_d = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$\lim (f(x) - y_d) = 0 \implies$ إذاً $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

لاحظ ان $x < x + 1$

$$\frac{x}{x+1} < 1$$

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1)$$

$$f(x) - y_d < 0$$

$\Leftarrow$ C تحت المقارب d

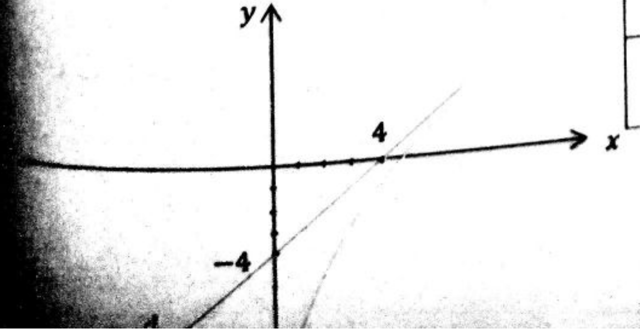
4- ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

$x = 0$ مقارب منطبق على yy' و C يقع على يمين المقارب $\Leftarrow$ $\lim f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

من (1) وجدنا ان : $f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$

x	0	
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty$ ↗ $+\infty$



$d: y = x - 4$

x	0	4
y	-4	0

$(0,-4)$, $(4,0)$

التابع اللوغاريتمي النيبري

22) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1- اثبت ان f متزايد تماماً على I.

f معرف و مستمر واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$\acute{f}(x) = 1 + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{(x+1)}} = 1 + \frac{+1}{x(x+1)} = \frac{x(x+1)+1}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + x + 1 = 0$$

$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$ (مستحيلة الحل)

اي ان $\acute{f}(x)$ لا ينعدم ،وإشارة البسط دائماً توافق إشارة x^2 والمقام موجب حسب مجموعة التعريف

اي ان $\acute{f}(x) > 0$ فالتابع f متزايد تماماً على I.

2- اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y_d = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x + 4$$

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0 \quad \Rightarrow$$

إذاً $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

لاحظ أن $x < x + 1$

$$\frac{x}{x+1} < 1$$

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1)$$

$$f(x) - y_d < 0$$

$\Leftarrow$ C تحت المقارب d

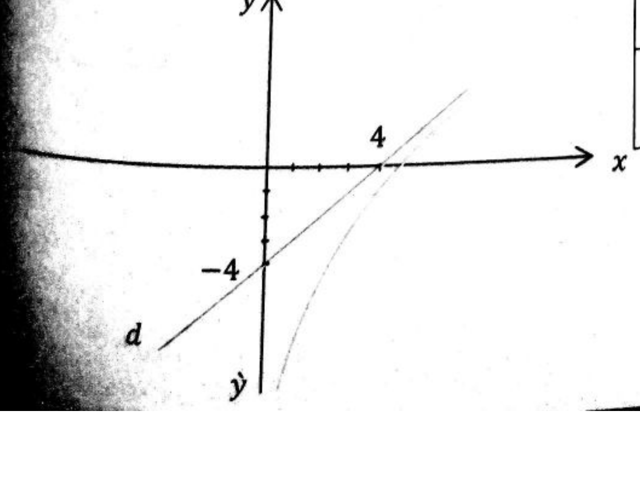
4- ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\acute{y}$ و C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

من (1) وجدنا ان : $\acute{f}(x) = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$

x	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow +\infty$



$d: y = x-4$

x	0	4
y	-4	0

$(0, -4)$, $(4, 0)$

Scanned by CamScanner

23) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \implies$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\acute{y}$ و C على يمين المقارب

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\acute{f}(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x^2 + x} = \frac{2x^2 + x + 1}{2x^2 + x}$$

$\acute{f}(x) = 0 \to 2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0$ (مستحيلة الحل)

اي ان $\acute{f}(x)$ لا ينعدم وإشارة البسط دائماً توافق إشارة x^2 والمقام موجب حسب مجموعة التعريف اي ان $\acute{f}(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$

2. اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y_d = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - x + \ln 2$$
$$= \ln 2 - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = 0 \implies$ $d: y = x - \ln 2$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

3. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

$$f(x) - y_d = \ln 2 - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln 2 - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{\frac{2x+1}{x}}\right) = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

نلاحظ ان: $2x < 2x + 1$

$\frac{2x}{2x+1} < 1 \qquad \div (2x+1)$

$\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0$

$f(x) - y_d < 0 \implies$ C تحت المقارب d

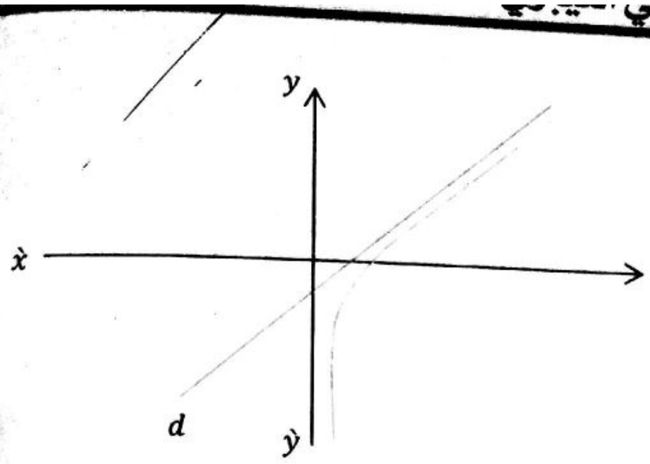
4. اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1, 2[$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1 - \ln 3 < 0 \\ f(2) &= 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0$$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد ينتمي للمجال $]1,2[$

Scanned by CamScanner



5. ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C .

$d: y = x - \ln 2$

x	0	$\ln 2$
y	$-\ln 2$	0

$(0, -\ln 2)$, $(\ln 2, 0)$

---

24) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]4, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = 5 - 2x + 3 \ln \left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

1- اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب للخط C

$$f(x) - y_d = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) - (5 - 2x) = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_d] = 3\ln(1) = 0 \Rightarrow$ $d: y = 5 - 2x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

2- ادرس الوضع النسبي للخط C ومقاربه d.

ضمن مجموعة التعريف $]4, +\infty[$ نلاحظ ان : $x + 1 > x - 4$

$(x - 4 > 0)$ ضمن مجموعة التعريف I : $\frac{x+1}{x-4} > 1$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$$

$$3\ \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$$

$f(x) - y_d > 0 \Rightarrow$ C فوق المقارب d

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني .

f معرف واشتقاقي على المجال $]4, +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to4 \\ >}} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = 4$ مقارب شاقولي لـ C و C يقع على يمين المقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -2 + 3\frac{\frac{x-4-(x+1)}{(x-4)^2}}{\frac{x+1}{x-4}} = -2 + 3\frac{x-4-x-1}{(x-4)(x+1)}$$

$$f'(x) = -2 - \frac{15}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-2(x^2 - 3x - 4) - 15}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-2x^2 + 6x + 8 - 15}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-2x^2 + 6x - 7}{x^2 - 3x - 4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6x - 7 = 0$$

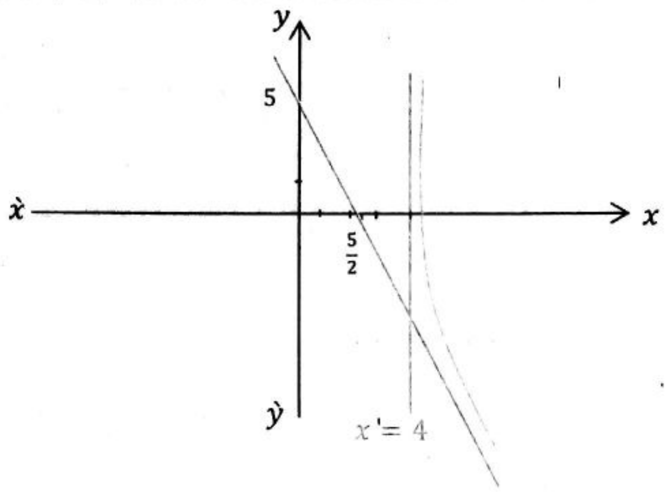
$\Delta = 36 - 4(-2)(-7) = 36 - 56 = -20 < 0$ (مستحيلة الحل)

اي ان $f'(x)$ لا ينعدم و إشارة البسط توافق دائماً إشارة x^2 ،و المقام موجب حسب مجموعة التعريف

اي ان $f'(x) < 0$

Scanned by CamScanner

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$
$f(x)$	▨	$+\infty \searrow -\infty$



$d: y = 5 - 2x$

x	0	$\frac{5}{2}$
y	5	0

$$(0,5)\quad,\quad \left(\frac{5}{2},0\right)$$

4- اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله يساوي 1.

fمستمر ومتناقص تماماً على $]4,+\infty[$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) \times \lim_{x\to +\infty} f(x) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في $]4,+\infty[$ نلاحظ:

$$\left.\begin{aligned} f(5) &= 5 - 10 + 3\ln\left(\frac{6}{1}\right) = -5 + 3\ln 6 > 0 \\ f(6) &= 6 - 12 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right) = -6 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right) < 0 \end{aligned}\right\} f(5)\times f(6) < 0$$

إذاً $f(x)$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]5,6[$

---

25)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق : $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

1. اثبت ان f متزايد تماماً على I.

$x^2 - 1$ اشتقاقي على $]1,+\infty[$ وهو موجب تماماً عليه ، إذاً $\ln(x^2-1)$ اشتقاقي على $]1,+\infty[$

و اشتقاقي على $]1,+\infty[$ ، وبالتالي f اشتقاقي على المجال $]1,+\infty[$ ومنه:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$$

$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x+1) = 0$$
$$x = 1 \notin I \qquad x = -1 \notin I$$

وبالتالي $x^2 - 1 > 0$

اياً كان $x \in I$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 - 2 = 0$$
$$(x+1)^2 - 2 = 0$$
$$\left(x + 1 - \sqrt{2}\right)\left(x + 1 + \sqrt{2}\right) = 0$$
$$x + 1 = \sqrt{2} \qquad x + 1 = -\sqrt{2}$$
$$x = \sqrt{2} - 1 \notin I \qquad x = -\sqrt{2} - 1 \notin I$$

وبالتالي $x^2 + 2x - 1 > 0$

اياً كان $x \in I$

وبالتالي $f'(x) > 0$ اياً كان $x \in I$ ومنه fمتزايد تماماً على I.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+$
$f(x)$	▨	$-\infty \nearrow +\infty$

Scanned by CamScanner

2. اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α .

f معرف واشتقاقي على $]1, +\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

fمستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1, +\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً في المجال $]1, +\infty[$

3. اثبت ان $1 < \alpha < \sqrt{1 + \frac{1}{e}}$.

$$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left(1+\frac{1}{e}-1\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f\left(\sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1 > 0 \\ \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$$

---

26)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على العلاقة: $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

-1 تحقق ان f مجموعة تعريف f هي $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

f معرف بشرط : $\frac{2x}{x-1} > 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$\frac{2x}{x-1} > 0$	محققة		غير محققة		محققة

$D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

-2 احسب نهاية f عند كل طرف من اطراف مجموعة تعريفه D_f.

f معرف واشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = \ln 2$ مقارب// $x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\lim_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يسار المقارب

$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 1$ مقارب // $y\grave{y}$ و C يقع على يمين المقارب

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = \ln 2$ مقارب // $x\grave{x}$ عند $+\infty$

-3 اثبت ان f متناقص تماماً على كل من مجالي D_f :

f مستمر و اشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}}{\frac{2x}{(x-1)}} = \frac{\frac{-2}{x-1}}{2x} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0$$

Scanned by CamScanner

نلاحظ ان البسط سالب دوماً ، والمقام $2x(x-1)$ موجب ضمن مجموعة التعريف ، ومنه $\acute{f}(x) < 0$

فالتابع f متناقص تماماً على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

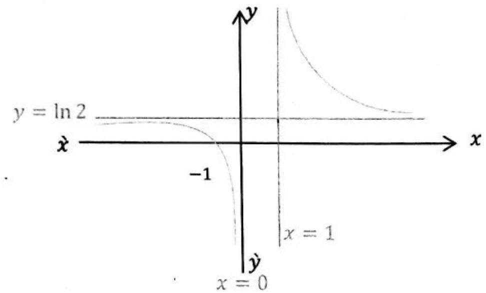
x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$			$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$

4- ارسم في معلم متجانس الخط البياني C

نقطة مساعدة : C قطع $x\acute{x}$ اي

$$y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x-1} = 1$$
$$2x = x - 1$$
$$x = -1$$

نقطة التقاطع مع $\acute{x}$: $(-1,0)$



---

27) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على العلاقة: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

1. تحقق ان مجموعة تعريف f و لتكن D_f هي $]1,3[$

$$\frac{x-1}{3-x} > 0$$

$x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$, $3 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x-1}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$\frac{x-1}{3-x} > 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$D_f =]1,3[$

2. اثبت ان $(4-x) \in D_f$ اياً يكن x من D_f:

$1 < x < 3$: نضرب بـ (-1)

$-1 > -x > -3$: نجمع 4

$4 - 1 > 4 - x > 4 - 3$

$3 > 4 - x > 1$

$\Rightarrow (4-x) \in \ ]1,3[\Rightarrow (4-x) \in D_f$

3. a) احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x) + f(x)$

$$f(4-x) + f(x) = \ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$
$$= \ln\left[\left(\frac{3-x}{-1+x}\right)\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\right] = \ln 1 = 0$$

Scanned by CamScanner

b) استنتج ان النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C.

تكون النقطة $M(x_0,y_0)$ مركز تناظر للخط البياني إذا تحقق الشرطان:

1) $(x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f)$ وهذا الشرط محقق لدى إثبات $(x \in D_f \Rightarrow 4 - x \in D_f)$.

2) $[f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)]$ وهذا الشرط محقق ايضاً لدى إثبات $f(4-x) + f(x) = 0$

وبتحقق هذان الشرطان تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C

4. احسب نهاية f عند كل طرف من اطراف مجموعة تعريفه D_f.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $-\infty$ عند $x = 1$ مقارب // $y\grave{y}$ و C يقع على يمين المقارب عند

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 3}} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ $+\infty$ عند $x = 3$ مقارب // $y\grave{y}$ و C يقع على يسار المقارب عند

5. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

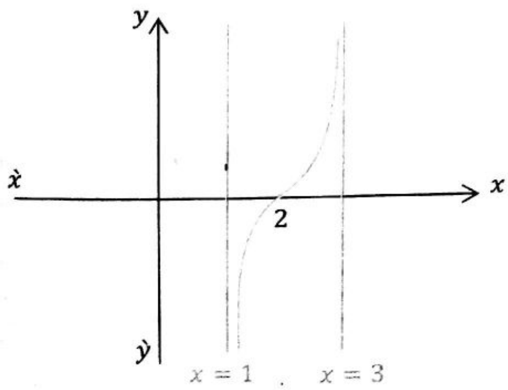
f معرف واشتقاقي على المجال $]1,3[$

$$\grave{f}(x) = \frac{\frac{3-x+x-1}{(3-x)^2}}{\frac{x-1}{(3-x)}} = \frac{2}{(x-1)(3-x)}$$

$\grave{f}(x)$ لا ينعدم ،و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف ، اي ان $\grave{f}(x) > 0$

x	1		3
$\grave{f}(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

6. ارسم الخط C في معلم متجانس.



نقطة مساعدة C قطع $x\grave{x}$ اي:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{3-x} = 1$$

$$x - 1 = 3 - x$$

$$2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

نقطة التقاطع مع $\grave{x}$: $(2,0)$

---

28) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال R_+^* وفق:

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1- احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط C.

$\lim f(x) = +\infty \quad \Rightarrow +\infty$ عند $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين المقارب عند $+\infty$

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow +\infty$ عند $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

Scanned by CamScanner

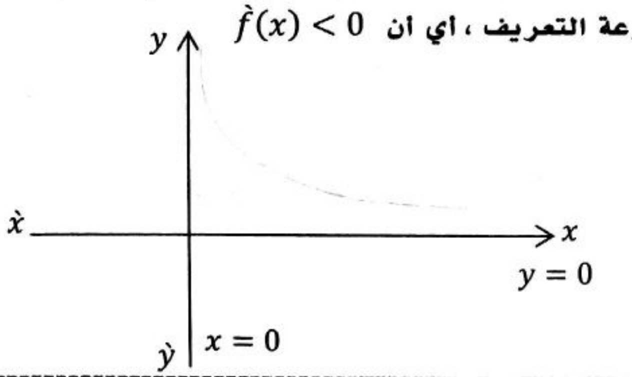
-2 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط C.

f معرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x^2+x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\acute{f}(x)$ لا ينعدم ،و البسط سالب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف ، اي ان $\acute{f}(x)<0$



x	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	▨	$-$
$f(x)$	▨	$+\infty \searrow 0$

---

29) في كل من الحالتين الآتيتين، ادرس التابع f على $I=R_+^*$ وارسم خطه البياني C

.1 $f(x)=(x+1)\ln x$

f معرف و اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=-\infty \Rightarrow$ $x=0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ عند $-\infty$ و C يقع على يمين المقارب

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\acute{f}(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x+1)=\ln x+1+\frac{1}{x}$$

((لمعرفة إشارة $\acute{f}$ ندرس تغيراته)) :

$$\acute{f}(x)=g(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$$

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} g(x)=?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty+\infty$)

$$g(x)=\frac{1}{x}(x\ln x+x+1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} g(x)=+\infty(0+0+1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

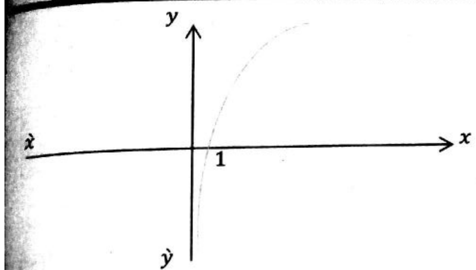
$$\acute{g}(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

$\acute{g}(x)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow \boxed{x=1}$: $g(1)=2$

x	0		1		$+\infty$
$\acute{g}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$g(x)$	▨ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ ان $g(x)=\acute{f}(x)$ موجب تماماً اياً كان $x\epsilon]0,+\infty[$
وبالتالي يصبح جدول تغيرات f كما يلي :

Scanned by CamScanner



x	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

نقطة مساعدة :نقطة التقاطع مع المحور $x\acute{x}$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \overbrace{(x+1)\ln x}^{} = 0$$

$x + 1 = 0 \qquad \ln x = 0$

$x = -1 \notin I \qquad x = 1$

نقطة التقاطع مع $\acute{x}$: $(1,0)$

.2 $f(x) = \frac{1}{x} + x\ln x$

f **معرف و اشتقاقي على** $]0, +\infty[$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\acute{y}$ عند $+\infty$ و C يقع على يمين المقارب

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{0 + \infty} = +\infty$

$$\acute{f}(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + x.\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$$

((لمعرفة إشارة $\acute{f}$ ندرس تغيراته)) :

$$\acute{f}(x) = g(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$$

g **معرف و اشتقاقي على** $]0, +\infty[$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \boxed{-\infty - \infty} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$$\acute{g}(x) = \frac{-(-2x)}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{2 + x^2}{x^3} > 0$$

$\acute{g}(x)$ **لا ينعدم ،و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف ، اي ان** $\acute{g}(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$\acute{g}(x)$		$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

نلاحظ من جدول تغيرات $g(x)$ **وجود قيمة** $x \in I$ **تحقق** $g(x) = 0$

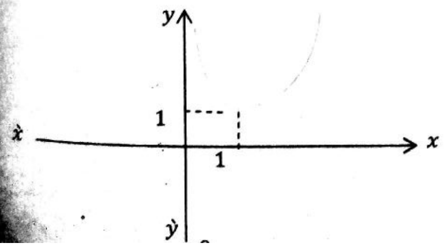
وبملاحظة ان $x = 1$ **هو حل للمعادلة اي** $g(1) = -1 + 0 + 1 = 0$

و هو حل وحيد للمعادلة كون متزايد تماماً على I

$\acute{f}(1) = g(1) = 0 \;\;,\;\; x = 1 : f(1) = 1$

فيكون جدول تغيرات f كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



Scanned by CamScanner

30)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

1- احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط C.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ عند $-\infty$ و C يقع على يمين المقارب

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

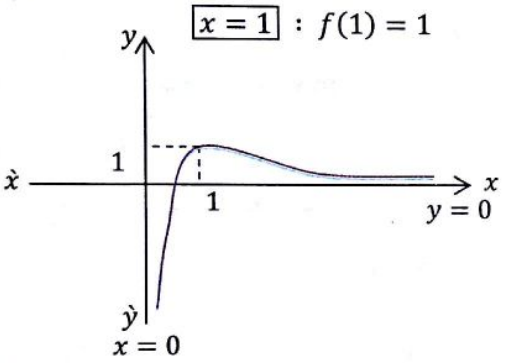
2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط C.

f معرف واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$\acute{f}(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - (1)(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0$$

$\boxed{x = 1}$: $f(1) = 1$



x	0		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

3- لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرفة كما يأتي :

M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل.

M_2 نقطة من C مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.

M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل.

M_4نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

a. احسب فواصل هذه النقاط.

- M_1 نقطة تقاطع Cمع محور الفواصل اي $f(x) = 0$

$$f(x_1) = 0 \Rightarrow \frac{1+\ln x_1}{x_1} = 0$$

$$1 + \ln x_1 = 0$$

$$\ln x_1 = -1$$

$$x_1 = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{1}{e}}$$

- M_2 نقطة من Cمماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات ،نكتب معادلة المماس في النقطة M_2

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_2 بالرمز x_2 فيكون :

$$f(x_2) = \frac{1+\ln x_2}{x_2}$$

فتكون نقطة التماس: $M_2\left(x_2, \frac{1+\ln x_2}{x_2}\right)$

ميل المماس :

$$m = \acute{f}(x_2) = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}$$

معادلة المماس T_{M_2} :

$$y - f(x_2) = m(x - x_2)$$

$$y = \frac{1+\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_2}{x_2^2}(x - x_2)$$

Scanned by CamScanner

المماس T_{M_2} يمر من المبدأ $(0,0)$ نعوض في المعادلة :

$$0 = \frac{1+\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_2}{x_2^2}(0 - x_2)$$
$$0 = \frac{1}{x_2} + \frac{\ln x_2}{x_2} + \frac{\ln x_2}{x_2}$$
$$0 = \frac{1}{x_2} + 2\frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$2\frac{\ln x_2}{x_2} = -\frac{1}{x_2}$$
$$\ln x_2 = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

◆ M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_4 بالرمز x_4

$$\hat{\hat{f}}(x_4) = \frac{-1 + 2\ln x_4}{x_4^3}$$
$$\hat{\hat{f}}(x_4) = 0 \Rightarrow -1 + 2\ln x_4 = 0$$
$$\ln x_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{x_4 = \sqrt{e}}$$

◆ M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل.

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_3 بالرمز x_3

ميل المماس $m = \hat{f}(x_3) = 0$

$$\frac{-\ln x_3}{x_3^2} = 0$$
$$\ln x_3 = 0$$
$$\boxed{x_3 = 1}$$

.b اثبت ان تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية ما أساسه ؟

$$x_1 = \frac{1}{e} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad , \quad x_3 = 1 \quad x_4 = \sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{e}} = \sqrt{e} \quad , \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e} \quad , \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$$

فواصل النقاط هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية اساسها $\sqrt{e}$.

---

31) ليكن f التابع المعرف على $D_f = R\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس

1. a) اثبت ان $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$ أياً يكن x من D_f.

$$f(1-x) = -\frac{1-x}{2} + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{-x}{1-x}\right| = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{-(x)}{-(x-1)}\right|$$
$$= \frac{-1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

$$f(x) + f(1-x) = \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$
$$= \ln\left[\left|\frac{x-1}{x}\right| \cdot \left|\frac{x}{x-1}\right|\right] - \frac{1}{2} = \ln(1) - \frac{1}{2}$$

$$f(x) + f(1-x) = -\frac{1}{2} \qquad (\div 2)$$

$$f(x) + f(1-x) \qquad 1$$

b) استنتج ان النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط C

الشرط الأول :

* بفرض $\left(a-h=\frac{1}{2}-h\right)\epsilon D=R\backslash\{0,1\}$

$$\frac{1}{2}-h\neq 0 \qquad \frac{1}{2}-h\neq 1$$

$$h\neq\frac{1}{2} \qquad h\neq-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}+h\neq 1 \qquad \frac{1}{2}+h\neq 0$$

إذاً نجد $\left(a+h=\frac{1}{2}+h\right)\in D=R\backslash\{0,1\}$ بالتالي الشرط الأول محقق .

* بالاستفادة من الطلب الأول وبفرض $x=\frac{1}{2}+h$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(1-\left(\frac{1}{2}+h\right)\right)}{2}=\frac{-1}{4}$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(\frac{1}{2}-h\right)}{2}=\frac{-1}{4}$$

و بالتالي الشرط الثاني محقق اي $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$

و منه النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط C.

2- ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

اولاً ندرس إشارة المقدار $u=\frac{x-1}{x}$

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$
$$x=0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & ; \quad x\epsilon]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ f_2(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{-x+1}{x}\right) & ; \quad x\epsilon]0,1[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}f_1(x)=\ln\left(\frac{-1}{0^-}\right)=+\infty \\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}f_2(x)=\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty\end{array}\right\}$$

$x=0$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}f_2(x)=-\frac{1}{2}+\ln(0)=-\infty \\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}f_1(x)=-\frac{1}{2}+\ln(0)=-\infty\end{array}\right\}$$

$x=1$ مقارب شاقولي يوازي $y\grave{y}$

Scanned by CamScanner

التابع $f(x)$ معرف و اشتقاقي على $R\setminus\{0,1\}$

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=-\frac{1}{2}+\dfrac{\frac{1.x-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{x-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)} \\ f_2'(x)=-\frac{1}{2}+\dfrac{\frac{-1.x-(-x+1)}{x^2}}{\frac{-x+1}{x}}=-\frac{1}{2}+\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{x}{-x+1}=-\frac{1}{2}+\frac{-1}{x(-x+1)} \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-x} \\ f_2'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-x} \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-x}=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{-1}{x^2-x}$$

$$x^2-x=2$$

$$x^2-x-2=0$$

$(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow$ إما $\boxed{x=2} \Rightarrow f_1(2)=-1+\ln\frac{1}{2}=-1-\ln 2$

او $\boxed{x=-1} \Rightarrow f_1(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$

3- اثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه d.

$$f(x)-y_d=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{2}x=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$f(x)-y_d=\begin{cases} f_1(x)-y_d=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & ;\ x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\\ f_2(x)-y_d=\ln\left(\frac{-x+1}{x}\right) & ;\ x\in]0,1[\end{cases}$$

و بالتالي نجد :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d)=\lim_{x\to-\infty}(f_1(x)-y_d)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)-y_d)=\ln 1=0$$

وبالتالي المستقيم $d: y=-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$ و $+\infty$

- لدراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_d$

$$f(x)-y_d=0 \Rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=0 \Rightarrow e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}=e^{\ln 1} \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right|=1$$

إما $\frac{x-1}{x}=1 \Rightarrow x-1=x \Rightarrow -1=0$ (مستحيلة الحل في R)

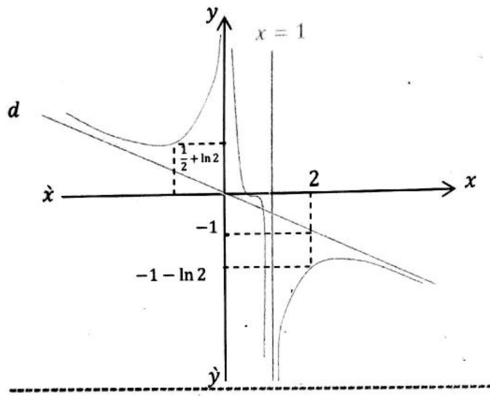
أو $\frac{x-1}{x}=-1 \Rightarrow x-1=-x \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}\right|=-\frac{1}{4}+\ln(1)=-\frac{1}{4}$$

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)-y_d$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
الوضع النسبي		C فوق d		C فوق d	$\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$	C تحت d		C تحت d	

4- ارسم في معلم واحد d ثم C



$$d: y = -\frac{1}{2}x$$

x	0	2
y	0	-1

$(0,0)$, $(2,-1)$

---

32) ليكن التابع المعرف على $D_f = R_+^*$ وفق $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس:

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

التابع f معرف و اشتقاقي على R_+^*

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2}.\frac{2\ln x}{x^2} = \frac{1}{2}.\frac{\ln x^2}{x^2}$$

نجري تغيير في المتحول : بفرض $u = x^2$

$f(x) = \frac{1}{2}.\frac{\ln u}{u}$. $(x \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \times 0 = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$ و بالتالي

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow 1 = 2\ln x \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}}$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2}\frac{\ln e}{e} = \frac{1}{2e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

1. لتكن A النقطة من الخط C التي فاصلتها 1.

2.

a) جد معادلة المستقيم T_A المماس للخط C في النقطة A

المماس في النقطة A حيث $x = 1$

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A(1,0)$$

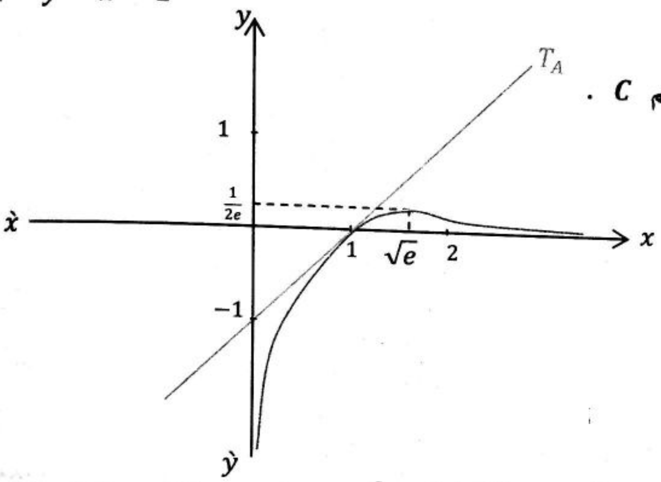
$$m_{T_A} = f'(1) = \frac{1 - 2\ln 1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$T_A: y - f(1) = m_{T_A}(x - 1)$$

وبالتالي:

$$T_A: \quad y - 0 = 1(x - 1)$$

$$T_A: \quad y = x - 1$$



b) ارسم في معلم واحد T_A ومقاربات C ثم C .

$T_A: y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0

$(0,-1) \quad , \quad (1,0)$

نقطة التماس هي : $A(1,0)$

3. لتكن B نقطة من الخط C فاصلتها u اثبت ان $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون المماس T_B للخط C في النقطة B موازياً للمستقيم Δ الذي معادلته $y = x$.

لنوجد ميل المماس T_B في النقطة $B(u, f(u))$

$$m_{T_B} = f'(u) = \frac{1 - 2\ln u}{u^3}$$

وبما ان T_B يوازي المستقيم $\Delta: y = x$ فلهما الميل نفسه $\Leftarrow$ $m_{T_B} = 1$

$$\frac{1 - 2\ln u}{u^3} = 1 \Rightarrow u^3 = 1 - 2\ln u \quad \Rightarrow \quad u^3 - 1 + 2\ln u = 0$$

و هوالشرط اللازم والكافي ليكون T_B موازي لـ Δ.

4. a) حل المعادلة $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$.

لناخذ التابع $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

ولندرس تغيرات $g(x)$ على مجموعة تعريفه $D =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 - 1 + 2\ln 0 = 0 - 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty - 1 + \infty = +\infty$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2\frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0 \quad \text{(حسب مجموعة التعريف)}$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$		$-\infty$ ↗ 0 ↗	$+\infty$

نلاحظ من جدول التغيرات وجود قيمة $x \in R$ تحقق $g(x) = 0$

نلاحظ ان التابع $g(x)$متزايد على مجال تعريفه .

$$g(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

وبما ان $0 \in g(]0, +\infty[)$ ، فالمعادلة $g(x) = 0$حل وحيد في المجال $]0, +\infty[$

نلاحظ ان $x = 1$ هو حل للمعادلة ، اي $g(x) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$

b) استنتج ان A هي النقطة الوحيدة من C يكون المماس فيها موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$

من الطلب الثالث $(u = 1)$ حل للمعادلة $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$

نستنتج أن T_Aهو المماس الوحيد للخط C عند النقطة A موازي لـ Δ.

---

33) في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

-1 a) احسب نهاية $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج ان f اشتقاقي عند $x = 0$.

$K(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, $D =]0, +\infty[$, $K(x)$معدل تغير $f(x)$

$$K(x) = \frac{\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) - 0}{x} = \frac{x}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x \ln x - \frac{3}{2}x\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} K(x) = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x = 0$ ومنه $f'(0) = 0$

b) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

c) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف و اشتقاقي على المجال $[0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$f'(x) = (x)\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= x \ln x - \frac{3}{2}x + \frac{x}{2}$$
$$= x \ln x - x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \ln x - x = 0$$
$$x(\ln x - 1) = 0$$

إما $\boxed{x = 0}$: $f(0) = 0$

او $\ln x = 1 \rightarrow \boxed{x = e} : f(e) = -\frac{1}{4}e^2$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}e^2$	↗	$+\infty$

Scanned by CamScanner

-2 ليكن T مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ منه، جد معادلة لهذا المماس.

نقطة التماس: $f(1) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

ولتكن نقطة التماس $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$

ميل المماس T_A: $m = f'(1) = -1$

معادلة المماس T_A: $y - f(1) = f'(1).(x-1)$

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$
$$y = -\frac{3}{4} + (-1)(x-1)$$
$$y = -x + \frac{1}{4}$$

-3 نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط C والمماس T ولهذا نعرف التابع h على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$ ادرس إشارة $h''(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثم إشارة $h(x)$

دراسة الوضع النسبي للخط C والمماس T.

$h(x) = f(x) - y_T \quad , \quad \left(y_T = -x + \frac{1}{4}\right)$

$h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$

لمعرفة إشارة $h(x)$ ندرس تغيرات $h'(x)$، حيث $h(x)$ معرف و اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$h'(x) = f'(x) + 1$

$h'(x) = x\ln x - x + 1$

$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = 1$

$\lim_{x\to +\infty} h'(x) = ? \quad (\infty - \infty$ حالة عدم تعيين من الشكل$)$

$h'(x) = x(\ln x - 1) + 1$

$\lim_{x\to +\infty} h'(x) = +\infty(+\infty - 1) + 1 = +\infty$

$h''(x) = 1\ln x + \frac{1}{x}.x - 1 = \ln x$

$h''(x) = 0 \to \ln x = 0$

$\boxed{x = 1} \ : \ h'(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$	‖ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من الجدول: $h'(x) \geq 0$

ندرس تغيرات: $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$

$h(0) = f(0) + 0 - \frac{1}{4} = 0 + 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Scanned by CamScanner

نكتب جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	1	$+$	0	$+$	$+\infty$
$h(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$h(x) < 0$ على المجال $]0,1[$ ومنه C تحت $\mathcal{T}$

$h(x) > 0$ على المجال $]1,+\infty[$ ومنه C فوق $\mathcal{T}$

-4 اكتب معادلات مماسات C في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل.

● نقاط تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

إما $\frac{x^2}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \longrightarrow Q(0,0)$

أو $\ln x - \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \longrightarrow B\left(e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$

● معادلة المماس في النقطة $Q(0,0)$:

ميل المماس:

$$m_{T_Q} = f'(0) = 0$$

معادلة نصف المماس T_Q :

$$y - f(0) = m_{T_Q}(x - 0)$$

$$\boxed{y = 0}$$

● معادلة المماس في النقطة $B\left(e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$:

ميل المماس:

$$m_{T_B} = f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$$

معادلة المماس T_B :

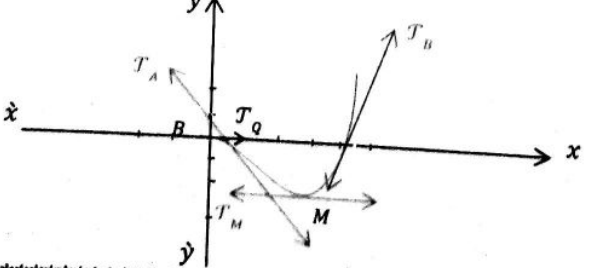
$$y - f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = m_{T_B}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}x - e^3\right)}$$

-5 ارسم مماسات C التي وجدتها ثم ارسم الخط C في المعلم ذاته.

نرسم المماسات $\mathcal{T}_Q$ و $\mathcal{T}_A$ و $\mathcal{T}_B$

ثم نرسم المماس الأفقي $\mathcal{T}_M$ في النقطة $M(e, f(e))$ التي ينعدم فيها $f'(x)$



****