المتتاليات

تمهيد:

في الجدول الآتي نقرن بكل عدد طبيعي مربعه وبهذا نحصل على متتالية مربعات الأعداد الطبيعية عندئذ يتكون لدينا متتالية لا نهائية من الأعداد الحقيقية.

……	6	5	4	3	2	1	0	n
……	36	25	16	9	4	1	0	n^2

ونصطلح رمز المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هو أن نقرن بكل عدد طبيعي n من N عدداً حقيقياً نرمز إليه بالرمز u_n وفي المثال السابق نكتب $u_n = n^2$

مثال: لنقرن بكل عدد طبيعي ضعفه فنحصل على متتالية من الأعداد الزوجية.

ونكتب $u_n = 2n$	……	4	3	2	1	0	n
	……	8	6	4	2	0	$2n$

تدريب: لنقرن بكل عدد طبيعي n العدد $u_n = \sqrt{n+1}$ فنحصل على متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ من الأعداد الحقيقية ، أوجد الحدود الأربعة الأولى من حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

مثال: لنقرن بكل عدد طبيعي n العدد $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ حيث $n \geq 1$ ومنه نجد:

$$u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{6},\ u_3 = \frac{1}{12},\ \dots\dots,\ u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

****

تعريف المتتالية:

هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية N أو أية مجموعة جزئية غير منتهية منها من الشكل $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\dots\}$ نرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ ونسمي u_n حد المتتالية ذا الدليل n أو الحد العام.وهذا يقابل تعريف التابع:

$$u:\ N \longrightarrow R \quad ;\ n \mapsto u_n$$

ونسمي u_n حد المتتالية ذا الدليل n (الحد العام).

ملاحظة: للمتتالية عدد لا نهائي من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود.

مثال: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ لها عدد غير منته من الحدود هي $1, -1, 1, -1, \dots\dots$ بينما تأخذ حدودها قيمتين فقط هي $+1, -1$

ملاحظة: يجب التمييز بين المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وبين الحد u_n الذي هو عدد يسمى الحد العام.

****

كيف نعرف متتالية: (طرق توليد متتالية):

① **تعريف صريح للحد u_n:** أي يعطينا علاقة u_n بدلالة n تفيد في حسابه.

مثال (1): المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{1}{n+1}$

فيكون مثلاً:

$$u_0 = 1\ ,\quad u_1 = \frac{1}{2}\quad u_2 = \frac{1}{3}, \dots\dots\dots, u_{10} = \frac{1}{11}, \dots\dots\dots$$

مثال (2): المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام يعطى بالعلاقة: $u_n = 2n + 1$

فيكون مثلاً:

$$u_0 = 1\ ,\quad u_1 = 3\ ,\quad u_2 = 5, \dots\dots\dots, u_8 = 17, \dots\dots\dots$$

****

② تعريف المتتالية بالتدريج: ايّ أن يُحسب الحد ذا الدليل n بدلالة الحدود التي سبقته، أي يعطينا قيمة الحد الاول u_0 ثم يعطينا علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ تربط بين كل حدين متتابعين من المتتالية حيث f دالة عددية.

مثال: العلاقة الآتية: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

تسمح بحساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ واحداً إثر الآخر.

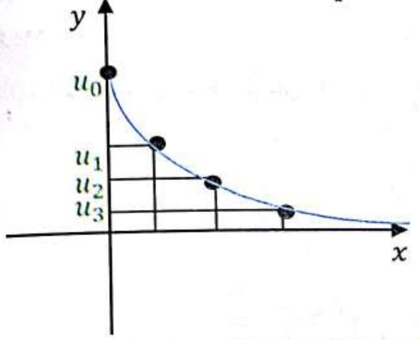
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_1 = 3u_0 - 2 = 3(5) - 2 = 13 \\ u_2 = 3u_1 - 2 = 3(13) - 2 = 37 \end{cases}$$

تدريب: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n احسب u_3, u_2, u_1

****

تكريساً للفهم: المتتالية هي تابع رمزه u وصورة العدد x هي $u(x)$ حيث (u_n) صورة العدد n ففي حالة $(u_n)_{n\geq0}$ نستطيع كتابته كمتتالية فإذا كان لدينا التابع $f: D \to R; x \mapsto f(x)$ $u_n = f(n)$ يمكن الاستفادة من التمثيل البياني للتابع $f(x)$ لتمثيل الحدود الأولى للمتتالية.

مثال: $u_n = \frac{4}{n+1}$ حيث $n \geq 0$ ولنتأمل التمثيل البياني للتابع $f(x) = \frac{4}{x+1}$ الذي تتوضع عليه الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$



****

المتتاليات المطّردة

بفرض لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ عندئذ:

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة تماماً $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} > u_n$
2. $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \geq u_n$
3. $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة تماماً $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} < u_n$
4. $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \leq u_n$
5. $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} = u_n$

ملاحظة: اي متتالية تحقق احد الشروط السابقة نطلق عليها اسم متتالية مطردة ويوجد متتاليات غير مطردة مثل المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ حيث حدودها $1, -1, 1, -1, \cdots\cdots$ نسميها متتالية متناوبة.

كيف ندرس إطراد متتالية: يوجد ثلاث طرق لدراسة إطراد متتالية $(u_n)_{n\geq0}$

1. دراسة إشارة الفرق:

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{u_{n+1} - u_n}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ فالمتتالية متناقصة تماماً.

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ فالمتتالية متناقصة.

$u_{n+1} - u_n > 0$ فالمتتالية متزايدة تماماً.

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ فالمتتالية متزايدة.

مثال: ادرس اطراد كل متتالية من المتتاليات الآتية :

1) $u_n = -3n + 1$

$$u_{n+1} = -3(n+1) + 1 = -3n - 3 + 1 = -3n - 2$$

$$u_{n+1} - u_n = -3n - 2 - (-3n + 1) = -3n - 2 + 3n - 1 = -3 < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً .

2) $u_n = n^2 - n - 2$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) - 2 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - 2 = n^2 + n - 2$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + n - 2 - n^2 + n + 2 = 2n \geq 0$$

فالمتتالية متزايدة ومن أجل $n \geq 1$ المتتالية متزايدة تماماً.

3) $u_n = n^2 - n$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - [n^2 - n] = (n+1)^2 - n - 1 - n^2 + n$$

$$= (n+1)^2 - n^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 = 2n > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذا الدليل $n = 1$

4) $u_n = (n-5)^2$

$$u_{n+1} = (n + 1 - 5)^2 = (n-4)^2$$

$$u_{n+1} - u_n = (n-4)^2 - (n-5)^2 = n^2 - 8n + 16 - n^2 + 10n - 25$$

$$= 2n - 9 > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذا الدليل $n = 5$

5) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ $\quad u_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 3n + n + 3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

6) $u_n = \frac{2n-1}{n-1}$ $\quad u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1-1} = \frac{2n+2-1}{n} = \frac{2n+1}{n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n} - \frac{2n-1}{n-1} = \frac{(2n+1)(n-1) - n(2n-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n + n - 1 - 2n^2 + n}{n(n-1)} = \frac{-1}{n(n-1)} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذا الدليل $n = 2$

7) $u_n = \sqrt{4n+1}$ $\quad u_{n+1} = \sqrt{4(n+1)+1} = \sqrt{4n+5}$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{4n+5} - \sqrt{4n+1} = \frac{(\sqrt{4n+5} - \sqrt{4n+1})(\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1})}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1}}$$

$$= \frac{4n + 5 - (4n+1)}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1}} = \frac{4}{\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+1}} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

8) $u_n = \frac{n}{3^n}$ $\quad u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3^n.3} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1-3n}{3^{n+1}} = \frac{-2n+1}{3^{n+1}} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذا الدليل $n = 1$

9) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$

$u_{n+1} - u_n = -4 < 0$ فالمتتالية متناقصة تماماً

****

2. مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد (1) في حال كون حدود المتتالية موجبة تماماً.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فالمتتالية متناقصة.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فالمتتالية متزايدة.

أمثلة: ادرس إطراد كل متتالية من المتتاليات الآتية :

$\boxed{1}$ $u_n = \frac{2^n}{3^n}$

نلاحظ أن حدود المتتالية موجبة تماماً ومنه:

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

$\boxed{2}$ $u_n = 5^{n-1}$

بما أن حدود المتتالية موجبة تماماً فإن:

$$u_{n+1} = 5^{n+1-1} = 5^n$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^n}{5^{n-1}} = \frac{5^n}{5^n . 5^{-1}} = \frac{1}{5^{-1}} = 5 > 1$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

$\boxed{3}$ $u_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$

بما أن حدود المتتالية موجبة تماماً فإن:

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1+1}} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^n} \times \frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{2^n . 2}{3^n} \times \frac{3^n . 3^{-1}}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{4}$ $u_n = \frac{5}{n^2}$

بما أن حدود المتتالية موجبة تماماً فإن:

$$u_{n+1} = \frac{5}{(n+1)^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{5} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{5}$ $u_n = \sqrt{2n+3}$

بما أن حدود المتتالية موجبة تماماً فإن:

$$u_{n+1} = \sqrt{2(n+1)+3} = \sqrt{2n+2+3} = \sqrt{2n+5}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2n+5}}{\sqrt{2n+3}} = \sqrt{\frac{2n+5}{2n+3}} > 1$$

لأن $2n+5 > 2n+3$:

فالمتتالية متزايدة تماماً

****

3. دراسة إطراد التابع f في حال كون المتتالية معرفة بالصيغة $u_n = f(n)$

مبرهنة: ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[0,+\infty[$ ولنتامل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = f(n)$ فإن:

1. إذا كان f متزايد تماماً او متزايد (اي $f'(x) \ge 0$) كانت $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً.
2. إذا كان f متناقص تماماً او متناقص (اي $f'(x) \le 0$) كانت $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

مثال 1: ادرس إطراد المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة: $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$

لنتامل التابع الكسري $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ المعرف على $R\backslash\{-2\}$ فهو معرف على $[0,+\infty[$ بوجه خاص ومنه شرط المبرهنة محقق.

لندرس إطراد $f(x)$ على هذا المجال.

f اشتقاقية على $[0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - 1(3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه $f'(x)$ موجب تماماً على المجال $[0,+\infty[$ ومنه $f(x)$ متزايد تماماً على هذا المجال.

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً.

****

المتتالية الحسابية

نقول عن متتالية $(u_n)_{n\ge0}$ أنها حسابية إذا نتج كل حد عن سابقه بإضافة العدد الحقيقي نفسه.

مثال (1): $0 \underbrace{\quad , \quad}_{\boxed{+2}} 2 \underbrace{\quad , \quad}_{\boxed{+2}} 4 \underbrace{\quad , \quad}_{\boxed{+2}} 6 \quad , \quad \dots\dots\dots$

مثال (2): $7 \underbrace{\quad , \quad}_{\boxed{+4}} 11 \underbrace{\quad , \quad}_{\boxed{+4}} 15 \quad , \quad \dots\dots\dots$

تعريف: القول أن متتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هي متتالية حسابية معناه يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_{n+1} = u_n + r$

يسمى r أساس المتتالية الحسابية.

$$\boxed{\underbrace{u_0 \underbrace{\quad}_{+r} u_1 \underbrace{\quad}_{+r} u_2 \underbrace{\quad}_{+r} u_3 \;\dots\dots\dots\dots\; u_n}_{u_0+nr}}$$

ومنه نستنتج أن الحد العام للمتتالية الحسابية: $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

مثال (1): متتالية الأعداد الزوجية هي متتالية حسابية أساسها 2 حدها الأول $u_0 = 0$

$u_n = u_0 + nr$

$u_1 = 0 + (1)(2) = 2 \qquad u_2 = 0 + 2(2) = 4 \qquad u_3 = 6 \qquad \dots\dots\dots\dots$

مثال (2): الأعداد $n+5$, $n-2$, $n-9$ حيث n عدد طبيعي هي حدود متوالية من متتالية حسابية أساسها -7 لأن ناتج طرح أي حدين متتالين هو عدد ثابت $r = -7$

$(n-9) - (n-2) = n - 9 - n + 2 = -7$

$(n-2) - (n+5) = n - 2 - n - 5 = -7$

مثال (3): المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ التي حدها العام $u_n = 5n + 3$ هي متتالية حسابية أساسها $r = 5$ لأن:

$u_{n+1} = 5(n+1) + 3 = 5n + 8$

$u_{n+1} - u_n = (5n+8) - (5n+3) = 5$

نتيجة: لإثبات أن متتالية مفروضة هي متتالية حسابية يجب أن يكون طرح أي حدين متتاليين فيهـا يسـاوي عـدد حقيقـي ثابت أياً كانت $n \in N$ ويسمى أساس المتتالية.

معيار المتتالية الحسابية: $\boxed{u_{n+1} - u_n = r \left(\text{ثابت}\right)}$

****

عبارة الحد العام:

وجدنا أن الحد العام لمتتالية حسابية هو من الشكل: $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

حيث u_0 هو الحد الأول.

وبتعميم هذا الحد من أجل كل عددين طبيعيين m , n نجد: $\boxed{u_n = u_m + (n-m)\,r}$

تمرين: متتالية حسابية أساسها $r = 3$ و $u_8 = 29$ أوجد u_{17} , u_5

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$\begin{aligned} u_{17} &= u_8 + (17-8)(3) \\ &= 29 + 27 \\ u_{17} &= 56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_5 &= u_8 + (5-8)(3) \\ &= 29 - 9 \\ u_5 &= 20 \end{aligned}$$

تمرين: اختبر أي المتتاليتين الآتيتين حسابية:

$\boxed{1}$ $u_n = n^2 + 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2 \\ u_n &= n^2 + 1 \\ u_{n+1} - u_n &= n^2 + 2n + 2 - (n^2 + 1) \\ &= 2n + 1 \left(\text{غير ثابت}\right) \end{aligned}$$

فالمتتالية ليست حسابية.

$\boxed{2}$ $u_n = 3n + 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3(n+1) + 1 = 3n + 4 \\ u_n &= 3n + 1 \\ u_{n+1} - u_n &= 3n + 4 - (3n + 1) \\ &= 3 \left(\text{ثابت}\right) \end{aligned}$$

فالمتتالية حسابية.

****

مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية:

$$\boxed{S = \left(\text{عدد الحدود}\right)\left[\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right]}$$

ملاحظة: لإيجاد عدد الحدود في مجموع حدود متوالية من متتالية ما:

1. $S = u_i + u_{i+1} + \cdots\cdots\cdots + u_j$ فإن عدد الحدود $j - i + 1$
2. حساب عدد الحدود بِعدِّها إذا كان ممكناً.
3. إذا كان المجموع لحدود غير متوالية نحوله لمجموع حدود جديدة متوالية .

مثال ①: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = -3n + 2$

1. احسب u_0 ، u_1

$$u_0 = 2 \quad , \quad u_1 = -3(1) + 2 = -1$$

2. اثبت ان u_n متتالية حسابية وعين اساسها r

$$u_{n+1} = -3(n+1) + 2 = -3n - 1$$
$$u_n = -3n + 2$$
$$u_{n+1} - u_n = -3n - 1 - (-3n + 2) = -3 \ (\text{ثابت})$$

فالمتتالية حسابية وأساسها $r = -3$

3. احسب بدلالة n المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots\cdots\cdots + u_n$

عدد الحدود: $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S = (n+1)\left(\frac{2 - 3n + 2}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{4 - 3n}{2}\right)$$

مثال ②: لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_0 = 2$ اساسها $r = 5$ نعرف $S_n = u_3 + \cdots\cdots + u_n$ فإذا علمت ان $S_n = 6456$ احسب قيمة n

نلاحظ أن عدد الحدود: $n - 3 + 1 = n - 2$

$$S_n = (\text{عدد الحدود})\left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right) = (n-2)\left(\frac{u_3 + u_n}{2}\right)$$

لنوجد حد البداية u_3 من قانون الحد العام لمتتالية حسابية:

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= 2 + n(5) \\ &= 2 + 5n \end{aligned} \qquad \begin{cases} u_n = 2 + 5n \\ u_3 = 2 + 5(3) = 17 \end{cases}$$

$$S = (n-2)\left(\frac{u_3 + u_n}{2}\right)$$
$$6456 = (n-2)\left(\frac{17 + 2 + 5n}{2}\right)$$

$12912 = (n-2)(19 + 5n)$ نضرب بالعدد (2) :

$$12912 = 19n + 5n^2 - 38 - 10n$$
$$5n^2 + 9n - 12950 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 4(5)(-12950) = 259081 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 509$$
$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 509}{10} = \frac{500}{10} = 50 \Rightarrow \boxed{\boxed{n = 50}}$$

$n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 509}{10} = \frac{-518}{10} = -51.8$ (مرفوض لا ينتمي إلى N)

مثال ③: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_{20} = -32$ ، $u_{10} = -12$

1. احسب u_0 ، r

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

- ◆ $u_{20} = u_{10} + (20 - 10)r$

  $-32 = -12 + 10r \Rightarrow \boxed{\boxed{r = -2}}$
- ◆ $u_{20} = u_0 + (20 - 0)(-2)$

  $-32 = u_0 - 40 \Rightarrow \boxed{\boxed{u_0 = 8}}$

2. احسب المجموع $S = u_{10} + u_{20} + u_{30} + \cdots\cdots + u_{100}$

نلاحظ أن المجموع السابق يشكل متتالية من الشكل $v_1 , v_2 , v_3 , \dots\dots , v_{10}$

حيث : $v_1 = u_{10}$, $v_2 = u_{20}$, $\dots\dots , v_{10} = u_{100}$

و منه يكون عدد الحدود $10 - 1 + 1 = 10$

لدينا : $v_1 = u_{10} = -12$

$$v_{10} = u_{100} = u_0 + (100 - 0)(-2) = -192$$

$$S = (10)\left(\frac{v_1 + v_{10}}{2}\right)$$

$$S = (10)\left(\frac{-12 - 192}{2}\right) = -1020$$

مثال ④ : $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية نعرف $S_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{17}$ احسب u_1 ، S_n إذا علمت ان ، $r = -2$ ، $u_{17} = 105$

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

$$u_{17} = u_1 + (17 - 1)(-2)$$

$$105 = u_1 - 32 \Longrightarrow \boxed{u_1 = 137}$$

نلاحظ ان عدد الحدود هو $17 - 1 + 1 = 17$

$$S = 17\left(\frac{u_1 + u_{17}}{2}\right)$$

$$= 17\left(\frac{137 + 105}{2}\right) = 2057$$

ملاحظة:

- إذا كانت الأعداد c, b, a ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية عندئذ يكون $b = \frac{a+c}{2}$ نسمي b الوسط الحسابي للعددين a و c والعكس صحيح نقول إن الأعداد c, b, a ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$

****

المتتاليا ت الهندسية:

نقول عن متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ أنها هندسية إذا نتج كل حد عن سابقه بضربه بالعدد الحقيقي ذاته.

مثال: $1 \underbrace{\ ,\ }_{\times 4} 4 \underbrace{\ ,\ }_{\times 4} 16 \underbrace{\ ,\ }_{\times 4} 64 \quad , \quad \cdots\cdots\cdots$

تعريف: القول أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q وتحققت العلاقة التدريجية $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$ أياً كان العدد الطبيعي n

نسمي العدد q أساس المتتالية الهندسية

$$\boxed{\underbrace{u_0 \underbrace{\qquad}_{\times q} u_1 \underbrace{\qquad}_{\times q} u_2 \underbrace{\qquad}_{\times q} u_3 \cdots\cdots\cdots\cdots u_n}_{u_0 \times q^n}}$$

ومنه نستنتج أن الحد العام للمتتالية الهندسية $\boxed{u_n = u_0 . q^n}$

مثال: متتالية قوى العدد 2 هي متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الاول $u_0 = 1$

$$u_n = u_0 q^n \implies u_n = 2^n$$

$u_0 = 1$, $u_1 = (2)^1 = 2$, $u_2 = (2)^2 = 4$, $\cdots\cdots\cdots\cdots$

مثال: الأعداد $4n$, $2n$, n حيث n عدد طبيعي هي حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها (2) لأن ناتج قسمة أي حدين متتاليين هو عدد ثابت $q = 2$

نلاحظ: $q = \frac{2n}{n} \overset{\text{او}}{=} \frac{4n}{2n} = 2$

مثال: المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ التي حدها العام يعطى بالعلاقة $u_n = 5^n$ حيث n عدد طبيعي.

هي متتالية هندسية أساسها $q = 5$ لأن:

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= 5^{n+1} \\ u_n &= 5^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = \frac{5^n . 5^1}{5^n} = 5$$

معيار المتتالية الهندسية: $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \ (\text{ثابت})}$

****

عبارة الحد العام:

- الحد العام لمتتالية هندسية التي حدها الأول u_0 يعطى $\boxed{u_n = u_0 . q^n}$
- بتعميم هذا القانون من أجل كل عددين طبيعيين m, n $\boxed{u_n = u_m . q^{n-m}}$

تمرين: متتالية هندسية أساسها $q = 2$, $u_3 = 12$ أوجد u_6

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$

$$\begin{aligned} u_6 &= u_3 q^{6-3} \\ &= 12(2)^{6-3} = 96 \end{aligned}$$

تمرين: اختبر أي المتتاليتين الآتيتين هندسية:

$\boxed{1}$ $u_n = \frac{2}{3^n}$

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{3^{n+1}} \\ u_n &= \frac{2}{3^n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2}{3^{n+1}} . \frac{3^n}{2} = \frac{1}{3} \quad (\text{ثابت})$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$\boxed{2}$ $u_n = n^2$

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 \\ u_n &= n^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad (\text{غير ثابت})$$

فالمتتالية ليست هندسية.

****

مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية:

مجموع n حدا متواليا من متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها $q \neq 1$ يعطى بالعلاقة:

$\boxed{S = a . \frac{1-q^n}{1-q}}$ اي : $\boxed{S = \text{الحد الاول} . \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}}$

تمرين: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

1. احسب u_2 , u_1 , u_0

$$u_0 = \frac{3^0}{2^{0+1}} = \frac{1}{2} \quad , \quad u_1 = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4} \quad , \quad u_2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

2. اثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية اوجد اساسها.

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \\ u_n &= \frac{3^n}{2^{n+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{3^n}{2^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{(3)(2)}{(2^2)} = \frac{3}{2} \ (\text{ثابت})$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{2}$

3. احسب بدلالة n المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n$

عدد الحدود: $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S = a.\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\frac{-1}{2}}\right]$$

$$= -\left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]$$

تمرين: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية اساسها 3 وحدها الاول $u_1 = \frac{1}{2}$ احسب مجموع الحدود العشرة الأولى لهذه المتتالية.

$$S = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{10}$$

$$S = a.\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1 - 3^{10}}{1 - 3}\right) = \frac{-1}{4}(1 - 59049)$$

$$S = \left(\frac{-1}{4}\right)(-59048) = +14762$$

تمرين: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها $q = 3 \ , \ u_4 = 12$ احسب المجموع الآتي: $S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$

- ♦ عدد الحدود $= 6$
- ♦ الحد الأول $a = u_4 = 12$

$$S = a.\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$= 12.\left(\frac{1 - 3^6}{1 - 3}\right) = 12\left(\frac{1 - 729}{-2}\right)$$

$$= -6(-728) = 4368$$

تمرين: متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ حسابية فيها $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ و $u_{10} + u_{11} = 40$

1. احسب $u_0 \ , \ r$

نعلم أن الحد العام لمتتالية الحسابية هو $u_n = u_0 + nr$

(1

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_0 + 2r \\ u_3 &= u_0 + 3r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 3u_0 + 6r \\ 9 &= 3u_0 + 6r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{u_0 + 2r = 3}$$

تمرين: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

1. احسب u_0 , u_1 , u_2

$$u_0 = \frac{3^0}{2^{0+1}} = \frac{1}{2} \quad , \quad u_1 = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4} \quad , \quad u_2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

2. اثبت ان $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية اوجد اساسها.

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \\ u_n &= \frac{3^n}{2^{n+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{3^n}{2^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{(3)(2)}{(2^2)} = \frac{3}{2} \quad (\text{ثابت})$$

فالمتتالية هندسية اساسها $q = \frac{3}{2}$

3. احسب بدلالة n المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n$

عدد الحدود: $n - 0 + 1 = n + 1$

$$\begin{aligned} S &= a \cdot \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\frac{-1}{2}}\right] \\ &= -\left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

تمرين: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية اساسها 3 وحدها الاول $u_1 = \frac{1}{2}$ احسب مجموع الحدود العشرة الأولى لهذه المتتالية.

$$S = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{10}$$

$$S = a \cdot \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1 - 3^{10}}{1 - 3}\right) = \frac{-1}{4}(1 - 59049)$$

$$S = \left(\frac{-1}{4}\right)(-59048) = +14762$$

تمرين: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها $q = 3$, $u_4 = 12$ احسب المجموع الآتي: $S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$

- ♦ عدد الحدود $= 6$
- ♦ الحد الأول $a = u_4 = 12$

$$\begin{aligned} S &= a.\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) \\ &= 12.\left(\frac{1 - 3^6}{1 - 3}\right) = 12\left(\frac{1 - 729}{-2}\right) \\ &= -6(-728) = 4368 \end{aligned}$$

تمرين: متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ حسابية فيها $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ و $u_{10} + u_{11} = 40$

1. احسب u_0 , r

نعلم أن الحد العام لمتتالية الحسابية هو $u_n = u_0 + nr$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_0 + 2r \\ u_3 &= u_0 + 3r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 3u_0 + 6r \\ 9 &= 3u_0 + 6r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{u_0 + 2r = 3} \qquad (1$$

(2
$$\left.\begin{array}{l}u_{10}=u_0+10r\\ u_{11}=u_0+11r\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}u_{10}+u_{11}=2u_0+21r\\ 40=2u_0+21r\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\boxed{2u_0+21r=40}}$$

من 1) نجد $u_0=3-2r$ نعوض في 2):

$$2(3-2r)+21r=40$$
$$6-4r+21r=40$$
$$17r=34$$
$$\boxed{\boxed{r=2}}\Rightarrow\boxed{\boxed{u_0=-1}}$$

2. احسب المجموع $S=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{30}$

- ♦ لدينا $u_0=-1$
- ♦ نوجد u_{30} :

$$u_n=u_0+nr \qquad \Rightarrow \qquad u_{30}=-1+30(2)=59$$

- ♦ عدد الحدود $30-0+1=31$

$$S=31\left(\frac{u_0+u_{30}}{2}\right)=31\left(\frac{-1+59}{2}\right)=899$$

ملاحظة: إذا كانت الأعداد c,b,a ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية كان $b^2=a.c$ وفي حالة الأعداد c,b,a موجبة وتحقق المساواة $b^2=a.c$ نقول إن b هو وسط هندسي للعددين a و c والأعداد c,b,a ثلاثة حدود متوالية في متتالية هندسية.

****

إثبات صحة مبرهنة أو خاصة بالتدريج (الاستقراء الرياضي):

لبرهان صحة خاصة $P(n)$ متعلقة بعدد طبيعي n نتبع الخطوات الآتية:

1. نثبت صحة الخاصة من أجل أول قيمة لـ n
2. نفرض أن الخاصة صحيحة من أجل أي عدد طبيعي n
3. نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$

مثال: برهن بالتدريج انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد n^3-n مضاعف للعدد 3

- ♦ نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$

$$E(0):\qquad (0)^3-(0)=0$$

والعدد (0) مضاعف للعدد (3) فالخاصة صحيحية من أجل $n=0$

- ♦ نفرض أن الخاصة صحيحة من أجل n أي:

$$E(n):\quad n^3-n=3k \qquad \Rightarrow \boxed{n^3=3k+n} \qquad *$$

- ♦ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت:

$$E(n+1):\quad (n+1)^3-(n+1)=3k_1$$
$$(n+1)^3-(n+1)=\underbrace{n^3}_{*\text{من}}+3n^2+3n+1-n-1$$
$$=\underbrace{3k+n}+3n^2+2n$$
$$=3k+3n^2+3n=3(k+n^2+n)$$
$$=3k_1$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

فالخاصة السابقة صحيحة من أجل $n\in N$

مثال: اثبت بالتدريج انه $2^n \ge n^2$ اياً كان العدد الطبيعي $n \ge 4$

◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n = 4$

$$E(4) : \left.\begin{array}{l} L_1 = (2)^4 = 16 \\ L_2 = (4)^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \ge L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n = 4$

◆ نفرض أن الخاصة صحيحة من اجل n اي: $E(n) : \ 2^n \ge n^2$ محققة

◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت: $E(n+1) : \ (2)^{n+1} \ge (n+1)^2$

لدينا من الفرض أن : $(2)^n \ge n^2$

نضرب الطرفين بـ (2) : $2(2)^n \ge 2n^2$

نضيف ونطرح $(n+1)^2$: $(2)^{n+1} \ge (n+1)^2 - (n+1)^2 + 2n^2$

$$(2)^{n+1} \ge (n+1)^2 - (n^2 + 2n + 1) + 2n^2$$

$$(2)^{n+1} \ge (n+1)^2 - n^2 - 2n - 1 + 2n^2$$

$$(2)^{n+1} \ge (n+1)^2 + \underbrace{n^2 - 2n - 1}_{\text{موجب من اجل } n\ge4}$$

$(2)^{n+1} \ge (n+1)^2$ فالخاصة صحيحة من اجل $n + 1$

فالخاصة السابقة صحيحة من اجل $n \ge 4$

****

تدرب:

1) ليكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in N$ اثبت ان $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أوجد أساسها.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n.2}{3^n.3^2} \cdot \frac{3^n.3}{2^n} = \frac{2}{3} \quad \text{(ثابت)}$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

****

2) الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية او هندسية:

.1 $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ ، $u_5 = -13$ احسب u_{20}

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

◆ $u_5 = u_2 + (5 - 2)r$

$$-13 = 41 + 3r \Rightarrow \boxed{\boxed{r = -18}}$$

◆ $u_{20} = u_2 + (20 - 2)r$

$$u_{20} = 41 + (18)(-18) = -283$$

.2 $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ ، $u_{10} = \frac{25}{2197}$ احسب u_{30}

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$

$$◆ \left.\begin{array}{l} u_{10} = u_7 \,.\, q^{10-7} \\ \frac{25}{2197} = \frac{1}{1080} . q^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} q^3 = \frac{(25)(1080)}{2197} = \frac{(25)(30)(36)}{(13)(169)} \\ q^3 = \frac{(25)(5)(6)(36)}{(13)(13)(13)} = \frac{5^3 . 6^3}{13^3} \\ q^3 = \left(\frac{30}{13}\right)^3 \Rightarrow \boxed{\boxed{q = \frac{30}{13}}} \end{array}$$

◆ $u_{30} = u_{10}.\, q^{30-10}$

$$u_{30} = \frac{25}{2197}\left(\frac{30}{13}\right)^{20}$$

3. $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وفيها $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n واستنتج قيمة المجموعين $u_{30} + u_{31} + u_{32}$ ، $u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{20}$**

$$\left.\begin{aligned} u_n &= u_m + (n-m)r \\ u_n &= u_1 + (n-1)r \\ u_n &= -2 + (n-1)(3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{u_n = 3n - 5}}$$

◆ لحساب المجموع $S = u_{30} + u_{31} + u_{32}$

عدد الحدود $= 3$

يجب حساب u_{30} ، u_{32}

$u_n = 3n - 5$ $u_{32} = 3(32) - 5 = 91$	$u_n = 3n - 5$ $u_{30} = 3(30) - 5 = 85$
$S = 3\left(\frac{85 + 91}{2}\right) = 264$	

◆ لحساب المجموع $S = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{20}$

عدد الحدود $20 - 1 + 1 = 20$

$u_1 = -2$ يجب حساب u_{20}

$$u_n = 3n - 5$$
$$u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$
$$S = 20\left(\frac{-2 + 55}{2}\right) = 530$$

4. $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وفيها $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n واستنتج قيمة المجموعين ~~$u_1 +$~~**

$u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_7$ ، $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots\cdots + u_{2n}$

$$\left.\begin{aligned} u_n &= u_m.\, q^{n-m} \\ u_n &= u_1.\, q^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{u_n = -2(3)^{n-1}}}$$

◆ لحساب المجموع $S = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_7$

عدد الحدود $7 - 1 + 1 = 7$

$$S = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right) = (u_1)\left(\frac{1 - q^7}{1 - q}\right)$$

$$= (-2)\left(\frac{1 - 3^7}{1 - 3}\right) = 1 - 3^7 = -2186$$

◆ لحساب المجموع $S = u_2 + u_4 + \cdots\cdots + u_{2n}$

نلاحظ ان المتتالية $u_2, u_4, u_6, \cdots\cdots, u_{2n}$ تقابل المتتالية $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ حيث:

$$v_1 = u_2 = -2(3) = -6$$
$$v_2 = u_4 = -2(3)^3 = -54$$

بما أن المتتالية هندسية عندئذ : $q = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-54}{-6} = 9$ اصبح لدينا $q = 9$ ، عدد الحدود $= n$ ، الحد الأول $= -6$

$$S = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = (-6)\left(\frac{1 - 9^n}{1 - 9}\right) = \frac{3}{4}(1 - 9^n)$$

.5 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية اساسها $r = -2$ وفيها $u_0 = -3$

احسب $u_{25} + u_{26} + \cdots\cdots + u_{125}$

$$u_n = u_0 + nr$$
$$u_n = -3 - 2n$$

- ◆ عدد الحدود $125 - 25 + 1 = 101$
- ◆ يجب حساب u_{25} ، u_{125}:

$$\begin{cases} u_{25} = -3 - 50 = -53 \\ u_{125} = -3 - 2(125) = -253 \end{cases}$$

$$S = \left(\text{عدد الحدود}\right)\left(\frac{u_{25}+u_{125}}{2}\right)$$
$$= 101\left(\frac{-53-253}{2}\right) = -15453$$

.6 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية اساسها 2 وفيها $u_0 = 1$ احسب $u_3 + u_4 + \cdots\cdots + u_{10}$

$$u_n = u_0 . q^n$$
$$u_n = 1.(2)^n$$

- ◆ عدد الحدود $10 - 3 + 1 = 8$

$$u_3 = (2)^3 = 8$$

$$S = \left(\text{الحد الأول}\right)\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$$
$$= 8\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right) = (-8)(-255) = 2040$$

.7 احسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots\cdots + 10$

نلاحظ أن المجموع السابق يمثل مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{1}{2}$ ومنه:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ u_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{u_n = \frac{1}{2}(1+n)}}$$

لحساب دليل الحد الذي قيمته 10 نجعل :

$$u_n = 10$$

$$\frac{1}{2}(1+n) = 10 \quad \Rightarrow \quad 1 + n = 20 \Rightarrow n = 19$$

أصبح لدينا الحد الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ والحد $u_{19} = 10$

عدد الحدود $19 - 0 + 1 = 20$

$$S = \left(\text{عدد الحدود}\right)\left(\frac{u_0 + u_{19}}{2}\right)$$
$$= (20)\left(\frac{\frac{1}{2}+10}{2}\right) = 10\left(\frac{21}{2}\right) = 105$$

.8 c, b, a ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية احسبها علماً أن: $a + b + c = 36.75$ ، $abc = 343$

بما أن الحدود a , b , c حدود متوالية من متتالية هندسية فإن b وسط هندسي بين a و c اي:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= ac \\ abc &= 343 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \square b^3 = 343 = 7^3 \quad \boxed{\boxed{b = 7}}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 36.75 \\ abc = 343 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} a+7+c=36.75 \\ a(7)c=343 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a+c=29.75 \\ \underline{ac=49} \end{array}$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نحصل على المعادلة:

$$c^2-29.75c+49=0$$

باستخدام الدستور Δ نجد أن:

$$\overbrace{\begin{array}{lcl} c=28 & \qquad\qquad\qquad & c=1.75 \\ a=1.75 & & a=28 \end{array}}$$

تمرين: c,b,a ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية احسبها علماً أن:

$$abc=512 \quad , \quad a+b+c=28$$

بما أن الحدود $c,\ b,\ a$ حدود متوالية من متتالية هندسية فإن b وسط هندسي بين $c\,,a$ أي:

◆ $$\left.\begin{array}{r} b^2=ac \\ abc=512 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} b^3=512 \\ \boxed{\boxed{b=8}} \end{array}$$

◆ $$\left.\begin{array}{r} a+b+c=28 \\ abc=512 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+8+c=28 \\ a(8)c=512 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a+c=20 \\ \underline{ac=64} \end{array}$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نحصل على المعادلة:

$$c^2-20c+64=0$$

باستخدام الدستور Δ نجد أن:

$$\overbrace{\begin{array}{lcl} c=4 & \qquad\qquad\qquad & c=16 \\ a=16 & & a=4 \end{array}}$$

****

3) $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\frac{v_n}{1+v_n} \end{cases}$

1. تحقق أن $v_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n

لنثبت أن $v_n>0$ بالتدريج (الاستقراء الرياضي):

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$:

$$E(0) \quad : \quad v_0=1>0$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي: $E(n) \ : \ v_n>0$ صحيحة .

◆نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت: $E(n+1) \ : \ v_{n+1}>0$

لدينا من الفرض
و منه فإن :

$$v_{n+1}>0 \Leftarrow \frac{v_n}{1+v_n}>0 \Leftarrow \begin{cases} v_n>0 \\ 1+v_n>1 \end{cases}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$ والخاصة السابقة صحيحة من أجل $n\in N$

2. اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n=\frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1}=\frac{1}{v_{n+1}} \\ u_n=\frac{1}{v_n} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1+v_n-1}{v_n} = 1 \quad (\text{ثابت})$$

فالمتتالية السابقة متتالية حسابية اساسها $r = 1$

3. استنتج عبارة v_n بدلالة n

◆ $\left.\begin{array}{l} u_n = \frac{1}{v_n} \\ u_0 = \frac{1}{v_0} \end{array}\right\} \Rightarrow u_0 = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow u_n = u_0 + nr$

$$\boxed{u_n = 1 + n}$$

◆ $\left. u_n = \frac{1}{v_n} \right\} \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1+n}}$

* * *

4) ادرس جهة إطراد كل من المتتاليات الآتية:

$\boxed{1}$ $u_n = \frac{3}{n^2}$

بما أن حدود المتتالية موجبة أياً كانت $n \geq 1$ نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{(n+1)^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{3}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

بما أن $n < n+1$ فإن $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.

$\boxed{2}$ $u_n = \sqrt{3n+1}$

طريقة الأولى: نستخدم المعيار $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} = \frac{\left(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}\right)\left(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}\right)}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}} > 0 \Rightarrow$$ فالمتتالية متزايدة تماماً

طريقة ثانية: بما أن حدود المتتالية موجبة تماماً نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد (1)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}} = \sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} = \sqrt{1 + \frac{3}{3n+1}} > 1 \Rightarrow$$ فالمتتالية متزايدة تماماً

$\boxed{3}$ $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$

نستخدم المعيار $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4} = \frac{2n^2 + 8n + n + 4 - 2n^2 - 10n + n + 5}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{9}{(n+5)(n+4)} > 0 \Rightarrow$$ فالمتتالية متزايدة تماماً

$\boxed{4}$ $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ نستخدم المعيار $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{n^2+1-(n+1)^2-1}{[(n+1)^2+1][n^2+1]}$$

$$= \frac{n^2+1-n^2-2n-1-1}{[(n+1)^2+1][n^2+1]} = \frac{-(2n+1)}{[(n+1)^2+1][n^2+1]} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً (يمكن استخدام المقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1).

$\boxed{5}$ $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$

نستخدم إطراد التابع $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ المعرف بوجه خاص على المجال $]3, +\infty[$:

f اشتقاقي على $]3, +\infty[$

$\acute{f}(x) = \frac{3(x-2)-1(3x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow$ فالمتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{6}$ $u_n = \frac{n}{10^n}$ نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1 لأن الحدود موجبة تماماً بدءاً من $n = 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n} = \frac{n+1}{10n}$$

نلاحظ أنه بدءاً من الدليل $n = 1$ يكون البسط أصغر من المقام

ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.

$\boxed{7}$ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

$u_{n+1} = u_n - 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -3 < 0 \Rightarrow$ فالمتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{8}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$

$n = 0 \rightarrow u_1 = \frac{1}{2}$

بما أن الحدود موجبة

$n = 1 \rightarrow u_2 = \frac{1}{4}$

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ فالمتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{9}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

$n = 0 \rightarrow u_1 = 2$

بما أن الحدود موجبة

$n = 1 \rightarrow u_2 = 4$

$u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1 \Rightarrow$ فالمتتالية متزايدة تماماً

***

تمرين: اثبت انه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- ◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n=1$

$$E(1)\ :\ \begin{cases}L_1=1^3=1\\ L_2=\dfrac{1(1+1)^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow L_1=L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n=1$

- ◆ نفرض صحة الخاصة من اجل n اي:

$$E(n)\ :\ 1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ صحيحة

- ◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت:

$$E(n+1)\ :\ 1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}L_1&=\underbrace{1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3}_{E(n)}+(n+1)^3\\&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\ =(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right]\\&=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\&=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=L_2\end{aligned}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$ ومنه الخاصة السابقة صحيحة من اجل $n\in N^*$

****

تدرب صفحة 21 رقم 1

نعرف في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$ المقدار $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

1. احسب S_1, S_2, S_3, S_4 ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

$S_2=1^2+2^2=5$	$S_1=1^2=1$
$S_4=1^2+2^2+3^2+4^2=30$	$S_3=1^2+2^2+3^2=14$

$$S_{n+1}=\underbrace{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}_{S_n}+(n+1)^2$$

$$\boxed{S_{n+1}=S_n+(n+1)^2}$$

2. اثبت بالتدريج انه في حالة اية عدد طبيعي $n\geq 1$ لدينا $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- ◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n=1$:

$$E(1)\ :\ \begin{cases}L_1=1^2=1\\ L_2=\dfrac{1(2)(3)}{6}=1\end{cases}\Rightarrow L_1=L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n=1$

- ◆ نفرض صحة الخاصة من اجل n اي:

$$E(n)\ :\ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=S_n$$ صحيحة

♦ نثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت:

$$E(n+1)\ :\ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

لدينا من الطلب 1 : $S_{n+1}=S_n+(n+1)^2$

$$\begin{aligned}
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\
&=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+n+1\right]\\
&=(n+1)\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right]\\
&=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)\\
&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=L_2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2n+3 \\ \hline
n+2 & 2n^2+7n+6 \\
 & 2n^2+4n \\ \hline
 & 3n+6 \\
 & 3n+6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$

ومنه الخاصة السابقة من اجل $n\geq 1$

****

تدرب صفحة 21 رقم 2

ليكن $x>-1$ في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n\geq 1+nx$ اثبت ان المتراجحة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n

♦ نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$:

$$E(0)\ :\ \begin{cases}L_1=(1+x)^0=1\\ L_2=\ 1+0\ \ =1\end{cases}\Rightarrow L_1=L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

♦ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$E(n)\quad :\ (1+x)^n\geq 1+nx$ صحيحة

♦ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت:

$E(n+1)\ \ :\ (1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$

لدينا من الفرض : $(1+x)^n\ \geq 1+nx$

نضرب الطرفين بـ $(1+x)>0$: $(1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1}&\geq 1+x+nx+nx^2\\
(1+x)^{n+1}&\geq 1+nx^2+x(1+n)\\
(1+x)^{n+1}&\geq 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\text{أكبر من الصفر}}\\
(1+x)^{n+1}&\geq 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$ ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n\in N$ □

****

تمرينات ومسائل صفحة 22

1) بين اي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة (ربما بدءاً من حد معين n_0).

$\boxed{1}$ $u_n = -3n + 1$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = -3n + 1 \\ u_{n+1} = -3n - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -3n - 2 + 3n - 1 = -3 < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{2}$ $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

بفرض التابع $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ المعرف بوجه خاص على $[0, +\infty[$:

f اشتقاقي على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow$$ المتتالية متزايدة تماماً

$\boxed{3}$ $u_n = 2^n$ نلاحظ أن حدود المتتالية موجبة تماماً نستخدم المقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1 \Rightarrow$$ المتتالية متزايدة تماماً

$\boxed{4}$ $u_n = \left(\dfrac{-1}{n}\right)^n$

نلاحظ أنه من أجل n فردي فإن حدود المتتالية سالبة ومن أجل n زوجي تكون الحدود موجبة ومنه المتتالية ليست متزايدة وليست متناقصة أي ليست مطردة.

$$u_1 = -1 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{4} \quad , \quad u_3 = \frac{-1}{27} \quad \Rightarrow$$ المتتالية ليست مطردة

$\boxed{5}$ $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2} \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{(n+1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً حيث $n \geq 1$

$\boxed{6}$ $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

حدود المتتالية موجبة تماماً نستخدم المقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذا الدليل $n = 2$

7 $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}$

$$\left.\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} \\ u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \Rightarrow$$ المتتالية متزايدة تماماً

8 $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

$u_0 = 8$ $\quad u_1 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$ ……………

نلاحظ أن جميع الحدود لها نفس القيمة ومنه المتتالية ثابتة.

9 $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

لنوجد الحدود الثلاثة الأولى نجد: $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{7}{2}$, $u_2 = \frac{37}{8}$

نلاحظ أن المتتالية متزايدة تماماً من أجل الحدود الأولى.

لنبرهن بالتدريج (الاستقراء الرياضي) أن المتتالية متزايدة تماماً:

1. وجدنا أن المتتالية متزايدة تماماً من أجل الحدود الثلاثة الأولى.
2. لنفرض أن المتتالية متزايدة تماماً من أجل n أي: $u_{n+1} - u_n > 0$ صحيحة
3. نثبت أن المتتالية متزايدة تماماً من أجل $n + 1$ أي لنثبت أن: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

$$\left.\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{3}{4}u_{n+1} + 2 \\ u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{3}{4}u_{n+1} + 2\right) - \left(\frac{3}{4}u_n + 2\right)$$

$$= \frac{3}{4}u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n$$

$$= \frac{3}{4}\underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\text{موجبة من الفرض}} > 0$$

أي $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً من أجل $n + 1$. ومنه المتتالية متزايدة تماماً من أجل $n \in N$

---

2) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ في حالة اي عدد طبيعي غير معدوم n

1. احسب u_5, u_4, u_3, u_2, u_1 ثم خمن عبارة u_n بدلالة n

$u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$

$u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$

$u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$

$u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -10 - 3 = -13$

$u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -26 - 3 = -29$

n	0	1	2	3	4	5	……	n	……
u_n	2	1	-1	-5	-13	-29	……		……
$u_n - u_{n+1}$	1	2	4	8	16	32	……	2^n	……

$$u_n - \underset{\downarrow}{u_{n+1}} = 2^n$$

$$u_n - (2u_n - 3) = 2^n$$

$$-u_n + 3 = 2^n \Rightarrow \boxed{u_n = 3 - 2^n \quad ; n \geq 0}$$

نثبت صحة علاقة التخمين u_n بالاستقراء الرياضي:

- نثبت صحة الخاصة من اجل $n = 0$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = u_0 = 2 \\ L_2 = 3 - 2^0 = 3 - 1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n = 0$

- نفرض صحة الخاصة من اجل n اي:

$u_n = 3 - 2^n$ صحيحة

- نثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت ان: $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$

$$u_{n+1} = 2\underbrace{u_n} - 3 = 2(3 - 2^n) - 3 = 6 - (2).2^n - 3$$

$$\boxed{u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n + 1$ وبالتالي محققة من اجل كل $n \in N$.

2. بحساب عبارة $u_n - 3$ عند كل $n \geq 0$ عبر عن u_n بدلالة n

نفرض $v_n = u_n - 3$ فيكون $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ عندئذ :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{3 - 2^{n+1} - 3}{3 - 2^n - 3} = \frac{-2^{n+1}}{-2^n} = 2$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية فيها :

$$q = 2 \;\; , \;\; v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$v_n = v_0 \,.\, q^n$$

$$\underset{\downarrow}{\underbrace{v_n}} = -(2)^n$$

$$u_n - 3 = -(2)^n$$

$$\boxed{u_n = 3 - (2)^n}$$

---

3) المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \end{cases}$ في حالة اي عدد طبيعي غير معدوم n احسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 وخمن عبارة u_n بدلالة n ثم حدد u_n بدلالة n

$$u_1 = -u_0 + 4 = -(3) + 4 = 1$$
$$u_2 = -u_1 + 4 = -(1) + 4 = 3$$
$$u_3 = -u_2 + 4 = -(3) + 4 = 1$$
$$u_4 = -u_3 + 4 = -(1) + 4 = 3$$
$$u_5 = -u_4 + 4 = -(3) + 4 = 1$$

n	0	1	2	3	4	5	......	n
u_n	3	1	3	1	3	1	....	
$u_n - u_{n+1}$	2	-2	2	-2	2	-2	....	$(-1)^n.2$

$$u_n - u_{n+1} = (-1)^n.2$$
$$u_n - (-u_n + 4) = (-1)^n.2$$
$$u_n + u_n - 4 = (-1)^n.2$$
$$2u_n = (-1)^n.2 + 4$$

$$\boxed{u_n = (-1)^n + 2 \quad ; n \geq 0}$$

نثبت صحة علاقة التخمين u_n بالاستقراء الرياضي :

- نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = u_0 = 3 \\ L_2 = (-1)^0 + 2 = 1 + 2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 0$

- نفرض صحة الخاصة من أجل n أي : $u_n = (-1)^n + 2$
- نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1} = (-1)^{n+1} + 2$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -u_n + 4 \\ &= -[(-1)^n + 2] + 4 \\ &= (-1)(-1)^n - 2 + 4 = (-1)^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$ ، و بالتالي محققة من أجل كل $n \in N$

---

4) اثبت بالتدريج صحة الخاصتين الآتيتين:

➊ $\mathbf{1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots\cdots + n \times (n)! = (n+1)! - 1}$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 1$

$$E(1)\ :\ \begin{cases} L_1 = 1 \\ L_2 = (1+1)! - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 1$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$E(n)\ :\ 1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! \cdots\cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$ صحيحة

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت:

$E(n+1)\ :\ 1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$

$$L_1 = \underbrace{1 + 2 \times 2! + \cdots\cdots\cdots + n \times n!}_{\substack{\text{من الفرض} \\ \downarrow}} + (n+1)(n+1)!$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{(n+1)!} - 1 \quad + \quad \underbrace{(n+1)(n+1)!} \\ &= (n+1)!\,[1 + n + 1] - 1 \quad = \quad \underbrace{(n+1)!\,(n+2)} - 1 \\ &= (n+2)! - 1 = L_2 \end{aligned}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل n

➋ $\mathbf{n! \geq 2^{n-1}}$

◆ نثبت صحة الخاصة السابقة من أجل $n = 1$:

$$E(1)\ :\ \begin{cases} L_1 = 1! = 1 \\ L_2 = 2^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad L_1 \geq L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 1$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي: $E(n)\ :\ n! \geq 2^{n-1}$ صحيحة

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت: $E(n+1)\ :\ (n+1)! \geq 2^n$

لدينا من الفرض: $n! \geq 2^{n-1}$

نضرب الطرفين بـ $(n+1)$: $\underbrace{(n+1)n!} \geq 2^{n-1}.(n+1)$

نضيف ونطرح 2^n : $(n+1)! \geq 2^n \underbrace{- 2^n + 2^{n-1}.(n+1)}_{\text{مقدار موجب}}$

$(n+1)! \geq 2^n$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$

ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل n

5) في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$ ، $v_n = u_{2n} - u_n$ اثبت ان المتتالية v_n متزايدة تماماً.

لإيجاد المتتالية v_n يجب إيجاد u_{2n} ثم إيجاد ناتج الطرح:

نلاحظ أن u_n هو المجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots$ نجمع للمقام العدد (1) حتى نحصل على $\frac{1}{n}$

فيكون u_{2n} هو المجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots$ نجمع للمقام العدد (1) حتى نحصل على $\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+n}$ ومنه:

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$$

$$v_n = u_{2n} - u_n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}$$

لكن

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

ومنه:

$$\blacklozenge\ v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{-2n - 1 + n + 1}{(n+1)\,(2n+1)} + \frac{1}{2n+2} \qquad = \frac{-n}{\underbrace{(n+1)\,(2n+1)}_{2}} + \frac{1}{\underbrace{2(n+1)}_{(2n+1)}}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \qquad = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

ومنه فالمتتالية متزايدة تماماً أياً كانت $n \geq 1$

---

6) c, b, a ثلاثة اعداد حقيقية و $a \neq 0$ نعلم ان c, b, a هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية نرمز إلى أساسها بالرمز q كما نعلم ان $3a$, $2b$, c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية احسب q

◆ a, b, c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها q

$$a = a$$
$$b = qa$$
$$c = qb = q^2 . a$$

◆ $3a$, $2b$, c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فإن:

$$2b = \frac{3a + c}{2}$$

$$\underbrace{4b}_{\downarrow} = 3a + \underbrace{c}_{\downarrow}$$

$$4(qa) = 3a + q^2 a$$

$$q^2 a - 4qa + 3a = 0 \qquad \div a \neq 0$$

$$q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$(q - 3)(q - 1) = 0$$

إما $q = 3$ أو $q = 1$

7) نتامل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجيا وفق $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 10u_n - 18 \end{cases}$ عند كل عدد طبيعي n نهدف في هذا التمرين إلى التعبير عن u_n بدلالة n

$$u_1 = 10\,u_0 - 18 = 10(7) - 18 = 70 - 18 = 52$$
$$u_2 = 10\,u_1 - 18 = 10(52) - 18 = 520 - 18 = 502$$
$$u_3 = 10\,u_2 - 18 = 10(502) - 18 = 5020 - 18 = 5002$$
$$u_4 = 10\,u_3 - 18 = 10(5002) - 18 = 50020 - 18 = 50002$$

n	0	1	2	3	4	....	n
u_n	7	52	502	5002	50002	....	---
$u_n - u_{n+1}$	-45	-450	-4500	-45000	-450000	....	-45×10^n

$$u_n - \underset{\downarrow}{u_{n+1}} = -45 \times 10^n$$
$$u_n - (10u_n - 18) = -45 \times 10^n$$
$$u_n - 10u_n + 18 = -45 \times 10^n$$
$$-9u_n = -45 \times 10^n - 18$$
$$\boxed{u_n = 5 \times 10^n + 2\ ; n \geq 0}$$

نثبت صحة علاقة التخمين بالاستقراء الرياضي:

- نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 0$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = u_0 = 7 \\ L_2 = 5 \times 10^0 + 2 = 5 \times 1 + 2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

- نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$u_n = 5 \times 10^n + 2$ صحيحة

- نثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ أي لنثبت أن: $u_{n+1} = 5 \times 10^{n+1} + 2$

$$u_{n+1} = 10u_n - 18$$
$$= 10(5 \times 10^n + 2) - 18$$
$$= 5 \times 10^{n+1} + 20 - 18$$
$$\boxed{u_{n+1} = 5 \times 10^{n+1} + 2}$$

أي محققة من أجل $n + 1$ وبالتالي محققة من أجل كل $n \in N$.

---

8) نتامل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجيا وفق: $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n \end{cases}$

1. عين كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية نفسها اي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ أيا كانت n

بفرض كثير الحدود من الدرجة الثانية هو $\boxed{\boxed{P(n) = an^2 + bn + c}}$

ولدينا فرضا $t_n = P(n)$ فإن: $t_{n+1} = P(n+1)$

$$\frac{1}{2}\underset{\downarrow}{t_n} + n^2 + n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$
$$\frac{1}{2}(an^2 + bn + c) + n^2 + n = a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c$$
$$\frac{1}{2}an^2 + \frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}c + n^2 + n = an^2 + 2an + a + bn + b + c$$

$$\underbrace{n^2+\frac{1}{2}an^2-an^2}+\underbrace{\frac{1}{2}bn+n-2an-bn}+\underbrace{\frac{1}{2}c-a-b-c}=0$$

$$\left(1+\frac{1}{2}a-a\right)n^2+\left(\frac{1}{2}b+1-2a-b\right)n-\frac{1}{2}c-a-b=0$$

$$\left(1-\frac{1}{2}a\right)n^2+\left(\frac{-1}{2}b-2a+1\right)n-\frac{1}{2}c-a-b=0n^2+0n+0$$

بالمطابقة نجد :

$$1-\frac{1}{2}a=0\Rightarrow\boxed{a=2}$$

$$\frac{-1}{2}b-2a+1=0\Rightarrow\frac{-1}{2}b-4+1=0\Rightarrow\boxed{b=-6}$$

$$\frac{-1}{2}c-a-b=0\Rightarrow\frac{-1}{2}c-2+6=0\Rightarrow\boxed{c=8}$$

و منه كثير الحدود

$$\boxed{P(n)=2n^2-6n+8}$$

2. اثبت ان المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ التي حدها العام $v_n=u_n-t_n$ هي متتالية هندسية.

لإثبات ان v_n متتالية هندسية يجب إثبات أن $q=\frac{v_{n+1}}{v_n}$

$$v_n=u_n-t_n$$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-t_{n+1}=\left(\frac{1}{2}u_n+n^2+n\right)-\left(\frac{1}{2}t_n+n^2+n\right)=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}t_n$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\left(u_n-t_n\right)}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n\quad\Longrightarrow\quad\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}\quad(\text{ثابت})$$

فالمتتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$

3. اكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n , a

وجدنا أن الأساس $q=\frac{1}{2}$ ولدينا $u_0=a$, $v_n=u_n-t_n$ أي $v_0=u_0-t_0$

$$t_0=P(0)=2(0)-6(0)+8=8\Rightarrow\boxed{v_0=a-8}$$

ومنه الحد العام للمتتالية الهندسية:

$$v_n=v_0.q^n$$

$$\boxed{v_n=(a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

لدينا $v_n=u_n-t_n$ ومنه:

$$u_n=v_n+t_n=v_n+P(n)$$

$$\boxed{u_n=(a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n^2-6n+8}$$

---

9) نعطى عددين حقيقيين b,a ونفترض ان $a\neq1$ نتامل المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ التي تحقق $v_{n+1}=av_n+b$ اياً كان العدد الطبيعي n

1. عين تابعا f يحقق $v_{n+1}=f(v_n)$ اياً كانت قيمة $n\geq0$

بفرض $x=v_n$ فيكون $f(x)=v_{n+1}$ ولكن:

$$\left.\begin{aligned}v_{n+1}&=av_n+b\\v_{n+1}&=ax+b\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=ax+b$$

2. احسب ℓ حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x$$
$$ax + b = x$$
$$ax - x = -b$$
$$(a-1)x = -b$$
$$x = \frac{-b}{a-1} = \ell$$

3. نعرف متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ حيث $u_n = v_n - \ell$ اثبت ان $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية واستنتج u_n بدلالة a ، b ، v_0 ، n ثم استنتج v_n بدلالة هذه المعاملات.

نوجد : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$u_n = v_n - \ell$$
$$u_{n+1} = v_{n+1} - \ell$$
$$= a\underbrace{v_n}_{\downarrow} + b - \ell$$
$$= a(u_n + \ell) + b - \ell \quad = au_n + a\ell + b - \ell$$
$$= au_n + b + \underbrace{\ell}_{\downarrow}(a-1)$$
$$= au_n + b + \left(\frac{-b}{a-1}\right)(a-1) \quad = au_n + b - b$$
$$u_{n+1} = au_n \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \quad (\text{ثابت})$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = a$

- ◆ $u_0 = v_0 - \ell = v_0 + \frac{b}{a-1}$
- ◆ $u_n = u_0 . q^n \Rightarrow u_n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n$
- ◆ $u_n = v_n - \ell \Rightarrow v_n = u_n + \ell$

$$= \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n + \frac{-b}{a-1}$$
$$v_n = v_0a^n + \frac{ba^n}{a-1} - \frac{b}{a-1}$$

---

10) نتأمل متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة بالتدريج وفق $(n \geq 1)$ $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$

1. عين عددين حقيقيين b, a يحققان $a.b = 6$ ، $a + b = 5$

عددان مجموعهما 5 وجداؤهما 6 هما 2, 3 سوف نعتمد $b = 3$ ، $a = 2$

2. لتكن $(v_n)_{n\geq0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - au_n$ اثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها b

- ◆ $v_n = u_{n+1} - au_n = u_{n+1} - (2u_n)$
- ◆ $v_{n+1} = \underbrace{u_{n+2}}_{\Downarrow} - 2u_{n+1}$

$$= 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1}$$
$$= 3(u_{n+1} - 2u_n)$$

- ◆ $v_{n+1} = 3v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 3 \quad (\text{ثابت})$

فالمتتالية هندسية أساسها: $q = b = 3$

3. لتكن $(w_n)_{n\geq0}$ المتتالية $w_n = u_{n+1} - bu_n$ اثبت ان $(w_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية اساسها a

◆ $w_n = u_{n+1} - bu_n = u_{n+1} - 3u_n$

◆ $$\begin{aligned} w_{n+1} &= \underbrace{u_{n+2}}_{\Downarrow} - 3u_{n+1} \\ &= 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} - 6u_n \\ &= 2\underbrace{\left(u_{n+1} - 3u_n\right)} \end{aligned}$$

$$w_{n+1} = 2\,w_n \quad \Rightarrow \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = 2 \ \left(\text{ثابت}\right)$$

فالمتتالية هندسية أساسها : $q = a = 2$

4. عبر عن v_n ، w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

◆ $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ $w_0 = u_1 - 3u_0$ $= 4 - 3(1) = 1$ $\boxed{w_0 = 1}$ ◆ $w_n = w_0 . q^n$ $\boxed{w_n = 2^n}$	◆ $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ $v_0 = u_1 - 2u_0$ $= 4 - 2 = 2$ $\boxed{v_0 = 2}$ ◆ $v_n = v_0 . q^n$ $\boxed{v_n = 2.3^n}$

◆ $$\begin{cases} v_n = u_{n+1} - 2u_n \\ w_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.3^n = u_{n+1} - 2u_n \\ 2^n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \boxed{-}$$

$$\boxed{2.3^n - 2^n = u_n}$$

---

11) 1- اثبت اياً كان العدد الطبيعي n: $n \geq 2$ ان $3n^2 \geq (n+1)^2$

◆ نثبت صحة الخاصة السابقة من أجل $n = 2$

$$E(2) \ : \ \left.\begin{aligned} L_1 &= 3(4) = 12 \\ L_2 &= (3)^2 = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 12 \geq 9$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 2$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$E(n) \quad : \quad 3n^2 \geq (n+1)^2$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ أي لنثبت:

$E(n+1) \ : \ 3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

نضيف ونطرح $(n+2)^2$:

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 &= \underbrace{(n+2)^2 - (n+2)^2} + 3(n+1)^2 \\ &= (n+2)^2 - n^2 - 4n - 4 + 3n^2 + 6n + 3 \\ &= (n+2)^2 \quad + \underbrace{2n^2 + 2n - 1}_{\text{اكبر من الصفر من اجل } n\geq2} \end{aligned}$$

$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$ ومنه الخاصة صحيحة من أجل $n \geq 2$

2- نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية $3^n \geq 2^n + 5n^2$

1. ما اصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

نلاحظ من أجل $n = \{1,2,3,4\}$ الخاصة غير صحيحة.

2. اثبت ان $E(n)$ صحيحة اياً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$

◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n = 5$

$$E(5) \ : \ \left.\begin{matrix} L_1 = 3^5 = 243 \\ L_2 = 2^5 + 5(25) = 157 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 243 \geq 157$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n = 5$

◆ نفرض صحة الخاصة من اجل n أي:

$E(n) \quad : \ 3^n \geq 2^n + 5n^2$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ أي لنثبت:

$E(n+1) \quad : \ 3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$

لدينا من الفرض : $3^n \geq 2^n + 5n^2$

نضرب الطرفين بـ 3 : $3 . 3^n \geq 3(2^n + 5n^2 \ )$

نضيف ونطرح $2^{n+1} + 5(n+1)^2$: $3^{n+1} \geq 3(2)^n + 15n^2$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 - 2^{n+1} - 5(n+1)^2 + 3(2)^n + 15n^2$$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 - 2.\,2^n + 3.2^n - 5(n^2 + 2n + 1) + 15n^2$$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 + 2^n - 5n^2 - 10n - 5 + 15n^2$$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 + \underbrace{2^n + 10n^2 - 10n - 5}_{\text{هذا المقدار أكبر من الصفر}}$$

من اجل $n \geq 5$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$

ومنه الخاصة صحيحة من أجل $n \geq 5$

---

12) نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية $3^n \geq (n+2)^2$

1. اتكون القضايا $E(0), E(1), E(3), E(4)$ صحيحة؟

	L_2	L_1	$E(n)$
الخاصة غير صحيحة	$(0+2)^2 = 4$	$(3)^0 = 1$	$E(0)$:
الخاصة غير صحيحة	$(1+2)^2 = 9$	$(3)^1 = 3$	$E(1)$:
الخاصة صحيحة	$(3+2)^2 = 25$	$(3)^3 = 27$	$E(3)$:
الخاصة صحيحة	$(4+2)^2 = 36$	$(3)^4 = 81$	$E(4)$:

2. اثبت بالتدريج ان القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 3$

$$E(3) \ : \ \begin{cases} L_1 = 3^3 = 27 \\ L_2 = (3+2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow 27 \geq 25$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n \geq 3$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$E(n) \quad : \ (3)^n \geq (n+2)^2$

◆نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ اي لنثبت ان:

$E(n+1) \quad : \quad (3)^{n+1} \geq (n+3)^2$

لدينا من الفرض : $(3)^n \geq (n+2)^2$

نضرب الطرفين بـ 3 $3(3)^n \geq 3(n+2)^2$

$(3)^{n+1} \geq 3\,(n+2)^2$

نضيف ونطرح $(n+3)^2$ $(3)^{n+1} \geq (n+3)^2 - (n+3)^2 + 3(n+2)^2$

$$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2 - (n^2+6n+9) + 3(n^2+4n+4)$$
$$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2 - n^2 - 6n - 9 + 3n^2 + 12n + 12$$
$$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2 + \underbrace{2n^2+6n+3}_{\substack{\text{اكبر من الصفر} \\ n\geq3 \text{ من اجل}}}$$
$$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

ومنه الخاصة صحيحة من أجل $n \geq 3$

---

13) اثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية اياً كان العدد الطبيعي n

❶ 4^n+5 مضاعف للعدد 3

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$

$E(0) \quad : \quad (4)^0+5 = 1+5 = 6$

(6) مضاعف للعدد (3) فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$E(n) \quad : \quad (4)^n + 5 = 3k \quad \Rightarrow 4^n = 3k-5$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت:

$E(n+1) \; : \; (4)^{n+1}+5 = 3k_1$

$$\begin{aligned}(4)^{n+1}+5 &= (4)^n.(4)+5 \\ &= (3k-5).4+5 \\ &= 12k-20+5 \\ &= \underline{12k-15} \\ &= 3\left(\underbrace{4k-5}\right) \\ &= 3k_1\end{aligned}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$ ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n \in N$.

---

❷ $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$

$E(0) \quad : \quad (2)^0 - 1 = 1-1 = 0$

(0) مضاعف للعدد (7) فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

◆نفرض صحة الخاصة من اجل n اي:

$E(n) \quad : \quad (2)^{3n}-1 = 7k \quad \Rightarrow 2^{3n} = 7k+1$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ اي لنثبت:

$E(n+1): (2)^{3n+3}-1 = 7k_1$

$$
\begin{aligned}
(2)^{3n+3}-1 &= \underbrace{(2)^{3n}}.\underbrace{(2)^{3}}-1\\
&=(7k+1)(8)-1\\
&=56k+8-1\\
&=56k+7\\
&=7\,\underbrace{(8k+1)}\\
&=7k_1
\end{aligned}
$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$ ، ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n\in N$.

---

❸ n^3+2n مضاعف للعدد 3

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$

$E(0)\quad:\quad (0)^3+2(0)=0$

(0) مضاعف للعدد (3) فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

◆ نفرض أن الخاصة صحيحة من أجل n أي:

$E(n)\quad:\quad n^3+2n=3k\quad\Longrightarrow n^3=3k-2n$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت:

$E(n+1)\quad:\quad (n+1)^3+2(n+1)=3k_1$

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3+2(n+1) &= n^3+3n^2+3n+1+2n+2\\
&=\underbrace{n^3}+3n^2+5n+3\\
&=3k-2n+3n^2+5n+3\\
&=3k+3n^2+3n+3\\
&=3\,\underbrace{[k+n^2+n+1]}\\
&=3\,k_1
\end{aligned}
$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$ ، ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n\in N$.

---

❹ $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

◆ نثبت صحة الخاصة السابقة من أجل $n=0$

$E(0)\quad:\quad (3)^1+(2)^2=3+4=7$

(7) مضاعف للعدد (7) فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

◆ نفرض أن الخاصة صحيحة من أجل n أي:

$E(n)\quad:\quad (3)^{2n+1}+(2)^{n+2}=7k\quad\Longrightarrow 3^{2n+1}=7k-2^{n+2}$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت:

$E(n+1)\quad:\quad (3)^{2n+3}+(2)^{n+3}=7k_1$

$$
\begin{aligned}
(3)^{2n+3}+(2)^{n+3} &= (3)^{2n+1}.(3)^2+2.(2)^{n+2}\\
&=(7k-2^{n+2}).9+2.2^{n+2}\\
&=63k\underbrace{-9.2^{n+2}+2.2^{n+2}}\\
&=63k-7.2^{n+2}\\
&=7\,\underbrace{[9k-2^{n+2}]}\\
&=7k_1
\end{aligned}
$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$ ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل n عدد طبيعي.

14) نرمز إلى القضية (يقسمُ العددُ 9 العددَ 10^n+1) بالرمز $E(n)$ في حالة $n \in N$

1. اثبت انه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كانت عندئذ $E(n+1)$ صحيحة.

♦ نفرض ان الخاصة صحيحة من اجل n اي:

$$E(n)\quad : \ (10)^n+1=9k \Rightarrow (10)^n=9k-1$$

♦ نثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت:

$$E(n+1) : (10)^{n+1}+1=9k_1$$

$$\begin{aligned}(10)^{n+1}+1 &= (10)^n.(10)\ +1\\ &= (9k-1).10+1\ = 90k-10+1\\ &= 90k-9=9\underbrace{(10k-1)}\ =9k_1\end{aligned}$$

فالخاصة السابقة صحيحة من اجل $n+1$

2. اتكون القضية $E(n)$ صحيحة على N؟ برر اجابتك.

من اجل $n=0$

$$E(0)\ :\ (10)^0+1=1+1=2$$

العدد (9) لا يقسم العدد (2). ومنه القضية السابقة غير صحيحة.

---

15) $(u_n)_{n\geq0}$متتالية معرفة وفق $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\end{cases}$ عند كل $n\geq0$

1. اثبت ان $0\leq u_n\leq 2$ اياً كان العدد n طبيعي.

لنثبت صحة هذه الخاصة بالتدريج:

♦ نثبت صحة الخاصة من اجل $n=0$

محققة $u_0=1 \quad\Rightarrow\quad 0\leq u_0=1\leq 2$

♦ نفرض ان الخاصة صحيحة من أجل n أي: $0\leq\ u_n\ \leq 2$

♦ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت أن: $0\leq u_{n+1}\ \leq 2$

من الفرض لدينا :

$$\begin{aligned}0\leq\ u_n\ &\leq 2\\ 2\leq 2+u_n\ &\leq 4\\ \sqrt{2}\leq \underbrace{\sqrt{2+u_n}}&\leq 2\\ 0\leq\ u_{n+1}\ &\leq 2\end{aligned}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$. ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n\in N$.

2. اثبت ان $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \sqrt{2+u_n}-u_n\\ &= \frac{(\sqrt{2+u_n}-u_n)(\sqrt{2+u_n}+u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}\\ &= \frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{-(u_n^2-u_n-2)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}\\ &= \frac{-\overbrace{(u_n-2)}^{\text{سالب}}\overbrace{(u_n+1)}^{\text{موجب}}}{\sqrt{2+u_n}+u_n}\geq 0 \quad : \ 0\leq u_n\leq 2\end{aligned}$$

فالمتتالية متزايدة تماماً.

16) $(u_n)_{n\geq0}$ **متتالية معرفة وفق** $u_0 = 1$ **،** $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ **عند كل** $n \geq 0$

1. اثبت ان التابع $x \mapsto \frac{3x+2}{2x+6}$ **متزايد تماماً واستنتج ان** $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ **اياً كان العدد** n

$f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ معرف بوجه خاص على المجال $[0, +\infty[$

f اشتقاقي على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2\,(3x+2)}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

ومنه $f(x)$ متزايد تماماً على $[0, +\infty[$ ولنثبت بالتدريج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ اياً كان n

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 0$

$$E(0)\ :\ \frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 0$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$$E(n)\quad :\quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ أي لنثبت:

$$E(n+1)\quad :\quad \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

بما أن f متزايد تماماً على $[0, +\infty[$ فهو متزايد تماماً على $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ومنه:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1) \qquad \text{لأن} \qquad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) + 6} < u_{n+1} \leq \frac{3+2}{2+6}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$

ومنه الخاصة صحيحة من أجل n عدد طبيعي.

2. اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ **متناقصة تماماً.**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} - u_n$$

$$= \frac{3u_n + 2 - 2{u_n}^2 - 6u_n}{2u_n + 6}$$

$$= \frac{-2{u_n}^2 - 3u_n + 2}{2u_n + 6}$$

$$= \frac{\overbrace{(u_n+2)}^{\text{موجب}}\overbrace{(-2u_n+1)}^{\text{سالب}}}{2\underbrace{(u_n+3)}_{\text{موجب}}} < 0 \Longrightarrow$$ فالمتتالية متناقصة تماماً

17) ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ في حالة $n \in$ N

1. احسب u_1 , u_2

تذكر: $\boxed{1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}}$ $\boxed{1+\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{4}}$

$$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2} \quad : \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4} \quad : \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

2. اثبت بالتدريج ان $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 0$

$$E(0) \ : \ \left.\begin{aligned} L_1 &= u_0 = 2\cos\theta \\ L_2 &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 0$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n أي:

$$E(n) \quad : \ u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

◆ نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت:

$$E(n+1): u_{n+1} \overset{?}{=} 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2\left(\underbrace{1+\cos\frac{\theta}{2^n}}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه الخاصة صحيحة من أجل $n+1$

فالخاصة صحيحة من أجل $n \in N$

18) في مستو P محدث بمعلم متجانس، H هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2-5y^2=1$ ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ في المستوي P النقطة $\grave{M}(9x+20y\,,4x+9y)$ اي $f(M)=\grave{M}$ لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(1\,,0)$ ثم لنتامل في المستوي P متتالية النقاط $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $S_{n+1}=f(S_n)$ اثبت ان S_n نقطة من المجموعة H وان إحداثياتها اعداد صحيحة.

H مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2-5y^2=1$

f تابع يقرن كل نقطة M بالنقطة $\grave{M}$ $\quad M(x,y)\longrightarrow \grave{M}(9x+20y,4x+9y)$

S_0 نقطة حيث $S_0(1,0)$

$(S_n)_{n\geq0}$ متتالية نقاط معرفة وفق $S_{n+1}=f(S_n)$ المطلوب إثبات ان S_n نقطة من المجموعة H وان إحداثياتها اعداد صحيحة.

لنبرهن بالتدريج:

- نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$:

$$E(0)\ :\quad S_0(1,0)\in H$$
$$1^2-5.(0)^2=1$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n=0$

- نفرض ان $S_n\in H$ صحيحة من أجل n أي:

$$E(n)\quad :\quad S_n(x,y)\in H$$

- نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ اي لنثبت:

$$E(n+1)\ :\ S_{n+1}=f(S_n)=(9x+20y\,,4x+9y)$$

$$\begin{aligned}(9x+20y)^2-5(4x+9y)^2&=81x^2+360xy+400y^2-5(16x^2+72xy+81y^2)\\&=81x^2+360xy+400y^2-80x^2-360xy-405y^2\\&=x^2-5y^2=1\end{aligned}$$

ومنه $S_{n+1}=(9x+20y\,,4x+9y)\in H$

ومنه الخاصة صحيحة من أجل $n+1$. فالخاصة السابقة صحيحة اي S_n نقطة من H.

---

19) يرمز x إلى عدد حقيقي ويرمز n إلى عدد طبيعي غير معدوم نضع:

$$S_n=\cos x+\cos(3x)+\ \cos(5x)+\cdots\cdots\cdots+\cos(\,(2n-1)x)$$

1. باستعمال دساتير مثلثاتية تعرفها اثبت ان:

$$\sin(2a)=2\sin a.\cos a\quad \text{و}\quad \sin a.\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

تذكرة ببعض القوانين المثلثية:

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\quad ,\quad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\quad ,\quad \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

نعلم أن: $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$$\sin 2a=\sin(a+a)=\sin a\cos a+\cos a\sin a=2\sin a\cos a$$

نعلم ان : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\quad \boxed{+}$

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b\quad \div 2$

$$\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]=\sin a\cos b$$

2. حول كلاً من العبارتين الآتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين إلى مجموع نسبتين مثلثيتين.

$\sin x\cos[(2n+1)x]$ و $\sin nx \cos nx$

$$\sin nx\cos nx = \frac{1}{2}\sin 2nx$$

$$\sin x\cos[(2n+1)x] = \frac{1}{2}[\sin(x+(2n+1)x)+\sin(x-(2n+1)x]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left((2n+2)x\right)+\sin(-2nx)\right] \quad = \frac{1}{2}\left[\sin\left((2n+2)x\right)-\sin(2nx)\right]$$

3. اثبت ان $S_n = \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x}$ اياً يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi (k \in Z)$

◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n = 1$

$$E(1) \ : \ S_1 = \cos x \times \frac{\sin x}{\sin x} = \cos x$$

ومنه $S_n = \cos x + \cos 3x + \dots\dots\dots + \cos(2n-1)x$ ومنه $S_1 = \cos x$ ومنه الخاصة صحيحة

ولدينا حسب الفرض

من اجل $n = 1$

◆ نفرض صحة الخاصة من أجل n اي:

$$E(n) \ : \ \cos x + \cos 3x + \dots\dots + \cos(2n-1)x = \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x}$$

◆ نثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت أن:

$$E(n+1) \ : \ \cos x + \cos 3x + \dots\dots \cos(2n-1)x + \cos(2n+1)x = \cos(n+1)x \times \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$$

$$E(n+1) \ : \ \underbrace{\cos x + \cos 3x + \dots\dots + \cos(2n-1)x}_{\text{من الفرض}} + \cos(2n+1)x$$

$\Downarrow$

cos(2(n+1)-1)

$\overset{||}{2n+1}$

$$= \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x} \quad + \cos(2n+1)x$$

$$= \frac{\cos nx \sin nx + \sin x \cos(2n+1)x}{\sin x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2nx + \frac{1}{2}[\sin(x+(2n+1)x)+\sin(x-(2n+1)x)]}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin 2nx + \sin\left((2+2n)x\right) - \sin(2nx)}{2\sin x}$$

$$= \frac{\sin\left((2+2n)x\right)}{2\sin x}$$

$$= \frac{2\sin\left((n+1)x\right)\cos\left((n+1)x\right)}{2\sin x}$$

$$= \frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\sin x}.\cos\left((n+1)x\right)$$

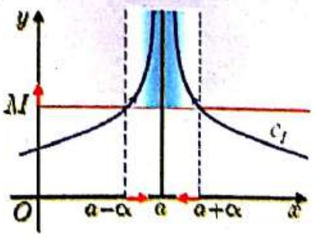
فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$

ومنه الخاصة صحيحة من اجل $n \geq 1$

نهاية تابع عددي

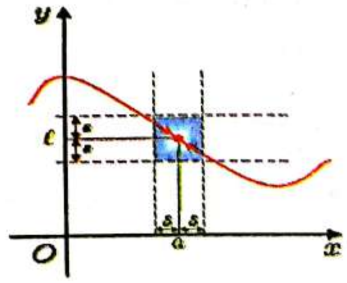
أولاً: نهاية تابع f عند a هي $+\infty$:

نقول إن نهاية التابع f عند a هي $+\infty$ إذا تجاوزت جميع قيم $f(x)$ أي عـدد حقيقـي M عنـدما تكـون x قريبـة بالقـدر الكافي من a ونكتب: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$



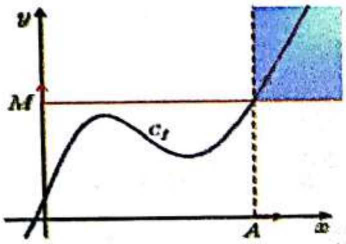
ثانياً: نهاية تابع f عند a هي قيمة عددية ℓ :

نقول إن نهاية التابع f عند a هي قيمة عددية ℓ إذا تجمعت جميع قيم $f(x)$ بـالقرب مـن ℓ أو حـول ℓ عنـدما تكـون x قريبة بالقدر الكافي من a ونكتب: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$



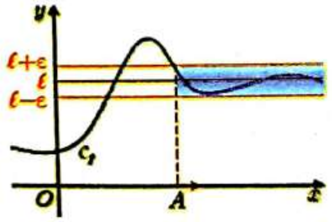
ثالثاً: نهاية تابع f عند $+\infty$ هي $+\infty$:

نقول إن نهاية التابع f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا تجاوزت جميع قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيـرة بالقـدر الكافي ونكتب: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$



نهاية تابع f عند $+\infty$هي قيمة عددية ℓ:

نقول إن نهاية التابع f عند $+\infty$ هي قيمة عددية ℓ إذا تجمعت جميع قيم $f(x)$ بالقرب من ℓ أو حول ℓ عنـدما تكـون x كبيرة بالقدر الكافي ونكتب: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$



بمعنى أدق:

أياً يكن العدد الحقيقي $\varepsilon > 0$ فإن قيم $f(x)$ ستقع ضمن المجال $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ بدءاً من حد معين x_0 أي:

$$f(x) \in \,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$$

$$\ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$$
$$-\varepsilon < f(x)-\ell < \varepsilon$$
$$|f(x)-\ell| < \varepsilon$$

حيث: ℓ مركز المجال $\ell = \dfrac{a+b}{2}$ ε نصف قطر المجال $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$

ملاحظات:

1 رمز نصف قطر المجال في الكتاب $(\alpha$ أو $\varepsilon)$ وهو مقدار موجب لأنه يمثل مسافة.

مثال ① : اوجد مجال مفتوح مركزه $\ell = 3$ ونصف قطره

$I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[=]3 - 0.04 , 3 + 0.04[\quad \Rightarrow \quad I =]2.96 , 3.04[$

مثال ② : اوجد مركز ونصف قطر المجال $I =]4.82 , 5.18[$

المركز $\ell = \dfrac{5.18 + 4.82}{2} = 5$ ، نصف القطر $\varepsilon = \dfrac{5.18 - 4.82}{2} = 0.18$

$\boxed{2}$ $|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & \text{إما} \\ x = -a & \text{او} \end{cases}$ $\qquad |x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a & \text{إما} \\ x < -a & \text{او} \end{cases}$ $\qquad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

مثال: ليكن التابع $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ **المعرف على** $R \backslash \{-1\}$ **عين العدد** A **الذي يحقق الشرط: إذا كان** $x > A$ **انتمى** $f(x)$ **إلى المجال** I **المفتوح الذي مركزه** (1) **ونصف قطره** (0.05)

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ عندئذ $\ell = 1$

$f(x)$ **ينتمي إلى المجال المفتوح** I **الذي مركزه** $\ell = 1$ **ونصف قطره** $\varepsilon = 0.05$ **إذا تحققت المتراجحة:**

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &< \varepsilon \\ \left|\frac{x+3}{x+1} - 1\right| &< \frac{5}{100} \\ \left|\frac{x+3-x-1}{x+1}\right| &< \frac{5}{100} \\ \left|\frac{2}{x+1}\right| &< \frac{1}{20} \\ 40 &< |x+1| \end{aligned}$$

وبما أن $x \to +\infty$ **فإننا نهتم بالقيم الكبيرة لـ** x **أي** $x > 0$ **نجد أن:**

$40 < x + 1$

$x > 39 \quad \Rightarrow$ أي $\boxed{A = 39}$

ينتج عن ذلك انه إذا كان $x > 39$ **انتمى** $f(x)$ **إلى المجال** $I =]1 - 0.05 , 1 + 0.05[$

$I =]0.95 , 1.05[$

مثال: بفرض f **تابع معرف على** $R \backslash \left\{\frac{-3}{2}\right\}$ **وفق** $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$ **أوجد نهاية** f **عند** $+\infty$ **ثم عين عدداً** A **يحقق الشرط: إذا كان** $x > A$ **انتمى** $f(x)$ **إلى المجال المفتوح** I **الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad (\ell = 2)$

$f(x)$ **تنتمي للمجال الذي مركزه** $(\ell = 2)$ **ونصف قطره** $\left(\varepsilon = \frac{5}{100}\right)$ **يجب أن تحقق المتراجحة:**

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &< \varepsilon \\ \left|\frac{4x-5}{2x+3} - 2\right| &< \frac{5}{100} \\ \left|\frac{4x-5-4x-6}{2x+3}\right| &< \frac{1}{20} \\ \left|\frac{-11}{2x+3}\right| &< \frac{1}{20} \\ \frac{11}{|2x+3|} &< \frac{1}{20} \\ 220 &< |2x+3| \end{aligned}$$

بما أن $x \to +\infty$ **ونهتم بالقيم الكبيرة لـ** x **أي** $x > 0$ **نجد أن:**

$220 < 2x + 3$

$217 < 2x$

$108.5 < x \quad \Rightarrow \quad A = 108.5$

ينتج عن ذلك أنه إذا كان $x > 108.5$ **انتمى** $f(x)$ **إلى المجال الذي مركزه** $(\ell = 2)$ **ونصف قطره** $(\varepsilon = 0.05)$ **أي:**

$f(x) \in]2 - 0.05 , 2 + 0.05[$

$f(x) \in]1.95 , 2.05[$

للتوضيح: ◆إذا اخذنا $x = 109$ $\quad f(109) = \frac{431}{221} = 1.9502 \in$ للمجال

◆إذا اخذنا $x = 107$ $\quad f(107) = \frac{423}{217} = 1.949 \notin$ للمجال

صفحة 34 رقم 2: احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ثم اعطِ عدداً A يحقق الشرط:
إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9\,,5.1[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

نوجد مركز المجال ونصف قطره: $\ell = \frac{4.9+5.1}{2} = 5$

$$\varepsilon = \frac{5.1-4.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$f(x) \in]4.9\,,5.1[$ إذا تحققت المتراجحة:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{5x-1}{x-1} - 5\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{|x-1|} < \frac{1}{10}$$

$$40 < |x-1|$$

بما أن $x \to +\infty$ نهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x > 0$

فنجد أن: $40 < x - 1$

$$41 < x \Rightarrow A = 41$$

ومنه $f(x) \in]5-0.1\,,5+0.1[=]4.9\,,5.1[$

إذا كانت $x > 41$

****

قواعد في النهايات :

① $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$, $\frac{0}{\infty} = 0$

② $\frac{\infty}{0} = \infty$, $\frac{\text{عدد غير الصفر}}{0} = \infty$ (ندرس إشارة الصفر و ننتبه لإشارة البسط)

③ $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ (انتبه لإشارات البسط و المقام)

④ $-\infty - \infty = -\infty$, $+\infty + \infty = +\infty$

⑤ $\infty \times \infty = \infty$ (انتبه للإشارات)

حالات عدم التعيين :

$+\infty - \infty$	$0.\infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$

العمليات على النهايات :

① $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

② $\lim_{x\to x_0}(f.g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) . \lim_{x\to x_0} g(x)$

③ $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$; $g(x) \neq 0$

④ $\lim_{x\to x_0}\left(k\,f(x)\right) = k \lim_{x\to x_0} f(x)$

نهايات مرجعية :

① $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي غير معدوم} \\ -\infty & n \text{ فردي غير معدوم} \end{cases}$

② $\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} \frac{1}{x^n} = 0$; $n \in N^*$

③ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

④ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

ملاحظة: بعض التوابع ليس لها نهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ ، **مثل:** $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$

ليس للتابعين السابقين نهاية عند $-\infty, +\infty$ حيث :

$-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ أياً كانت $x \in R$ وبالتالي مجموعة قيم التابعين محصورة في المجال $[-1,1]$.

نهاية التابع الثابت $f(x) = b$: إن نهاية التابع الثابت عند اي قيمة هي دائماً (b)

مثال : $f(x) = -3$, $\lim_{\substack{x\to0 \\ x\to-\infty \\ x\to+\infty}} f(x) = -3$

نهاية التابع الصحيح عند $\pm\infty$:

هي نهاية حده الأكبر أساً مع امثاله واشارته.

ملاحظة : $(+\infty)^{\text{زوجي او فردي}} = +\infty$, $(-\infty)^{\text{زوجي}} = +\infty$, $(-\infty)^{\text{فردي}} = -\infty$

تمرين:

اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند $\pm\infty$:

$\boxed{1}$ $f(x) = 2x + x^2 + 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{2}$ $f(x) = x^3 - 2x + 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{3}$ $f(x) = 2x^2 - x^3 + 5$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{x-1}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{-5}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\boxed{6}$ $f(x) = \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,x^4$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

تدريب صفحة 34 رقم 1 :

احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$\boxed{1}$ $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$

$\boxed{2}$ $f(x) = -3x^4 + 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^4) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^4) = -\infty$

$\boxed{3}$ $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (8x^4) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (8x^4) = +\infty$

$\boxed{4}$ $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (5x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3) = -\infty$

$\boxed{5}$ $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (7x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (7x^3) = -\infty$

$\boxed{6}$ $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^4) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^4) = -\infty$

نهاية تابع كسري حدودي عند $\pm\infty$:

ناخذ الحد الأكبر اساً بالبسط مع امثاله وإشارته وناخذ الحد الأكبر اساً بالمقام مع امثاله وإشارته.

نختصر ثم نعوض ونوجد النهاية.

تمرين: اوجد نهاية كل تابع عند $\pm\infty$

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x^2}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{-x^2}\right) = -1$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{x^3-x^2+1}{1-x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-x) = -(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-x) = -(+\infty) = -\infty$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{6}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{x^2}\right) = \frac{6}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6}{x^2}\right) = \frac{6}{+\infty} = 0$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\,x-1}{1-2x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{-2x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = \frac{-2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x^2}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

$\boxed{7}$ $f(x) = \dfrac{x-1}{3x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

$\boxed{8}$ $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

تذكرة و ملاحظات:

$\boxed{1}$ من طرق تحليل كثير الحدود: العامل المشترك والتحليل المباشر والتجميع إلى فئات والمطابقات.

$\boxed{2}$ المتطابقات التربيعية:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$\boxed{3}$ المتطابقات التكعيبية:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

نهاية تابع كسري حدودي عند قيمة عددية (a):

نعوض a في التابع فنحصل على النهاية مباشرةً أو نحصل على إحدى الحالتين الآتيتين :

$$\frac{\text{عدد غير الصفر}}{0} = \infty$$

يجب دراسة إشارة الصفر (إشارة المقام) ناخذ :

قيمتان لـ x من جوار a (قيمة أصغر و قيمة أكبر)

نعوضها فقط في المقام.

$\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

يجب إزالة حالة عدم التعيين وذلك بطرق التحليل التي تعلمناها سابقاً (عامل مشترك – مطابقة - تحليل مباشر – مربع كامل - Δ - قسمة إقليدية).

تمرين: أوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}$ $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ $(a=-1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-3}{2}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{3-x}$ $(a=3)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{3-x} = -(x-2)$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = -1$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^2-x}{x^3-1}$ $(a=1)$

عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{3}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}$ $(a=2)$

عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

الطريقة التجميعية:

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}$$
$$= \frac{x^2(x-2)-(x-2)}{x-2}$$
$$= \frac{(x^2-1)\ (x-2)}{x-2} = x^2-1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

طريقة القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-x+2 & x-2 \\ \hline \mp x^3 \pm 2x^2 & x^2-1 \\ \hline -x+2 & \\ \pm x \mp 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x^2-1$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ $(a=1)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ $(a=0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)^2} \qquad (a = 1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

7 $f(x) = \dfrac{4}{2 - x} \qquad (a = 2)$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

****

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$: يوجد طريقتان إما العامل المناسب أو الضرب بالمرافق

طريقة العامل المناسب : **نخرج من داخل الجذر x^2 عامل مناسب حتى وان لم يكن موجود.**

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} +x & : x \to +\infty \\ -x & : x \to -\infty \end{cases}$$

ملاحظة: بعد إخراج عامل مناسب نحصل على عامل مشترك بين الحدين

تمارين:

1 $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x \qquad (a = +\infty)$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x$$

$$= |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x = x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - 2) = -\infty$$

---

2 $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 + 2} \qquad (a = -\infty)$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$f(x) = 3x + \sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= 3x + |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = 3x - x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = x\left(3 - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(3 - 1) = -\infty$$

---

3 $f(x) = \sqrt{x - 1} - x \qquad (a = +\infty)$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)} - x = |x|\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x$$

$$= x\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(0 - 1) = -\infty$$

$f(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+4}$ $(a = +\infty)$

$\boxed{4}$

∞ − ∞ عدم تعيين.

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$= |x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - |x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} = x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$= x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(\sqrt{2}-1) = +\infty$$

طريقة الضرب بالمرافق (مرافق الجذر) :

نضرب بمرافق الجذر ونقسم عليه:

$\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \xrightarrow{\text{مرافقه}} \sqrt{A} \mp \sqrt{B}$ $\sqrt{A} - B \xrightarrow{\text{مرافقه}} \sqrt{A} + B$ $\sqrt{A} + B \xrightarrow{\text{مرافقه}} \sqrt{A} - B$

ملاحظة:

1. **بعد الضرب بمرافق الجذر نستخدم المطابقة التربيعية من الشكل** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
2. **بعد الضرب والقسمة على المرافق نميز حالتين:**
   - **إذا لم يبقى x في البسط نعوض فوراً.**
   - **إذا بقي x في البسط نطبق طريقة العامل المناسب.**

تمارين:

$\boxed{1}$ $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ $(a = +\infty)$

∞ − ∞ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{\left(\overbrace{\sqrt{x^2+x+1}}^{a} - \overset{b}{x}\right)\left(\overbrace{\sqrt{x^2+x+1}}^{a} + \overset{b}{x}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2+1}$ $(a = +\infty)$

∞ − ∞ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{\left(2x - \sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)}{2x + \sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{4x^2 - (4x^2+1)}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{} = 0$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x \qquad (a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$=\frac{2x^2+1-2x^2}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}=\frac{1}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$$

* * *

تابع كسري جذري

$\frac{\infty}{\infty}$ عامل مناسب

$\frac{0}{0}$ ضرب بالمرافق

تمرين: أوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x} \qquad (a=3)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{-1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{-1}{4}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1} \qquad (a=1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^3-1}-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2x^3-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2x^3-2}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2(x^3-1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3-1}+1}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{2(3)}{2}=3$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x-1} \qquad (a=-\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-1}{2}$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x \qquad (a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$=\frac{2x^2+1-2x^2}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}=\frac{1}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$$

****

$$\overbrace{\frac{\infty}{\infty}\ \text{عامل مناسب} \qquad\qquad \frac{0}{0}\ \text{ضرب بالمرافق}}^{\text{تابع كسري جذري}}$$

تمرين: اوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x} \qquad (a=3)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{-1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\frac{-1}{4}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1} \qquad (a=1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^3-1}-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2x^3-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2x^3-2}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2(x^3-1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3-1}+1}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{2(3)}{2}=3$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x-1} \qquad (a=-\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{-1}{2}$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2}$ $(a=0)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x^2\,(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\frac{x+4-4}{x^2(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{x}{x^2(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$\boxed{5}$ $f(x)=x-2\sqrt{x}$ $(a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين

طريقة اولى:

$$f(x)=x-2\sqrt{x^2.\frac{1}{x}}=x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$=x-2x\sqrt{\frac{1}{x}}=x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$$

طريقة ثانية:

$$f(x)=\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-2)\quad ;x>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty-2)=+\infty$$

$\boxed{6}$ $f(x)=\sqrt{x^2+x-3}-x+1$ $(a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\sqrt{x^2+x-3}-x+1$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+x-3}-x)(\sqrt{x^2+x-3}+x)}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1$$

$$=\frac{x^2+x-3-x^2}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1=\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1$$

$$=\frac{x-3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}+x}+1=\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{|x|\,\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+x}+1$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right)}+1=\frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ $(a=+\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2.\frac{1}{x}}}{x+1}=\frac{x+|x|\sqrt{\frac{1}{x}}}{x+1}=\frac{x+x\sqrt{\frac{1}{x}}}{x+1}=\frac{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{1}=1$$

التابع المثلثي :

مبرهنة : $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

قوانين هامة في المثلثات:

$\sin x=2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$

$1-\cos 2x=2\sin^2 x$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$\sin 2x=2\sin x.\cos x$

$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

تمرين: أوجد نهاية كل تابع مما يلي عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}\ f(x)=\frac{\sin 3x}{x}\qquad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}=3.\frac{\sin 3x}{3x}$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=3(1)=3$

علماً أن : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=1\right)$

$\boxed{2}\ f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}\qquad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{2}{3}.\frac{\sin 2x}{2x}$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}$

علماً أن : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1\right)$

$\boxed{3}\ f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x}\qquad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x}=\frac{2\sin^2 x}{x}$

$=2\sin x.\frac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=2(0)(1)=0$

علماً أن : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$

$\boxed{4}\ f(x)=\frac{1-\cos 2x}{3x^2}\qquad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\frac{1}{3}.\frac{2\sin^2 x}{x^2}$

$=\frac{2}{3}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{2}{3}(1)^2=\frac{2}{3}$

علماً أن : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$

$\boxed{5}\ f(x)=\frac{1-\cos x}{x}\qquad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$=2\sin\frac{x}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=2\sin\frac{x}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}$

$=\sin\frac{x}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=(0)(1)=0$

علماً أن : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right)$

$\boxed{6}\ f(x)=\frac{1-\cos x}{3x^2}\qquad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}.\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2$

$=\frac{2}{3}.\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{1}{6}(1)^2=\frac{1}{6}$

علماً أن : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right)$

مبرهنات المقارنة

مبرهنة ① (الإحاطة): بفرض h, g, f ثلاثة توابع معرفة على مجال من الشكل $I =]b, +\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ثم لنفترض أن للتابعين g , h النهاية ℓ ذاتها عند $+\infty$ عندئذ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

ملخص المبرهنة:

$$\begin{tikzcd}
g(x) \arrow[d] & \le & f(x) & \le & h(x) \arrow[d] \\
\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell \arrow[rrd] & & & & \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \arrow[lld] \\
& & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell & &
\end{tikzcd}$$

◆ تبقى المبرهنة السابقة صحيحة على المجال $I =]-\infty, b[$

ملاحظات هامة:

1. نطبق مبرهنة الإحاطة عندما نحصل على $\cos\infty$ او $\sin\infty$
2. نبدا الحل في مبرهنة الإحاطة: ايا ً يكن $x \in D$ فإن:

$$-1 \le \begin{matrix}\sin(g(x))\\ \cos(g(x))\end{matrix} \le 1 \qquad \text{او} \qquad 0 \le \begin{matrix}\sin^2(g(x))\\ \cos^2(g(x))\end{matrix} \le 1$$

3. نغير جهة المتراجحة عندما نضرب او نقسم على مقدار سالب أو عندما نأخذ مقلوب المتراجحة.

تمرين: **اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:**

$\boxed{1}\ f(x) = \dfrac{\cos x}{x} \quad : a = -\infty$

ايا ً يكن $x < 0$:

$$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \div (x) < 0$$

$$\frac{-1}{x} \ge \frac{\cos x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$\frac{-1}{x} \ge f(x) \ge \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) &= 0\\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) &= 0\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{2}\ f(x) = \dfrac{x(3+\sin x)}{x^2+1} \quad : a = +\infty$

ايا ً يكن $x > 0$:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$2 \le 3 + \sin x \le 4$$

$$2x \le x(3+\sin x) \le 4x \qquad \div (x^2+1 > 0)$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \le \frac{x(3+\sin x)}{x^2+1} \le \frac{4x}{x^2+1}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \le f(x) \le \frac{4x}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) &= 0\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x^2+1}\right) &= 0\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{3}\ f(x) = 4 + \dfrac{\sin x}{x} \quad : a = -\infty$

ايا ً يكن : $x < 0$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\frac{-1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \ge 4 + \frac{\sin x}{x} \ge 4 + \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \ge f(x) \ge 4 + \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(4 - \frac{1}{x}\right) &= 4\\ \lim_{x\to-\infty}\left(4 + \frac{1}{x}\right) &= 4\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$

مبرهنات المقارنة

مبرهنة ① (الإحاطة):

بفرض $f, g, \hbar$ ثلاثة توابع معرفة على مجال من الشكل $I =]b,+\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $g(x) \le f(x) \le \hbar(x)$ ثم لنفترض ان للتابعين g , $\hbar$ النهاية ℓ ذاتها عند $+\infty$ عندئذ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

ملخص المبرهنة:

$$\begin{tikzcd}
g(x) \arrow[d] & \le & f(x) & \le & \hbar(x) \arrow[d] \\
\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell \arrow[rr] & & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell & & \lim\limits_{x\to+\infty} \hbar(x) = \ell \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

◆ تبقى المبرهنة السابقة صحيحة على المجال $I =]-\infty, b[$

ملاحظات هامة:

1. نطبق مبرهنة الإحاطة عندما نحصل على $\cos\infty$ او $\sin\infty$
2. نبدأ الحل في مبرهنة الإحاطة: اياً يكن $x \in D$ فإن: $0 \le \begin{matrix}\sin^2(g(x)) \\ \cos^2(g(x))\end{matrix} \le 1$ او $-1 \le \begin{matrix}\sin(g(x)) \\ \cos(g(x))\end{matrix} \le 1$
3. نغير جهة المتراجحة عندما نضرب أو نقسم على مقدار سالب أو عندما نأخذ مقلوب المتراجحة.

تمرين: اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$: $a = -\infty$

اياً يكن $x < 0$:

$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \div (x) < 0$

$$\frac{-1}{x} \ge \frac{\cos x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$\frac{-1}{x} \ge f(x) \ge \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{x(3+\sin x)}{x^2+1}$: $a = +\infty$

اياً يكن $x > 0$:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$2 \le 3 + \sin x \le 4$$

$$2x \le x(3+\sin x) \le 4x \qquad \div (x^2+1 > 0)$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \le \frac{x(3+\sin x)}{x^2+1} \le \frac{4x}{x^2+1}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \le f(x) \le \frac{4x}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x^2+1}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{3}$ $f(x) = 4 + \dfrac{\sin x}{x}$: $a = -\infty$

اياً يكن $x < 0$:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\frac{-1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \ge 4 + \frac{\sin x}{x} \ge 4 + \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \ge f(x) \ge 4 + \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\left(4 - \frac{1}{x}\right) &= 4 \\ \lim_{x\to-\infty}\left(4 + \frac{1}{x}\right) &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$

مبرهنة ② : بفرض g,f تابعين معرفين على المجال $I =]b,+\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $|f(x) - \ell| \le g(x)$ ثم لنفترض ان:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

◆ تبقى المبرهنة صحيحة على المجال $I =]-\infty,b[$

ملخص المبرهنة:

$$\left.\begin{array}{l}|f(x) - \ell| \le g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

تمرين: **بفرض f تابع يحقق $|f(x) + 4| \le \frac{-3}{x+4}$ اياً يكن $x > 0$ ما نهاية التابع f عند $+\infty$**

$$\left.\begin{array}{l}|f(x) - (-4)| \le \dfrac{-3}{x+4}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x+4} = 0\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{المقارنة ②}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$$

تمرين: **بفرض f تابع يحقق $|f(x) - 2| \le \frac{x\sin^2 x}{x^2+4}$ اياً يكن $x > 0$ ما نهاية التابع f عند $+\infty$**

بفرض : $g(x) = \dfrac{x\sin^2 x}{x^2+4}$

اياً يكن $x > 0$: $0 \le \sin^2 x \le 1$

$0 \le x\sin^2 x \le x$

$$0 \le \frac{x\sin^2 x}{x^2+4} \le \frac{x}{x^2+4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+4}\right) = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (0) = 0\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

أصبح لدينا:

$$\left.\begin{array}{l}|f(x) - 2| \le \dfrac{x\sin^2 x}{x^2+4}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin^2 x}{x^2+4} = 0\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{المقارنة ②}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

****

مبرهنة رقم ③ : بفرض g,f تابعين معرفين على المجال $I =]b,+\infty[$ عندئذ:

1. إذا كان $f(x) \ge g(x)$ عند كل x من I وكان: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Longleftarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. إذا كان $f(x) \le g(x)$ عند كل x من I وكان: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Longleftarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

تمرين: **اوجد نهاية التابع $f(x) = 2x - 3\sin x$ عند $+\infty$**

اياً يكن $x > 0$:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$3 \ge -3\sin x \ge -3$$

$$2x + 3 \ge 2x - 3\sin x \ge 2x - 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - 3) = +\infty \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

تمرين: **اوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{-x}{3} + \cos \pi x$ عند $-\infty$**

اياً يكن $x < 0$:

$$-1 \le \cos\pi x \le 1$$

$$\frac{-x}{3} - 1 \le \frac{-x}{3} + \cos\pi x \le \frac{-x}{3} + 1$$

$$\frac{-x}{3} - 1 \le f(x) \le \frac{-x}{3} + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x}{3} - 1\right) = +\infty \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

تدريب صفحة 38 رقم 1 : احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة، ويمكن في حالة عدم وجود النهاية حساب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند a

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ $\begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\\1\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$ $\begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\\2\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\frac{+6}{0^-}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to2^+} f(x)=\frac{+6}{0^+}=+\infty$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $\begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\\-1\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{-3}{0^-}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+1}$ $\begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\\-1\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{x}\right)=5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x}{x}\right)=5$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{-4}{0^-}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ $\begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\\2\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x^2-4x+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\frac{+4}{0^+}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to2^+} f(x)=\frac{+4}{0^+}=+\infty$$

$\boxed{6}$ $f(x)=3x-5+\dfrac{2}{x+2}$ $\begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\\-2\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-5+\frac{2}{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty-5+\frac{2}{-\infty}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-11+\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=-11+\frac{2}{0^+}=+\infty$$

تدريب صفحة 38 رقم 2 : جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم عين عدداً α يحقق الشرط:
إذا كان x عنصراً من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفاً عن 1 كان $f(x)>10^3$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{+4}{0^+}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{+4}{0^+}=+\infty$$

طريقة أولى:

لدينا $f(x)>10^3$ وهذا يكافئ $\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$

نفرض $t=x-1 \;\Leftarrow\; x=t+1$

$$\frac{5(t+1)-1}{t^2}>10^3$$

$$\frac{5t+4}{t^2}>10^3$$

$$5t+4>10^3t^2$$

$$10^3t^2-5t-4<0$$

متراجحة درجة ثانية ندرس إشارتها

$$10^3t^2-5t-4=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4(10^3)(-4)$$

$$=25+16000=16025$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{16025}\simeq126.5$$

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)+126.5}{2(1000)}=\frac{5+126.5}{2000}$$

$$=\frac{131.5}{2000}=0.06$$

$$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)-126.5}{2(1000)}=\frac{5-126.5}{2000}$$

$$=\frac{-121.5}{2000}=-0.06$$

t	$-\infty$		-0.06		0.06		$+\infty$
10^3t^2-5t-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$10t^2-5t-4<0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$-0.06<t<0.06$ نعوض $t=x-1$ ومنه $-0.06<x-1<0.06$

$1-0.06<\ x\ <1+0.06$ وبالتالي $\alpha=0.06$

طريقة ثانية: لنكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}$$

$$f(x)>10^3$$

$$\frac{A}{(x-1)^2}>10^3\ \overset{\text{(مقلوب)}}{\Rightarrow}\ \frac{(x-1)^2}{A}<\frac{1}{10^3}$$

$$(x-1)^2<\frac{A}{10^3}$$

$$|x-1|<\sqrt{\frac{A}{10^3}}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to1}(5x-1)=4$ فإن البسط سيكون قريب من عدد حقيقي A موجب تماماً أصغر من (4)

ومنه $\alpha=\sqrt{\frac{A}{10^3}}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to1}(5x-1)=4$ فيكون: $5x-1>A$ في جوار معين للعدد (1)

أصبح لدينا:

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{A}{(x-1)^2}>10^3$$

إذا اخترنا $A=1.6$ عندئذ:

$$\alpha=\sqrt{\frac{1.6}{10^3}}=\sqrt{\frac{16}{10^4}}=0.04$$

تدريب صفحة 42 رقم 1 : احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة ويمكن عند الحاجة حساب النهاية من اليمين ومن اليسار عند a

$\boxed{1}$ $f(x)=\frac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{-x^2}\right)=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{-x^2}\right)=-2$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to2^-}f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-4}$ $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\frac{-3}{0^-}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to-2^-}f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\frac{5}{0^+}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to2^-}f(x)=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

$\boxed{4}\ f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$ $\binom{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} - \frac{1}{-1} = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} - \frac{1}{-1} = -\infty$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = 2 + \frac{1}{-1} - \frac{1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to2^+} f(x) = 2 + \frac{1}{-1} - \frac{1}{0^+} = -\infty$

$\boxed{3}\ f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$ (1)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

تدريب صفحة 42 رقم 2 : عين فيما ياتي مجموعة تعريف التابع f ثم ادرس في كل حالة نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه وادرس عند اللزوم النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

$\boxed{3}\ f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

شرط الكسر:

$x \neq 0$

شرط الجذر:

$x \geq 0$

$[0, +\infty[$

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$

$\boxed{4}\ f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x+1}$

شرط الكسر:

$x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

شرط الجذر:

$x \geq 0$

$[0, +\infty[$

$D = [0, +\infty[$

$f(0) = \frac{0+0}{0+1} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

بما أن $x > 0$ فإن :

$$f(x) = \frac{x\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1+0}{1+0} = 1$

$\boxed{1}\ f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$

شرط الكسر:

$\sqrt{x} - 1 \neq 0$

$\sqrt{x} \neq 1$

$x \neq 1$

شرط الجذر:

$x \geq 0$

$[0, +\infty[$

$D = [0, +\infty[\backslash \{1\} = [0,1[\cup]1, +\infty[$

$f(0) = \frac{+1}{-1} = -1$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{+2}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{+2}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

بما أن $x > 0$ فإن :

$$f(x) = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\sqrt{x}\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty(1+0)}{1-0} = +\infty$

$\boxed{2}\ f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$

شرط الجذر: $x \geq 0$ ومنه $D = [0, +\infty[$

$f(0) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$

$\boxed{5}\ f(x)=\dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$

شرط الكسر:

$x^2+1\neq 0$

المقام معرف على R

شرط الجذر:

$x\geq 0$

$[0,+\infty[$

$$D=[0,+\infty[$$

$$f(0)=\frac{0}{1}=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

بما أن $x>0$ فإن :

$$f(x)=\frac{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0-0}{1+0}=1$$

$\boxed{6}\ f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

شرط الجذر الأول:

$x-1\geq 0$

$x\geq +1$

$[1,+\infty[$

شرط الجذر الثاني:

$x\geq 0$

$[0,+\infty[$

$$D=[1,+\infty[$$

$$f(1)=0-1=-1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{(x-1)-(x)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=\frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-1}{+\infty+\infty}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

تدرب صفحة 42 رقم 3 : **أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$ عند الـ $+\infty$, ثم أوجد عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x>A$, كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$**

لدينا :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

$\varepsilon=0.05\ \ ,\ \ \ell=-2$

حتى ينتمي $f(x)$ للمجال $]-2.05,-1.95[$

يجب أن تتحقق المتراجحة : $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$$\left|\frac{-2x+1}{x+3}+2\right|<\frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{-2x+1+2x+6}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{7}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$$

بما أن $x\to+\infty$ نهتم بالقيم الكبيرة للمتحول x

$$\frac{7}{x+3}<\frac{1}{20}\ \Rightarrow\ 140<x+3\ \Rightarrow\ x>137$$

و بالتالي نختار $A=137$

تدرب صفحة 42 رقم 4: **أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ عند 5 ثم أوجد مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال $]3.95\,,4.05[$**

$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=4\quad,\quad \ell=\dfrac{3.95+4.05}{2}=4\quad,\quad \varepsilon=\dfrac{4.05-3.95}{2}=0.05$

إذا تحققت المتراجحة: $f(x)\in\,]3.95\,,4.05[$

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x+3}{x-3}-4\right|<\frac{5}{100}$$

نستخدم القسمة المطولة :

$$\left|\frac{-3x+15}{x-3}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\left|-3+\frac{6}{x-3}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\frac{-1}{20}<-3+\frac{6}{x-3}<\frac{1}{20}$$

$$\frac{-1}{20}+3<\frac{6}{x-3}<\frac{1}{20}+3$$

$$\frac{59}{20}<\frac{6}{x-3}<\frac{61}{20}$$

$$\frac{20}{59}>\frac{x-3}{6}>\frac{20}{61}\qquad(\times 6)$$

$$\frac{120}{59}>x-3>\frac{120}{61}$$

$$\frac{120}{59}+3>\ x\ >\frac{120}{61}+3$$

$$\frac{297}{59}>x>\frac{303}{61}$$

$$x\in\left]\frac{303}{61},\frac{297}{59}\right[$$

تدرب صفحة 46 رقم 1 : اجب عن الأسئلة الآتية :

1. f تابع يحقق $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$ اياً كان $x > 1$ ، ما نهاية f عند الـ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x} = ?$$

حصلنا على $\cos\infty$ نستخدم الإحاطة

اياً كان $x > 1$ فإن :

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$3x-1 \le 3x+\cos x \le 3x+1$$
$$\frac{3x-1}{x} \le \frac{3x+\cos x}{x} \le \frac{3x+1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x}=3\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x}=3 \quad , \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+7}{x-1}=3\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}f(x)=3$$

2. اثبت ان $\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$ اياً يكن $x > -1$ ، استنتج نهاية $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$ ثم ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$

اياً يكن $x > -1$ فإن :

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نقسم على $(x+1>0)$:

$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0 \quad , \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$$

3. f تابع يحقق $|f(x)-3| \le \frac{1}{x+1}$ اياً كان $x \ge 0$ ، ما نهاية f عند الـ $+\infty$ ؟

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0 \quad \xRightarrow[\text{المقارنة ②}]{\text{حسب مبرهنة}} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=3$$

4. f تابع يحقق $f(x) \ge \frac{1}{4}x^2$ ، اياً كان $x < 0$ ، ما نهاية f عند الـ $-\infty$ ؟

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x^2=+\infty \quad \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

5. اثبت ان $x^2-5\sin x \ge x^2-5$ ، اياً كان العدد الحقيقي x . استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x \mapsto x^2-5\sin x$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$

اياً كان $x \in R$ فإن :

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$5 \ge -5\sin x \ge -5$$
$$x^2+5 \ge x^2-5\sin x \ge x^2-5$$

و منه :

$$x^2-5\sin x \ge x^2-5$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5)=+\infty \quad \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \quad \lim_{x\to-\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-5)=+\infty \quad \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$$

تدرب صفحة 46 رقم 2 : ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

1. تحقق ان $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ اياً يكن $x \ge 0$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

2. استنتج أن $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **أياً يكن** $x > 0$

أياً يكن $x > 0$ فإن : $\sqrt{1+x} \ge \sqrt{x}$

نضيف $\sqrt{x}$ للطرفين :

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \ge 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نضيف $\sqrt{1+x}$ للطرفين :

$$2\sqrt{1+x} \ge \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x)$$

و منه : $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

****

نهاية تابع مركب :

مبرهنة: بفرض لدينا ثلاثة توابع $\hbar, g, f$ وبفرض $f(x) = (go\hbar)(x) = g(\hbar(x))$

إذا كان $\lim_{x\to a} \hbar(x) = b$ و $\lim_{x\to b} g(x) = c$ عندئذٍ : $\lim_{x\to a} f(x) = c$

سواء كانت المقادير c, b, a أعداد حقيقية منتهية أو مقادير لا نهائية.

مثال: بفرض $f(x) = x^2 + 2x + 1$ و $\hbar(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$ تُحقق $f(x) = (go\hbar)(x)$

$$(go\hbar)(x) = g(\hbar(x)) \overset{\text{بتعويض ما يساوي } \hbar}{\widehat{=}} g(x+1) \overset{\text{حسب قاعدة ربط } g}{\widehat{=}} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

توضيح بأخذ $a = 2$ نجد : $\lim_{x\to 2} \hbar(x) = 3$ ومنه $\lim_{x\to 3} g(x) = 9$

وبالفعل نلاحظ أن $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 + 4 + 1 = 9$

تدريب صفحة 49 رقم 1 : **فيما يأتي نعطى تابعاً f معرفاً على مجموعة D ويطلب حساب نهاية f عند a**

سنتبع في حل هذه التمارين طريقة تركيب التوابع:

$\boxed{1}$ $D =]5, +\infty[$ $\quad f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ $\quad a = 5$

نفرض $X = \hbar(x) = \frac{x+3}{x-5}$ $\quad \lim_{x\to 5^+} \hbar(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

$\boxed{2}$ $D = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[$

$f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ $\quad a = -\infty$

نفرض $X = \hbar(x) = -x^3 + x^2 + x$

$\lim_{x\to-\infty} \hbar(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

$\boxed{3}$ $D =]-\infty, 1[$ $\quad f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$ $\quad a = -\infty$

نفرض $X = \hbar(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$ $\quad \lim_{x\to-\infty} \hbar(x) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} \sqrt{X} = 0$$

$\boxed{4}$ $D =]-1, 1[$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad a = 1$

نفرض $X = \hbar(x) = 1 - x^2$ $\quad \lim_{x\to 1^-} \hbar(x) = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$$

----

5 $D = R\setminus\{1\}$

$f(x) = \cos \pi x + \frac{1}{(x-1)^2} \qquad a = 1$

نفرض $X = h(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to1} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} (\cos \pi x) + \lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty$

---

6 $D = R\setminus\{-2\}$

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right) \qquad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = \frac{\pi x + 1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \pi$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to\pi} (\cos X) = -1$

---

7 $D =]-\infty, 1[$

$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}} \qquad a = \binom{1}{-\infty}$

◆ $a = 1$ نفرض $X = h(x) = \frac{2x^2}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to1^-} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

◆ $a = -\infty$ نفرض $X = h(x) = \frac{2x^2}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

---

8 $D =]0, +\infty[\qquad f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to0} \sin(X) = 0$

---

9 $D =]0, +\infty[$

$f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2 \qquad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = ?$ $\quad \infty - \infty$ عدم تعيين من الشكل

$X = h(x) = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right); x > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} (X)^2 = +\infty$

---

10 $D =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

$f(x) = \cos^2\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) \qquad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = \pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \pi$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to\pi} \cos^2(X) = 1$

ملاحظة: يمكن حل التمارين السابقة بطريقة التعويض فوراً والحصول على النتائج ذاتها.

تدريب صفحة 49 رقم 2 : ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

نفرض $X = f(x) = \frac{x-3}{x+5}$: ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to1} f(X) = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

2. اعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

$$f(f(x)) = \frac{f(x) - 3}{f(x) + 5} = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}} = \frac{-2x-18}{6x+22} = \frac{-x-9}{3x+11}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x}{3x}\right) = \frac{-1}{3}$$

تعريف:

ليكن f تابع معرف على المجال $I =]b, +\infty[$ وليكن C الخط البياني للتابع f وبفرض المستقيم $\Delta: y = ax + b$.

نقول أن Δ مستقيم مقارب للخط C في جوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا تحقق:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$$

وإذا كان f تابع معرف على المجال $I =]-\infty, b[$ عندئذ:

نقول أن Δ مستقيم مقارب للخط C في جوار $(-\infty)$ إذا وفقط إذا تحقق:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$$

ولمعرفة الوضع النسبي بين Δ, C ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } f(x) - y_\Delta > 0 & : C \text{ يقع فوق } \Delta \\ \text{أو } f(x) - y_\Delta < 0 & : C \text{ يقع تحت } \Delta \end{cases}$$

تمرين: **ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}$ المعرف على $R\backslash\{-2\}$ وليكن المستقيم $\Delta: y = x + 1$**

اثبت ان Δ مستقيم مقارب لـ C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (x + 1) = \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - 2x - x - 2}{x + 2} = \frac{-1}{x + 2}$$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0 \Rightarrow$ $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x+2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ	‖	C تحت Δ

تدريب صفحة 51 رقم 1 : **فيما يأتي بين معللاً إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً للخط البياني C_f للتابع f**

عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ

$\boxed{1}$ $f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x + 1}$; $\Delta: y = 2x + 3$

$f(x) - y_\Delta = 2x + 3 + \frac{10}{x + 1} - (2x + 3) = \frac{10}{x + 1}$ f تابع معرف على $R\backslash\{-1\}$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0\\ \lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{10}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	‖	C فوق Δ

2 $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$; $\Delta: y = -x + 1$

f تابع معرف على $R\backslash\{0\}$:

$$f(x) - y_\Delta = -x + 1 - \frac{1}{x^2} - (-x + 1) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_\Delta = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $\left(f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2} < 0\right)$ ومنه C تحت Δ

3 $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$; $\Delta: y = x$

f تابع معرف على R^*

$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{\sin x}{x} - x = \frac{\sin x}{x}$$

لدراسة نهاية $f(x) - y_\Delta$ عند $\pm\infty$ نستخدم مبرهنة الإحاطة:

ونميز حالتين :

1. في حالة $x > 0$ أي $x \in]0, +\infty[$

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{+1}{x} \qquad (\div x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Longrightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

2. في حالة $x < 0$ أي $x \in]-\infty, 0[$

نلاحظ ان $\frac{\sin x}{x}$ تابع زوجي على R^* أي $\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$ وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Longrightarrow$$

Δ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ ، لدينا $\left(f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}\right)$ معرف على $R\backslash\{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_\Delta = 0 \\ \frac{\sin x}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad x = \pi k \ \ ; k \in Z$$

x	$-\infty$		-2π		$-\pi$		0		π		2π		$+\infty$
$\sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x			$-$				0			$+$			
$\frac{\sin x}{x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C فوق Δ		C تحت Δ		C فوق Δ		C فوق Δ		C تحت Δ		C فوق Δ	

4 $f(x) = 3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{|x|}}$; $\Delta: y = 3x + 7$

f تابع معرف على R^* :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{|x|}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $\left(f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{|x|}} < 0\right)$ ، ومنه C تحت Δ

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$; $\Delta: y=2x+1$

بالقسمة المطولة نجد :

$$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$$

f تابع معرف على $R\setminus\{4\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x)-y_\Delta$ لدينا $f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$

x	$-\infty$	4 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	C فوق Δ

$\boxed{6}$ $f(x)=\dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$; $\Delta: y=x-2$

f تابع معرف على $R\setminus\{-1\}$ وباستخدام القسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$\begin{array}{r|l} & x-2\\ \hline x^2+2x+1 & x^3-3x-5\\ & \mp x^3\mp 2x^2\mp x\\ \hline & -2x^2-4x-5\\ & \pm 2x^2\pm 4x\pm 2\\ \hline & \quad\quad -3\end{array}$$

$$f(x)=\frac{x^3-3x-5}{x^2+2x+1}$$

$$f(x)=x-2-\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f(x)-y_\Delta=x-2-\frac{3}{(x+1)^2}-(x-2)$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_\Delta$ لدينا $\left(f(x)-y_\Delta=\frac{-3}{(x-1)^2}<0\right)$, ومنه C تحت Δ

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{-x^2-4x+\sin x}{x}$; $\Delta: y=-x-4$

f تابع معرف على $R\setminus\{0\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}-(-x-4)\ \overset{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{\hat{=}}\ -x-4+\frac{\sin x}{x}+x+4=\frac{\sin x}{x}$$

لدينا $f(x)-y_\Delta=\frac{\sin x}{x}$ وبالتالي يبرهن أن المستقيم $\Delta: y=-x-4$ مقارب مائل

كما ورد إثباته ودراسة وضعه النسبي في التمرين $\boxed{3}$

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$; $\Delta: y=2x+1$

بالقسمة المطولة نجد :

$$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$$

f تابع معرف على $R\backslash\{4\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x)-y_\Delta$ لدينا $f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	‖	C فوق Δ

$\boxed{6}$ $f(x)=\dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$; $\Delta: y=x-2$

f تابع معرف على $R\backslash\{-1\}$ وباستخدام القسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x^2+2x+1 & x^3-3x-5 \\ & \mp x^3\mp 2x^2\mp x \\ \hline & -2x^2-4x-5 \\ & \pm 2x^2\pm 4x\pm 2 \\ \hline & -3 \end{array}$$

$$f(x)=\frac{x^3-3x-5}{x^2+2x+1}$$

$$f(x)=x-2-\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f(x)-y_\Delta=x-2-\frac{3}{(x+1)^2}-(x-2)$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_\Delta$ لدينا $\left(f(x)-y_\Delta=\frac{-3}{(x-1)^2}<0\right)$ ، ومنه C تحت Δ

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{-x^2-4x+\sin x}{x}$; $\Delta: y=-x-4$

f تابع معرف على $R\backslash\{0\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}-(-x-4)\overset{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{=}-x-4+\frac{\sin x}{x}+x+4=\frac{\sin x}{x}$$

لدينا $f(x)-y_\Delta=\frac{\sin x}{x}$ وبالتالي يبرهن أن المستقيم $\Delta: y=-x-4$ مقارب مائل

كما ورد إثباته ودراسة وضعه النسبي في التمرين $\boxed{3}$

$\boxed{8}\ f(x)=\dfrac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}\quad ;\ \Delta: y=\dfrac{1}{2}x+1$

f تابع معرف على $[0,+\infty[$ بالقسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x+1 \\ \hline 2x+1 & x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1 \\ & \mp x^2\mp\frac{1}{2}x \\ \hline & 2x+\sqrt{x}+1 \\ & \mp 2x\mp 1 \\ \hline & \sqrt{x} \end{array}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{2}x+1+\frac{\sqrt{x}}{2x+1}-\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\xRightarrow{\text{عندما } x>0 \text{ نجد}} f(x)-y_\Delta=\frac{1}{2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

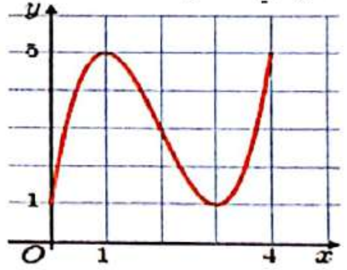
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\quad\Rightarrow$ Δ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x)-y_\Delta$, لدينا $\left(f(x)-y_\Delta=\frac{1}{2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}>0\right)$, إذاً C فوق Δ

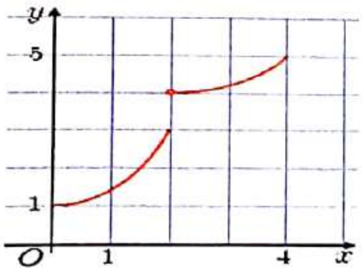
****

الاستمرار

مفهوم الاستمرار: نقول إن الخط البياني C للتابع f أنه مستمر على المجال I إذا كان الخط C متصل على جميع نقاط هذا المجال أي الخط البياني متصل.



مستمر على المجال $[0,4]$



غير مستمر على المجال $[0,4]$

لأنه غير مستمر عند $x=2$

تعريفه: لتكن a نقطة من مجموعة التعريف D نقول أن التابع f مستمر عند a إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

* ونقول إن التابع f مستمر على مجموعة A محتواة في D إذا وفقط إذا كان f مستمر عند كل نقطة من نقاط A

مبرهنة:

1. إذا كان التابع f اشتقاقياً عند نقطة a كان f مستمراً عند a والعكس غير صحيح بالضرورة.
2. إذا كان التابع f اشتقاقياً على المجال I كان f مستمراً على I والعكس غير صحيح بالضرورة.

استمرار التوابع المرجعية :

1. تابع الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ فهو مستمر عليه ونلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0\ ,\ f(0)=0$

فحسب تعريف الاستمرار يكون f مستمر عند $x=0$ اي مستمر على $[0,+\infty[$ ولكنه ليس اشتقاقي عند $x=0$ لأن:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

اي f غير اشتقاقي عند $x=0$ فهو غير اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$ ولكنه اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$.

2. توابع كثيرات [illegible] فهي مستمرة على R.

3. التوابع الكسرية اشتقاقية على مجموعة تعريفها D فهي مستمرة على D.

4. التابعان $x \longmapsto \sin x \quad , \quad x \longmapsto \cos x$ اشتقاقيان على R فهما مستمران على R.

تدرب صفحة 54 رقم 1 : **نتأمل التابع f المعطى وفق** $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

1. ما مجموعة تعريف f ؟

f معرف عندما:

$$1 - \cos x \geq 0$$

$$1 \geq \cos x$$ محققة دائماً

$$D_f = R$$

2. ايكون f مستمراً على مجموعة تعريفه ؟

f عبارة عن تركيب تابعين $T(x) = 1 - \cos x \quad , \quad \hbar(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = (\hbar o T)(x)$ و منه f مستمر على مجموعة تعريف T اي مستمر على R

3. بيّن ان التابع f زوجي و يقبل العدد 2π دوراً له

اياً يكن $x \in R$ فإن $-x \in R$

$f(-x) = \sqrt{1-\cos(-x)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x)$

ومنه f تابع زوجي

$f(x+2\pi) = \sqrt{1-\cos(x+2\pi)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x)$ اي f تابع دوري و دوره 2π

4. ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$, اثبت ان g اشتقاقي و ارسم خطه البياني

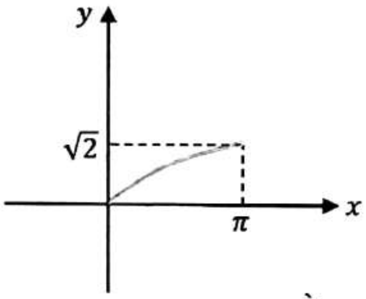
لدينا : $f(x) = \sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\,.\sin\frac{x}{2}$

بما أن $x \to \sqrt{2}\,.\sin\frac{x}{2}$ اشتقاقي على R فإنه اشتقاقي على المجال $[0,\pi]$

و منه g اشتقاقي على المجال $[0,\pi]$

نرسم الخط البياني للتابع f نقطياً على المجال $[0,\pi]$

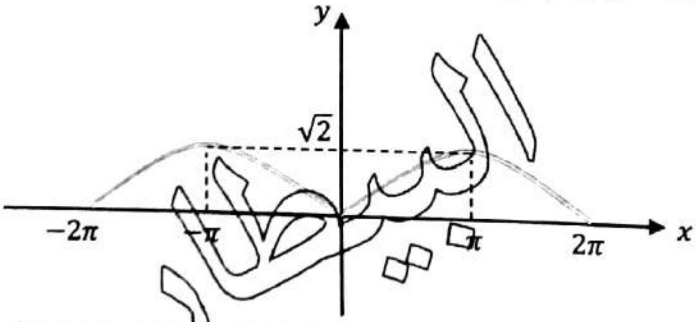
$$f(0) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad f(\pi) = \sqrt{2}$$



5. استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi,2\pi]$, ما مجموعة تعريف التابع $\acute{f}$ ؟

بما ان g تابع زوجي فإن خطه C متناظر بالنسبة لـ $y\grave{y}$, إذاً من رسم g يمكن أن نستنتج رسم C_f على $[-2\pi,2\pi]$

حسب الزوجية والدورية:



f اشتقاقي على R و منه $\acute{f}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}$

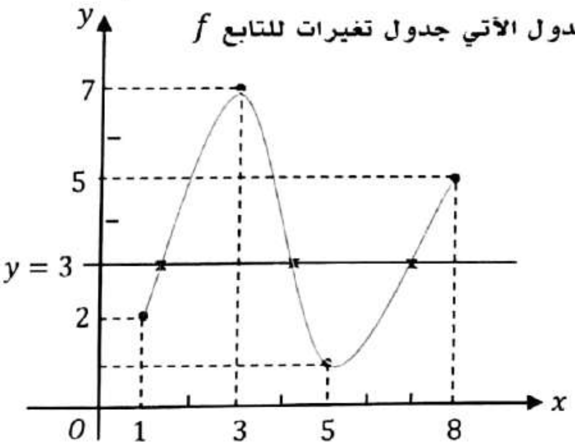
$\acute{f}$ معرف على R

****

مبرهنات القيمة الوسطى:

مبرهنة ①: إذا كان f تابعاً مستمراً على المجال $I = [a,b]$ وكان $f(a) \leq f(b)$ فإنه اياً كان $y \in [f(a)\,.\,f(b)]$ فإن للمعادلة $y = f(x)$ حلاً واحداً على الأقل في المجال I

مثال: الجدول الآتي جدول تغيرات للتابع f



x	1		3		5		8
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$	2	↗	7	↘	1	↗	5

نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له أن:

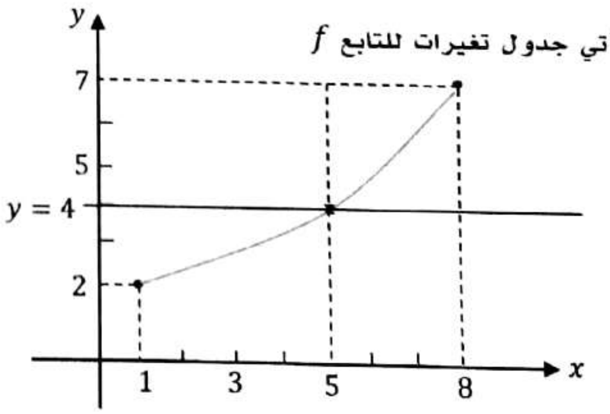
التابع f مستمر على المجال $I = [1\,,8]$ و $f(1) = 2$, $f(8) = 5$ اي $f(1) \leq f(8)$ ومنه ايا كانت $y \in [f(1), f(8)] = [2\,,5]$ فإنه للمعادلة $y = f(x)$ حلاً واحداً على الأقل في المجال $I = [1,8]$، فمثلاً $y = 3$ يوجد لها ثلاثة حلول كما هو مبين بالشكل كذلك من أجل $y = 4$ تتحقق شروط المبرهنة وللمعادلة ثلاثة حلول أيضاً

****

مبرهنة ② : إذا كان f تابعاً مستمراً ومتزايداً تماماً على المجال $I = [a,b]$ وكانت صورة المجال I هو المجال $[f(a), f(b)]$ فإنه أياً كانت $y \in [f(a), f(b)]$ فإن للمعادلة $y = f(x)$ حلاً واحداً فقط في المجال I.

ملاحظة: تبقى المبرهنة السابقة صحيحة في حالة f تابع متناقص تماماً فتصبح صورة المجال I هو المجال $[f(b), f(a)]$

مثال: في الجدول الآتي جدول تغيرات للتابع f



x	1		8
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	2	↗	7

نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له أن:

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $I = [1,8]$ و $f(1) = 2$, $f(8) = 7$ اي صورة المجال I هي $[2,7]$ ومنه اياً كانت $y \in [2,7]$ فإنه للمعادلة $y = f(x)$ حلاً وحيداً في المجال I

فمثلاً $y = 4$ يوجد لها حلاً وحيداً فقط في المجال I هو $x = 5$

****

مبرهنة ③ : إذا كان f مستمراً ومطرداً على المجال $I = [a, b]$

وكان $f(a)$, $f(b)$ من إشارتين متعاكستين أي $f(a).f(b) < 0$

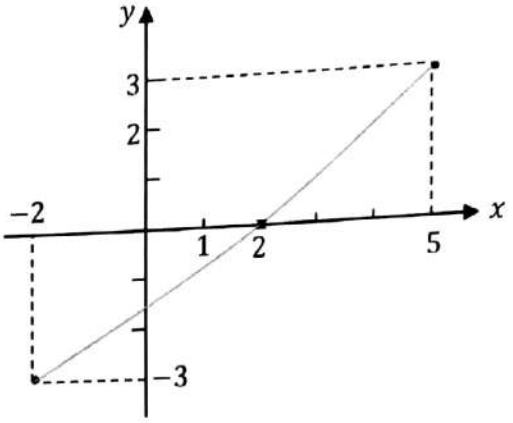
فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال I

ملاحظة:

إذا كان f مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ ومطرد تماماً على المجال $]a,b[$ فهو مطرد تماماً على المجال $[a,b]$

مثال: ليكن f تابعاً جدول تغيراته.

x	2		5
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	-3	$\nearrow$	3



نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له ان:

التابع f مستمراً ومتزايد تماماً على المجال $I = [-2,5]$ وان $f(-2) = -3$, $f(5) = 3$ نلاحظ ان $f(5), f(-2)$ من إشارتين متعاكستين أي $f(-2).f(5) < 0$ ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في $]-2,5[$

ومن الشكل يكون الحل $x = 2$

****

مبرهنة ④ : فيما يأتي a و b عنصران من المجموعة $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ ونفترض ان $a < b$ ونفترض ان التابع f تابع مستمر ومطرد تماماً على المجال I وان $J = f(I)$

المجال	f / متزايد تماما	f / متناقص تماما
$I = [a,b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I =]a,b]$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)\right]$	$f(I) = \left[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$I = [a,b[$	$f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)\right]$
$I =]a,b[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

****

ملاحظة مهمة ① : إذا كان f تابعاً مستمراً ومتزايداً تماماً (او متناقصاً تماماً) على المجال I

وكان $0 \in f(I)$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من I يحقق $f(\alpha) = 0$

وإذا كان $0 \notin f(I)$ فإنه لا يوجد حل للمعادلة $f(x) = 0$ في I

ملاحظة ② : الاستمرار يقتضي وجود الحل والاطراد التام للتابع f يضمن وحدانية الحل أما في حالة الاطراد غير التام فقد نجد للمعادلة أكثر من حل.

تمرين: **ليكن f معرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$**

1. **ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.**

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$3x(x-2) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad x = 2 & \Rightarrow f(2) = -2 \\ \text{او} \quad x = 0 & \Rightarrow f(0) = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

2. اثبت ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً c في المجال $I=[0,2]$ اوجده.

f مستمر ونلاحظ من جدول التغيرات ان التابع f متناقص تماماً على المجال $I=[0,2]$ وان $f(0)=2$, $f(2)=-2$ وهما من إشارتين مختلفتين ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً c في المجال $I=]0,2[$

لإيجاده نجعل $f(x)=0$ اي $x^3-3x^2+2=0$ بما ان مجموع الثوابت يساوي الصفر فإن المعادلة تقبل القسمة على $(x-1)$ ومنه $(x-1)(x^2-2x-2)=0$

إما $x-1=0 \Rightarrow x=1 \in I$

أو $x^2-2x-2=0$

$$\Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\sqrt{3} \notin I \\ x = 1-\sqrt{3} \notin I \end{cases}$$

ومنه $x=1$ حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[0,2]$ اي $c=1$

3. اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة M التي فاصلتها (1) وعين α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل.

لإيجاد معادلة المماس T في النقطة $M(1,f(1))$ أي $M(1,0)$ نوجد الميل:

$$m = \acute{f}(x_M) = -3 \Rightarrow T: y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow T: y - 0 = -3(x-1)$$

$$T: \boxed{\boxed{y = -3x+3}}$$

لتعيين α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل نجعل $y=0$ ومنه $-3x+3=0$ وبالتالي $x=1=\alpha$

4. اثبت ان للمعادلة $f(x)=2$ حلاً وحيداً في المجال $I_1=[2,4]$

f مستمر ونلاحظ من جدول التغيرات أن f متزايد تماماً على المجال $I_1=[2,4]$

لأنه متزايد تماماً على المجال $I=[2,+\infty[$

ولدينا $f(2)=-2$, $f(4)=18$ أي $y=2\in[-2,18]$ ومنه للمعادلة $f(x)=2$ حلاً وحيداً في المجال $[2,4]$

تدريب صفحة 61 رقم 1 : التابع f معرف على R وفق $f(x)=x^3-x^2+x-2$ علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

ندرس تغيرات التابع f: f مستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{f}(x) = 3x^2-2x+1 \\ \acute{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \quad 3x^2-2x+1=0$$

$\Delta = -8 < 0 \Rightarrow$ مستحيلة الحل في R وبالتالي فإن $\acute{f}(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على R فهو مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1-1+1-2 = -1 \\ f(2) = 8-4+2-2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)\times f(2) < 0$$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

تدريب صفحة 61 رقم 2 : **التابع f معرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ علل لماذا يكون للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاثة وفقط ثلاثة حلول حقيقية؟**

لاحظ حلول المعادلة $f(x) + 1 = 0$ تكافئ $f(x) = -1$

ندرس تغيرات التابع f: f مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\grave{f}(x) = 3x^2 - 6x$
$\grave{f}(x) = 0$ $\Big\}$ $3x^2 - 6x = 0$
$3x(x-2) = 0$ $\Big\}$ إما $x = 0$: $f(0) = 1$
أو $x = 2$: $f(2) = -3$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

لدينا $f(x) = -1$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, 0[$
$-1 \in f(\,]-\infty, 0[\,) =]-\infty, 1[$
إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0[$

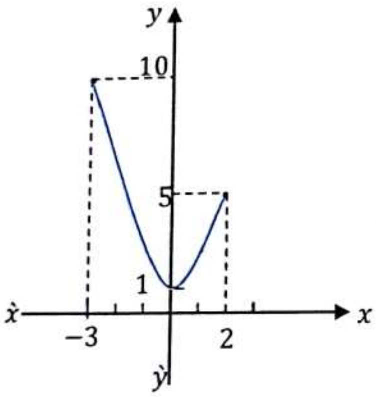
♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $[0,2]$
$-1 \in f(\,[0,2]\,) = [-3,1]$
إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $[0,2]$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]2, +\infty[$
$-1 \in f(\,]2, +\infty[\,) =]-3, +\infty[$
إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]2, +\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x) = -1$ ثلاثة حلول في R

تدريب صفحة 61 رقم 3 :

ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [-3, 2]$ وفق $f(x) = x^2 + 1$



1. ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

x	-3	0	2
y	10	1	5
	$(-3,10)$	$(0,1)$	$(2,5)$

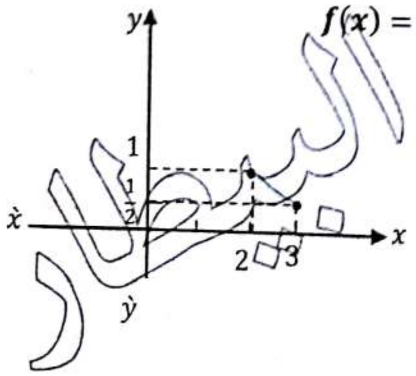
حسب الشكل المجاور نجد أن: $f(\,[-3,2]\,) = [1,10]$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ في المجال I

من الشكل المجاور نجد أن المستقيم $y = f(x) = 4$ يقطع المنحني C_f في نقطتين

إذاً للمعادلة $f(x) = 4$ حلين مختلفين في I .

تدريب صفحة 61 رقم 4 : **ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [2, 3]$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-1}$**



1. ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

x	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$
	$(2,1)$	$\left(3, \frac{1}{2}\right)$

حسب الشكل المجاور نجد أن: $f(\,[2,3]\,) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Scanned by CamScanner

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ في المجال I

من الشكل المجاور نجد ان المستقيم $y = f(x) = \frac{3}{4}$ يقطع المنحني C_f في نقطة واحدة

إذاً للمعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ حل وحيد في I

بطريقة اخرى:

لدينا $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ وبالتالي f مستمر ومتناقص تماماً على $[2,3]$

$\frac{3}{4} \in f(\,[2,3]\,) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ومنه للمعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ حل وحيد في I

تدريب صفحة 61 رقم 5 : ليكن f التابع المعرف على المجال R وفق $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

1. احسب $f(-1)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$

$$f(-1) = \frac{-3}{2} \quad , \quad f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(0) = \frac{-1}{2} \quad , \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

2. استنتج ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1, 1]$

التابع f مستمر واشتقاقي على R

$$f'(x) = 12x^2 - 3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3(4x^2 - 1) &= 0 \\ 3(2x-1)(2x+1) &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad x = \frac{1}{2} & \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} \\ \text{أو} \quad x = \frac{-1}{2} & \rightarrow \quad f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	$\frac{-3}{2}$ ↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{-3}{2}$ ↗	$\frac{1}{2}$	↗

نلاحظ من جدول التغيرات:

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $\left[-1, \frac{-1}{2}\right]$

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= \frac{-3}{2} < 0 \\ f\left(\frac{-1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \quad > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-1) \times f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_1 في المجال $\left[-1, \frac{-1}{2}\right]$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{-1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \quad > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{-3}{2} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_2 في المجال $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $\left[\frac{1}{2},1\right]$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{2}<0 \\ f(1)=\frac{1}{2} \quad >0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)<0$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد a_3 في المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$

مما سبق نستنتج ان للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول حقيقية في المجال $[-1,1]$

تدريب صفحة 61 رقم 6 : **ليكن f التابع المعرف على المجال R وفق $f(x)=1+3x-x^3$**

1. **ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

2. **احسب $\grave{f}(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات f**

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}(x)=3-3x^2 \\ \grave{f}(x)=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3-3x^2=0 \\ 3(1+x)(1-x)=0 \end{array}\right\}$$

إما $x=-1$: $f(-1)=-1$

او $x=1$: $f(1)=3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

3. **اثبت ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة جذور فقط ينتمي كل واحد منها إلى واحد من المجالات** $[1,2]$, $[-1,1]$, $[-2,-1]$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $[-2,-1]$

$$0\in f([-2,-1])=[-1,3] \Leftarrow \begin{cases} f(-2)=3 \\ f(-1)=-1 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $[-2,-1]$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $[-1,1]$

$$0\in f([-1,1])=[-1,3] \Leftarrow \begin{cases} f(-1)=-1 \\ f(1)=3 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $[-1,1]$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $[1,2]$

$$0\in f([1,2])=[-1,3] \Leftarrow \begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=-1 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $[1,2]$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول حقيقية في المجالات السابقة.

ملاحظة: يمكن حل التدريب باستخدام الطريقة التي وردت في التدريب رقم 5

تدريب صفحة 61 رقم 7 : نتأمل التابع f

1. احسب $f(0)$ ، $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج انه يوجد عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ، $f(0) = 0 - \cos(0) = -1$

f مستمر ومتزايد تماماً على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
بما ان $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$
فإنه يوجد $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ يحقق $f(\alpha) = 0$

2. اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب ان ينتمي إلى المجال $[-1, 1]$

حل المعادلة $f(x) = 0$ يكافئ $x - \cos x = 0$ ومنه $x = \cos x$ وبما ان $\cos x \in [-1,1]$

فإن $\cos x = x \in [-1,1]$ إذاً حل المعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[-1,1]$

3. استنتج ان كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب ان ينتمي إلى المجال $]0, 1[$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 - \cos(1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$ ونلاحظ أن f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $[-1,0[$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 - \cos(-1) = -1 - \cos 1 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \notin f(]-1 - \cos 1, -1])$$

أي ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل في المجال $[-1,0[$

ومنه كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $]0,1[$

4. برهن ان التابع $x \to x - \cos x$ متزايد تماماً على المجال $]0, 1[$ واستنتج ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0, 1[$

$f(x) = x - \cos x$

f اشتقاقي على $]0,1[$ ومنه $\left(\acute{f}(x) = 1 + \sin x > 0\right)$ على المجال $]0,1[$ إذاً f متزايد تماماً على المجال $]0,1[$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 - \cos(1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α في المجال $]0,1[$

تمرينات ومسائل صفحة 67

1) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند اطراف مجموعة تعريفه وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $D=]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x)=2-\dfrac{4}{x^2}$, $D=(]-\infty,0[\cup]0,+\infty[)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2-\dfrac{4}{+\infty}=2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2-\dfrac{4}{+\infty}=2$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=2-\dfrac{4}{0^+}=-\infty$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=2-\dfrac{4}{0^+}=-\infty$

$\boxed{3}$ $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x+3}$, $D=]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty-\dfrac{1}{-\infty}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\dfrac{1}{+\infty}=+\infty$

$\lim_{x\to-3^-} f(x)=9-9-\dfrac{1}{0^-}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$, $\lim_{x\to-3^+} f(x)=9-9-\dfrac{1}{0^+}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

$\boxed{4}$ $f(x)=\underbrace{x+\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x+2}}$

شرط الكسر الأول:

$1+x\neq0$

$x\neq-1$

شرط الكسر الثاني:

$x+2\neq0$

$x\neq-2$

$$D=R\backslash\{-2,-1\}$$

$$D=]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup]-1,+\infty[$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+\dfrac{1}{-\infty}-\dfrac{1}{-\infty}=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+\dfrac{1}{+\infty}-\dfrac{1}{+\infty}=+\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-2+\dfrac{1}{-1}-\dfrac{1}{0^-}=-3+\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x)=-3+\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-1+\dfrac{1}{0^-}-\dfrac{1}{+1}=-2+\dfrac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x)=-2+\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\boxed{5}$ $f(x)=(2x-3)(5-\sqrt{x})$, $D=[0,+\infty[$

$f(0)=(-3)\,(5)=-15$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

$\boxed{6}$ $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{x}$, $D=(]-\infty,0[\cup]0,+\infty[)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=$ غير موجودة , $\lim_{x\to+\infty} f(x)=$ غير موجودة

لأن قيم $\cos x$ تتجمع في جوار -1 وجوار $+1$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=1+\dfrac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=1+\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\boxed{7}$ $f(x) = 2x + \sin x$, $D =]-\infty, +\infty[$

ايا ً كانت $x \in]-\infty, +\infty[$ فإن :

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

نضيف $2x$ إلى اطراف المتراجحة :

$$2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\boxed{8}$ $f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$, $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{-\infty} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$\boxed{9}$ $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$, $D = [0, +\infty[$

$f(0) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = x\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) + 3 = x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-0) + 3 = +\infty$$

$\boxed{10}$ $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$, $D =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

---

2) اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$

ثم اوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني و بيّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

شرط الكسر: $x - 1 \neq 0$ أي $x \neq 1$ ومنه $D = R\backslash\{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$ $\Delta_1: x = 1$ مقارب شاقولي عند $+\infty$, $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$ $\Delta_2: y = 2$ مقارب أفقي عند $+\infty$, $-\infty$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2x+1}{x-1} - 2$$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta_2}$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	Δ_2 تحت C	‖	Δ_2 فوق C

3) اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{-2x}{x+1}$ عند -1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم اوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

شرط الكسر: $x+1\neq 0 \Leftarrow x\neq -1 \Leftarrow]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$f(x)=\frac{-2x}{x+1}$ $\qquad D=R\backslash\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right)=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right)=-2$$

$\Delta_2: y=-2$ مقارب أفقي عند $+\infty$, $-\infty$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$\Delta_1: x=-1$ مقارب شاقولي عند $+\infty$, $-\infty$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x)-y_{\Delta_2}=\frac{-2x}{x+1}+2$$

$$f(x)-y_{\Delta_2}=\frac{-2x+2x+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta_2}$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	Δ_2 تحت C	‖	Δ_2 فوق C

---

4) f هو التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$

1. اثبت ان $\frac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{x-1}$ أياً يكن $x>1$

أياً كان $x>1$: $\qquad -1\leq \sin x \leq 1$

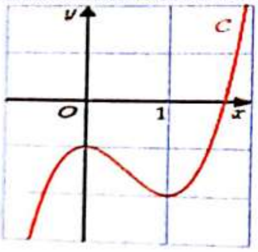
نضيف $2x$: $\qquad 2x-1\leq 2x+\sin x\leq 2x+1$

نقسم أطراف المتراجحة على $x-1$ حيث $x-1>0$ لأن $x>1$:

$$\frac{2x-1}{x-1}\leq\frac{2x+\sin x}{x-1}\leq\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow\frac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{x-1}$$

2. استنتج نهاية f عند $+\infty$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1}&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2\end{aligned}\right\}\xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}}\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$



5) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$

وليكن C خطه البياني المبين في الشكل المرفق:

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ عند $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

2. احسب $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات f

$f'(x)=6x^2-6x$

$$\begin{aligned}f'(x)&=0\\ 6x(x-1)&=0\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}\text{إما } x=0 & : \quad f(0)=-1\\ \text{او } x-1=0\Rightarrow x=1 & : \quad f(1)=-2\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

3. اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذرا واحدا فقط وإذا رمزت إلى هذا الجذر بالرمز α

اثبت ان α ينتمي إلى المجال $]1.6 , 1.7[$

من جدول التغيرات ومن الرسم البياني نجد ان:

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,+\infty[$ \
$0 \in f(]1,+\infty[) =]-2,+\infty[$ \
} إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1,+\infty[$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,0]$, f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[0,1]$

$0 \notin f(]-\infty,0]) =]-\infty,-1]$, $0 \notin f([0,1]) = [-2,-1]$ على الترتيب

ومنه ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل على كامل المجال $]-\infty,1]$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد وجدناه في المجال $]1,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} f(1.6) = -0.48 < 0 \\ f(1.7) = 0.15 \quad > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1.6).f(1.7) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]1.6,1.7[$

---

6) نتامل التابع f المعرف على R^* بالعلاقة $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ ادرس نهاية f عند الصفر.

نفرض $X = h(x) = 3x$ ومنه $x = \frac{X}{3}$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

$$f(X) = \frac{\sin(X)}{\frac{X}{3}} = \frac{3\sin(X)}{X}$$

علماً أن : $\left(\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = 1\right)$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to 0}\left(\frac{3\sin(X)}{X}\right) = 3(1) = 3$$

---

7) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ وليكن C خطه البياني

المطلوب هو إثبات أن الخط C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ وكذلك الأمر في جوار $-\infty$

نعلم أن معادلة المقارب المائل من الشكل: $\Delta: y = ax + b$

◆ عند $+\infty$: ❶ لإيجاد a نأخذ نهاية المقدار $\frac{f(x)}{x}$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = ?$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{x\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

❷ لإيجاد b نأخذ نهاية المقدار $f(x) - ax$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \sqrt{2}x\right) = ?$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x = \frac{\left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x}$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x}$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left[\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\right]} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)=\frac{1+0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\quad\Rightarrow\quad b=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ومنه معادلة المقارب المائل عند $+\infty$ $\qquad \Delta: y=\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}}{4}$

♦ عند $-\infty$: ❶ لإيجاد a نأخذ نهاية المقدار $\frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad a=-\sqrt{2}$$

❷ لإيجاد b نأخذ نهاية المقدار $f(x)-ax$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\sqrt{2}x\right)=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)+\sqrt{2}x=\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}$$

$$f(x)+\sqrt{2}x=\frac{2x^2+x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}$$

$$f(x)+\sqrt{2}x=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right]}=\frac{1+\frac{1}{x}}{-\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right]}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\sqrt{2}x\right)=\frac{1+0}{-[\sqrt{2}+\sqrt{2}]}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4}\quad\Rightarrow\quad b=\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

ومنه معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ $\qquad \grave{\Delta}: y=-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$

---

8) من المعلوم أن كثير حدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0$ حيث $a_n\neq 0$ نهدف إلى إثبات انه إذا كان n عدداً فردياً قبل P جذراً حقيقياً على الأقل.

هنا نميز حالتين حيث n عدد فردي فرضاً:

الحالة الأولى: $a_n>0$

♦ بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(-\infty)=-\infty\quad;\ a_n \text{ عدد موجب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a\in R$ يحقق $P(a)<0$

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(+\infty)=+\infty\quad;\ a_n \text{ عدد موجب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b\in R$ يحقق $P(b)>0$

♦ بما أن Pمستمر على المجال $[a,b]$ و $P(a).P(b)<0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c\in[a,b]$ يحقق $P(c)=0$

الحالة الثانية: $a_n<0$

♦ بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(-\infty)=+\infty\quad;\ a_n \text{ عدد سالب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a\in R$ يحقق $P(a)>0$

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(+\infty)=-\infty\quad;\ a_n \text{ عدد سالب}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b\in R$ يحقق $P(b)<0$

♦ بما أن Pمستمر على المجال $[a,b]$ و $P(a).P(b)<0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c\in[a,b]$ يحقق $P(c)=0$

وبالتالي فإن P يقبل جذراً حقيقياً على الأقل إذا كان n عدداً فردياً.

---

9) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2-4x-12}{x^2-4} = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-21}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-21}{0^-} = +\infty$$

$\lim_{x\to1} f(x) = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{2x^3-x^2-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+x+1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{2+1+1}{1+2} = \frac{4}{3}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{1}{-6} - \frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{1}{-6} - \frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} - \frac{2}{0^-} = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} - \frac{2}{0^+} = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ $\qquad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4}{x^3}\right) = \lim_{x \to -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{2(2)}{1 + 1 + 1} = \frac{4}{3}$$

$\boxed{6}$ $f(x) = 2x + \sin^2 x$ $\qquad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \end{pmatrix}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\qquad$ حصلنا على حالة $\sin \infty$ نطبق مبرهنة المقارنة :

$0 \leq \quad \sin^2 x \quad \leq +1$ $\qquad$ أياً كانت $x \in R$

$2x \leq 2x + \sin^2 x \leq 1 + 2x$ $\qquad$ نضيف $2x$ إلى اطراف المتراجحة

$2x \leq \quad f(x) \quad \leq 1 + 2x$

$$\lim_{x \to +\infty} (2x) = +\infty \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + 2x) = -\infty \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$\boxed{7}$ $f(x) = x^3(2 + \cos x)$ $\qquad a = \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\qquad$ حصلنا على حالة $\cos \infty$ نطبق مبرهنة المقارنة:

$-1 \leq \quad \cos x \quad \leq +1$ $\qquad$ أياً كان $x \in R$

$1 \leq \quad 2 + \cos x \quad \leq 3$

◆ عندما $0 < x$ فإن $x^3 > 0$:

$x^3 \leq x^3(2 + \cos x) \leq 3x^3$

$x^3 \leq \quad f(x) \quad \leq 3x^3$

$x^3 \leq f(x)$ $\qquad$ بما ان :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

◆ عندما $0 > x$ فإن $x^3 < 0$:

$x^3 \geq x^3(2 + \cos x) \geq 3x^3$

$x^3 \geq \quad f(x) \quad \geq 3x^3$

$x^3 \geq f(x)$ $\qquad$ بما ان :

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \xRightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1(2 + \cos 1) = 2 + \cos 1$$

$\boxed{8}$ $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ $\qquad a=\binom{1}{+\infty}$

$\lim_{x\to1} f(x)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\,.\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{0}{1}=0$$

---

10) ليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$

1. اثبت ان g محدود.

نعلم انه أياً كانت $x\in R$ فإن :

$$-1\le \sin x \le 1$$

نضرب بـ 2

$$-2\le 2\sin x\le 2$$

نجمع 3

$$1\le 3+2\sin x\le 5$$

نقلب المتراجحة

$$1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$$

فالتابع $g(x)$ محدود حيث $g(x)\in\left[\frac{1}{5},1\right]$

2. استنتج كلاً من النهايتين $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$

◆ لدينا

$$1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$$

نضرب بـ x^2 حيث $x^2>0$

$$x^2\ge\frac{x^2}{3+2\sin x}\ge\frac{x^2}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5}=+\infty\ \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)=+\infty$$

◆◆ لدينا

$$1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$$

نضرب بـ $x+\sin x$ حيث $x\ge0$ في جوار $+\infty$ ومنه $x+\sin x>0$

$$\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\ge\frac{x+\sin x}{5}\qquad(*)$$

لنحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{5}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{5}=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم مبرهنة المقارنة

نعلم انه أياً كانت $x>0$ فإن :

$$-1\le \sin x\le 1$$

نضيف x

$$x-1\le x+\sin x\le x+1$$

نقسم على 5

$$\frac{x-1}{5}\le\frac{x+\sin x}{5}\le\frac{x+1}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{5}\right)=+\infty\ \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{5}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{5}\right)=+\infty\ \xrightarrow[\text{المقارنة ③ في }(*)]{\text{حسب مبرهنة}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}=+\infty$$

11) ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$

1. عين D_f مجموعة تعريف f

شرط الكسر: $x^2-x-2\neq 0$ ومنه $(x-2)(x+1)\neq 0$ اي $x\neq -1$, $x\neq 2$

$$D=]-\infty,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$$

2. اوجد الأعداد c,b,a التي تحقق $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ اياً تكن x من D_f

نقسم البسط على المقام (القسمة الإقليدية):

$$\begin{array}{l|l} x^2-x-2 & 3x^2+6x \\ & \mp 3x^2\pm 3x\pm 6 \\ \hline & 9x+6 \end{array} \quad \text{quotient } 3$$

$$f(x)=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}=3+\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة مع الشكل $a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ نجد $\boxed{a=3}$

$$\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}\quad\cdots\cdots\cdots\ \boxed{*}$$

لإيجاد b نضرب طرفي المعادلة بـ $(x+1)$ ونجعل $x=-1$:

$$b+0=\frac{-9+6}{-3}=\frac{-3}{-3}=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{b=1}$$

لإيجاد c نضرب طرفي المعادلة بـ $(x-2)$ ونجعل $x=2$:

$$0+c=\frac{18+6}{3}=8\quad\Rightarrow\quad\boxed{c=8}$$

$$f(x)=3+\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x-2}$$

3. ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to2^-}f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to2^+}f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$

---

12) ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$

1. ادرس نهاية f في جوار 1

شرط الكسر: $(x-1)^2\neq 0$ ومنه $x-1\neq 0$ اي $x\neq 1$ $\qquad D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

2. اوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ اياً تكن x من $I\backslash\{1\}$

$$f(x)>10^6\Rightarrow\quad\frac{x}{(x-1)^2}>10^6$$
$$\Rightarrow\qquad x>(x-1)^2 10^6$$

المتراجحة المطلوبة $\boxed{10^6(x-1)^2-x<0}$

نعدم المتراجحة و ندرس إشارتها

$$10^6(x-1)^2-x=0$$
$$10^6(x-1)^2-x+1-1=0$$
$$10^6(x-1)^2-(x-1)-1=0$$

لناخذ $t=x-1$:

$$10^6t^2-t-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4(10)^6(-1)$$
$$=1+4(10)^6\simeq 4(10)^6>0$$

$\sqrt{\Delta}=2(10)^3$ للمعادلة حلان حقيقيان

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+2(10)^3}{2(10)^6}$$
$$=\frac{2001}{2(10)^6}=\frac{1000.5}{(10)^6}\simeq 0.001$$
$$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-2(10)^3}{2(10)^6}$$
$$=\frac{-1999}{2(10)^6}=\frac{-999.5}{(10)^6}=-0.0009\simeq-0.001$$

$$t=x-1\in]-0.001,+0.001[$$
$$\Rightarrow x\in]1-0.001,1+0.001[$$
$$x\in]0.999,1.001[$$

13) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x \qquad a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?\quad \infty-\infty$ **حالة عدم تعيين من الشكل**

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2x}{x^2}\right)}+x}$$

$$=\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}=\frac{2x}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right]}$$

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{1+1}=1$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x \qquad a=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=?\quad \infty-\infty$ **حالة عدم تعيين من الشكل**

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}$$

$$=\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{x}{x^2}\right)}-2x}$$

$$=\frac{x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x}$$

$$f(x)=\frac{x}{-x\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right]}=\frac{-1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} \qquad a=0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=?\qquad \frac{0}{0}$ **حالة عدم تعيين من الشكل**

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}$$

$$f(x)=2\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=2(1+1)=4$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \qquad a=\binom{1}{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=?\qquad \frac{0}{0}$ **حالة عدم تعيين من الشكل**

$$f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\left(-x+\sqrt{x}\right)\left(-x-\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{x^2-x}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}=\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}$$

$$f(x)=\frac{x}{-x-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{-1-1}=\frac{-1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?\qquad \frac{\infty}{\infty}$ **حالة عدم تعيين من الشكل**

$= \quad x\left(-1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) \quad -1+\frac{1}{}$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{0}{-2} = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{6}\ f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad a = \binom{-1}{+\infty}$

$\lim_{x\to-1} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{(x^2-1)}$$

$$= \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

---

14) ادرس في كل حالة نهاية التابع f

$\boxed{1}\ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \qquad a = \binom{0}{+\infty}$

$\lim_{x\to0} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin x}{x} = \sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$\lim_{x\to0} f(x) = (0)(1) = 0$ علماً أن : $\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم الإحاطة

$-1 \le \sin x \le +1$ أياً كانت $x \in R$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \le \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ;\ x > 0$$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}} &= 0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} &= 0\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{2}\ f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad a = 0$

$\lim_{x\to0} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نعلم أن $\left[1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\right]$ و $\left[\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]$

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$ $\qquad a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$ $\qquad \frac{0}{0}$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}(1)} = 2 \quad , \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1\right)$$ علماً أن :

$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $\qquad a = 2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = ?$ $\qquad \frac{0}{0}$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط والمقام في آنٍ واحد

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$$

$$= \frac{\left(2-\sqrt{3x-2}\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$= \frac{[4-(3x-2)]\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{[2x+5-9]\left(2+\sqrt{3x-2}\right)} = \frac{(-3x+6)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x-4)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{-3(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)} = \frac{-3\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{-3(6)}{2(4)} = \frac{-9}{4}$$

---

15) ليكن g التابع المعرف على المجال $]3, +\infty[$ وفق $g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$$

بفرض $g(x) = t$:

$$\lim_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right) = \lim_{t\to 3} g(t) = \frac{9-1}{0^+} = +\infty$$

2. اعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right)$ بعد كتابة $g\left(g(x)\right)$ بدلالة x

$$g\left(g(x)\right) = \frac{3g(x)-1}{g(x)-3} = \frac{3\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-1}{\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-3}$$

$$= \frac{\frac{9x-3}{x-3}-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3} = \frac{\frac{9x-3-x+3}{x-3}}{\frac{3x-1-3x+9}{x-3}} = \frac{8x}{8} = x$$

$$\lim_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right) = +\infty$$

16) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$ اوجد الأعداد الحقيقية d, c, b, a علماً ان الخواص الآتية محققة:

- ◆ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب للخط C
- ◆ المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$
- ◆ تنتمي النقطة $A(1, 2)$ إلى الخط C

◆ نلاحظ:

$\lim\limits_{x\to d} f(x) = \pm\infty \implies$ $x = d$ مقارب شاقولي لـ C

وبما ان $x = 3$ مقارب شاقولي لـ C (فرضاً)

عندئذ: $\boxed{d = 3}$

◆ $y = 2x - 5$ معادلة المقارب المائل لـ C عند $+\infty$ او $-\infty$

$$f(x) - y = ax + b + \frac{c}{x-d} - 2x + 5$$
$$= (a-2)x + (b+5) + \frac{c}{x-d}$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$$
$$\implies \begin{cases} a - 2 = 0 \\ b + 5 = 0 \end{cases} \implies \boxed{a = 2} \;,\; \boxed{b = -5}$$

وجدنا : $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{c}{x-3}$

◆ النقطة $A(1,2)$ تنتمي لـ C

$$f(1) = 2$$
$$2(1) - 5 + \frac{c}{(1) - 3} = 2$$
$$\frac{c}{-2} = 5$$
$$\boxed{c = -10}$$

و منه : $f(x) = 2x - 5 - \dfrac{10}{x-3}$

---

17) فيما ياتي C هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f بين في كل حالة إن كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية او شاقولية او مائلة) للخط C

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ $\qquad D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \implies$ $\boxed{y = 1}$ مقارب أفقي يوازي $\grave{x}x$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \implies$ $\boxed{y = 1}$ مقارب أفقي يوازي $\grave{x}x$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \implies$ $\boxed{x = 3}$ مقارب شاقولي يوازي $\grave{y}y$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \implies$ $\boxed{x = 3}$ مقارب شاقولي يوازي $\grave{y}y$ عند $+\infty$

$\boxed{2}$ $f(x) = -x + 3 + \dfrac{2}{x^2+1}$ $\qquad D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

لنبحث عن مقارب مائل نفرض أن $y_\Delta = -x + 3$

$$f(x) - y_\Delta = -x + 3 + \frac{2}{x^2+1} - (-x+3) = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \end{aligned}\right\} \implies$$ $y_\Delta = -x + 3$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{3}\ f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ $\qquad D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \Rightarrow$ $+\infty$ عند $\grave{y}y$ مقارب شاقولي منطبق على $\boxed{x=0}$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ $-\infty$ عند $\grave{y}y$ مقارب شاقولي منطبق على $\boxed{x=0}$

لنبحث عن مقارب مائل , نفرض أن $y_\Delta = 1 + \frac{x}{2}$

$f(x) - y_\Delta = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{-2}{x}$

$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $y_\Delta = 1 + \frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{4}\ f(x) = 1 - x + \frac{3x}{x^2+2}$ $\qquad D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

لنبحث عن مقارب مائل، نفرض أن $y_\Delta = 1 - x$

$f(x) - y_\Delta = 1 - x + \frac{3x}{x^2+2} - (1-x) = \frac{3x}{x^2+2}$

$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2+2} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2+2} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $y_\Delta = 1 - x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{5}\ f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x}$ $\qquad D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty \Rightarrow$ $+\infty$ عند $\grave{y}y$ مقارب شاقولي منطبق على $\boxed{x=0}$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ $-\infty$ عند $\grave{y}y$ مقارب شاقولي منطبق على $\boxed{x=0}$

لنبحث مقارب مائل :

$f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x} \overset{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{\cong} 2x + 5 - \frac{4}{x}$

نفرض أن $y_\Delta = 2x + 5$,

$f(x) - y_\Delta = 2x + 5 - \frac{4}{x} - (2x+5) = \frac{-4}{x}$

$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $y_\Delta = 2x + 5$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{6}\ f(x) = \frac{x^2+2+\sin x}{x}$ $\qquad D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$f(x) = x + \frac{2+\sin x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم مبرهنة المقارنة

نعلم انه اياً كانت $x \in R$ فإن :

$-1 \leq \sin x \leq 1$

نجمع 2 :

$1 \leq 2 + \sin x \leq 3$

$\frac{1}{x} \le \frac{2+\sin x}{x} \le \frac{3}{x}$: $\div (x>0)$

$x+\frac{1}{x} \le x+\frac{2+\sin x}{x} \le x+\frac{3}{x}$: نجمع x

$x+\frac{1}{x} \le f(x) \le x+\frac{3}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=\frac{+2}{0^-}=-\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $\grave{y}y$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{+2}{0^+}=+\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $\grave{y}y$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم مبرهنة المقارنة

$-1 \le \sin x \le 1$: نعلم أنه أياً كانت $x\in R$ فإن

$1 \le 2+\sin x \le 3$: نجمع 2

$\frac{1}{x} \ge \frac{2+\sin x}{x} \ge \frac{3}{x}$: $\div (x<0)$

$x+\frac{1}{x} \ge x+\frac{2+\sin x}{x} \ge x+\frac{3}{x}$: نجمع x

$x+\frac{1}{x} \ge f(x) \ge x+\frac{3}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لنبحث عن مقارب مائل , نفرض أن $y_\Delta = x$

$f(x)-y_\Delta = x+\frac{2+\sin x}{x}-x=\frac{2+\sin x}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم الإحاطة

$-1 \le \sin x \le 1$: نعلم أنه أياً كانت $x\in R$ فإن

$1 \le 2+\sin x \le 3$: نجمع 2

$\frac{1}{x} \ge \frac{2+\sin x}{x} \ge \frac{3}{x}$: $\div (x<0)$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم الإحاطة

$-1 \le \sin x \le 1$: نعلم أنه أياً كانت $x\in R$ فإن

$1 \le 2+\sin x \le 3$: نجمع 2

$\frac{1}{x} \le \frac{2+\sin x}{x} \le \frac{3}{x}$: $\div (x>0)$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

أي $y_\Delta = x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

لنبحث عن مقارب مائل :

$$f(x) \overset{\text{باستخدام القسمة الإقليدية}}{\cong} 3x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

نفرض ان $y_\Delta = 3x$:

$$f(x) - y_\Delta = 3x - \frac{x+1}{x^2+1} - 3x = -\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{x+1}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x+1}{x^2+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $y_\Delta = 3x$ هو مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

---

18) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$

1. a) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x+1)\big)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - (x+1) = \frac{\left[\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)\right]}{\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+4-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1} = \frac{x^2+2x+4-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = 0$$

b) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = 0$ فإن $y_\Delta = x+1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

c) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)$$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1) = 0$$

$$\sqrt{x^2+2x+4} = (x+1)$$

نربع بشرط $(x > -1)$: $x^2+2x+4 = (x+1)^2$

مستحيلة $x^2+2x+4 = x^2+2x+1 \Rightarrow 4 = 1$

ملاحظة: (اي معادلة مستحيلة الحل لها إشارة واحدة). $f(x) - (x+1) > 0 \Rightarrow$ Δ فوق C

2. a) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

b) اثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وان نهاية $x \to f(x) - ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=?$$ $\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}\overset{-\infty\ \text{عند}}{\cong}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1\Rightarrow\boxed{a=-1}$$

$$f(x)-ax=\sqrt{x^2+2x+4}+x$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+ax)=?$$ $\infty-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)-ax=\frac{(\sqrt{x^2+2x+4}+x)(\sqrt{x^2+2x+4}-x)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)}=\frac{2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\frac{2}{-2}=-1\Rightarrow\boxed{b=-1}$$

c) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$

معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي $y=-x-1$

---

19)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1. احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

2. a)اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية (متمماً إلى مربع كامل).

$$x^2+4x+5=x^2+4x+4-4+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$$

b) استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$ اكتب معادلته.

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$$

نفرض أن : $\Delta: y=x+2$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y_\Delta=?$$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)=\frac{\left[\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right]\left[\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right]}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\frac{1}{+\infty}=0$$ $\Rightarrow$ $y_\Delta=x+2$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$ عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

التأويل الهندسي: $\boxed{y = 0}$ **مقارب أفقي منطبق على محور $\grave{x}x$ عند $-\infty$**

2. اثبت ان المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = x + \sqrt{x^2 + 1} - 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ $y = 2x$ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

3. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = 0$$

$\sqrt{x^2 + 1} = x \quad : x > 0 \quad \xrightarrow{\text{نربع}} \quad x^2 + 1 = x^2 \quad \Rightarrow 1 = 0$ مستحيلة الحل

ملاحظة هامة: أي معادلة مستحيلة الحل لها إشارة واحدة فقط إما موجبة دائماً أو سالبة دائماً لمعرفتها نأخذ قيمة ضمن مجموعة التعريف ونعوضها في $f(x) - y_\Delta$ والإشارة الناتجة هي إشارة $f(x) - y_\Delta$

$x = 0 \Rightarrow f(x) - y_\Delta > 0 \Rightarrow \Delta$ فوق C قيمة تجريبية.

---

21) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$ **حالة عدم تعيين من الشكل** $-\infty + \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{\left|x^2\left(4 - \frac{1}{x^2}\right)\right|} = x + |x|\sqrt{\left|4 - \frac{1}{x^2}\right|} = x - x\sqrt{\left|4 - \frac{1}{x^2}\right|}$$

$$= x\left(1 - \sqrt{\left|4 - \frac{1}{x^2}\right|}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(1 - 2) = +\infty$$

2. a) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$

$$f(x) - 3x = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} - 3x = \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x\right)\left(\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x\right)}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x} = \frac{|4x^2 - 1| - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x}$$

$= \dfrac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x} = \dfrac{-1}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x}$ عند $+\infty$ يكون $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

b) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

$$f(x)+x = x+\sqrt{|4x^2-1|}+x = \sqrt{|4x^2-1|}+2x$$
$$= \frac{\left(\sqrt{|4x^2-1|}+2x\right)\left(\sqrt{|4x^2-1|}-2x\right)}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x} = \frac{|4x^2-1|-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x}$$

عند $-\infty$ يكون $|4x^2-1| = 4x^2-1$

$$= \frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x} = \frac{-1}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x}$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

3. a) استنتج ان الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1, Δ_2 يطلب إيجاد معادلتيهما.

بما ان : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$ فإن $\Delta_1: y=3x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

بما ان : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$ فإن $\Delta_2: y=-x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

b) ادرس الوضع النسبي للخط C وكل من المقاربين Δ_1, Δ_2

دراسة الوضع النسبي للمقارب $y=3x$ مع C:

$$f(x)-3x=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}-2x=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}=2x \qquad \text{نربع } : x>0$$
$$|4x^2-1|=4x^2$$

إما $4x^2-1=4x^2 \Rightarrow -1=0$ مستحيلة

أو $4x^2-1=-4x^2 \Rightarrow 8x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{8} \Rightarrow$ إما $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (مقبول) ، أو $x=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (مرفوض)

x	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta_1}$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ_1	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	C تحت Δ_1

نقطة تقاطع C مع المقارب Δ_1 هي $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

دراسة الوضع النسبي للمقارب $\Delta_2: y=-x$ مع C:

$$f(x)+x=\sqrt{|4x^2-1|}+2x=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}=-2x \qquad \text{نربع بشرط } : x<0$$
$$|4x^2-1|=4x^2$$

إما $4x^2-1=4x^2 \Rightarrow -1=0$ مستحيلة

أو $4x^2-1=-4x^2 \Rightarrow 8x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{8} \Rightarrow$ إما $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (مرفوض) أو $x=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (مقبول)

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$	0
$f(x)-y_{\Delta_2}$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ_2	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	C فوق Δ_2

نقطة تقاطع C مع المقارب Δ_2 هي $\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

22)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$

1. ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

2. a) اكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني.

$$4x^2 - 4x + 3 = 4(x^2 - x) + 3 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 3$$

$$= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 2^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 = (2x-1)^2 + 2$$

b)ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$h(x) = \sqrt{(2x-1)^2 + 2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} h(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$h(x) = \frac{(2x-1)^2 + 2 - (2x-1)^2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \dfrac{2}{+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \dfrac{2}{+\infty} = 0 \end{cases}$$

c)استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما.

من b) نلاحظ ما يلي:

$$h(x) = \sqrt{(2x-1)^2 + 2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$

$$h(x) = \sqrt{(2x-1)^2 + 2} - |2x-1|$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0 \Rightarrow$ $-\infty$ عند C مقارب مائل لـ $\boxed{y = -(2x-1)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0 \Rightarrow$ $+\infty$ عند C مقارب مائل لـ $\boxed{y = 2x-1}$

3. اثبت ان الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين.

$$h(x) = \sqrt{(2x-1)^2 + 2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$

$$h(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 2} - \sqrt{(2x-1)^2} = 0$$

$$\sqrt{(2x-1)^2 + 2} = \sqrt{(2x-1)^2}$$

نربع: $(2x-1)^2 + 2 = (2x-1)^2$

مستحيلة $2 = 0 \Rightarrow$ $h(x)$ لها إشارة واحدة فقط

نأخذ قيمة اختيارية ولتكن $x = 0$ ونعوضها في $h(x)$ فنجد أن $h(x) > 0$ إذاً C فوق المقاربين Δ_1, Δ_2

---

23) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

1. a) اثبت ان المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{9}{x^2}\right)}} - 1$$

$$= \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} - 1$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \Rightarrow$ $+\infty$ مقارب مائل لـ C في جوار $\boxed{\Delta: y = x + 1}$

b) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-y_{\Delta}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1 \\ f(x)-y_{\Delta}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=1$$

$$x=\sqrt{x^2+9}$$ (نربع بشرط $x>0$)

$$x^2=x^2+9 \Rightarrow 0=9$$ مستحيلة $0=9$

بما ان $0=9$ مستحيلة فإن $(f(x)-y_{\Delta})$ لها إشارة واحدة فقط نأخذ قيمة اختيارية لتكن $x=0$ ونعوضها فنجد

$(f(x)-y_{\Delta}<0)$ إذاً C تحت Δ

2. اصحيح ان المستقيم $\grave{\Delta}$ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

$$f(x)-y_{\grave{\Delta}}=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-(x-1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}}+1$$

$$=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_{\grave{\Delta}}]=0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\grave{\Delta}: y=x-1}$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

---

24) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=x^3+x+1$ احسب $f(0), f(-1)$ ثم اثبت وجود عدد حقيقي وحيد c من المجال $]-1,0[$ يحقق $f(c)=0$

$f(-1)=-1-1+1=-1$, $f\ (0)\ =1$

f معرف واشتقاقي على $]-1,0[$

$\grave{f}(x)=3x^2+1>0$

x	-1	0
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	1

نلاحظ ان:

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-1,0[$

$f(-1).f(0)<0$

فللمعادلة $f(c)=0$ جذر وحيد c في R ينتمي للمجال $]-1,0[$

---

25) ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$

1. اثبت ان f متزايد تماماً على المجال $\left[\frac{-3}{2},-1\right[$

f معرف واشتقاقي على المجال $\left[\frac{-3}{2},-1\right[$

$$\grave{f}(x)=\frac{3x^2(x+1)-1(x^3)}{(x+1)^2}=\frac{3x^3+3x^2-x^3}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

نلاحظ ان $\grave{f}(x)\geq 0$ المشتق موجب وينعدم عند قيمة $x=\frac{-3}{2}$ التي لا تشكل مجالاً في مجموعة التعريف $\left[\frac{-3}{2},-1\right[$

فالتابع متزايد تماماً على $\left[\frac{-3}{2},-1\right[$

2. نظم جدولاً بتغيرات f على المجال $\left]\frac{-3}{2}, -1\right[$

f معرف و اشتقاقي على $\left[\frac{-3}{2}, -1\right[$

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{27}{4} \quad , \quad \lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}(x) = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \\ \grave{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{إما} \quad (\text{مرفوض}) \\ x = \dfrac{-3}{2} : f\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \dfrac{27}{4} & \text{او} \end{cases}$$

	0 +	■
	$\frac{27}{4}$ ↗ $+\infty$	■

3. اوجد $f\left(\left[\frac{-3}{2}, -1\right[\right)$ واثبت ان للمعادلة $f(x) = 10$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{-3}{2}, -1\right[$

$$f\left(\left[\frac{-3}{2}, -1\right[\right) = \left[\frac{27}{4}, +\infty\right[$$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left[\frac{-3}{2}, -1\right[$ و $10 \in f\left(\left[\frac{-3}{2}, -1\right[\right) = \left[\frac{27}{4}, +\infty\right[$ ومنه للمعادلة $f(x) = 10$ حلاً وحيداً في المجال $\left[\frac{-3}{2}, -1\right[$.

---

26) ليكن f التابع المعرف على $I = [0,3]$ وفق $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف واشتقاقي على $[0,3]$

$$f(0) = -3 \quad , \quad f(3) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}(x) = 2x - 2 \\ \grave{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = 1} \; : f(1) = -4$$

$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	−3 ↘		−4		↗ 0

2. استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$

طريقة أولى: من جدول التغيرات نجد أن $f(x) = 0$ عندما $x = 3$

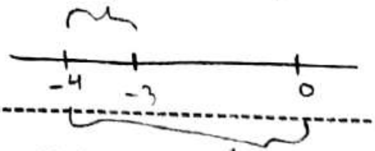
طريقة ثانية:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{مقبول}) \\ x = -1 & (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

3. عيّن $f([0,3[)$

$$f([0,3[) = [-4, -3] \cup [-4, 0[= [-4, 0[$$

ناخذ الحل الاشمل



---

27) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ اثبت ان f مستمر على R وعين $f(R)$

لاحظ: f اشتقاقي على R فهو مستمر على R.

نعلم ان : $x^2 \in [0, +\infty[$

$$x^2 + 1 \in [1, +\infty[\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \in]0, 1]$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2+1} \in [-1, 0[\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2+1} \in [0, 1[\Rightarrow f(x) \in [0, 1[= f(R)$$

ملاحظة: يمكن إيجاد المطلوب عبر دراسة تغيرات f وتعيين $f(R)$

28) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\ }{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

1. احسب نهاية f عند الصفر.

نعلم أنه أياً كان $: x \in R^*$

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

نضرب بـ $: x^2$

$$\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right| \leq x^2$$

$$|f(x) - 0| \leq x^2$$

بما أن $\lim\limits_{x\to0}(x^2) = 0$ حسب الإحاطة ② فإن $\lim\limits_{x\to0}f(x) = 0$

2. هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على R علل إجابتك.

f مستمر عند $x = 0$ لأن : $\lim\limits_{x\to0}f(x) = f(0)$

وبما أن f هو عبارة عن جداء دالتين $\left(x^2 , \cos\frac{1}{x}\right)$ مستمرتان على كلاً من المجالين $]-\infty , 0[,]0 , +\infty[$

فيكون f مستمر على R

---

29) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$ ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R

التابع f مستمر على كلاً من المجالين $]-\infty , 0[,]0 , +\infty[$

حتى يكون f مستمر على R يجب أن يكون مستمر عند $x = 0$ أي يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to0}f(x) = f(0)$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x) =?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1-x^2-1}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$f(x) = \frac{-x^2}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to0}f(x) = 0 \\ f(0) = m \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{حسب تعريف الاستمرار}} \boxed{m = 0}$$

---

30) يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرف على المجال $[0 , 2]$ وفق $f(x) = x - E(x)$

1. اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

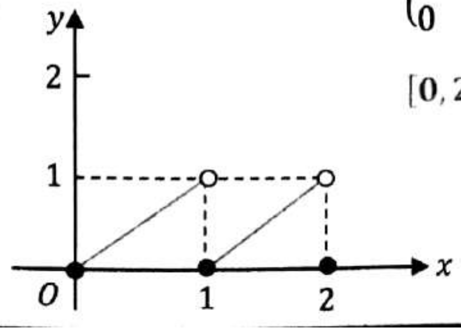
بما أن $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x , $x \in [0,2]$ فإن $E(x) \in \{0,1,2\}$

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0 , 1[\\ 1 & : x \in [1 , 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = x - E(x) = \begin{cases} x & : x \in [0 , 1[\\ x - 1 & : x \in [1 , 2[\\ 0 & : x = 2 \end{cases}$$

2. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0, 2]$

نرسم الخط البياني لـ f على كل مجال

بأخذ نقاط مساعدة تنتمي لكل مجال



3. هل f مستمر على المجال $[0,2]$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1\\ f(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x)\neq f(1)$$

f غير مستمر عند $x=1$ فهو غير مستمر على المجال $[0,2]$

4. طلب إضافي : اوجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$E(x)\le \quad x \quad < E(x)+1$$

$$0\ \le x-E(x)<1$$

نقسم على $x>0$:

$$0\ \le \quad f(x) \quad <1$$

$$0\le \quad \frac{f(x)}{x} \quad < \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}(0)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

نعلم أن :

نقسم على $x>0$:

$$x-1\ <\ E(x)\ \le x$$

$$\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\le 1$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1)=1\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}}\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1$$

---

31)يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ليكن f التابع المعرف على المجال $[0\,,2]$ وفق $f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$

1. اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

بما أن $E(x)$ هي الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ، و $x\in[0,2]$ فإن $E(x)$ تنتمي إلى $\{0,1,2\}$

$$E(x)=\begin{cases}0 & : x\in[0\,,1[\\ 1 & : x\in[1\,,2[\\ 2 & : x=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2=\begin{cases}x^2 & : x\in[0\,,1[\\ 1+(x-1)^2 & : x\in[1\,,2[\\ \quad 2 & : x=2\end{cases}$$

2. اثبت ان f مستمر على المجال $[0,2]$

f تابع كثير الحدود على كل من المجالين $]0,1[$, $]1,2[$ وهذه التوابع مستمرة على مجالات تعريفها

ولنتحقق من استمرار f عند كل من 1 و 2

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1\\ f(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)=1$$

f مستمر من أجل $x=1$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=2\\ f(2)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to2^-} f(x)=f(2)=2$$

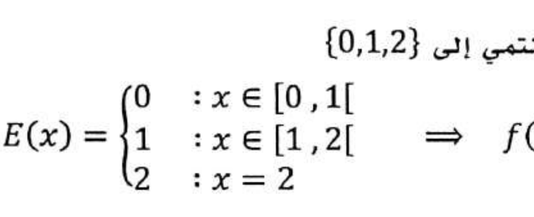
f مستمر من أجل $x=2$:

إذاً التابع f مستمر على $[0,2]$

---

32)في معلم متجانس C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]0\,,\pi[$ وفق $f(x)=\sin x$ و d هو المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$

1. a) ارسم كلاً من d, C



يمكن رسم الخط C والمستقيم d نقطياً كما وضع بالشكل

b) يبدو ان المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ حلاً وحيداً α في المجال $]0\,,\pi[$ استفد من الرسم لإيجاد مجال صغير ينتمي إليه α

واضح من الرسم ان $\alpha\in\,]1\,,2[$

2. نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $[0\,,\pi]$ وفق $g(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$

a) احسب $\dot{g}(x)$ واثبت ان $\dot{g}(x)$ ينعدم عند $x = \frac{\pi}{3}$

$g(0) = 0 \quad , \quad g(\pi) = \frac{-\pi}{2}$

g اشتقاقي على $[0\,,\pi]$

$$\left.\begin{matrix}\dot{g}(x) = \cos x - \frac{1}{2}\\ \dot{g}(x) = 0\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [0\,,\pi] \ : \ g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

b) نظم جدولاً بتغيرات g

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\dot{g}(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$	↘	$\frac{-\pi}{2}$

3. استنتج مما سبق ان المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0\,,\pi]$

هذا يكافئ إثبات أن للمعادلة $\sin x - \frac{1}{2}x = 0 \Leftarrow g(x) = 0$ حل وحيد α في المجال $]0,\pi]$

♦ g تابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ بحيث:

$0 \notin g\left(\left]0\ \frac{\pi}{3}\right[\right) = \left]0,\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right[$ إذاً ليس للمعادلة حلاً في المجال $\left]0\,,\frac{\pi}{3}\right[$

♦♦ g مستمر ومتناقص تماماً على $\left[\frac{\pi}{3}\,,\pi\right]$

$$\left.\begin{matrix}g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6} > 0\\ g(\pi) = \frac{-\pi}{2} \quad < 0\end{matrix}\right\} \Longrightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right) \times g(\pi) < 0$$

ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد في المجال $\left[\frac{\pi}{3}\,,\pi\right]$

وبالتالي للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ حلاً وحيد في المجال $\alpha \in]0\,,\pi]$

---

33) ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I = [0,1]$ ويحقق $f(x) \in I$ اياً يكن x من I نرمز بـالرمز k إلـى التابع المعرف على I وفق $k(x) = f(x) - x$

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k اثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a) = a$

$k(x) = f(x) - x \qquad : x \in I = [0\,,1]$

$$\left.\begin{matrix}x \in [0,1]\\ f(x) \in [0,1]\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{مستمر على المجال } [0,1] \quad k(x) = f(x) - x$$

$$\left.\begin{matrix}k(0) = f(0) \ge 0 \quad \left(f(x) \in [0,1] \text{ لأن}\right)\\ k(1) = f(1) - 1 \le 0 \ \left(f(1) \in [0,1]\right)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow k(0) \times k(1) < 0$$

إذاً يوجد $a \in [0,1]$ بحيث $k(a) = 0$, $f(a) - a = 0$ ومنه $f(a) = a$

---

34) ليكن m عدداً حقيقياً وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على R وفق: $f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$

1. a) اثبت ان الخطين [illegible] يتقاطعان في نقطتين B, A اوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

$$\left.\begin{matrix}C_0 : f_0(x) = x^3 - 8x\\ C_1 : f_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1\end{matrix}\right\} \Longrightarrow f_1(x) = f_0(x)$$

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1$$

$$\left.\begin{matrix}\text{إما } x = 1 \quad : f_0(1) = 1 - 8 = -7\\ \text{أو } x = -1 \quad : f_0(-1) = -1 + 8 = 7\end{matrix}\right\} \Longrightarrow A(1,-7) \ , \ B(-1,7)$$

b) استنتج ان جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين B, A

$$A(1,-7) : f_m(1) = 1 + m - 8 - m = -7 \overset{\text{محققة}}{\Longrightarrow} A \in C_m$$

$$B(-1,7) : f_m(-1) = -1 + m + 8 - m = 7 \overset{\text{محققة}}{\Longrightarrow} B \in C_m$$

2. اوجد نهاية f_m عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$$

3. استنتج مما سبق ان للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول متمايزة في R اياً يكن العدد m

مما سبق وجدنا أن C_m يمر بالنقطتين $B(-1,7)$, $A(1,-7)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	7	↘	-7	↗	$+\infty$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, -1]$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty \\ f(-1) = 7\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f_m(x) \times f(-1) < 0$$

إذاً للمعادلة $f_{\dot{m}}(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty, -1]$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,1[$

$$\left.\begin{array}{r}f(-1) = 7 \\ f(1) = -7\end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) \times f(1) < 0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $[1, +\infty[$

$$\left.\begin{array}{r}f(1) = -7 \\ \lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow f(1) \times \lim_{x\to+\infty} f_m(x) < 0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[1, +\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول مختلفة فيR

---

35) ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I = [0,1]$ ويحقق الشرطين:

◆ اياً كان x من I كان $f(x)$ من I

◆ واياً كان x من $]0,1[$ كان $\grave{f}(x) < 1$

اثبت ان للمعادلة $f(x) = x$ حلاً وحيداً في I

طريقة التفكير للحل: **من الشرط الثاني:**

الحل يكافئ أن نثبت أن للمعادلة $f(x) - x = 0$ حل وحيد في I , لنفرض أن: $x \in I = [0,1]$: $\boxed{g(x) = f(x) - x}$

حسب الفرض: g مستمر على المجال $[0,1]$ واشتقاقي على المجال $]0,1[$ (لأن $\grave{f}(x) < 1$)

$$\grave{g}(x) = \grave{f}(x) - 1 < 0 \ , \ \left(\grave{f}(x) < 1 \ \Rightarrow \ \grave{f}(x) - 1 < 0\right) \ : \text{لأن}$$

$g(0) = f(0)$
$g(1) = f(1) - 1$

x	0		1
$\grave{g}(x)$	‖	$-$	‖
$g(x)$	$f(0)$	↘	$f(1) - 1$

لاحظ: $g(x)$ مستمر ومتناقص على المجال $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{r}g(0) = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0\end{array}\right\} \Rightarrow g(0) \times g(1) < 0$$

انتبه: لماذا $g(0) = f(0) \geq 0$ لأن $f(x) \in [0,1]$ وبالمثل $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

إذاً يوجد $\alpha \in [0,1]$ بحيث للمعادلة $g(x) = 0$ اي $f(x) - x = 0$ وبالتالي $f(x) = x$ حل وحيد.

36) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. اثبت ان للخط C محور تناظر.

$f(x)=\sqrt{1+x^2} \quad : D_f = R$

◆ $x \in R \rightarrow -x \in R$ (محقق)

◆ $f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$ (محقق)

ومن تحقق الشرطين السابقين نجد ان: f تابع زوجي ومنه فإن خطه البياني C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب yy' الذي معادلته $x=0$

2. ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

3. اثبت ان $f(x)-x=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ اياً يكن x من R استنتج ان C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$ عين الوضع النسبي للخط C ومقاربه d

$$f(x)-x=\sqrt{1+x^2}-x=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$f(x)-x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\frac{1}{+\infty}=0 \quad \Rightarrow$ $d: y=x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

$f(x)-y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}>0$ ومنه C فوق d كون $\sqrt{1+x^2}+x>0$ اياً تكن $x \in R$

4. ليكن $\acute{C}$ الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x)=-f(x)$ وليكن $H=C\cup\acute{C}$

اثبت ان معادلة H هي $y^2-x^2=1$

لدينا $g(x)=-f(x)$

النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى H إذا وفقط إذا كان $y=f(x)$ أو $y=g(x)=-f(x)$

$$y^2=\left(f(x)\right)^2=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2=1+x^2$$

او $y^2=\left(-f(x)\right)^2=\left(-\sqrt{1+x^2}\right)^2=1+x^2$

وهذا يكافئ قولنا أن $y^2=1+x^2$ ومنه معادلة H هي $y^2-x^2=1$

5. نعتمد معلماً جديداً $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ و $\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$. لتكن M نقطة إحداثياتها (x,y) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ وإحداثياتها (X,Y) في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$

اوجد y,x بدلالة Y,X ارسم الخط H في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$

$$\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j}) \qquad , \qquad \vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$$

$M(x,y):\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

$M(X,Y):\overrightarrow{OM}=X\vec{u}+Y\vec{v}=X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)+Y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$$=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}X\vec{i}}+\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}X\vec{j}}-\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}Y\vec{i}}+\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}Y\vec{j}}$$

$$M(X,Y):\overrightarrow{OM}=\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y}_{x}\right)\vec{i}+\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y}_{y}\right)\vec{j}$$

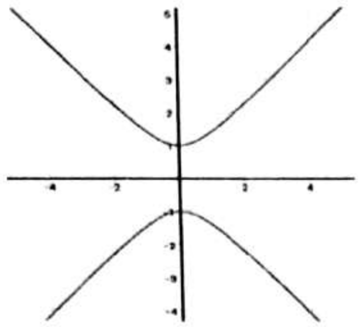
ومنه: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$ و $y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$

نعوض في معادلة H : $y^2 - x^2 = 1$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 - \left(\frac{1}{2}X^2 - XY + \frac{1}{2}Y^2\right) = 1$$

و هي معادلة H في الجملة الجديدة : $X.Y = \frac{1}{2}$ $\quad 2X.Y = 1 \quad \Longrightarrow$



يمثل الرسم الخط البياني لـ H حيث C باللون الأزرق

و $\hat{C}$ باللون الأحمر

---

37) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f = R\backslash\{-1,+1\}$ وفق $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$

1. a) اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x < -1 \\ f_2(x) = x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

b) ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f ثم اوجد $\grave{f}(x)$ وادرس إشارته على كل من مجالات D_f

$D =]-\infty,-1[\, \cup\,]-1,1[\, \cup\,]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f_2(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f_2(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f_1(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f_2(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

f اشتقاقي على كل من المجالات $]1,+\infty[\,,\,]-1,1[\,,\,]-\infty,-1[$

$$\grave{f}(x) = \begin{cases} \grave{f}_1(x) = -1 + \dfrac{x^2-1-2x(x)}{(x^2-1)^2} & : x < -1 \\ \grave{f}_2(x) = 1 + \dfrac{x^2-1-2x(x)}{(x^2-1)^2} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

$$\grave{f}(x) = \begin{cases} \grave{f}_1(x) = -1 + \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^4+x^2-2}{(x^2-1)^2} & : x < -1 \\ \grave{f}_2(x) = 1 + \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

دراسة إشارة المشتق

$$\grave{f}_1(x) = \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2-1)^2}$$

$\grave{f}_1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^4 + x^2 - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-1)(-2) = -7 < 0$ (مستحيلة الحل)

وبالتالي فإن إشارته توافق إشارة x^4 أي انه سالب.

لاحظ: البسط سالب والمقام موجب فالكسر سالب أي:

$\grave{f}_1(x) < 0$ عندما $x < -1$

$$\grave{f}_2(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$\grave{f}_2(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$

$\grave{f}_2(x) = 0 \quad x^2(x^2-3) = 0$

إما $x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \ : \ f_2(0) = 1$

او $x^2 = 3 \rightarrow$ إما $\boxed{x = \sqrt{3}} \ : f_2(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$

او $x = -\sqrt{3} \notin D_{f_2}$

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\grave{f}_2(x)$	▨	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

2. **ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.**

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$-$	▨	$-$	0	$-$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	▨	$+\infty$ ↘	1	↘ $-\infty$	▨	$+\infty$ ↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$	↗	$+\infty$

3. a) **تحقق من ان المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = x + 1$, $y = -x - 1$ هما بالترتيب مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين.**

$$f_1(x) - y_{\Delta_1} = -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} - (-x-1)$$
$$= \frac{x}{x^2-1}$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left(f_1(x) - y_{\Delta_1}\right) = 0$$

Δ_1 مقارب مائل للخط C عند $-\infty$

$$f_2(x) - y_{\Delta_2} = x + 1 + \frac{x}{x^2-1} - (x+1)$$
$$= \frac{x}{x^2-1}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \left(f_2(x) - y_{\Delta_2}\right) = 0$$

Δ_2 مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: **بالعودة لقاعدة الربط الأساسية نجد:**

$$f(x) - y = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad : \quad \underbrace{(0,1)}_{\text{نقطة مشتركة}}$$

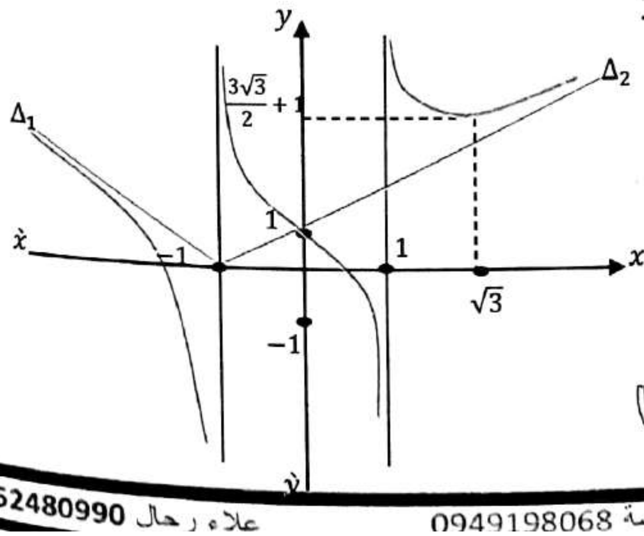
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	‖ $+$	0 $-$	‖ $+$	
الوضع النسبي	C تحت Δ_1	C فوق Δ_2	C تحت Δ_2	C فوق Δ_2	

b) **اوجد معادلة للمماس T للخط البياني C في النقطة A منه علماً ان فاصلة A تساوي الصفر.**

$A(0,1)$, $\grave{f}_2(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow m = \grave{f}_2(0) = 0$

معادلة المماس T هي: $y - 1 = 0(x - 0)$ أي $y = 1$

c) **ارسم T للخط البياني C ثم ارسم C**



4. اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في المجال $]-1,1[$ واوجد مجالاً طوله 10^{-1} تنتمي إليه α

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-1,1[$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-1^+} f(x) \times \lim_{x\to1^-} f(x) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

لدينا:

$$\left.\begin{array}{l}f(0.6) = 0.66 \quad > 0 \\ f(0.8) = -0.42 < 0\end{array}\right\} \Rightarrow f(0.6) \times f(0.8) < 0$$

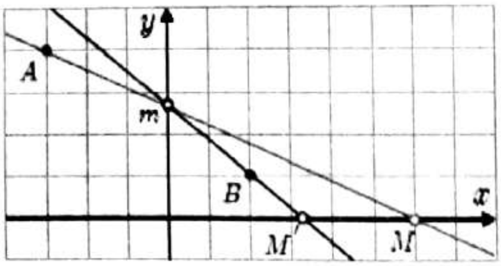
إذاً $\alpha \in]0.6,0.8[$ الذي طوله 10^{-1}

---

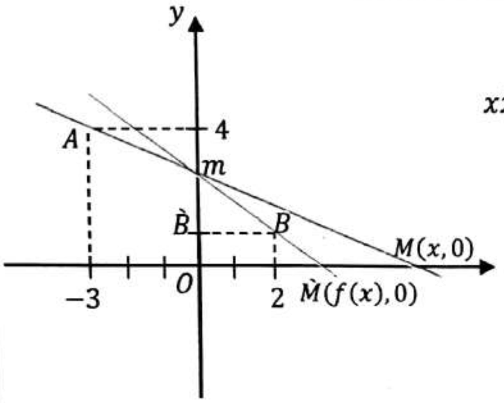
38) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقطتان الثابتتان $B(2,1), A(-3,4)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$ نقرن بالنقطة M النقطة $\grave{M}$ التي نعرفها كما يلي:

- ♦ يقطع المستقيم AM المحور $(O,\vec{j})$ في m
- ♦ يقطع المستقيم BM المحور $(O,\vec{i})$ في $\grave{M}$

نرمز إلى فاصلة $\grave{M}$ بالرمز $f(x)$



1. بدون حساب خمن نهاية f عند $+\infty$



نلاحظ أنه عندما $x \to +\infty$ فإن المستقيم AM سيوازي تقريباً المحور $x\grave{x}$ فتتحرك النقطة m لتستقر في النقطة $(0,4)$

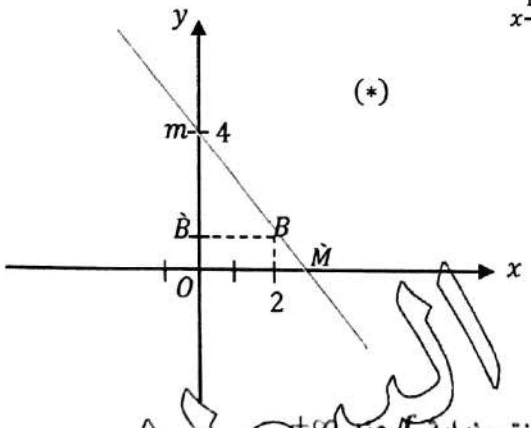
ومن المثلث القائم $Om\grave{M}$ في الشكل $(*)$ نستفيد من نسبة التشابه

$$\frac{O\grave{M}}{\grave{B}B} = \frac{Om}{\grave{B}m} \Rightarrow \frac{O\grave{M}}{\grave{B}B} = \frac{4}{3}$$

لكن $\grave{B}B = 2$ ومنه :

$$\frac{O\grave{M}}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow O\grave{M} = \frac{8}{3}$$

وبما أن فاصلة $\grave{M}$ يمثلها $f(x)$ يمكننا أن نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{8}{3}$



2. اثبت ان $f(x) = \frac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$

لنفرض أن a ميل المستقيم (AM) فتكون معادلته: $y - 4 = a(x+3)$ ومنه $y = a(x+3) + 4$

نقاطع المستقيم مع محور التراتيب بوضع $x = 0$ فتنتج النقطة $m(0,3a+4)$

نقاطع المستقيم مع محور الفواصل بوضع $y = 0$ فتنتج النقطة $M\left(-\left(3+\frac{4}{a}\right),0\right)$

ميل المستقيم (Bm) حيث $B(2,1)$, $m(0,3a+4)$

$$\text{ميل}_{(Bm)} = \frac{3a+4-1}{0-2} = \frac{-3}{2}(a+1)$$

معادلة المستقيم (Bm)

$$y-1 = \frac{-3}{2}(a+1)(x-2)$$

يقطع المستقيم (Bm) محور الفواصل في النقطة $\grave{M}$

بوضع $y=0$ نجد ان فاصلة $\grave{M}$:

$$0-1 = \frac{-3}{2}(a+1)x + 3(a+1)$$

$$\frac{3}{2}(a+1)x = 3a+4 \implies x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3a+4}{a+1} \quad ; a \neq -1$$

$f(x)$

اي $\grave{M}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3a+4}{a+1}, 0\right)$

لدينا من فاصلة النقطة M :

$$x = -\left(3+\frac{4}{a}\right) \implies ax = -3a-4 \implies a(x+3) = -4 \implies a = \frac{-4}{x+3} \quad ; x \neq -3$$

نعوض قيمة a في فاصلة النقطة $\grave{M}$ التي تمثل $f(x)$

$$f(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3a+4}{a+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\left(\frac{-4}{x+3}\right)+4}{\frac{-4}{x+3}+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4x}{x-1} = \frac{8x}{3x-3} \quad ; x \neq -3, x \neq 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{8}{3}$$

3. a) ادرس نهاية f عند $-\infty$ ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{8}{3} \implies$ المستقيم $y = \frac{8}{3}$ مقارب افقي يوازي المحور $x\grave{x}$

b) ادرس نهاية f عند $x=1$ ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \implies$ المستقيم $x=1$ مقارب شاقولي يوازي المحور $y\grave{y}$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \implies$ المستقيم $x=1$ مقارب شاقولي يوازي المحور $y\grave{y}$

4. عندما $x=-3$ يكون المستقيم AM موازياً $(O,\vec{j})$ وتكون m "في اللانهاية" يمكن ان نقول في هذه الحالة ان Bm يوازي $(O,\vec{j})$ وان $\grave{M}$ تقع في $(2,0)$ نعرف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 , $g(-3)=2$ لماذا يكون g مستمراً عند -3

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq -3, x \neq 1 \\ 2 & : x = -3 \end{cases}$$

ونلاحظ ان $\lim_{x\to-3} g(x) = \lim_{x\to-3} f(x) = 2 = g(-3)$

وبالتالي يمكننا ان نكتب أن g مستمر عند $x=-3$

****

قواعد الاشتقاق:

مشتقات بعض التوابع المألوفة:

التابع المشتق	التابع
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = 0$	$\boxed{1}$ $f(x) = a$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = a$	$\boxed{2}$ $f(x) = ax + b \quad ; \; a \neq 0$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = n.x^{n-1}$	$\boxed{3}$ $f(x) = x^n$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{1}{x^n}$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = n.[g(x)]^{n-1}.\grave{g}(x)$	$\boxed{5}$ $f(x) = [g(x)]^n$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \grave{g}(x).\hbar(x) + \grave{\hbar}(x).g(x)$	$\boxed{6}$ $f(x) = g(x).\hbar(x)$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \frac{\grave{g}(x).\hbar(x) - \grave{\hbar}(x).g(x)}{\hbar^2(x)}$	$\boxed{7}$ $f(x) = \frac{g(x)}{\hbar(x)}$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \frac{\grave{g}(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$\boxed{8}$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \cos x$	$\boxed{9}$ $f(x) = \sin x$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = -\sin x$	$\boxed{10}$ $f(x) = \cos x$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\boxed{11}$ $f(x) = \tan x$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\boxed{12}$ $f(x) = \cot x$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \grave{g}(x)\cos\big(g(x)\big)$	$\boxed{13}$ $f(x) = \sin\big(g(x)\big)$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = -\grave{g}(x)\sin\big(g(x)\big)$	$\boxed{14}$ $f(x) = \cos\big(g(x)\big)$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \grave{g}(x)\big[1 + \tan^2\big(g(x)\big)\big]$	$\boxed{15}$ $f(x) = \tan\big(g(x)\big)$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = -\grave{g}(x)\big[1 + \cot^2\big(g(x)\big)\big]$	$\boxed{16}$ $f(x) = \cot\big(g(x)\big)$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = e^x$	$\boxed{17}$ $f(x) = e^x$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \grave{g}(x).e^{g(x)}$	$\boxed{18}$ $f(x) = e^{g(x)}$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \frac{1}{x}$	$\boxed{19}$ $f(x) = \ln x$
$\Rightarrow \quad \grave{f}(x) = \frac{\grave{g}(x)}{g(x)}$	$\boxed{20}$ $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$

تعريف العدد المشتق والتابع المشتق:

بفرض f تابع معرف على مجال ما I ولتكن x_0 نقطة من I نصطنع التابع g المعرف على $I \setminus \{x_0\}$ وفق : $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ عندها نميز ما يلي :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow x = x_0$ غير قابل للاشتقاق عند f

ويكون عندها : $x = x_0$ مماس شاقولي للخط البياني C للتابع f.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \in R \quad \Rightarrow x = x_0$ قابل للاشتقاق عند f

ويكون : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \grave{f}(x_0) = m = \ell$

حيث (m) ميل المماس للخط البياني C للتابع f في النقطة التي فاصلتها x_0.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{\overset{>}{x \to x_0}} g(x) = \ell_1$ $\left(m_1 = \ell_1\right.$ ميل نصف المماس لـ f في النقطة التي فاصلتها $\left.x_0\right)$

$\lim\limits_{\overset{<}{x \to x_0}} g(x) = \ell_2$ $(m_2 = \ell_2$ ميل نصف المماس لـ f في النقطة التي فاصلتها $x_0)$

$\ell_1 \neq \ell_2 \quad \Longrightarrow$ غير قابل للاشتقاق f

تمرين: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$ خطه البياني C_f:

1) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين للخط C_f في النقطة $A(0,2)$.

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار للخط C_f في النقطة $A(0,2)$.

الحل: نصطنع التابع $g(x)$ المعرف على $R \setminus \{0\}$ وفق :

$\boxed{1}$ $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x} = \frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x}$ $\quad : x > 0$

$$= \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x} = \frac{-x}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$$

$$\lim_{\overset{>}{x \to 0}} g(x) = -1 = \grave{f}(0) = m$$

معادلة نصف المماس من اليمين: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow T_1 \colon y - 2 = -1(x - 0)$

$T_1\colon \; y = -x + 2$

$\boxed{2}$ $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x} = \frac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x}$ $\quad : x < 0$

$$= \frac{\frac{x+2+2x-2}{-x+1}}{x} = \frac{3x}{x(-x+1)} = \frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{\overset{<}{x \to 0}} g(x) = 3 = \grave{f}(0) = m$$

معادلة نصف المماس من اليسار: $T_2 \colon y - 2 = 3(x - 0)$

$T_2\colon \; y = 3x + 2$

مبرهنة: بفرض v, u تابعين اشتقاقيين على مجال ما D و ليكن k عدد حقيقي عندئذ يكون كل من $k.u$, $u+v$, $u.v$ اشتقاقياً على D ويكون :

$$(u.v)^{\grave{}} = \grave{u}.v + \grave{v}.u \quad , \quad (u+v)^{\grave{}} = \grave{u} + \grave{v} \quad , \quad (k.u)^{\grave{}} = k.\grave{u}$$

وعندما $v \neq 0$ يكون :

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{\grave{}} = \frac{\grave{u}\,v - \grave{v}\,u}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{1}{v}\right)^{\grave{}} = \frac{-\grave{v}}{v^2}$$

ملاحظة: من الممكن ان يكون الجداء $u.v$ اشتقاقياً عند نقطة دون ان يكون u أو v اشتقاقياً في تلك النقطة.

مثال توضيحي:

$$f(x) = x.\sqrt{x} \quad : \quad D = [0, +\infty[$$

نلاحظ ان f جداء ضرب التابعين:

$x \to x$ اشتقاقي على R

$x \to \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$

عندها f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ لكن لندرس قابلية اشتقاق f عند الصفر:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x} - 0}{x} = \sqrt{x}$$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \Rightarrow$ f اشتقاقي عند الصفر

* * *

معادلة مماس لخط بياني:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

لكتابة معادلة مماس يلزمنا نقطة (x_0, y_0) وميل m والجدول الآتي يبين كيفية إيجاد معادلة مماس في أي حالة:

المعلومات المعطاة	المعلومات المستنتجة
(1) x_0	$\grave{f}(x_0) = m$ $\xrightarrow{\text{نشتق}}$ نعوض في التابع لنجد y_0
(2) y_0	$\grave{f}(x_0) = m$ $\xrightarrow{\text{نشتق}}$ نعوض في التابع لنجد x_0
(3) m	نعوض في التابع لنجد y_0 $\rightarrow$ نجعل $\grave{f}(x) = m$ لنجد x_0
المماس يوازي مستقيم معلوم d	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ ميل المماس = ميل المستقيم d
المماس يعامد مستقيم معلوم d	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ ميل المماس = $\frac{-1}{m_d}$
المماس أفقي	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ $m = 0$
المماس في القيمة المحلية الصغرى أو الكبرى	معادلته $y = y_0$ $\rightarrow$ $m = 0$
مماس يمر بنقطتين A, B	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

تطبيقات الاشتقاق:

مبرهنة: f تابع اشتقاقي على المجال I و تابعه المشتق $\grave{f}$ عندئذ:

- إذا كان $\grave{f} \geq 0$ على I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I ، كان f متزايداً تماماً على I.
- إذا كان $\grave{f} \leq 0$ على I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I ، كان f متناقصاً تماماً على I.

القيم الحدية:

بفرض f تابع معرف على مجال ما I ، لتكن c نقطة من I عندئذ:

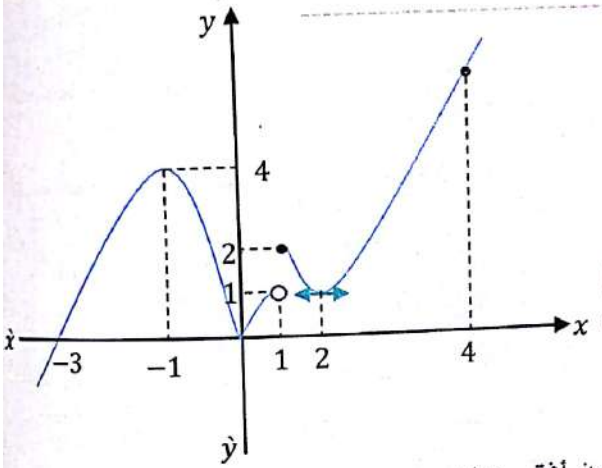
- نقول إن القيمة $f(c) = M$ قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند c إذا وجد مجال مفتوح J يضم النقطة c بحيث اياً يكن $x \in (I \cap J)$ فإن $f(x) \leq f(c)$
- نقول إن القيمة $f(c) = m$ قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند c إذا وجد مجال مفتوح J يضم النقطة c بحيث اياً يكن $x \in (I \cap J)$ فإن $f(x) \geq f(c)$
- نقول إن القيمة $f(c)$ قيمة حدية للتابع f إذا كانت قيمة كبرى محلياً أو صغرى محلياً.

مبرهنة: ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال مفتوح I ولتكن c نقطة من I :

- إذا كانت $f(c)$ قيمة كبرى (أو صغرى) محلياً للتابع f كان $\grave{f}(c) = 0$
- إذا انعدم $\grave{f}$ عند c و غيّر إشارته عندها، كانت $f(c)$ قيمة حدية (كبرى أو صغرى) محلياً للتابع f.
- **ملاحظة:** المماس في القيمة الحدية يكون مماساً أفقياً.

مبرهنة: ليكن f تابعاً اشـتقاقياً على مجال $I = [a, b]$ ولنفترض $\grave{f}(x) \geq 0$ على I ولا ينعدم على اي مجال جزئي من I عندئذ اياً كانت $k \in [f(a) , f(b)]$ كان للمعادلة $f(x) = k$ حل وحيد في المجال $I = [a, b]$

تمرين: نجد جانباً خط بياني لتابع f و المطلوب :



1. **اوجد مجموعة تعريف التابع f و مستقره الفعلي.**
   - بإسقاط الشكل على محور $x\grave{x}$ نجد $D = R$
   - بإسقاط الشكل على محور $y\grave{y}$ نجد $f(R) = R$
2. **اوجد $f(1)$ ، $f(0)$، $f(-3)$، $\grave{f}(2)$، $\grave{f}(-1)$، $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x)$**

   $f(-3) = 0$ ، $f(0) = 0$ ، $f(1) = 2$

   $\grave{f}(2) = 0$ لأن المماس أفقي ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = 1$

   $\grave{f}(-1) = 0$ لأنها قيمة محلية كبرى فالمماس عندها يكون أفقي ميله معدوم .
3. **هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى او صغرى للتابع f ، علل ذلك ؟**

   نعم لأنه يوجد مجال مفتوح J يحوي (1) بحيث اياً يكن $x \in (R \cap J)$ فإن $f(x) \leq f(1)$
4. **ما هي القيم الحدية للتابع f**

   $f(2) = 1$ قيمة محلية صغرى ؛ $f(1) = 2$ قيمة محلية كبرى

   $f(0) = 0$ قيمة محلية صغرى ، $f(-1) = 4$ قيمة محلية كبرى
5. **ايكون التابع f اشتقاقي عند $x = 1$ ، علل إجابتك؟**

   f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأنه غير مستمر عند $x = 1$ و ذلك لأن $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) \neq f(1)$
6. **ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ ، علل إجابتك ؟**

   للمعادلة $f(x) = 2$ اربعة حلول و ذلك لأن المستقيم $f(x) = 2$ يقطع C في اربع نقاط.
7. **اوجد صورة المجال $[-3, 0]$**

   $f([-3,0]) = [0,4]$
8. **اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 2$**

   بما أن المماس أفقي في القيمة المحلية فإن معادلته $y = 1$

تدريب صفحة 84:

1) **فيما يأتي C_f هو الخط البياني للتابع f . اكتب معادلة المماس C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها (4).**

$\boxed{1}\ f(x) = \frac{1}{x}$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(4, \frac{1}{4}\right)$

f اشتقاقي عند $x = 4$:

$\grave{f}(x) = \frac{-1}{x^2}$

$\grave{f}(4) = m = \frac{-1}{16}$

$y - \frac{1}{4} = \frac{-1}{16}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{-1}{16}x + \frac{1}{2}$

$\boxed{2}\ f(x) = x^2$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 16 \Rightarrow (4,16)$

f اشتقاقي عند $x = 4$:

$\grave{f}(x) = 2x$

$\grave{f}(4) = m = 2(4) = 8$

$y - 16 = 8(x - 4)$

$\Rightarrow y = 8x - 16$

$\boxed{3}\ f(x) = \sqrt{2x + 1}$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 3 \Rightarrow (4,3)$

f اشتقاقي عند $x = 4$:

$\grave{f}(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$\grave{f}(4) = m = \frac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{1}{3}$

$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

$\boxed{4}\ f(x) = \frac{1}{x + 1}$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{5} \Rightarrow \left(4, \frac{1}{5}\right)$

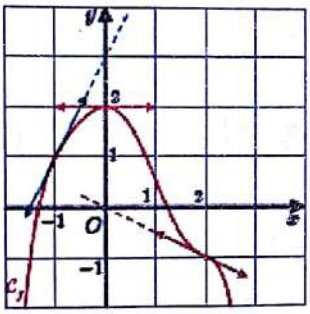
f اشتقاقي عند $x = 4$:

$\grave{f}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

$\grave{f}(4) = m = \frac{-1}{25}$

$y - \frac{1}{5} = \frac{-1}{25}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{-1}{25}x + \frac{9}{25}$

2) **في الشكل المرافق C_f هو الخط البياني لتابع f تأمل الشكل واجب عن الأسئلة الآتية:**



1. **عين كلاً من $f(0), f(2), f(-1), \grave{f}(0), \grave{f}(2), \grave{f}(-1)$**

$f(0) = 2 \quad , \quad \grave{f}(0) = 0$

$f(2) = -1 \quad , \quad \grave{f}(2) = \frac{-1-0}{2-0} = \frac{-1}{2} \ : \ (0,0), (2,-1)$

$f(-1) = 1 \quad , \quad \grave{f}(-1) = \frac{1-3}{-1-0} = 2 \ : \ (-1,1), (0,3)$

2. **ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$؟ اعط عددين صحيحين متتاليين يحصران كلاً من حلول المعادلة $f(x) = 0$.**

للمعادلة $f(x) = 0$ حلين مختلفين. أحدهما $x_1 \in]1,2[$ والآخر $x_2 \in]-2,-1[$

3) **فيما يأتي احسب التابع المشتق للتابع f مبيناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها.**

$\boxed{1}\ f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{3}$

$D_{\grave{f}} = R$:

$\grave{f}(x) = 2x^2 - x + 1$

$\boxed{2}\ f(x)=\frac{x^2+3x-1}{4}=\frac{1}{4}(x^2+3x-1)$

$\acute{f}(x)=\frac{1}{4}(2x+3)=\frac{2x+3}{4}$: $D_{\acute{f}}=R$

$\boxed{3}\ f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$

$\acute{f}(x)=4x^3-2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.x\right)=4x^3-2\sqrt{x}-\sqrt{x}=4x^3-3\sqrt{x}$: $D_{\acute{f}}=[0,+\infty[$

$\boxed{4}\ f(x)=\frac{2}{x+1}-x$

$\acute{f}(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}-1$: $D_{\acute{f}}=R\backslash\{-1\}$

$\boxed{5}\ f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

$\acute{f}(x)=\frac{1(x^2-4)-2x(x-1)}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2+2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$: $D_{\acute{f}}=R\backslash\{-2,2\}$

$\boxed{6}\ f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

$\acute{f}(x)=\frac{1(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{x}=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$: $D_{\acute{f}}=]0,+\infty[$

$\boxed{7}\ f(x)=x\cos x$

$\acute{f}(x)=\cos x+(-\sin x)\,x=\cos x-x\sin x$: $D_{\acute{f}}=R$

$\boxed{8}\ f(x)=\frac{\sin x}{x}$

$\acute{f}(x)=\frac{(\cos x)\,(x)-\ 1(\sin x)}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$: $D_{\acute{f}}=R^*$

$\boxed{9}\ f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\acute{f}(x)=\frac{(\cos x)\,(\cos x)-\ (-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$: $D_{\acute{f}}=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k; k\in Z\right\}$

$\boxed{10}\ f(x)=\sin x\cos x$

$\acute{f}(x)=(\cos x)\,(\cos x)+\ (-\sin x)(\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$: $D_{\acute{f}}=R$

$\boxed{11}\ f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

$\acute{f}(x)=\frac{(-\sin x)(\sin x-1)-\cos x(\cos x)}{(\sin x-1)^2}=\frac{-\sin^2 x+\sin x-\cos^2 x}{(\sin x-1)^2}$

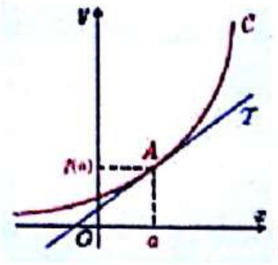
$=\frac{-(\sin^2 x+\ \cos^2 x)+\sin x}{(\sin x-1)^2}=\frac{-1+\sin x}{(\sin x-1)^2}=\frac{1}{\sin x-1}$: $D_{\acute{f}}=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in Z\right\}$

$\boxed{12}\ f(x)=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$

$\acute{f}(x)=\frac{(\cos x)(2+\cos x)-(-\sin x)(1+\sin x)}{(2+\cos x)^2}$

$=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+\sin x+1}{(2+\cos x)^2}$: $D_{\acute{f}}=R$

المماس والتقريب التآلفي:



ليكن C الخط البياني للتابع f الاشتقاقي عند النقطة a

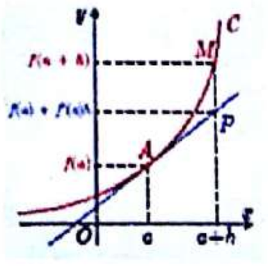
وليكن T المماس لمنحني C في النقطة $A(a, f(a))$

إن T هو المستقيم المار بالنقطة A وميله يساوي $m = \grave{f}(a)$

معادلته تكتب بإحدى الشكلين:

$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$ او $\boxed{y = \grave{f}(a)(x-a) + f(a)}$

التقريب التآلفي:



يظهر الرسم ان المستقيم T يكون قريباً من المنحني C في جوار النقطة A فإذا اردنا حساب قيمة عددية لنقطة تنتمي للخط C يمكن حسابها عن طريق المستقيم T في جوار تلك النقطة $(a+h)$ ونكتب القانون:

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + \grave{f}(a).h}$$

وذلك عندما h قريبة من الصفر.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{4.2}$

بفرض $f(x) = \sqrt{x}$ المعرف والمستمر على $[0,+\infty[$ والاشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\overbrace{a = 4 \qquad\qquad\qquad \hbar = 0.2 = \frac{2}{10}}^{a+\hbar = 4.2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f(a) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$\grave{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow \grave{f}(a) = \grave{f}(4) = \frac{1}{4}$$

f اشتقاقي عند $a = 4$:

حسب قانون التقريب الخطي:

$$f(a+\hbar) \approx f(a) + \grave{f}(a).\hbar$$

$$\sqrt{4.2} \approx 2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{10}\right) \Rightarrow \sqrt{4.2} \approx \frac{41}{20}$$

مثال: ليكن التابع $f(x) = \sin x$ اكتب عبارة التقريب الخطي عند $a = 0$ بدلالة $\hbar$

f اشتقاقي على R

$$\overbrace{a = 0 \qquad\qquad\qquad \hbar}^{a+\hbar = 0}$$

$$f(x) = \sin x \longrightarrow f(a) = f(0) = \sin(0) = 0$$

$$\grave{f}(x) = \cos x \longrightarrow \grave{f}(a) = \grave{f}(0) = \cos(0) = 1$$

f اشتقاقي عند $a = 0$:

حسب قانون التقريب الخطي:

$$f(a+\hbar) \approx f(a) + \grave{f}(a).\hbar$$

$$\sin(0+\hbar) \approx 0 + 1.\hbar \Longrightarrow \sin\hbar \approx \hbar$$

من أجل قيم صغيرة للعدد $\hbar$

تمرين: ليكن P القطع المكافئ الذي معادلته $f(x)=x^2$ بفرض B,A نقطتان من القطع P فاصلتاهما على الترتيب $1,-3$ ولتكن D نقطة من القطع P فاصلتها $x_D=\frac{x_A+x_B}{2}$ اثبت ان المماس T المار بالنقطة D للقطع P يوازي AB

$$\left.\begin{matrix} A(1,f(1))=(1,1) \\ B(-3,f(-3))=(-3,9) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$$

يكون المماس T في D يوازي AB إذا كان لهما نفس الميل:

$$\left.\begin{matrix} m_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{1-9}{1+3}=\dfrac{-8}{4}=-2 \\ f \text{ على اشتقاقي } R \\ m_D=\acute{f}(x_D): \quad \acute{f}(x)=2x \\ \acute{f}(-1)=-2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow m_D=m_{AB}$$

ومنه T و AB متوازيان.

تمرين: ليكن التابع $f(x)=\tan x$ خطه البياني C .

1. اوجد مجموعة تعريف f ثم اثبت ان f تابع فردي واثبت ان دوره π
2. ادرس التابع f وارسم خطه البياني C

◆ $\boxed{1}$ $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$معرف على R ما عدا القيم التي تعدم المقام ومنه:

$$\cos x=0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad : k\in Z \Longrightarrow \boxed{D=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\ ; k\in Z\right\}}$$

◆ لإثبات ان f تابع فردي يجب تحقق الشرطين:

$\boxed{1}\ \forall x\in D \longrightarrow -x\in D \qquad \boxed{2}\ f(-x)=-f(x)$

$$\boxed{1}\ \forall x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k: k\in Z\right\} \Longrightarrow -x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k: k\in Z\right\}$$

$$\boxed{2}\ f(-x)=\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x=-f(x)$$

ومنه f تابع فردي خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ O

◆ لإثبات أن f دوري دوره π يجب أن يكون $x\in D \Longrightarrow x+\pi\in D$

$$f(x+\pi)=\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=f(x)$$

فالتابع دوري ودوره π

$\boxed{2}$ بما ان f تابع دوري دوره π يكفي دراسة التابع على مجال طوله π مثل $I=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

ولأن f فردي يكفي دراسة f على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ونكمل الدراسة بالإستفادة من التناظر المركزي والانسحاب.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

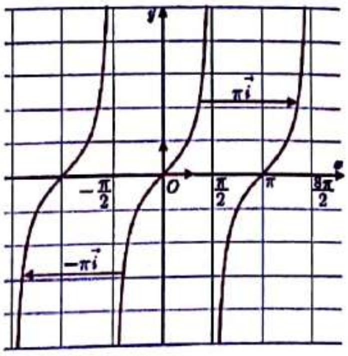
$f(0)=\tan 0=0$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ <}} f(x)=\tan\frac{\pi}{2}=+\infty$$

ومنه $x=\frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب شاقولي للخط C عند $+\infty$ ، و C يقع على يسار المقارب

$$\grave{f}(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

x	0 $\quad\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$\grave{f}(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$



* * * * * * * * * * * * * * *

طرق تعيين الثوابت

1) تعيين قيمة a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً مثلاً عند $x = 1$ أي $\grave{f}(1) = 0$.

2) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون للتابع f قيمة حدية محلية مثلاً مساوية 4 عند $x = 3$ أي:

$$\overbrace{f(3) = 4 \qquad\qquad \grave{f}(3) = 0}$$

دائماً نفس الفاصلة $\qquad$ دائماً

3) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون C الخط البياني للتابع f يقبل مماساً أفقياً في النقطة مثلاً $A(1,2)$

$$\overbrace{f(1) = 2 \qquad\qquad \grave{f}(1) = 0}$$

(المماس أفقي ميله 0)

4) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون مستقيم ما Δ مماس للخط البياني C للتابع f في نقطة منه فاصلتها مثلاً $x = 0$

نوجد m_Δ

فيكون $\grave{f}(0) = m_\Delta$

نعوض $x = 0$ في Δ فنحصل على ترتيب النقطة y_0

$(0, y_0)$

عندها $f(0) = y_0$

5) تعيين قيمة كلاً من a و b ليكون Δ المار بالنقطتين A و B مماساً للخط C للتابع f في النقطة A

نوجد $m_\Delta = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

ثم $\grave{f}(x_A) = m_\Delta$

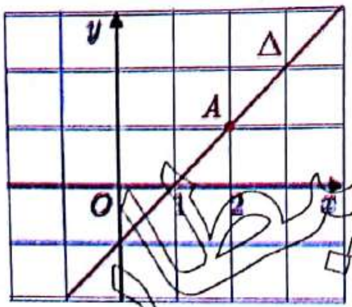
$f(x_A) = y_A$

* * * * * * * * * * * * * * *

تمارين صفحة 89:

1) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2, 4]$ وفق: $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ عين a, b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A

تحقق ان التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.



Δ يمر بالنقطتين (2,1) و (1,0) فإن ميله: $\frac{1}{2-1}$

Δ مماس للخط البياني C في $A(2,1)$ اي :

$$f(2) = 1$$

$$\frac{a(2)+b}{(2)^2+1} = 1$$

$$\frac{2a+b}{5} = 1$$

$$\boxed{2a+b=5} \quad \boxed{\boxed{1}}$$

$$\acute{f}(2) = m_\Delta = 1$$

f اشتقاقي عند (2)

$$\acute{f}(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$1 = \frac{a(4+1) - 4(2a+b)}{(4+1)^2}$$

$$1 = \frac{5a - 8a - 4b}{25}$$

$$\boxed{-3a-4b=25} \quad \boxed{\boxed{2}}$$

بالحل المشترك لـ $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$

$$\begin{cases} -3a - 4b = 25 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \quad (\text{نضرب بـ } 4) \quad \Rightarrow \quad + \begin{cases} -3a - 4b = 25 \\ \underline{8a + 4b = 20} \end{cases}$$

$$5a = 45 \Rightarrow \boxed{a = 9}$$

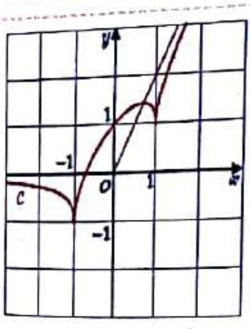
نعوض في $\boxed{1}$ فنجد $\boxed{b=-13}$

إذاً $f(x) = \dfrac{9x-13}{x^2+1}$

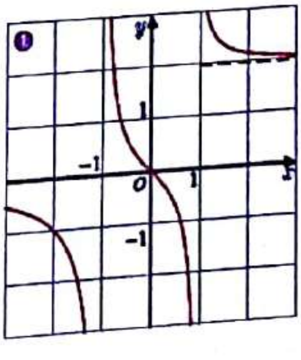
التحقق من صحة الحل:

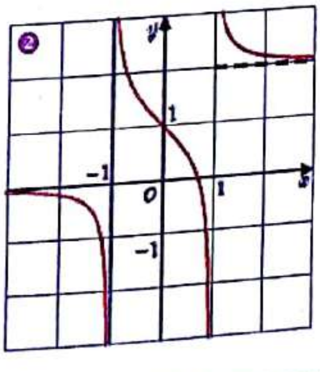
$\acute{f}(x) = \dfrac{9(x^2+1) - 2x(9x-13)}{(x^2+1)^2}$ $\acute{f}(2) = \dfrac{9(5)-4(5)}{25} = \dfrac{45-20}{25} = 1$ محققة	$f(2) = \dfrac{9(2)-13}{(2)^2+1} = \dfrac{5}{5} = 1$ محققة

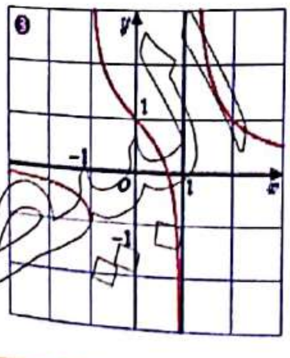
2) في الشكل المجاور C هو الخط البياني لتابع f معرف على R واشتقاقي على $R\backslash\{-1,1\}$



اي الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثل الخط البياني للتابع المشتق $\acute{f}$ ؟







♦ نلاحظ من الخط البياني للتابع f ان هناك مماس افقي في نقطة $]0,1[\ni x_0$ اي $f'(x_0) = 0$

ومنه الخط البياني للتابع f' يجب ان يقطع $x\grave{x}$ في نقطة $]0,1[\ni x_0$ **فالشكل 1 مرفوض.**

♦ نلاحظ ان الخط البياني للتابع f يملك مقارب مائل معادلته $y = 2x$ عند الـــــ $+\infty$ (حيث ان المقارب المائل يمر بالنقطتين $(0,0)$, $(1,2)$) اي:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'(x) - 2\right) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - y_\Delta\right) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - 2x\right) = 0$$

اي للخط البياني للتابع f' مقارب افقي $y = 2$ في جوار $+\infty$ **فالشكل 3 مرفوض**، إذاً الخط البياني للتابع f' **هو الشكل 2**

---

3) **ليكن f التـابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - x^2 + ax$ عين العدد الحقيقي a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً عند $x = 1$**

التابع f اشتقاقي على R ومشتقه $f'(x) = 3x^2 - 2x + a$ و $f(1)$ قيمة حدية عندئذ:

$f'(1) = 0$ قيمة حدية

$$3 - 2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - x$$

---

4) **ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث b, a عددان حقيقيان نهدف إلى البحث عن قيم b, a بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:**

- ♦ **$f(-1)$ قيمة حدية محلياً للتابع.**
- ♦ **هذه القيمة الحدية محلياً معدومة.**

1. لماذا $f'(-1) = 0$, $f(-1) = 0$

$f'(-1) = 0$ لأن المشتق عند القيمة الحدية ينعدم.

$f(-1) = 0$ لأن القيمة الحدية معدومة فرضاً

2. عين b, a ثم تحقق ان التابع الذي حصلت عليه موافق لشروط المسألة.

$f(-1) = 0$ $\frac{a - b + 1}{-2} = 0$ $\boxed{a - b + 1 = 0}$ $\boxed{1}$	$f'(-1) = 0$ f اشتقاقي على $R \backslash \{1\}$ $f'(x) = \frac{(2ax + b)(x - 1) - 1(ax^2 + bx + 1)}{(x - 1)^2}$ $0 = \frac{(-2a + b)(-2) - (a - b + 1)}{4}$ $0 = 4a - 2b - a + b - 1$ $\boxed{3a - b - 1 = 0}$ $\boxed{2}$

$$-\begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ 3a - b - 1 = 0 \end{cases}$$
$$-2a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

نعوض في $\boxed{1}$ نجد: $1 - b + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

التحقق من صحة الحل:

$f(-1) = \frac{1 - 2 + 1}{-2} = 0$ محققة	$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x - 1) - 1(x^2 + 2x + 1)}{(x - 1)^2}$ $f'(-1) = \frac{(0)(-2) - 1(1 - 2 + 1)}{4} = 0$ محققة

5) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x + 5$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\begin{matrix} 3(x^2 - 1) = 0 \\ 3(x - 1)(x + 1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad x = 1 \quad \Rightarrow f(1) = 3 \\ \text{أو} \quad x = -1 \quad \Rightarrow f(-1) = 7 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

2. تحقق ان للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً يقع بين -3 , -2 احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

f مستمر في المجال $[-1, +\infty[$, $f([-1, +\infty[) = [3, +\infty[$

وبما أن $0 \notin [3, +\infty[$ فليس للمعادلة حل في المجال $[-1, +\infty[$

$$\begin{cases} f \text{ مستمر ومتزايد تماماً في المجال }]-\infty, -1[\\ 0 \in f(]-\infty, -1[) =]-\infty, 7[\end{cases}$$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً α في المجال $]-\infty, -1[$

$$\begin{cases} \alpha \in]-\infty, -1[\quad , \quad f(\alpha) = 0 \text{ , } \alpha \text{ وحيد} \\ \text{التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال } [-3, -2] \\ f(-2) = 3 , f(-3) = -13 \ : f(-2).f(-3) < 0 \end{cases}$$ ⇐ للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-3, -2]$

ونلاحظ بالتجريب ان: $f(-2.3) = -0.26 , f(-2.2) = 0.9 \Rightarrow f(-2.3).f(-2.2) < 0 \Rightarrow \alpha \in]-2.3 , -2.2[$

اشتقاق تابع مركب

مبرهنة: ليكن g تابعاً اشتقاقياً على مجال J وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولنفترض انه أياً كان $x \in I$ كان $u(x) \in J$ عندئذ التابع $f(x) = g[u(x)]$ اشتقاقياً على I أياً كانت $x \in I$ ونكتب:

$$\boxed{f'(x) = u'(x).g'[u(x)]}$$

مثال: احسب التابع المشتق لكل من التوابع الآتية :

- ◆ $f(x) = g[ax+b] \Rightarrow \grave{f}(x) = a.\dot{g}[ax+b]$
- ◆ $f(x) = (3x^2-x)^4 \Rightarrow \grave{f}(x) = 4(3x^2-x)^3(6x-1)$
- ◆ $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow \grave{f}(x) = 2x\cos(x^2)$
- ◆ $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \grave{f}(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- ◆ $f(x) = \sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \grave{f}(x) = 3\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)$

تمرين: **اوجد مشتق التابع $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$ مبيناً مجموعة تعريف اشتقاقه.**

بما أن f معرف على R لأن $x^2+2x+3>0$ لأن مميزه سالب وإشارة x^2 موجبة فيكون f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

* * *

تمرينات صفحة 94

1) في التمرينات الآتية احسب مشتق f على المجموعة D المشار إليها في كل حالة.

$\boxed{1}$ $f(x) = (2x^3-1)^5 \;,\; D = R$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = 5(2x^3-1)^4(6x^2) = 30x^2(2x^3-1)^4$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3 \;,\; D = R\backslash\{-2\}$ التابع f اشتقاقي على $R\backslash\{-2\}$

$$\grave{f}(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}\right) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right) = \frac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$$

$\boxed{3}$ $f(x) = sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \;,\; D = R$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\boxed{4}$ $f(x) = x\sqrt{x^2+1} \;,\; D = R$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.x = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \;,\; D = R$ التابع f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x+1)}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{2x^2+3x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{\frac{2x^2+2x+2-2x^2-3x-1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{-x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \;,\; D = R\backslash[-1,2[$ التابع f اشتقاقي على $R\backslash]-1,2[$

$$\grave{f}(x) = \frac{\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} = \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} = \frac{-3}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}.(x-2)^2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{-3}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}.(x-2)^4}} = \frac{-3}{2\sqrt{(x+1)(x-2)^3}}$$

7 $f(x) = \sqrt{\cos x}\ , \quad D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\grave{f}(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

8 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\ , \quad D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\grave{f}(x) = \frac{2\sin x\,(\cos x).\cos^3 x - 3\cos^2 x\,(-\sin x).\sin^2 x}{\cos^6 x}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{2\sin x\,.\cos^4 x + 3\cos^2 x\,.\sin^3 x}{\cos^6 x} = \frac{\sin x\,.\cos^2 x\,(2\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^6 x}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{\sin x\,[2(1-\sin^2 x) + 3\sin^2 x]}{\cos^4 x} = \frac{\sin x\,(2 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{\sin x\,(2 + \sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

9 $f(x) = \tan 3x\ , \quad D = \left[0, \frac{\pi}{6}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[$

$$\grave{f}(x) = 3(1 + \tan^2 3x)$$

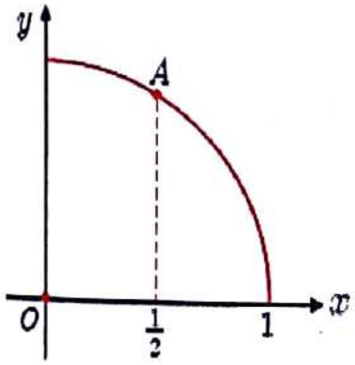
10 $f(x) = \tan^2 x\ , \quad D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

التابع f اشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\grave{f}(x) = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$$

---

2) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, $x^2 + y^2 = 1$ هي معادلة للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1 ، وعليه فإن ربع الدائرة C المرسوم في الشكل المرافق هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = \sqrt{1-x^2}$



1. احسب $\grave{f}(x)$ على المجال $[0,1[$

التابع f اشتقاقي على المجال $[0,1[$ ومنه:

$$\grave{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. استنتج معادلة للمماس T للدائرة C في النقطة A التي تساوي فاصلتها $\frac{1}{2}$

$$x_A = \frac{1}{2}\ , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m_T = \grave{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{T: y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

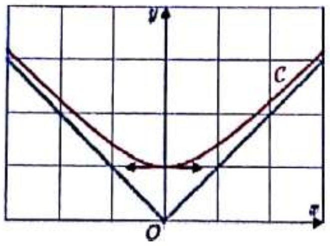
معادلة المماس

3. تحقق ان المستقيم (OA) والمماس T متعامدان.

OA يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O(0,0)$

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = \sqrt{3}$$

و بالتالي المماس T و المستقيم OA متعامدان $\Longrightarrow$ $m_{OA} . m_T = \sqrt{3} . \frac{-1}{\sqrt{3}} = -1$



3) في الشكل المرافق نجد الخط البياني C للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1. تحقق ان f تابع زوجي.

$$\left.\begin{array}{l} -x \in R \text{ فإن } x \in R \text{ أياً كانت} \\ f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{التابع } f \text{ زوجي}$$

2. احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. علل كون المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارباً مائلاً للخط البياني C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Longrightarrow$ $y = x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

4. ادرس تغيرات f ، هل من توافق بين نتائج الدراسة والنتائج التي نستخلصها من الخط البياني.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D = R$, f معرف و اشتقاقي على R

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad , \quad \acute{f}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 : f(0) = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\grave{f}(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

* بما أن f زوجي ويقبل مقارب مائل $y = x$ في جوار$+\infty$ فإنه يقبل مقارب مائل $y = -x$ في جوار $-\infty$

* $f(0) = 1$ قيمة حدية صغرى محلياً.

* وبما أن $\acute{f}(0) = 0$ فهناك مماس أفقي للخط البياني في النقطة $(0,1)$

وجميع ما سبق يوافق الرسم المعطى.

****

المشتقات من المرتبة n (مراتب عليا) :

ليكن f تابع اشتقاقي على مجال I نسمي التابع $\acute{f}$ المشتق الأول نرمز له $f^{(1)}$

$\acute{f}$ تابع اشتقاقي على مجال I نسمي التابع $\acute{\acute{f}}$ المشتق الثاني نرمز له $f^{(2)}$

وهكذا أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ نعرف التابع المشتق من المرتبة n بـ: $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$

تمرين : بفرض f تابع معرف على $R\backslash\{1\}$ وفق الصيغة $f(x)=\frac{1}{1-x}$

اثبت ان المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ حيث $x\neq 1$

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{نشتق}} \acute{f}(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \\ f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x)=\frac{1!}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1=L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n=1$.

- نفرض صحة الخاصة من اجل n أي :

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{صحيحة}$$

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ أي لنثبت :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

لدينا من الفرض :

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

نشتق :

$$\left[f^{(n)}(x)\right]'=\frac{-(n+1)(1-x)^{n}(-1).(n)!}{[(1-x)^{n+1}]^2}=\frac{(n+1)n!(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}}$$

$(n+1)n!=(n+1)!$:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

فالخاصة السابقة صحيحة من أجل كل $n\geq 1$.

* * *

ملاحظات هامة :

- لإثبات الخطوة الأولى ننطلق من :

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \text{نشتقها} \\ f^{(n)}(x) \rightarrow n=1 \text{ نعوض} \end{cases}$$

- لإثبات الخطوة الثالثة ننطلق من الخطوة الثانية و نشتقها.
- $(n+1)!=(n+1)n!$
- $(n!)'=0$
- $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)$
- $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

* * *

البيطار

تمرين: باستخدام تعريف العدد المشتق احسب نهاية التابع g عند القيم الموافقة:

$\boxed{1}$ $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ (0)

$\boxed{2}$ $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ (1)

$\boxed{3}$ $g(x)=\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{4}$ $g(x)=\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

الحل:

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{x+4}-2\ ,\quad f(0)=0$

f اشتقاقي عند $x=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}\quad ,\quad f'(0)=\dfrac{1}{4}$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}\ ,\quad f(1)=0$

f اشتقاقي عند $x=1$

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\quad ,\quad f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\cos x\quad ,\quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

f اشتقاقي عند $x=\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=-\sin x\quad ,\quad f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\tan x-1\ ,\quad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

f اشتقاقي عند $x=\frac{\pi}{4}$

$f'(x)=1+\tan^2 x\quad ,\quad f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=2$$

تمرين: احسب كلاً من:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}$

الحل:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

$$\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$=-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{-2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{-1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}(1)^2=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ $\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}=\frac{4\cos^3 x-3\cos x-\cos x}{x\,.\sin x}=\frac{4\cos^3 x-4\cos x}{x\,.\sin x}$$

$$=\frac{4\cos x\,(\cos^2 x-1)}{x\,.\sin x}=\frac{4\cos x\,(-\sin^2 x)}{x\,.\sin x}=\frac{-4\ \cos x\ .\sin x}{x}=-4\cos x\ .\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}=-4(1)(1)=-4$$

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$

1) a. تحقق ان f معرف على المجال $[0,2]$

التابع f معرف عندما $x(2-x)\geq 0$

$$x(2-x)=0\ \begin{cases} \text{إما}\ \ x=0 \\ \text{أو}\ \ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x(2-x)\geq0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$$\Rightarrow\ D_f=[0,2]$$

b. اثبت أن f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $\acute{f}(x)$ على هذا المجال

التابع f معرف على المجال $[0,2]$ فهو اشتقاقي على المجال $]0,2[$

$$\acute{f}(x)=(1)\left(\sqrt{x(2-x)}\right)+(x)\left(\frac{2-2x}{2\sqrt{x(2-x)}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x(2-x)}}{1}+\frac{x(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{x(2-x)+x-x^2}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{3x-2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

2) ما نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ استنتج أن f اشتقاقي عند الصفر

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x}=\sqrt{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

لنشكل التابع $g(x)$ المعرف على $]0,2]$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

التابع f قابل للاشتقاق عند $x=0$

3) ما نهاية $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ عندما تسعى x إلى 2؟ هل f اشتقاقي عند $x=2$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)-0}{x-2}=\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{-(2-x)}=\frac{x\sqrt{(2-x)(x)}}{-\sqrt{2-x}\,.\sqrt{2-x}}=-\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\infty$$

إذاً التابع f غير قابل للاشتقاق عند $x=2$ من اليسار

4) نرمز إلى الخط البياني للتابع f ، في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ بالرمز C

a. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

$$f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$$

التابع معرف ومستمر على $[0,2]$ واشتقاقي على $]0,2[$

$$f(0) = 0 \ , \ f(2) = 0$$

$$f'(x) = \frac{3x - 2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3x - 2x^2 = 0 \\ x(3-2x) = 0 \end{matrix} \begin{cases} \text{إما} \ \ x = 0 \ : f(0) = 0 \\ \text{او} \ \ x = \frac{3}{2} \ : \ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

b. عيّن مماسي C في النقطتين $A(0,0)$, $B(2,0)$

$$\overbrace{\hspace{6cm}}$$

$B(2,0)$

$f'(2)$ غير معرف

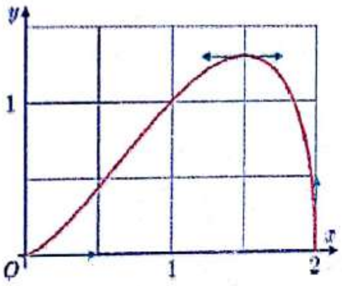
معادلة المماس $\boxed{x = 0}$

$A(0,0)$

$f'(0) = m = 0$

معادلة المماس $\boxed{y = 0}$

c. ارسم مماسي C في A , B ثم ارسم C



تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$

1) ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x = 0$ من اليمين ومن اليسار

نشكل التابع $g(x)$ المعرف على $R\backslash\{0\}$ ونميز حالتين:

نقطة التماس $(0,2)$

$x < 0$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{-x+1} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = 3$$

f اشتقاقي من اليسار عند $x = 0$

ويملك نصف مماس ميله $m = 3$

معادلته $y = 3x + 2$

$x > 0$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{-1}{x+1}$$

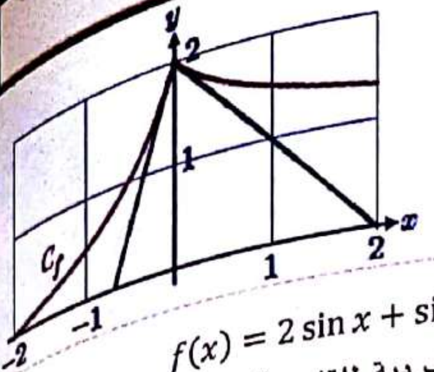
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -1$$

f اشتقاقي من اليمين عند $x = 0$

ويملك نصف مماس ميله $m = -1$

معادلته $y = -x + 2$

2) ارسم نصفي المماس وارسم C على المجال $[-2,2]$



تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

1) تحقق ان f دوري وان 2π دوراً له، ادرس الصفة الزوجية او الفردية للتابع f واستنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$

نريد إثبات ان $f(x+2\pi) = f(x)$

$$L_1 = f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2(x+2\pi))$$
$$= 2\sin x + \sin(2x+4\pi)$$
$$= 2\sin x + \sin 2x = f(x) = L_2 \implies$$ f دوري دوره 2π

لمعرفة الصفة الزوجية أو الفردية:

أياً كان $x \in R$ فإن $-x \in R$

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x)$$
$$= -2\sin(x) - \sin(2x)$$
$$= -(2\sin(x) + \sin(2x)) = -f(x)$$ فالتابع فردي

بما أن التابع دوري وفردي فيمكن دراسته على نصف مجال الدور $[0,\pi]$

2) اثبت انه في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + \cos 2x)$$
$$= 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

3) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(\pi) = 0$$

$$f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$
$$f'(x) = 0$$

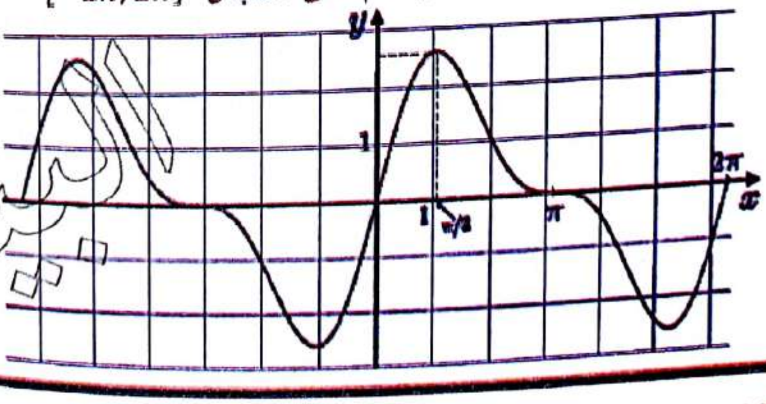
بما أن المجال $[0,\pi]$ فإن $k = 0$

إما $2\cos x = 1 \implies \cos x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3} : f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

أو $\cos x + 1 = 0 \implies \cos x = -1 \implies x = \pi : f(\pi) = 0$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

4) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$ ثم على المجال $[-2\pi, 2\pi]$



تمرينات ومسائل الوحدة

1) اكتب معادلة للمماس للخط البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a

1 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

f اشتقاقي عند $x = 0$ و منه

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$

$m = f'(0) = -3$

$y - 0 = -3(x - 0)$

$\boxed{y = -3x}$ معادلة المماس

2 $f(x) = x\sqrt{x} \quad : a = 1$

$a = x = 1 \quad : \quad f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad (1,1)$

f اشتقاقي عند $x = 1$ و منه

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} . x$

$m = f'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$

$\boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$ معادلة المماس

3 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

f اشتقاقي عند $x = 0$ و منه

$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \quad m = f'(0) = 1$

$y - 0 = 1(x - 0)$

$\boxed{y = x}$ معادلة المماس

4 $f(x) = \frac{x}{x - 1} \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

f اشتقاقي عند $x = 0$ و منه

$f'(x) = \frac{x - 1 - x}{(x - 1)^2} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$

$m = f'(0) = -1$

$y - 0 = -1(x - 0)$

$\boxed{y = -x}$ معادلة المماس

5 $f(x) = \cos x \quad : a = 0$

$a = x = 0 \quad : f(0) = \cos(0) = 1$

$\Rightarrow \quad (0,1)$

$f'(x) = -\sin x$ x و منه

f اشتقاقي عند $= 0$

$m = f'(0) = 0$

$y - 1 = 0(x - 0)$

$\boxed{y = 1}$ معادلة المماس

6 $f(x) = x\cos x \quad : a = \frac{\pi}{4}$

$a = x = \frac{\pi}{4} \quad : \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$

f اشتقاقي عند $x = \frac{\pi}{4}$ و منه

$f'(x) = \cos x - x\sin x$

$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$y - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)x + \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}}$ معادلة المماس

2) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1. اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1

$$x=1 \quad : \quad f(1) = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(1,\frac{-1}{2}\right)$$

f اشتقاقي عند $x = 1$ و منه

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - 1\,(x^2 - 3x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$$

$$m = f'(1) = \frac{-1}{4}$$

معادلة المماس لـ C

$$y + \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{4}x - \frac{1}{4}}$$

2. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$

المماس يوازي المستقيم فلهما نفس الميل ومنه: $m = -4$

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = -4$$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = -4$$

$$x^2 + 2x - 4 = -4(x+1)^2$$

$$x^2 + 2x - 4 = -4(x^2 + 2x + 1)$$

$$x^2 + 2x - 4 = -4x^2 - 8x - 4$$

$$5x^2 + 10x = 0 \qquad :\div 5$$

$$x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{إما} \\ x = -2 & \text{أو} \end{cases}$$

ومنه C يقبل مماسين موازيين للمستقيم $y = -4x$

3. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$

المماس يوازي المستقيم $3x - 2y = 0$ فلهما نفس الميل ومنه: $m = \frac{3}{2}$: $2y = 3x \to y = \frac{3}{2}x$

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3(x+1)^2$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3(x^2 + 2x + 1)$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$x^2 + 2x + 11 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(11) = -40 < 0$$

المعادلة مستحيلة الحل أي أن C لا يقبل أي مماس يوازي المستقيم $3x - 2y = 0$

3) ليكن C الخط البياني

1. اعطِ معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها (1)

$x = 1 \quad : \quad f(1) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(1, \frac{1}{3}\right)$

$f'(x) = \frac{x^2 + 2 - 2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2}$ اشتقاقي عند f $x = 1$ و منه

$m = f'(1) = \frac{1}{9}$

$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}}$ معادلة المماس لـ C

2. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{-1}{4}x$

المماس يوازي المستقيم فلهما نفس الميل ومنه: $m = \frac{-1}{4}$

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$8 - 4x^2 = -(x^2+2)^2$$

$$8 - 4x^2 = -x^4 - 4x^2 - 4$$

$$x^4 + 12 = 0 \Rightarrow x^4 = -12$$

المعادلة مستحيلة الحل أي أن C لا يقبل أي مماس يوازي المستقيم $y = \frac{-1}{4}x$

3. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x - y = 0$

المماس يوازي المستقيم $4x - y = 0$ فلهما نفس الميل ومنه: $m = 4$

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = 4$$

$$\frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2} = 4$$

$$2 - x^2 = 4(x^2+2)^2$$

$$2 - x^2 = 4(x^4 + 4x^2 + 4)$$

$$2 - x^2 = 4x^4 + 16x^2 + 16$$

$$4x^4 + 17x^2 + 14 = 0 \Rightarrow \Delta = 289 - 4(4)(14) = 65$$

$x_1^2 = \frac{-17 - \sqrt{65}}{2(4)} < 0$ (مرفوضة)

$x_2^2 = \frac{-17 + \sqrt{65}}{2(4)} < 0$ (مرفوضة)

اي أن C لا يقبل أي مماس موازياً المستقيم $4x - y = 0$

4) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{matrix} \acute{f}(x) = 3x^2 - 3 \\ \acute{f}(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 1 \ : f(1) = -1 \\ \text{او } x = -1 : f(-1) = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

2. تحقق ان للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور.

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, -1]$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0 \\ f(-1) = 3 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) \times f(-1) < 0$$

فالمعادلة $f(x) = 0$ لها جذر وحيد في المجال $]-\infty, -1]$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,1[$

$$\left.\begin{matrix} f(-1) = 3 > 0 \\ f(1) = -1 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(-1) \times f(1) < 0$$

فالمعادلة $f(x) = 0$ لها جذر وحيد في المجال $]-1,1[$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $[1, +\infty[$

$$\left.\begin{matrix} f(1) = -1 < 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(1) \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$$

فالمعادلة $f(x) = 0$ لها جذر وحيد في المجال $[1, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور في R

---

5) ليكن f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{matrix} \acute{f}(x) = 3x^2 - 2x - 1 \\ \acute{f}(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(3)(-1) = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$$

$x_1 = \frac{2-4}{2(3)} = \frac{-1}{3} : f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{37}{54}$

$x_2 = \frac{2+4}{2(3)} = 1 \ : f(1) = \frac{-1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{37}{54}$	↘	$\frac{-1}{2}$	↗	$+\infty$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[$ و $0 \in f\left(\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[\right) = \left]-\infty, \frac{37}{54}\right[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $\left[\frac{-1}{3}, 1\right]$ و $0 \in f\left(\left[\frac{-1}{3}, 1\right]\right) = \left[\frac{-1}{2}, \frac{37}{54}\right]$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $\left[\frac{-1}{3}, 1\right]$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $]1, +\infty[$ و $0 \in f(]1, +\infty[) = \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]1, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور في R

6) ليكن f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \quad (\div 12)$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{array}{r} x(x^2 + x - 2) = 0 \\ x(x+2)(x-1) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad x = 0 \quad : f(0) = 4 \\ \text{أو} \quad x = -2 : f(-2) = -28 \\ \text{أو} \quad x = 1 \quad : f(1) = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-28	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty, -2[$ و $0 \in f(]-\infty, -2[) =]-28, +\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]-\infty, -2[$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $[-2,0]$ و $0 \in f([-2,0]) = [-28,4]$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-2,0]$

◆ f مستمر ومتناقص تماماً على $]0,1[$ و $0 \in f(\,]0,1[\,) =]-1,4[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]0,1[$

◆ f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$ و $0 \in f([1,+\infty[\,) = [-1,+\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[1,+\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x)$ اربعة جذور في R .

7) في كل حالة من الحالات الآتية احسب المشتقات من المراتب 3, 2, 1 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق.

1 $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

f تابع صحيح فهو اشتقاقي على R	$f'(x) = 3x^2 - x + 1$
f' تابع صحيح فهو اشتقاقي على R	$f''(x) = 6x - 1$
f'' تابع صحيح فهو اشتقاقي على R	$f'''(x) = 6$

2 $f(x) = x\,.\sqrt{x}$

f تابع اشتقاقي على $[0,+\infty[$	$f'(x) = 1\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
f' تابع اشتقاقي على $]0,+\infty[$	$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$
f'' تابع اشتقاقي على $]0,+\infty[$	$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(3)}{4x} = \frac{-3}{8x\sqrt{x}}$

3 $f(x) = \frac{1}{x-1}$

f تابع اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$	$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$
f' تابع اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$	$f''(x) = \frac{-2(x-1)(1)(-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$
f'' تابع اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$	$f'''(x) = \frac{-3(x-1)^2(1)(2)}{(x-1)^6} = \frac{-6}{(x-1)^4}$

4 $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$

f تابع اشتقاقي على R	$f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x$
f' تابع اشتقاقي على R	$f''(x) = -4\cos 2x - 4\sin 2x$
f'' تابع اشتقاقي على R	$f'''(x) = 8\sin 2x - 8\cos 2x$

$\boxed{5}\ f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ لاحظ : $\left(\cos x = 0 \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \ ; k \in Z\right)$

f تابع اشتقاقي على $R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z\right\}$

$$f'(x) = \frac{-(-\sin x)(1)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

f' تابع اشتقاقي على $R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z\right\}$

$$f''(x) = \frac{\cos x\,(\cos^2 x) - 2\cos x\,(-\sin x)(\sin x)}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{\cos x\,(\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{1 - \sin^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

f'' تابع اشتقاقي على $R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z\right\}$

$$f'''(x) = \frac{2\sin x\cos x\,(\cos^3 x) - 3\cos^2 x\,(-\sin x)(1 + \sin^2 x)}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{2\sin x\cos^4 x + 3\cos^2 x\sin x\,(1 + \sin^2 x)}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\sin x\cos^2 x\,(2\cos^2 x + 3 + 3\sin^2 x)}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\sin x\,(2\cos^2 x + 3 + 2\sin^2 x + \sin^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{\sin x\,(5 + \sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

$\boxed{6}\ f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ لاحظ : $(\sin x = 0 \quad x = \pi k \ \ ; k \in Z)$

f تابع اشتقاقي على $R \backslash \{\pi k : k \in Z\}$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

f' تابع اشتقاقي على $R \backslash \{\pi k : k \in Z\}$

$$f''(x) = \frac{\sin x\,(\sin^2 x) - 2\sin x\,(\cos x)(-\cos x)}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{\sin x\,(\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

f'' تابع اشتقاقي على $R \backslash \{\pi k ; k \in Z\}$

$$f'''(x) = \frac{2\cos x\,(-\sin x)\sin^3 x - 3\sin^2 x\,(\cos x)(1 + \cos^2 x)}{\sin^6 x}$$

$$= \frac{-2\cos x\sin^4 x - 3\sin^2 x\cos x - 3\sin^2 x\cos^3 x}{\sin^6 x}$$

$$= \frac{-\cos x\sin^2 x\,(2\sin^2 x + 3 + 3\cos^2 x)}{\sin^6 x}$$

$$= \frac{-\cos x\,(2\sin^2 x + 3 + 2\cos^2 x + \cos^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{-\cos x\,(5 + \cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

8) ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

1. تحقق ان $\sqrt{1 + x^2}.f'(x) = f(x)$ اياً يكن x من R.

$$L_1 = \sqrt{1 + x^2}\ f'(x) = \sqrt{1 + x^2}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) = \sqrt{1 + x^2} + x = f(x) = L_2$$

2. استنتج ان $(1 + x^2).f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$ اياً يكن x من R.

لدينا من (1) : $\sqrt{1 + x^2}.f'(x) = f(x)$

نشتق :

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}f'(x)+f''(x).\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$

نضرب بـ $\sqrt{1+x^2}$

$$xf'(x)+(1+x^2)f''(x)=\underbrace{\sqrt{1+x^2}\,.f'(x)}_{(1)\text{من}}$$

$$xf'(x)+(1+x^2)f''(x)=f(x)$$

$$xf'(x)+(1+x^2)f''(x)-f(x)=0$$

وهو المطلوب

$$(1+x^2).f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$$

9) في كل من الحالات الآتية ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر.

$\boxed{1}$ $f(x)=x^2\sqrt{x}$, $D_f=[0,+\infty[$

لنأخذ التابع $g(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sqrt{x}-0}{x}=\frac{x^2\sqrt{x}}{x}=x\sqrt{x} \qquad :(x>0)$$

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ أي أن f اشتقاقي عند (0)

$\boxed{2}$ $f(x)=x|x|$, $D_f=R$

لنأخذ التابع $g(x)$ المعرف على R^* :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x|x|-0}{x}=\frac{x|x|}{x}=|x|$$

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ أي أن f اشتقاقي عند (0)

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$, $D_f=R$

لنأخذ التابع $g(x)$ المعرف على R^* :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}-0}{x}=\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$$

للتخلص من القيمة المطلقة نميز حالتين : ♦ $x>0$:

$$g(x)=\frac{x^2+x}{x(x^2+1)}=\frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=\frac{x+1}{x^2+1}$$

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=1$ أي أن f اشتقاقي عند (0) من اليمين وللخط C نصف مماس

♦ $x<0$:

$$g(x)=\frac{x^2-x}{x(x^2+1)}=\frac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=\frac{x-1}{x^2+1}$$

$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-1$ أي أن f اشتقاقي عند (0) من اليسار وللخط C نصف مماس

و بما ان $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ فإن f غير اشتقاقي عند (0)

10) التابع f معرف على R وفق $f(0)=0$ ، $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x\neq0$

1. هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك.

لنأخذ التابع :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

نعلم ان :

$$\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1 \quad : \quad \left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x|\ \left|\cos\frac{1}{x}\right|$$

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \le |x|\ (1)$$

$$|g(x) - 0| \le |x|$$

بما ان $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ فإن حسب الإحاطة ② $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ فالتابع f اشتقاقي عند الصفر.

.2 احسب $\grave{f}(x)$ على R^*

f اشتقاقي على R^*

$$\grave{f}(x) = 2x\ \cos\frac{1}{x} + \left[-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]x^2$$

$$\grave{f}(x) = 2x\ \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

---

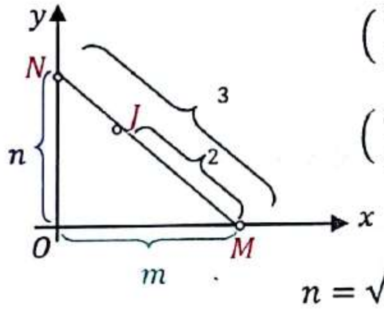
11) محل هندسي:

في معلم متجـانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، M هي النقطة التي إحداثياتها $(m,0)$ حيث $0 \le m \le 3$ وN هي النقطة التي إحداثياتها $(0,n)$ حيث $n \ge 0$ ، النقطتان M و N تحققان $MN = 3$، واخيراً J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تحقق $MJ = 2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$ ورسمه.

لدينا: النقطة $M(m,0)$ حيث $0 \le m \le 3$

والنقطة $N(0,n)$ حيث ان $n \ge 0$ و $MN = 3$

والنقطة $J(x,y)$ من $[MN]$ حيث $MJ = 2$ إذاً $NJ = 1 \Leftarrow \overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{JN}$



$$\begin{pmatrix} x-m \\ y-0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0-x \\ n-y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-m \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2x \\ 2n-2y \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-m=-2x \\ y=2n-2y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 3x=m \\ 3y=2n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=\frac{m}{3} \\ y=\frac{2n}{3} \end{matrix}$$

إذاً إحداثيات النقطة J هي: $J\left(\frac{m}{3},\frac{2n}{3}\right)$

من المثلث OMN نجد: $m^2 + n^9 = 9 \quad \Leftarrow \quad n^2 = 9 - m^2 \quad \Leftarrow \quad n = \sqrt{9-m^2}$

ومنه

$$\left\{\begin{matrix} J\left(\frac{m}{3},\frac{2\sqrt{9-m^2}}{3}\right) \\ J(\ x\ ,\ y\ ) \end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} x=\frac{m}{3} \\ y=\frac{2}{3}\sqrt{9-m^2} \end{matrix}$$

و

وللحصول على معادلة المحل الهندسي نكتب العلاقة بين x و y فنجد:

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9-(3x)^2}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9-9x^2}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9(1-x^2)}$$

$$\boxed{y = 2\sqrt{1-x^2}}$$

حيث: $0 \le m \le 3$

$0 \le \frac{m}{3} \le 1$

$0 \le x \le 1$

إذاً: النقطة J تنتمي إلى الخط البياني C للتابع f المعرف وفق العلاقة: $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ حيث $x \in [0,1]$

والنقطة J ترسم الخط البياني C كاملاً

ادرس تغيرات f وادرس قابلية اشتقاقه عند (1) مع الرسم

$$f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$$

f معرف ومستمر على المجال $[0,1]$ واشتقاقي على $]0,1[$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f(1) = 0$$

$$\grave{f}(x) = 2\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow f(0) = 2$$

x	0		1
$\grave{f}(x)$		$-$	‖
$f(x)$	2	↘	0

دراسة قابلية الاشتقاق عند $x = 1$: لنأخذ التابع:

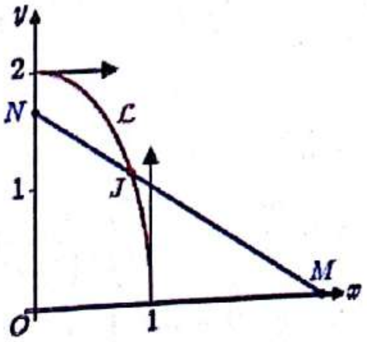
$$t(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \Longrightarrow t(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2} - 0}{x-1}$$

$$t(x) = \frac{2\sqrt{(1-x)(1+x)}}{-(1-x)}$$

$$t(x) = -2\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

$$\lim_{x\to1^-} t(x) = -2(+\infty) = -\infty$$

إذاً f ليس اشتقاقياً عند $x = 1$



12) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ نهدف إلى إثبات ان المجموعة $\mathcal{E}$ هي اجتماع خطين بيانيين C_2, C_1 لتابعين f_2, f_1 ثم رسم $\mathcal{E}$

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$$

$$4y^2 = -x^2 + 2x + 3 \qquad : (\div 4)$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(-x^2 + 2x + 3)$$

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

$$-(x^2 - 2x - 3) \geq 0$$

$$(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad x=3 \\ \text{او} \quad x=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$-x^2+2x+3\geq 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

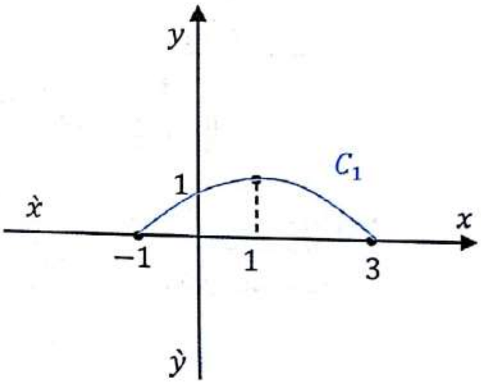
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}=f_1(x) \ : \ x\in[-1,3] \quad , \ y\geq 0 \\ y=\frac{-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}=f_2(x) \ : \ x\in[-1,3] \quad , \ y\leq 0 \end{cases}$$

♦ ندرس تغيرات f_1: $f_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$

f_1 مستمر على $[-1,3]$ واشتقاقي على $]-1,3[$ $\quad f_1(-1)=0 \quad , \quad f_1(3)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}_1(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}=\frac{-x+1}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} \\ \grave{f}_1(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x+1=0 \Rightarrow \boxed{\boxed{x=1}} \ : \quad f_1(1)=1$$

x	-1		1		3
$\grave{f}_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f_1(x)$	0	↗	1	↘	0

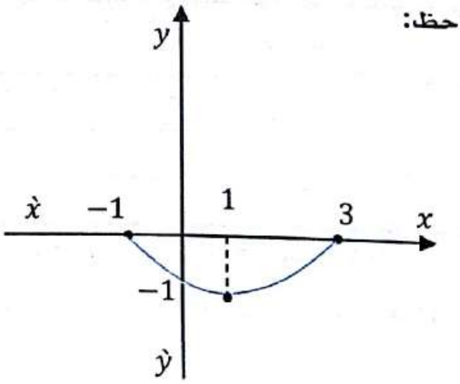


♦ $f_2(x)=\frac{-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$ $\quad : D=[-1,3] \quad : y\leq 0$

وهنا لا داعي لدراسة التغيرات للتابع f_2 لأننا نلاحظ:

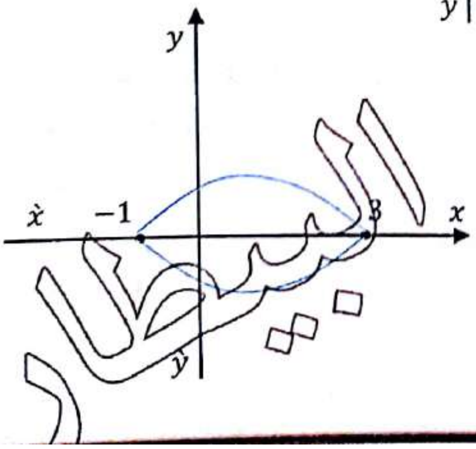
$f_2(x)=-f_1(x) \quad : \quad x\in[-1,3]$

C_2 نظير C_1 بالنسبة لـ $x\grave{x}$



ومنه فإن المجموعة ε هي اجتماع خطين بيانيين

C_1, C_2 للتابعين f_1, f_2 ويكون الشكل:



13) متراجحة هويغنز Huygens

نهدف إلى إثبات صحة المتراجحة $2\sin x+\tan x\geq 3x$ اياً يكن x من المجال $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

المتراجحة السابقة تكافئ: $2\sin x+\tan x-3x\geq 0$

f مستمر و اشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x)=2\sin x+\tan x-3x \quad : \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$f(0)=0 \quad , \quad \lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} f(x)=2+\frac{1}{0^+}-\frac{3\pi}{2}=+\infty$$

$$\acute{f}(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x+1-3\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

المقام موجب فإشارة $\acute{f}(x)$ من إشارة بسطه: $2\cos^3 x-3\cos^2 x+1$

نفرض $\cos x=t \qquad \Leftarrow \qquad 2t^3-3t^2+1$

$$2t^3-3t^2+1=0$$

$$\Delta=1-4(2)(-1)=9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$$

$$t_1=\frac{1+3}{4}=1 \quad , \quad t_2=\frac{1-3}{4}=\frac{-1}{2}$$

و منه : $(t-1)\ (2t^2-t-1)\ =0$

$$2(t-1)(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$2\quad (t-1)^2\ .\ \left(t+\frac{1}{2}\right)=0$$

و منه : $2(\cos x-1)^2.\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0$

$$\begin{array}{r|l} & 2t^2-t-1 \\ \hline t-1 & 2t^3-3t^2+1 \\ & \mp 2t^3 \pm 2t^2 \\ \hline & -t^2+1 \\ & \pm t^2 \mp t \\ \hline & -t+1 \\ & \pm t \mp 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$(t-1)\underbrace{(2t^2-t-1)}=0$$

نحلل باستخدام Δ

بما أن $\cos x+\frac{1}{2}>0$ لان $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، $(\cos x-1)^2\geq 0$

$$\acute{f}(x)\geq 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\acute{f}(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	↗ $+\infty$	‖

ونلاحظ من جدول التغيرات أن $f(x)\geq 0$ و منه $2\sin x+\tan x-3x\geq 0$

فالمتراجحة صحيحة $\Rightarrow 2\sin x+\tan x\geq 3x$

---

14) التابع f معرف على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

1. هل f اشتقاقي عند الصفر.

نشكل التابع $t(x)$

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}-0}{x-0}=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}=\frac{\sqrt{x^3}}{x\sqrt{1-x}}=\frac{|x|\sqrt{x}}{x\sqrt{1-x}} \ : x\in\,]0,1[\ ;\ x>0$$

$$t(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} t(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \acute{f}(0)=0$$ و اي f اشتقاقي عند (0)

2. احسب $\grave{f}(x)$ على $]0,1[$

$$\grave{f}(x)=\frac{\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{3x^2-3x^3+x^3}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}(1-x)^4}}$$

$$=\frac{-2x^3+3x^2}{2\sqrt{x^3(1-x)^3}}=\frac{x^2(-2x+3)}{2x(1-x)\sqrt{x(1-x)}}=\frac{3-2x}{2(1-x)}\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

15) نتأمل التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$

-1 احسب التابع المشتق للتابع f.

f اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$:

$$\grave{f}(x)=\frac{2x(x-1)-1(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\underbrace{x^2-2x+1}-2}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}=1-\frac{2}{(x-1)^2}$$

-2 استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $g:x\to\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

نفرض $u(x)=\sqrt{x}$ عندئذ :

$$g(x)=\frac{u^2(x)+1}{u(x)-1}=f\big(u(x)\big)$$

$$\grave{g}(x)=\grave{f}\big(u(x)\big).\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(u(x)-1)^2}\right].\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\right].\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\boxed{2}$ $h:x\to\frac{x^4+1}{x^2-1}$

نفرض $u(x)=x^2$ عندئذ :

$$k(x)=\frac{u^2(x)+1}{u(x)-1}=f\big(u(x)\big)$$

$$\grave{k}(x)=\grave{f}\big(u(x)\big).\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(u(x)-1)^2}\right].\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(x^2-1)^2}\right].2x$$

$\boxed{3}$ $\ell:x\to\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

$$\ell(x)=\sqrt{f(x)}$$

$$\grave{\ell}(x)=\frac{\grave{f}(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1-\frac{2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}.$$

$\boxed{4}$ $K:x\to\frac{\sin^2x+1}{\sin x-1}$

نفرض $u(x)=\sin x$ عندئذ :

$$K(x)=\frac{u^2(x)+1}{u(x)-1}=f\big(u(x)\big)$$

$$\grave{K}(x)=\grave{f}\big(u(x)\big).\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(u(x)-1)^2}\right].\grave{u}(x)$$

$$=\left[1-\frac{2}{(\sin x-1)^2}\right].\cos x$$

16) فيما يأتي، اوجد التابع المشتق للتابع f محدداً المجموعة التي ننجز عليها الاشتقاق:

$\boxed{1}$ $f(x) = cos^2 3x$

f معرف واشتقاقي على R

$$f'(x) = 2\cos 3x\,.(-3\sin 3x)$$
$$= -6\cos 3x \sin 3x$$

$\boxed{2}$ $f(x) = sin^3 2x$

f معرف واشتقاقي على R

$$f'(x) = 3\sin^2 2x\,.(2\cos 2x)$$
$$= 6\sin^2 2x.\cos 2x$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{1}{sin^2 3x}$

f معرف عندما : $sin^2 3x \neq 0$

$\sin 3x \neq 0$

$3x \neq \pi k\,; k \in Z \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi k}{3}\quad ; k \in Z$

$D = R \setminus \left\{\dfrac{\pi k}{3}\right\}\ ; k \in Z$

f اشتقاقي على $R \setminus \left\{\dfrac{\pi k}{3}\right\}\,; k \in Z$

$$f'(x) = \frac{-2\sin 3x\,(3\cos 3x)}{sin^4 3x}$$
$$= \frac{-6\cos 3x}{sin^3 3x}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{cos^3 2x}$

f معرف عندما : $cos^3 2x \neq 0$

$\cos 2x \neq 0$

$2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k\,; k \in Z \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}\quad ; k \in Z$

$D = R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}\right\}\,; k \in Z$

f اشتقاقي على $R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}\right\}\ ; k \in Z$

$$f'(x) = \frac{-3cos^2 2x(-2\sin 2x)}{\cos^6 2x}$$
$$= \frac{6\sin 2x}{cos^4 2x}$$

17) ليكن التابع f المعرف على $R\setminus\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

1. عين التابع المشتق f' للتابع f.

f اشتقاقي على $R\setminus\{1\}$:
$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

2. نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x) = f(\sin x)$
اثبت ان g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I.

$$g(x) = f(\sin x) = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$$

g معرف عندما : $\sin x - 1 \neq 0$

$\sin x \neq 1$

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\,; k \in Z : D = R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right\}\quad ; k \in Z$

g اشتقاقي على $R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right\}\ ; k \in Z \quad \Rightarrow \quad$ g اشتقاقي على $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$g'(x) = f'(\sin x).(\sin x)'$$
$$= \frac{-5}{(\sin x - 1)^2}.(\cos x)$$

3. نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على $J =]1,+\infty[$ وفق: $k(x) = f(\sqrt{x})$

اثبت ان k اشتقاقي على J ثم احسب $k'(x)$ على J

$$k(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

k معرف عندما:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \;\Rightarrow\; [0,+\infty[\\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} \neq 1 \;\Rightarrow \boxed{x \neq 1} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; D = [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

k اشتقاقي على كل من المجالين $[0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ فهو اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$k(x) = f(\sqrt{x}) \;\Rightarrow\; k'(x) = f'(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = \frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

---

18) a,b عددان حقيقيان و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ ،

هل يمكن تعيين b,a لكي يقبل C مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

$$\underbrace{f'(1) = 0 \qquad\qquad f(1) = 2}_{\text{المماس أفقي في النقطة } A(1,2) \text{ اي:}}$$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$0 = 3a(1)^2 + 2b(1)$$

$$\boxed{\boxed{3a + 2b = 0}} \quad \boxed{2}$$

$$a(1)^3 + b(1)^2 + 1 = 2$$

$$\boxed{\boxed{a + b = 1}} \quad \boxed{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3a + 2b = 0 \\ \quad a + b = 1 \;\left(\text{نضرب بـ } 2\right) \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 3a + 2b = 0 \\ - \\ \underline{2a + 2b = 2} \end{array}\right.$$

$$a = -2 \xrightarrow{\text{بالتعويض في}(1)} b = 3$$

إذاً $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$

---

19) a,b عددان حقيقيان و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$

عين a,b لتكون $y = 4x + 3$ معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟

$x = 0$ نعوض في معادلة المماس $y = 4(0) + 3 = 3 \;\Leftarrow$ نقطة التماس $(0,3)$

ولدينا $y = 4x + 3$ ميله $\boxed{\boxed{m_\Delta = 4}}$

$$\underbrace{f'(0) = m_\Delta = 4 \qquad\qquad f(0) = 3}_{\Delta \text{ مماس للخط } C \text{ في النقطة } (0,3) \text{ اي:}}$$

f اشتقاقي على R:

$$f'(x) = \frac{(9x^2+a)(x^2+1) - 2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$4 = \frac{a(1) - 0}{1} \Rightarrow a = 4$$

$$\frac{3(0)^3 + a(0) + b}{(0)^2 + 1} = 3$$

$$b = 3$$

إذاً : $f(x) = \frac{3x^3+4x+3}{x^2+1}$

20) a عـدد حقيقي، و f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدية عند $x = 1$ ؟

f اشتقاقي على R و $f(1)$ قيمة حدية عندئذ: $f'(1) = 0$ ومنه:

f اشتقاقي على R ;

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$$
$$0 = 3a(1)^2 + 6(1) + 3$$
$$-9 = 3a \Rightarrow a = -3$$

إذاً $f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x$

لنتحقق ان للتابع f قيمة حدية هي $f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -9x^2 + 6x + 3 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} -9x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\overbrace{x = 1 \qquad\qquad x = -\frac{1}{3}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x$		↘	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	↗	$f(1)$	↘	

أي ان f يملك قيمة حدية كبرى هي $f(1)$.

---

21) f هو تابع معرف على R واشتقاقي عليها. إضافة إلى ذلك نفترض ان:

*** $f'(0) = 1$ و $f(0) = 0$**

*** f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$**

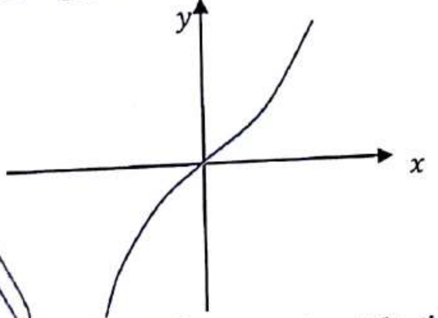
ارسم خطاً بيانياً C يمكن ان يمثل التابع f

الخط البياني C يمر من النقطة $(0,0)$ ، مشتق التابع f عند $x = 0$ يساوي الواحد. اي أن ميل المماس له عند $x = 0$ يساوي الواحد.

المشتق f' متناقص على المجال $]-\infty, 0]$ أي ان ميل المماس يتناقص بالتدريج على المجال $]-\infty, 0]$

المشتق f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$ أي ان ميل المماس يتزايد بالتدريج على المجال $[0, +\infty[$

ويمكن رسم C بالشكل الآتي:



ولإيجاد التابع f : نبحث عن تابع يحقق انه متزايد على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$ ويأخذ القيمة 1 عند $x = 0$. يبدو ان التابع $f'(x) = ax^2 + 1 : a > 1$ يحقق كل الشروط السابقة،

اي التابع f يجب ان يكون مشتقه من صيغة f' .اي $f(x) = bx^3 + x$ حيث $b > 0$

نختار احد التوابع فرضاً $f(x) = x^3 + x$

22) في كل من الحالات الآتية احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها .

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ $: a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$$g(x) = \cos x - 1 \;\Rightarrow\; g(0) = 0$$

$$\dot{g}(x) = -\sin x \;\Rightarrow\; \dot{g}(0) = 0$$

g اشتقاقي عند $a = 0$:

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dot{g}(0) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ $: a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$$g(x) = \tan x \;\Rightarrow\; g(0) = 0$$

$$\dot{g}(x) = 1 + \tan^2 x \;\Rightarrow\; \dot{g}(0) = 1$$

g اشتقاقي عند $a = 0$:

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dot{g}(0) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ $: a = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$$g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2} \;\Rightarrow\; g(1) = 0$$

$$\dot{g}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \;\Rightarrow\; \dot{g}(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

g اشتقاقي عند $a = 1$:

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \dot{g}(1) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}$ $: a = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نفرض :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - 2 \;\Rightarrow\; g(1) = 0$$

$$\dot{g}(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} \;\Rightarrow\; \dot{g}(1) = \frac{3}{4}$$

g اشتقاقي عند $a = 1$:

و حسب تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \dot{g}(1) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} = \frac{3}{4}$$

23) في كل من الحالات الاتية اوجد عدد حلول المعادلة ثم احسب قيمة تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطا في الحساب 10^{-1}

$\boxed{1}$ $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$

نفرض $f(x) = x^5 - x^3 + x - 5$ ، لنوجد عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

$f(x) = x^5 - x^3 + x - 5$

لندرس تغيرات التابع

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta= 9 - 4(5)(1) = -11 < 0$

اي ان $f'(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على R $\left\{\begin{array}{l} \\ 0 \in f(R) = R \end{array}\right.$ فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في R

نجد ان: $f(1.5) = 0.71875$ ، $f(1.4) = -0.96576$ ونلاحظ $f(1.4).f(1.5) < 0$ ومنه المجال المطلوب: $[1.4,1.5]$

$\boxed{2}$ $x(2x+1)^2 = 5$

$f(x) = x(2x+1)^2 - 5$

لندرس تغيرات التابع

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = (2x+1)^2 + 2(2x+1)(2)x = (2x+1)(2x+1+4x) = (2x+1)(6x+1)$

$f'(x) = 0$

$(2x+1)(6x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = \frac{-1}{2} : f\left(\frac{-1}{2}\right) = -5 \\ \text{أو } x = \frac{-1}{6} : f\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{-137}{27} \simeq -5.07 \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{6}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\frac{-137}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

$0 \notin f\left(\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]\right) =]-\infty, -5]$ فليس للمعادلة جذر في المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$

$0 \notin f\left(\left]\frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}\right[\right) = \left]\frac{-137}{27}, -5\right[$ فليس للمعادلة جذر في المجال $\left]\frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}\right[$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left[\frac{-1}{6}, +\infty\right[$ $\left\{\begin{array}{l} \\ 0 \in f\left(\left[\frac{-1}{6}, +\infty\right[\right) = \left[\frac{-137}{27}, +\infty\right[\end{array}\right.$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $\left[\frac{-1}{6}, +\infty\right[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في R

نجد ان: $f(0.75) = -\frac{5}{16}$ ، $f(0.8) = \frac{51}{125}$ ونلاحظ $f(0.75).f(0.8) < 0$ ومنه المجال المطلوب: $[0.75,0.8]$

$\boxed{3}$ $x^4 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

لندرس تغيرات التابع $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + 1$

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2} \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{16}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{13}{16}$	↗	$+\infty$

$0 \notin f(R) = \left[\frac{13}{16}, +\infty\right[$ فليس للمعادلة $f(x) = 0$ جذر في R

إذاً المعادلة مستحيلة الحل في R

$\boxed{4}$ $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

لندرس تغيرات التابع $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$

f معرف و مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x^4 - x^2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x^4 - x^2 = 0 \\ x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \\ x^2(x-1)(x+1) = 0 \end{array} \begin{cases} \text{إما } x = 0 & : f(0) = 1 \\ \text{أو } x = 1 & : f(1) = \frac{13}{15} \\ \text{أو } x = -1 & : f(-1) = \frac{17}{15} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{15}$	↘	1	↘	$\frac{13}{15}$	↗	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, -1]$ و $0 \in f(]-\infty, -1]) = \left]-\infty, \frac{17}{15}\right]$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]-\infty, -1]$

$0 \notin f(]-1, +\infty[) = \left]\frac{13}{15}, +\infty\right[$ فليس للمعادلة $f(x) = 0$ جذر في المجال $]-1, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في R

نجد ان: $f(-1.7) = -0.202047$, $f(-1.6) = 0.268181$ ونلاحظ $f(-1.7).f(-1.6) < 0$

ومنه المجال المطلوب: $[-1.7, -1.6]$

24) ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$

1. ادرس تغيرات التابع f اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

التابع f مستمر على $[1,+\infty[$ و اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$f(1) = -3 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	-3	↗	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$ ، $0 \in f([1,+\infty[) = [-3,+\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في $[1,+\infty[$

$$\begin{cases} \text{مستمر ومتزايد تماماً على } [1,+\infty[\\ 0 \in f([1,+\infty[\,) = [-3,+\infty[\end{cases}$$

2. احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

$$f(x) = 0$$
$$x + \sqrt{x-1} - 4 = 0$$
$$\sqrt{x-1} = 4 - x$$

نربع الطرفين بشرط : $\begin{pmatrix} 4 - x \geq 0 \\ 4 \geq x \end{pmatrix}$

$$x - 1 = (4 - x)^2$$
$$x - 1 = 16 - 8x + x^2$$
$$x^2 - 9x + 17 = 0 \Longrightarrow \Delta = 81 - 4(1)(17) = 13 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$
$$x_1 = \frac{9+\sqrt{13}}{2} \geq 4 \quad (\text{مرفوض})$$
$$x_2 = \frac{9-\sqrt{13}}{2} \leq 4 \quad (\text{مقبول})$$

25) ليكن f التابع المعرف على $I =]1,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1. ادرس تغيرات f على I

f معرف و مستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2. استنتج ان للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيداً يقع في المجال $]1,2[$

f مستمر ومتناقص تماماً على $]1,+\infty[$ ، $0 \in f(\,]1,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$ فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في $]1,+\infty[$

و هذا الجذر يقع في المجال $]1,2[$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \\ f(2) = 1 - \sqrt{2} \end{matrix}\right\} \lim_{x\to1^+} f(x)\,.\,f(2) < 0 \Longrightarrow \;]1,2[$$

26) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

.1 ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني C

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$\boxed{\Delta: y=1}$ مقارب افقي لـ C في جوار $+\infty,-\infty$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x+3)-(2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}=\frac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$$

$$\acute{f}(x)=0\Rightarrow 6x+3=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3}=\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{11}{4}}=\frac{-1}{11}$$

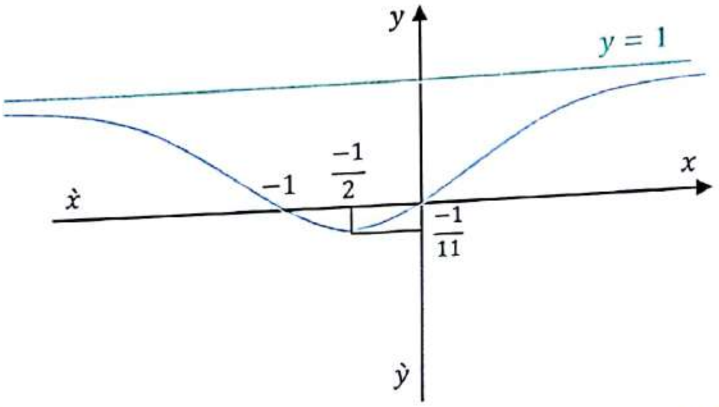
$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{11}$ قيمة حدية صغرى محلية

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$1 \searrow$	$\frac{-1}{11}$	$\nearrow 1$

نقطة مساعدة:

نقطة تقاطعه مع $x\acute{x}$

$$y=0$$
$$x^2+x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & ,\ (0,0)\\ x=-1 & ,\ (-1,0)\end{cases}$$
$$x(x+1)=0$$



.2 نريد تعيين المماسات للخط البياني C المارة بالمبدا (غير المماس في المبدا)،

a) ليكن a عدداً حقيقياً. اكتب معادلة المماس T_a الذي يمس C في النقطة $A(a,f(a))$

$$f(a)=\frac{a^2+a}{a^2+a+3}\quad ,\quad A\left(a\,,\ \frac{a^2+a}{a^2+a+3}\right)$$

$$m=\acute{f}(a)=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}$$

$$T_a:\ y-\frac{a^2+a}{a^2+a+3}=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$$

b) فكر في ان T_a يكون احد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدا ثم جد معادلة لكل مماس للخط البياني C يمر بالمبدا.

بما أن المماس مار من المبدا $(0,0)$ نعوض في معادلة T_a فنجد:

$$0-\frac{a^2+a}{a^2+a+3}=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}(0-a)\Rightarrow\ -\frac{a^2+a}{a^2+a+3}=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}(-a)$$

بما أن المماس المطلوب مغاير للمماس في المبدا فإن $a\neq0$ نقسم على $-a$ الطرفين:

$$\frac{a+1}{(a^2+a+3)}=\frac{6a+3}{(a^2+a+3)^2}$$

نضرب الطرفين بـ $(a^2+a+3)^2$

$$(a+1)(a^2+a+3)=6a+3$$

$$a^3+a^2+3a+a^2+a+3=6a+3$$

$$a^3+2a^2-2a=0$$

$$a(a^2+2a-2)=0$$

إما $a=0$ مرفوض (كون $a\neq 0$ فرضاً)

او $a^2+2a-2=0$

$$\Delta=4-4(1)(-2)=12>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$$

$$a_1=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}$$

$$a_2=\frac{-2+2\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}$$

$$T_{a_1}: y-\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1-\sqrt{3}\right)}{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1-\sqrt{3}\right)+3}=\frac{6\left(-1-\sqrt{3}\right)+3}{\left[\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1-\sqrt{3}\right)+3\right]^2}\left(x+1+\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{T_{a_1}: y-\frac{3+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}=\frac{-3-6\sqrt{3}}{39+12\sqrt{3}}\left(x+1+\sqrt{3}\right)}$$

$$T_{a_2}: y-\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(-1+\sqrt{3}\right)}{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(-1+\sqrt{3}\right)+3}=\frac{6\left(-1+\sqrt{3}\right)+3}{\left[\left(-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(-1+\sqrt{3}\right)+3\right]^2}\left(x+1-\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{T_{a_2}: y-\frac{3-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}=\frac{-3+6\sqrt{3}}{39-12\sqrt{3}}\left(x+1-\sqrt{3}\right)}$$

27) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$

1. اوجد نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2. اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C

بالقسمة الإقليدية نجد :

$$f(x)=2x-1+\frac{8}{x+1}$$

$$f(x)-y_\Delta=2x-1+\frac{8}{x+1}-(2x-1)=\frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

اي $\Delta: y=2x-1$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty,+\infty$

3. ادرس نهاية f عند -1 ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط C

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$ ، C يقع على يسار المقارب

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$ ، C يقع على يمين المقارب

4. ادرس تغيرات

f مستمر و اشتقاقي على $R\backslash\{-1\}$

$$f'(x)=2-\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)^2-8}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2(x+1)^2-8}{(x+1)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x+1=2 \;\Rightarrow x=1 & : f(1)=5 \\ x+1=-2 \Rightarrow x=-3 & : f(-3)=-11 \end{cases}$$

إما $x+1=2 \Rightarrow x=1$: $f(1)=5$

أو $x+1=-2 \Rightarrow x=-3$: $f(-3)=-11$

$$(x+1)^2=4$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

قيمة حدية كبرى محلياً $f(-3)=-11$

قيمة حدية صغرى محلياً $f(1)=5$

5. اثبت ان النقطة $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط C

$x_0=-1 \quad\Rightarrow 2x_0=-2 \quad\Rightarrow 2x_0-x=-2-x$

$y_0=-3 \quad\Rightarrow 2y_0=-6$

① $x\in R\backslash\{-1\} \;\Rightarrow -x\in R\backslash\{1\} \;\Rightarrow -2-x\;\in R\backslash\{-1\}$ (الشرط الأول محقق)

② $$f(-2-x)=\frac{2(-2-x)^2+(-2-x)+7}{-2-x+1}=\frac{2(4+4x+x^2)-2-x+7}{-1-x}$$

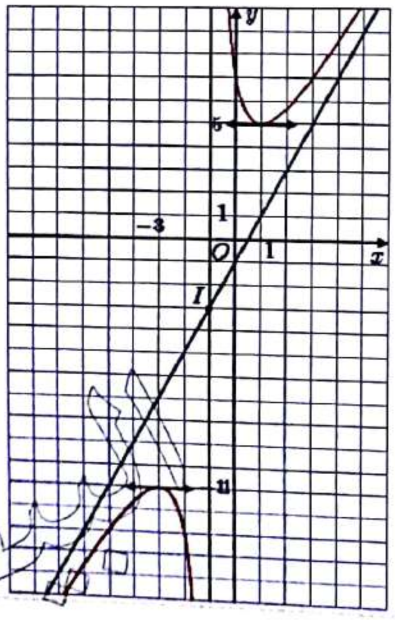
$$=\frac{-(2x^2+7x+13)}{x+1}$$

$$f(-2-x)+f(x)=\frac{-2x^2-7x-13+2x^2+x+7}{x+1}=\frac{-6x-6}{x+1}=\frac{-6(x+1)}{x+1}=-6=2y_0$$

(الشرط الثاني محقق)

و منه $I(-1,-3)$ مركز تناظر .

6. ارسم مقاربات C ثم ارسم C



$y=2x-1$

x	0	1
y	-1	1
	$(0,-1)$	$(1,1)$

28) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$

1. اوجد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفه، ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=+\infty$$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$, $\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي لـ C و C يقع على يسار مقاربه عند $-\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$, $\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي لـ C و C يقع على يمين مقاربه عند $-\infty$

f اشتقاقي على $R\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6x+10)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-3x^2+10x-11)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)[(3x^2-6x+10)(x-1)-2(x^3-3x^2+10x-11)]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0$$

$$x^3-3x^2-4x+12=0$$

$$x^2(x-3)-4(x-3)=0$$

$$(x-3)(x^2-4)=0$$

$$(x-3)(x+2)(x-2)=0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{إما } x=3 \ : \ f(3)=\frac{19}{4} \\ \text{او } x=-2 \ : \ f(-2)=\frac{-51}{9}=\frac{-17}{3} \\ \text{او } x=2 \ : \ f(2)=5 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$			$\frac{-17}{3}$		‖		5				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$\frac{19}{4}$	↗	

2. اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C

بالقسمة الإقليدية نكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x)=x-1+\frac{7x-10}{(x-1)^2}$$

$$f(x)-y_\Delta=x-1+\frac{7x-10}{(x-1)^2}-(x-1)=\frac{7x-10}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

اي $\boxed{\boxed{\Delta: y=x-1}}$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$, $-\infty$

3. ادرس الوضع النسبي للخطين C, d ثم ارسم كلاً من C, d

$$f(x)-y_\Delta=0 \implies \frac{7x-10}{(x-1)^2}=0 \implies 7x-10=0 \implies x=\frac{10}{7}$$

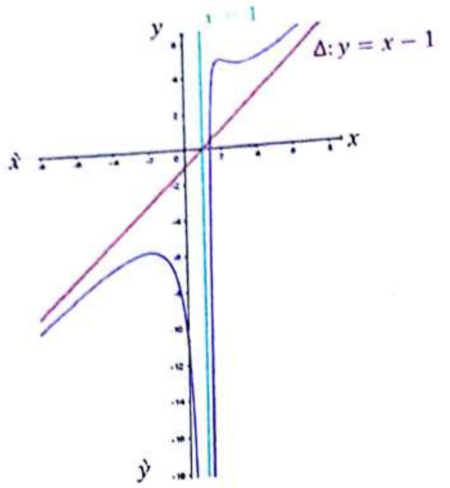
x	$-\infty$	1	$\frac{10}{7}$	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	C تحت Δ		C فوق Δ

نقط مساعدة:

$\left(\frac{10}{7},\frac{3}{7}\right)$ نقطة مشتركة بين C و Δ

$\Delta: y=x-1$

x	0	1
y	-1	0
	$(0,-1)$	$(1,0)$



4. حدد هندسياً عدد حلول المعادلة $x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$

$$x^3-mx^2-3x^2+2mx+10x-11-m=0$$

$$x^3-3x^2+10x-11=m(x^2-2x+1)$$

$$m=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}=f(x)$$

♦ $m\in\left]-\infty,\frac{-17}{3}\right[$ للمعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول.

♦ $m=\frac{-17}{3}$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.

♦ $m\in\left]\frac{-17}{3},\frac{19}{4}\right[$ للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد.

♦ $m=\frac{19}{4}$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.

♦ $m\in\left]\frac{19}{4},5\right[$ للمعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول.

♦ $m=5$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.

♦ $m\in]5,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد.

29) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$

1. احسب نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ هل يقبل C مقارباً افقياً؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)}{x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{x^2-(x^2+8)}{x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-8}{\infty} = 0$$

$\boxed{y=0}$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

2. تحقق ان المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C

$$f(x) - y_\Delta = x - \sqrt{x^2+8} - 2x = -x - \sqrt{x^2+8}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\left(-x-\sqrt{x^2+8}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)}{-x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{x^2-(x^2+8)}{-x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{-x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_\Delta) = \frac{-8}{-\infty} = 0$$

وبالتالي فإن $\boxed{\Delta: y = 2x}$ مقارب مائل فقط عند $-\infty$

3. نظم جدولاً بتغيرات f

f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$\grave{f}(x) \neq 0$$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$\grave{f}(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0

نقط مساعدة : $\boxed{y_\Delta = 2x}$

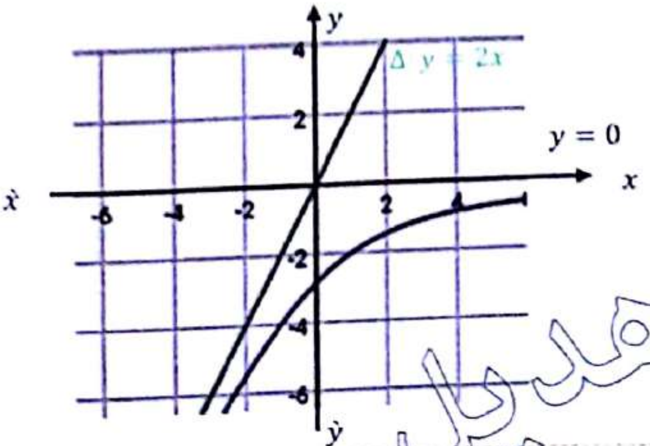
x	0	1
y	0	2
	(0,0)	(1,2)

نقطة التقاطع مع $y\grave{y}$ $\quad x = 0$

$y = f(0) = -2\sqrt{2}$

$(0, -2\sqrt{2})$

4. ارسم مقاربات C ثم ارسم C



30) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$

1. قارن كلاً من $f(-x)$, $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$ استنتج انه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

$$\blacklozenge\ f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x) \qquad ;\begin{pmatrix} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{pmatrix}$$

$$= 3[-\sin x]^2 + 4\cos^3 x = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

ولاحظ انه $x \in R$ فإن $-x \in R$ إذاً f تابع زوجي.

$$\blacklozenge\ f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi) \qquad :\begin{pmatrix} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{pmatrix}$$

$$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

ومنه f تابع دوري ودوره 2π وهو تابع زوجي متناظر بالنسبة لـ $y\grave{y}$ فيكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$

2. اثبت ان $\grave{f}(x) = 6\cos x \times \sin x\,(1 - 2\cos x)$ عند كل عدد حقيقي x

f اشتقاقي على R ومنه:

$$\grave{f}(x) = 3(2)\sin x\,(\cos x) + 4(3)\cos^2 x\,(-\sin x)$$
$$= 6\sin x\cos x - 12\cos^2 x\sin x = 6\sin x\cos x\,(1 - 2\cos x)$$

3. ادرس تغيرات التابع f على $[0,\pi]$

f معرف واشتقاقي على $[0,\pi]$ ومنه: $f(0) = 4 \quad , \quad f(\pi) = -4$

$$\left.\begin{matrix} \grave{f}(x) = 0 \\ 6\cos x\sin x\,(1 - 2\cos x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما}\ \cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}\ : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \\ \text{أو}\ \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}\ : f(0) = 4\,, \boxed{x = \pi} : f(\pi) = -4 \\ \text{أو}\ 1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}\ :\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{11}{4} \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\grave{f}(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	-4

4. ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi, 2\pi]$

31) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$

.1 اثبت ان $f(x + 2\pi) = f(x)$ اياً يكن العدد الحقيقي x

$$f(x + 2\pi) = 4\sin^3(x + 2\pi) + 3\cos(x + 2\pi) = 4\sin^3 x + 3\cos x = f(x)$$

.2 تحقق ان $f'(x) = 3\sin x\,(2\sin 2x - 1)$ اياً يكن العدد الحقيقي x

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 4(3)\sin^2 x\,(\cos x) + 3(-\sin x) = 12\sin^2 x\cos x - 3\sin x$$

$$= 3\sin x\,(4\sin x\cos x - 1) \qquad : \begin{pmatrix} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ 2\sin 2x = 4\sin x\cos x \end{pmatrix}$$

$$= 3\sin x\,(2\sin 2x - 1)$$

.3 ادرس f على مجال طوله 2π وارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi, 2\pi]$

ندرس تغيرات f على المجال $[0,2\pi]$:

f مستمر واشتقاقي على $[0,2\pi]$ $\qquad f(2\pi) = 3 \quad , \quad f(0) = 3$

$$\left.\begin{matrix} f'(x) = 0 \\ 3\sin x\,(2\sin 2x - 1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} : f(0) = 3 \ , \ \boxed{x = \pi} : f(\pi) = -3 \\ \qquad \boxed{x = 2\pi} : f(2\pi) = 3 \\ \text{أو} \quad 2\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\underbrace{\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}}$$

$$2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

$$k = 0 \ : x = \frac{5\pi}{12} \quad : f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \simeq 4{,}38$$

$$k = 1 \ : x = \frac{17\pi}{12} \quad : f\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\simeq -4.38$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

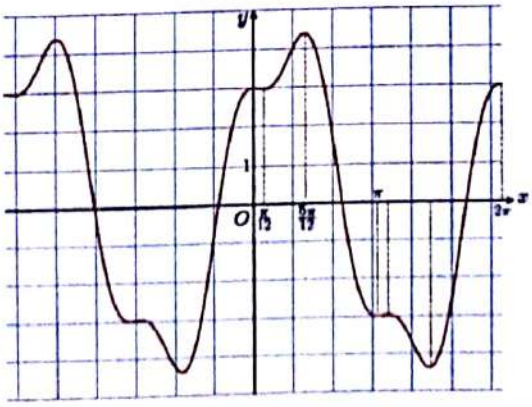
$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k$$

$$k = 0 \ : x = \frac{\pi}{12} \quad : f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \simeq 2{,}97$$

$$k = 1 \ : x = \frac{13\pi}{12} \quad : f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\simeq -2.96$$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	↘	$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	↘	-3	↗	$\frac{1-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	↗	3



32) ليكن f التابع المعرف على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = 4x - \tan^2 x$

1. احسب التابع المشتق $f'(x)$ ضع $\tan x = t$ وتحقق ان $f'(x) = 2(1-t)(t^2+t+2)$

f اشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ علماً ان: $\tan x = t$

ملاحظة: $t^3 + t - 2$ احد حلولها $t = 1$ فهي تقبل القسمة على $t - 1$

$$\begin{array}{r|l} t^3 + t - 2 & t-1 \\ \hline \mp t^3 \pm t^2 & t^2+t+2 \\ \hline t^2 + t - 2 & \\ \mp t^2 \pm t & \\ \hline 2t - 2 & \\ \mp 2t \pm 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

→

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 - 2\tan x\,(1 + \tan^2 x) \\ &= 4 - 2t(1+t^2) \\ &= 4 - 2t - 2t^3 \\ &= -2(t^3 + t - 2) \\ &= -2(t-1)(t^2+t+2) \\ &= 2(1-t)(t^2+t+2) \end{aligned}$$

وهذا المطلوب.

وبما ان $\tan x = t$

$$f'(x) = 2(1-\tan x)(\tan^2 x + \tan x + 2)$$

2. استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I

f مستمر واشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(x) = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{0^+} = -\infty$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 0 \\ 2(1-\tan x)(\tan^2 x + \tan x + 2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 - \tan x = 0 \\ \tan x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}} \end{array} \; : \; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \pi - 1$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	$\pi - 1$	↘	$-\infty$ ‖

3. اثبت ان للمعادلة $f(x) = -1$ في المجال I جذراً وحيداً α

◆ $-1 \notin f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = [0, \pi - 1]$ فليس للمعادلة $f(x) = -1$ جذر في $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

◆ $\left\{\begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتناقص تماماً على } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\\ -1 \in f\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty, \pi - 1[\end{array}\right.$ فللمعادلة $f(x) = -1$ جذر وحيد في $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ جذر وحيد في I

33) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = x\cos x$

1) احسب عند كل x من R : $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 1.\cos x + (-\sin x).x = \cos x - x\sin x$$

$f''(x) = -\sin x - (\sin x + x\cos x) = -2\sin x - x\cos x$

f' اشتقاقي على R

$f'''(x) = -2\cos x - (\cos x - x\sin x) = -3\cos x + x\sin x$

f'' اشتقاقي على R

2) اثبت مستخدماً البرهان بالتدريج، انه مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا :

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$ اياً يكن x من R.

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n = 1$:

$$f(x) = x\cos x \overset{\text{نشتق}}{\longrightarrow} f'(x) = \cos x - x\sin x = L_1$$

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x) = \underbrace{x\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{(بالارجاع)}} + \cos x$$

$$= -x\sin x + \cos x = L_2$$

$L_1 = L_2$ فالخاصة صحيحة من اجل $n = 1$.

- نفرض صحة الخاصة من اجل n اي :

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(صحيحة)}$$

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت :

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

لدينا من الفرض

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

نشتق

$$[f^{(n)}(x)]' = 1.\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - x\underbrace{\sin}_{\text{بالارجاع}}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - n\underbrace{\sin}_{\text{بالارجاع}}\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

إذاً :

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(\frac{\pi}{2} + x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (1+n)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$. فالخاصة السابقة صحيحة مهما تكن $n \geq 1$

34) ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{-1, 1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

1. اوجد عددين حقيقيين b, a يحققان $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ على $R\backslash\{-1, 1\}$

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{ax + a + bx - b}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2-1}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1} \\ f(x) &= \frac{2x+0}{x^2-1} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بالمطابقة}} \left.\begin{aligned} a+b&=2 \\ a-b&=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2a = 2 \Longrightarrow \boxed{a=1} \xrightarrow[\text{احدى المعادلتين}]{\text{نعوض في}} \boxed{b=1}$$

2. بالاستفادة مما سبق اوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $R\backslash[-1, 1]$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\grave{\grave{f}}(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\underbrace{\grave{\grave{\grave{f}}}(x)}_{\vdots} = \underbrace{\frac{-6}{(x-1)^4}}_{\vdots} + \underbrace{\frac{-6}{(x+1)^4}}_{\vdots}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n . n!}{(x+1)^{n+1}}$$

35) إيجاد تابع:

نفترض وجود تابع f معرف على R واشـــتقاقي عليه ويحقق: $f(0) = 0$ و $\grave{f}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ عند كل x من R وليكن C خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

① ليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x) = f(x) + f(-x)$

.a تحقق ان g اشتقاقي على R واحسب $\dot{g}(x)$

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

بما أن f اشتقاقي على R فرضاً فإن g اشتقاقي على R لانو مشتق $-x = -1$

$$\dot{g}(x) = \grave{f}(x) - \grave{f}(-x)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

لانو في تربيع [illegible]

.b احسب $g(0)$ واستنتج ان التابع f فردي.

$$g(0) = f(0) + f(0) = 0 + 0 = 0$$

بما أن $\begin{cases} \dot{g}(x) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ فإن $g(x)$ تابع ثابت ومنه $g(x) = 0$

$$f(x) + f(-x) = 0$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه f تابع فردي.

البيطار

② ليكن h التابع المعرف على $]0,+\infty[= I$ وفق: $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

a. تحقق ان h اشتقاقي على I واحسب $h'(x)$ على I.

- $f(x)$ اشتقاقي على R فرضاً فهو اشتقاقي على I
- $f\left(\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$

h اشتقاقي على I

$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

b. اثبت ان $h(x) = 2f(1)$ اياً يكن x من I.

$$h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$h(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

بما ان $h'(x) = 0$ فهو تابع ثابت وبما ان $h(1) = 2f(1)$ فانه مهما يكن x من I فإن $\boxed{h(x) = 2f(1)}$

c. استنتج ان نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$

لدينا: $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\underset{\underset{\text{ثابت}}{\Downarrow}}{\lim_{x\to+\infty} h(x)} = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2f(1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + f(0) \qquad : f(0) = 0$$

$$\boxed{2f(1) = \lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

d. ماذا تستنتج بشان الخط البياني C ؟

بما ان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2f(1)$ فإن: $y = 2f(1)$ مقارب افقي للخط C // $x\acute{x}$ بجوار $+\infty$

③ ليكن k التابع المعرف على $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $k(x) = f(\tan x) - x$

a. احسب $k'(x)$ ماذا تستنتج بشان التابع k؟

$$k'(x) = (1+\tan^2 x) \cdot \underset{\Downarrow}{f'(\tan x)} - 1$$

$$= (1+\tan^2 x) \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

← معروف في $\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

بما ان $k'(x) = 0$ فإن $k(x)$ تابع ثابت ويكون:

$$k(0) = f(\tan(0)) - 0 = f(0) - 0 = 0 \Longrightarrow \boxed{k(x) = 0}$$

b. احسب $f(1)$

$$k(x) = f(\tan x) - x$$

اياً يكن $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \underset{\Downarrow}{k\left(\frac{\pi}{4}\right)} = f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$$

$$0 = f(1) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{f(1) = \frac{\pi}{4}}$$

c. نظم جدولاً بتغيرات f على R.

نلاحظ ان $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2f(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

البيطار

وبما ان f تابع فردي فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

d. ارسم المستقيمات المقاربة للخط C وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها $1-$ و 0 و 1 ثم ارسم C.

- المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 1$:

$$f(1) = \frac{\pi}{4} \qquad : \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(1) = m = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)}$$

- المماس في النقطة التي فاصلتها $x = -1$:

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad : \left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$$

« لأن f تابع فردي»

$$f'(-1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

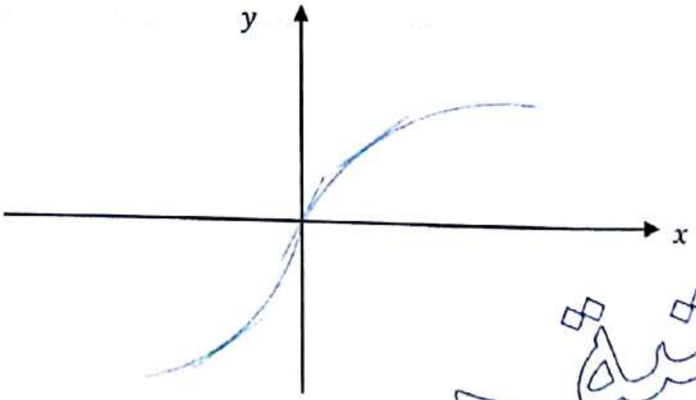
$$\boxed{y + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x+1)}$$

- المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 0$:

$$f(0) = 0 \qquad : \ (0,0)$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\boxed{y = x}$$



نهاية المتتالية

تعريف 1 . نقول إن عدداً حقيقياً ℓ هو نهاية للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ إذا ضم كل مجال مفتوح مركزه ℓ و نصف قطره ε جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها).

$$u_n \in \left]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right[\Leftrightarrow |u_n-\ell| < \varepsilon$$

- إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ تكون المتتالية متقاربة من ℓ

متتاليات مرجعية :

المتتاليات $(u_n)_{n\geq1}$ التي حدها العام معطى بإحدى الصيغ الآتية :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n^2} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n^3} \quad , \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

هي جميعها متتاليات مرجعية وتكون : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

تعريف 2 : نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تسعى إلى $+\infty$ إذا ضم كل مجال من النمط $]A,+\infty[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها).

أو: أياً يكن العدد الحقيقي M وُجِد عدد طبيعي A يحقق :

إذا كان $n > A$ كان $u_n > M$

* * *

متتاليات مرجعية :

المتتاليات $(u_n)_{n\geq0}$ التي حدها العام معطى بإحدى الصيغ الآتية :

$$u_n = n \quad , \quad u_n = n^2 \quad , \quad u_n = n^3 \quad , \quad u_n = \sqrt{n}$$

هي جميعها متتاليات مرجعية و تكون : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

تمرين: تسعى المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$ إلى 3

عين عدداً طبيعياً n_0 يحقق الشرط : إذا كان $n > n_0$ كان: $u_n \in]2.99, 3.01[$

الحل :

$$\ell = \frac{3.01+2.99}{2} = 3$$

$$\varepsilon = \frac{3.01-2.99}{2} = 0.01$$

حتى تنتمي u_n إلى المجال $]2.99 , 3.01[$ يجب أن تتحقق المتراجحة :

$$|u_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < 0.01$$

$$\left|\frac{-4}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{4}{n+1} < \frac{1}{100}$$

$$400 < n+1 \Rightarrow 399 < n$$

و بالتالي يمكن ان نختار $n_0 = 399$

فالمجال $]2.99,3.01[$ يحوي جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بدءاً من الحد ذا الدليل 400.

المتتالية الهندسية.

مبرهنة : ليكن q عدد حقيقي عندئذٍ :

- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
- إذا كان $q > 1$ فإن: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$
- إذا كان $q < -1$ فإنه ليس للمتتالية نهاية.
- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية $(q^n)_{n\geq 0}$ ثابتة وجميع حدودها تساوي 1 و $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$

* * *

تمارين :

- المتتالية الهندسية المعرفة وفق: $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ متقاربة من الصفر $\left(\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\right)$ لان $-1 < q = \frac{1}{3} < 1$
- المتتالية الهندسية المعرفة وفق : $u_n = 3^n$ متباعدة $\left(\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty\right)$ لان $q = 3 > 1$
- المتتالية الهندسية: $u_n = \frac{5^n - 4^n}{5^n - 1}$ متقاربة من الواحد لأن :

$$u_n = \frac{5^n\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}{5^n\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]} = \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ عندئذٍ : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

* * *

تمرين هام :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق : $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$

اثبت ان $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و احسب نهايتها.

نعلم أن:

مجموع n حداً من متتالية هندسية فيها :

$$q = \frac{1}{2} \quad , \quad u_1 = \frac{1}{2}$$

$$S = u_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} . \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right] \\ &= 1 - \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right] \end{aligned}$$

نعوض في u_n

$$u_n = 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

إذاً u_n متتالية هندسية $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$ فهي متقاربة : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

* * *

تدرب صفحة 119 :

1 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}$ نعلم ان : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ عند كل $n > n_0$.

$$\ell = \frac{10^{-3} - 10^{-3}}{2} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{10^{-3} + 10^{-3}}{2} = 10^{-3}$$

حتى تنتمي المتتالية u_n إلى المجال $]-10^{-3}, 10^{-3}[$ يجب ان تتحقق المتراجحة :

$$|u_n \quad - \ell| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n\sqrt{n}} - 0\right| < 10^{-3}$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \quad < \frac{1}{10^3}$$

$$10^3 < n\sqrt{n}$$ نربع

$$10^6 < n^3$$ نجذر تكعيبياً

$$\boxed{100 < n}$$

و بالتالي يمكن ان نختار $n_0 = 100$

فالمجال $]-10^{-3}, 10^{-3}[$ يحوي جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ بدءاً من الحد ذا الدليل 101.

---

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ معرفة وفق $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$ و نهايتها تساوي 3

جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n اكبر تماماً من n_0 .

$$\ell = \frac{3.02 + 2.98}{2} = 3$$

$$\varepsilon = \frac{3.02 - 2.98}{2} = 0.02$$

حتى تنتمي المتتالية u_n إلى المجال $]2.98, 3.02[$ يجب أن تتحقق المتراجحة : $u_n \in]2.98, 3.02[$

$$|u_n \quad - \quad \ell| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n+1}{n-1} - 3\right| < 0.02$$

$$\left| \quad \frac{4}{n-1} \quad \right| < \frac{2}{100}$$

$$\frac{4}{n-1} \quad < \frac{2}{100}$$

$$200 < n - 1 \Rightarrow 201 < n$$

و بالتالي يمكن أن نختار $n_0 = 201$

فالمجال $]2.98, 3.02[$ يحوي جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ بدءاً من الحد ذا الدليل 202.

---

3 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$ نعلم ان : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n اكبر تماماً من n_0

لدينا:

$$u_n > 10^6$$

$$n\sqrt{n} > 10^6$$ نربع

$$n^3 > 10^{12}$$ نجذر تكعيبياً

$$\boxed{n > 10^4}$$

و بالتالي يمكن أن نختار $n_0 = 10000$

4 احسب نهاية كل من المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ ، $(x_n)_{n\geq0}$ حيث :

$$y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} \quad , \quad x_n = \frac{3^n}{2^n}$$

$$x_n = \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$q = \frac{3}{2} > 1$ $\boxed{\text{لان}}$

$$y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} = \left(\frac{10}{10.1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$-1 < q = \frac{10}{10.1} < 1$ $\boxed{\text{لان}}$

---

5 ليكن $-1 < q < 1$ ، و لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة :

$$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

اعط صيغة اخرى تفيد في حساب u_n واستنتج قيمة $S = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

$$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

$$= \underbrace{q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1-q}$$

لان $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ $(-1 < q < 1)$ من الفرض).

<u>نلاحظ ان u_n عبارة عن:</u>

مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية فيها

أساسها $q =$ ، حدها الأول $= 1$

$$\text{مجموع حدودها} = 1 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

---

6 نتامل المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ ، $(x_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق :

$$y_n = x_n + 3 \quad , \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \end{cases}$$

① a) اثبت ان المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ هندسية.

$$y_{n+1} = \underbrace{x_{n+1}}_{\Downarrow} + 3$$

$$= \frac{1}{3}x_n - 2 + 3$$

$$= \frac{1}{3}x_n + 1$$

$$= \frac{1}{3}(\underbrace{x_n + 3})$$

$y_{n+1} = \frac{1}{3} \; y_n \Rightarrow$ فالمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ هندسية اساسها $q = \frac{1}{3}$

b) احسب y_n ثم x_n بدلالة n.

$(y_n)_{n\geq0}$ هندسية فيها $q=\frac{1}{3}$

$$y_0 = \underset{\smile}{x_0} + 3$$

$$= 3 + 3 = 6$$

$$y_n = y_0 . q^n$$

$$\boxed{y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$y_n = x_n + 3$$

$$\Rightarrow 6\left(\frac{1}{3}\right)^n = x_n + 3$$

$$\boxed{x_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3}$$

② نضع : $S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ ، $\grave{S}_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$

a) احسب كلاً من S_n ، $\grave{S}_n$ بدلالة n.

$$S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$$

$$y_0 = 6 \ , \quad q = \frac{1}{3}$$

$$S_n = 6.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{S_n = 9\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

$$\grave{S}_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

$$= \overset{\uparrow}{\overbrace{y_0 - 3}} + \overset{\uparrow}{\overbrace{y_1 - 3}} + \cdots + \overset{\uparrow}{\overbrace{y_n - 3}}$$

$$= \underbrace{y_0 + y_1 + \cdots + y_n}_{S_n} + \underbrace{(-3-3-\cdots-3)}_{n+1 \text{ مرة}}$$

$$\boxed{\grave{S}_n = 9\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - 3(n+1)}$$

ملاحظة : لماذا $(n+1)$ مرة و ليس n مرة لأننا بدأنا من y_0 و ليس من y_1.

b) استنتج نهاية كلاً من $(S_n)_{n\geq0}$ ، $(\grave{S}_n)_{n\geq0}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 9 \qquad \lim_{n\to\infty} \grave{S}_n = 9 - \infty = -\infty$$

لأن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ حيث $-1 < q = \frac{1}{3} < 1$

---

7 نتأمل متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق العلاقة التدريجية :

$$\begin{cases} u_0 = s \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

① نفرض أن $a = 1$ ، تيقن أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية في هذه الحالة و احسب u_n بدلالة n ، b ، s في هذه الحالة .

$$a = 1 \Rightarrow \quad u_{n+1} = u_n + b$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = b}$$

b عدد ثابت

فالمتتالية حسابية أساسها $r = b$ و $u_0 = s$ إذاً :

$$u_n = u_0 + r\,n$$

$$\boxed{u_n = s + bn}$$

② هنا نفترض ان $a = 1$ و نضع ℓ الحل الوحيد للمعادلة $x = ax + b$

a) نعرف $(t_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $t_n = u_n - \ell$ برهن ان $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

ℓ هو الحل الوحيد للمعادلة

$$x = ax + b$$

$$\ell = a\ell + \mathrm{b}$$

$$\ell - a\ell = \mathrm{b}$$

$$\ell(1-a) = \mathrm{b}$$

$$\boxed{\ell = \frac{b}{1-a}}$$

أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية

$$t_{n+1} = u_{n+1} - \ell$$

$$= \overbrace{au_n + b}^{\uparrow} - \overbrace{\frac{b}{1-a}}^{\uparrow}$$

$$= au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a}$$

$$= au_n + \frac{b - ba - b}{1-a}$$

$$= au_n - \frac{ba}{1-a} = a\left(u_n - \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{\ell}\right)$$

$$= a\left(\underbrace{u_n - \ell}_{t_n}\right) = at_n$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $t_{n+1} = at_n \Rightarrow \boxed{q = a}$

b) استنتج صيغة t_n بدلالة S, a, b, n في هذه الحالة .

$(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية و أساسها $q = a$

حدها الأول:

$$t_0 = \underbrace{u_0}_{\downarrow} - \underbrace{\ell}_{\downarrow}$$

$$t_0 = s - \frac{b}{1-a}$$

$$t_n = t_0 . q^n$$

$$\boxed{t_n = \left(s - \frac{b}{1-a}\right) . a^n}$$

c) برهن انه في حالة $-1 < a < 1$ تتقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و احسب نهايتها بدلالة a, b

لدينا: $-1 < a < 1$: $t_n = \left(s - \frac{b}{1-a}\right)a^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = 0$

لكن:

$$t_n = u_n - \ell$$

$$u_n = t_n + \ell$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(t_n + \ell)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} t_n}_{\downarrow} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \ell}_{\downarrow}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 + \frac{b}{1-a}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{b}{1-a}}$$

تدرب صفحة 123:

① المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$. تحقق ان $\frac{-1}{\sqrt{n}} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ و ذلك اياً يكن $1 \geq n$ ،ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$.

اياً يكن $n \geq 1$ فإن :

$$-1 \leq \cos(2n) \leq 1$$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}}_{\downarrow} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \quad u_n \quad \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

و نلاحظ ان :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{حسب الإحاطة}} \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

② المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة بالصيغة: $u_n = n + 1 - \cos n$. تحقق ان $n \leq u_n \leq n + 2$ و ذلك اياً يكن $n \geq 1$ ،ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$.

اياً يكن $n \geq 1$ فإن :

$$-1 \leq \quad \cos n \quad \leq 1 \qquad \text{نضرب بـ}(-1)$$

$$1 \geq \quad -\cos n \quad \geq -1 \qquad \text{نضيف } n+1 \text{ :}$$

$$n + 1 + 1 \geq \underbrace{n + 1 - \cos n}_{\downarrow} \geq n + 1 - 1$$

$$n + 2 \geq \quad u_n \quad \geq n$$

و نلاحظ ان :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(n) &= +\infty \\ \lim_{n\to\infty}(n+2) &= +\infty \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{حسب الإحاطة}} \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

③ فيما ياتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ في حال وجودها:

1) $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{3}$	2) $u_n = \frac{5n-3}{3n-5}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{5}{3}$
3) $u_n = n - \frac{1}{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$	4) $u_n = \frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = 5$
5) $u_n = \frac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-3}{2}$	6) $u_n = \frac{n}{4} - \frac{2n}{n^2+1}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$
7) $u_n = \frac{10n-3}{n^2+1}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$	8) $u_n = \frac{2n^2-1}{3n+5}$ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

9) $u_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

علماً ان: $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{n+1} = 4$

10) $u_n = \sqrt{\frac{2n^2-1}{3n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

11) $u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{2}$$

علماً ان: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n\pi}{3n+1} = \frac{2\pi}{3}$

12) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

علماً ان: $\lim_{n\to\infty} \frac{n\pi+1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

13) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$

نعلم ان : $-1 \le (-1)^n \le +1$

$$-1+2n \le (-1)^n + 2n \le 1+2n$$

$$\frac{-1+2n}{3n} \le \frac{(-1)^n+2n}{3n} \le \frac{1+2n}{3n}$$

$$\frac{-1+2n}{3n} \le u_n \le \frac{1+2n}{3n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1+2n}{3n} = \frac{2}{3} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2n}{3n} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حسب الإحاطة}} \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

14) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

15) $u_n = \frac{n!-2}{n!}$

$$u_n = \frac{n!}{n!} - \frac{2}{n!} = 1 - \frac{2}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

علماً ان : $\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{n!} = 0$

16) $u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$u_n = \frac{(\sqrt{2n^2-5}-n\sqrt{2})(\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2})}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

17) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

نوحد المقامات

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$$

$$u_n = \frac{n\left[\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right]}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n+2}} = \frac{n\left[\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)\right]}{\left(\sqrt{n+1}.\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$$

$$u_n = \frac{n(n+2-n-1)}{\sqrt{n^2+3n+2}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

علماً أن $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 1$

18) $u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n = \frac{n\left(\sqrt{n}+1\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{1+\frac{2}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

19) $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ حالة عدم تعيين $\infty.0$

$$u_n = n^2\left(\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}\right)$$

$$= n^2\left(\frac{2+\frac{1}{n}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}\right) = n^2\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}\right)$$

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

20) $u_n = \frac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ $\infty - \infty$ عدم تعيين

$$u_n = \frac{\left(3n - \sqrt{9n^2+1}\right)\left(3n + \sqrt{9n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+5}\right)\left(3n + \sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$$= \frac{9n^2 - 9n^2 - 1}{\left(\sqrt{n^2+5}\right)\left(3n + \sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\left(\sqrt{n^2+5}\right)\left(3n + \sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

21) $u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$$u_n = \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

تقارب المتتاليات المطردة

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

المتتالية محدودة من الأعلى :

نقول ان $(u_n)_{n\ge0}$ محدودة من الأعلى إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي M يحقق المتراجحة $u_n \le M$ ايا ً كان $n \in N$.

* نسمي M عنصرا ً راجحا ً على المتتالية .

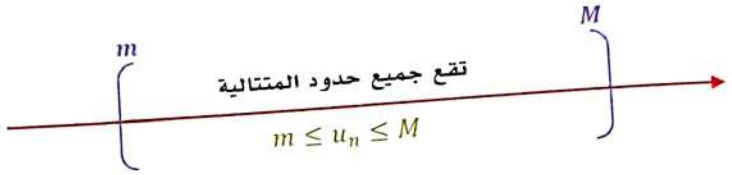
* كل عدد حقيقي اكبر من M هو عنصر راجح ايضا ً

المتتالية محدودة من الأدنى :

نقول ان $(u_n)_{n\ge0}$ محدودة من الأدنى إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي m يحقق المتراجحة $u_n \ge m$ ايا ً كان $n \in N$

* نسمي m عنصرا ً قاصرا ً على المتتالية .

* كل عدد حقيقي اصغر من m هو عنصر قاصر ايضا ً



مثال : اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ محدودة من الأدنى و محدودة من الأعلى

نعلم أن : $n \ge 0$

لدينا $\sqrt{n+1} \ge \sqrt{n}$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ge 0$

$\boxed{u_n \ge 0}$

المتتالية محدودة من الأدنى .

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

بعد الضرب بالمرافق

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

لدينا $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \ge 1$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le 1$$

$\boxed{u_n \le 1}$

المتتالية محدودة من الأعلى .

$$0 \le u_n \le 1$$

المتتالية محدودة من الأدنى ومحدودة من الأعلى

* * *

دراسة المتتاليات المطردة

مبرهنة ① :

كل متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى تنتهي إلى $+\infty$ (متباعدة نحو $+\infty$)

مبرهنة ② :

كل متتالية متناقصة و غير محدودة من الأدنى تنتهي إلى $-\infty$ (متباعدة إلى $-\infty$)

مبرهنة ③ :

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة

مبرهنة ④ :

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة

ملاحظات :

1) إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون نهايتها l هي أصغر العناصر الراجحة عليها
و نقول أن l هي الحد الأعلى للمتتالية .

2) إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون نهايتها l أكبر العناصر القاصرة عنها
و نقول أن l هي الحد الأدنى للمتتالية .

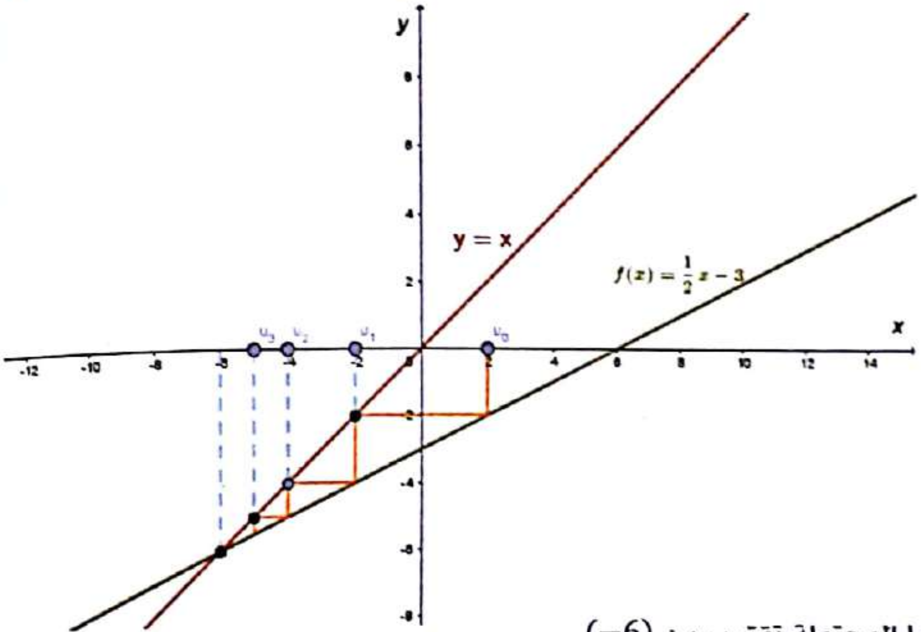
3) إذا كانت المتتالية غير محدودة من الأعلى فليس بالضرورة تنتهي إلى $+\infty$

* * *

تدريب صفحة 128:

① في كل من الحالات الآتية، مثل هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ ، ثم خمن جهة إطرادها إذا كانت مطردة ونهايتها المحتملة.

1) $u_0=2$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3$



$$f(x)=\frac{1}{2}x-3$$

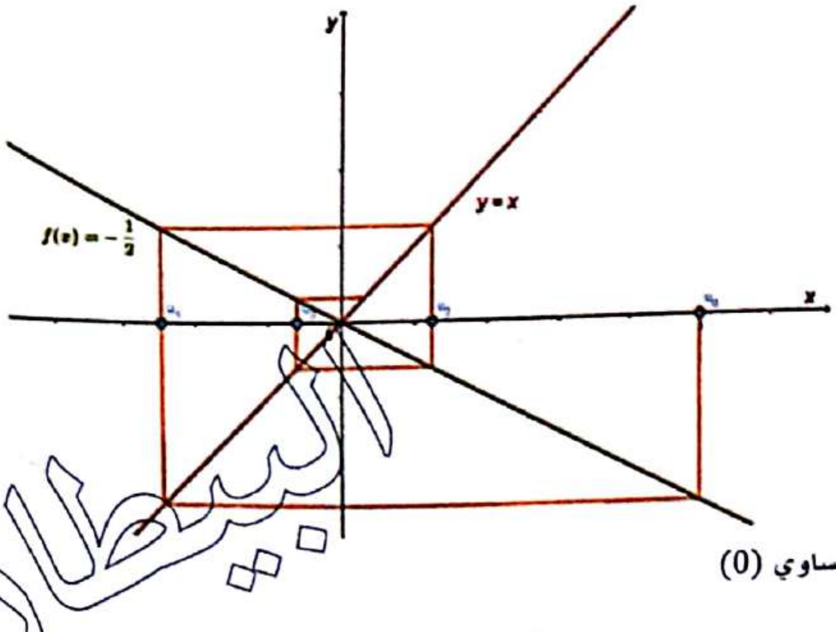
x	0	6
$f(x)$	-3	0

بالحل المشترك ⇒ $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x-3\\ y=x\end{cases}$

$$x=\frac{1}{2}x-3$$
$$\frac{1}{2}x=-3$$
$$x=-6$$

نلاحظ أن المتتالية مطردة (متناقصة) ونهايتها المحتملة تقترب من (-6)

2) $u_0=1$, $u_{n+1}=\frac{-1}{2}u_n$



$$f(x)=-\frac{1}{2}x$$

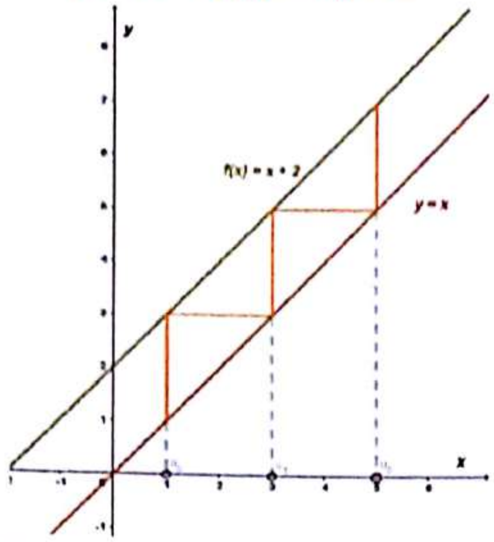
x	0	2
$f(x)$	0	-1

بالحل المشترك ⇒ $\begin{cases} f(x)=\frac{-1}{2}x\\ y=x\end{cases}$

$$x=\frac{-1}{2}x$$
$$\frac{3}{2}x=0$$
$$x=0$$

نلاحظ أن المتتالية غير مطردة ونهايتها المحتملة تساوي (0)

3) $u_0 = 1 \ , \ u_{n+1} = u_n + 2$



$f(x) = x + 2$

x	0	-2
$f(x)$	2	0

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x + 2 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ بالحل المشترك

$x = x + 2$

مستحيلة $x = 0$

نلاحظ ان المتتالية مطردة (متزايدة) ولا يوجد لها نهاية حقيقية اي:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

② تامل المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$. بين اي الاعداد الآتية راجع عليها: 0 , 6 , 4.99999, 5 ؛

الحل: بما ان $\frac{10}{n^2}$ مقدار موجب تماماً فإن $5 - \frac{10}{n^2} < 5 < 6$

ومنه فإن العددين (5) و (6) عنصران راجحان عليها.

③ تامل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ اثبت ان $1 \leq u_n \leq 3$ اياً يكن العدد الطبيعي n.

$$u_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 \quad = \frac{n^2+n+1-n^2+n-1}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{2n}{n^2-n+1} \geq 0 \ \Rightarrow \ u_n - 1 \geq 0 \Rightarrow \quad \boxed{u_n \geq 1} \ \boxed{\boxed{1}}$$

$$u_n - 3 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3 \quad = \frac{n^2+n+1-3n^2+3n-3}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1} \quad = \frac{-2(n^2-2n+1)}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{-2(n-1)^2}{n^2-n+1} \leq 0 \ \Rightarrow \ u_n - 3 \leq 0 \Rightarrow \boxed{u_n \leq 3} \ \boxed{\boxed{2}}$$

من $\boxed{\boxed{1}}$ و $\boxed{\boxed{2}}$ نجد ان: $\boxed{1 \leq u_n \leq 3}$

④ فيما ياتي اعط متتاليتين $(t_n)_{n\geq2}$ ، $(S_n)_{n\geq2}$ مختلفتان عن $(u_n)_{n\geq2}$ وتحققان:

$t_n \leq u_n \leq S_n$ اياً يكن $n \geq 2$.

1) $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{n+3}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq \ u_n \leq \frac{n+3}{n+1}$$

2) $u_n = \frac{5n+1}{n+1}$

$$\frac{5n}{n+1} \le \frac{5n+1}{n+1} \le \frac{5n+2}{n+1}$$

$$\frac{5n}{n+1} \le u_n \le \frac{5n+2}{n+1}$$

3) $u_n = \frac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$

$$\frac{2n-4}{(n-1)(n+2)} \le \frac{2n-3}{(n-1)(n+2)} \le \frac{2n-2}{(n-1)(n+2)}$$

$$\frac{2n-4}{(n-1)(n+2)} \le u_n \le \frac{2n-2}{n+2}$$

4) $u_n = \frac{n^2-4n+7}{n-1}$

$$\frac{n^2-4n+6}{n-1} \le \frac{n^2-4n+7}{n-1} \le \frac{n^2-4n+8}{n-1}$$

$$\frac{n^2-4n+6}{n-1} \le u_n \le \frac{n^2-4n+8}{n-1}$$

5) $u_n = \sqrt{2+n}$

$$\sqrt{1+n} \le \sqrt{2+n} \le \sqrt{3+n}$$

$$\sqrt{1+n} \le u_n \le \sqrt{3+n}$$

6) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}} \le \frac{1}{\sqrt{n+2}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}} \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

---

⑤ فيما ياتي، بين إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ محدودة، او محدودة من الأعلى، او من الادنى.

1) $u_n = \sin n$

أياً يكن $n \ge 1$ فإن:

$$-1 \le \sin n \le 1$$

$$-1 \le u_n \le 1$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى والأدنى.

2) $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$n \ge 1$

$n^2 \ge 1$

$$0 \le \frac{1}{n^2} \le 1$$

$$1 \le 1 + \frac{1}{n^2} \le 2$$

$$1 \le u_n \le 2$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى والأدنى.

3) $u_n = \frac{1}{n+2}$

بما ان $n \geq 1$ فإن $n+2 \geq 3$

$$0 \leq \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}$$

$$0 \leq \ u_n \ \leq \frac{1}{3}$$

فالمتتالية محدودة من الأدنى والأعلى.

4) $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

بما ان $n \geq 1$ فإن $n^2 \geq 1$

$$1 + n^2 \geq 2$$

$$0 \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \ u_n \ \leq \frac{1}{2}$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى والأدنى.

5) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

نعلم أن $n^2 + 1 \geq n^2$

بالجذر $\sqrt{n^2+1} \geq n$

$\div \sqrt{n^2+1}$ $\quad 1 \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \geq 0$

$$1 \geq \ u_n \ \geq 0$$

فالمتتالية محدودة من الأدنى والأعلى.

6) $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$

نعلم أن $n^2 - 1 \leq n^2 + 1$

$\div (n^2+1)$ $\quad 0 \leq \frac{n^2-1}{n^2+1} \leq 1$

نجذر $\quad 0 \leq \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}} \leq 1$

$$0 \leq \ u_n \ \leq 1$$

فالمتتالية محدودة من الأدنى والأعلى.

7) $u_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$

نعلم أن : $n \geq 1$

$$2n \ \geq 2$$

$$2n + 3 \geq 5$$

نجذر $\quad \sqrt{2n+3} \geq \sqrt{5}$

نأخذ المقلوب $\quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$

نضرب بـ -2 $\quad 0 \geq \frac{-2}{\sqrt{2n+3}} \geq \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$0 \geq \ u_n \ \geq \frac{-2}{\sqrt{5}}$ فالمتتالية محدودة من الأدنى والأعلى.

8) $u_n = n\sqrt{3} - 2$

نعلم أن : $n \geq 1$

$\sqrt{3}n \geq \sqrt{3}$

$\sqrt{3}n - 2 \geq \sqrt{3} - 2$

$u_n \geq \sqrt{3} - 2$

فالمتتالية محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى لأن: $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

9) $u_n = n^2 + n - 1$

بما أن $n \geq 1$ فإن $\underbrace{n^2 + n - 1}_{u_n} \geq 1$

$u_n \geq 1$

فالمتتالية محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى لأن: $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

10) $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$

نكتب u_n بشكل أبسط : $u_n = \dfrac{n^3 + n^2 + 1}{n + 1}$

بما أن $n \geq 1$ وجميع حدود المتتالية موجبة تماماً فإن $u_n \geq \frac{3}{2}$

فالمتتالية محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى لأن: $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

11) $u_n = n + \cos n$

و بما أن $n \geq 1$ و $-1 \leq \cos n \leq 1$ و منه : $\underbrace{n + \cos n}_{u_n} \geq 0$

$u_n \geq 0$

فالمتتالية محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى لأنه باستخدام مبرهنة الإحاطة نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

12) $u_n = (-1)^n . n^2$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$-n^2 \leq (-1)^n n^2 \leq n^2$

$\lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$ غير محدودة من الأدنى

$\lim_{n\to\infty} (n^2) = +\infty$ غير محدودة من الأعلى

المتتالية ليست مطردة وهي متناوبة وغير محدودة.

⑥ لتكن المتتالية المعرفة بالصيغة:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

1) اثبت بالتدريج على العدد n ، ان $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

نرمز للقضية $n \leq 2^n$ بـ $E(n)$:

- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n = 0$:

$L_1 = 0$

$L_2 = 2^0 = 1 \Rightarrow 0 \leq 1$ محققة

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 0$

- نفرض أن الخاصة صحيحة من أجل n اي: $n \leq 2^n$ صحيحة
- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ اي: $n + 1 \leq 2^{n+1}$

- **من الفرض لدينا:**

$$n \le 2^n$$

نضرب بالعدد 2

$$\underbrace{2n}_{\Downarrow} \le 2^n.2$$

$$n+1+\underbrace{n}_{\text{موجب}} \le 2^{n+1}$$

$$\boxed{n+1 \le 2^{n+1}}$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

فالخاصة السابقة صحيحة من أجل $n \in N$

2) استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

$$u_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\dots+\frac{n}{3^n}$$

بما أن $\begin{cases} n \le 2^n \\ 1 \le 2^1 \\ 2 \le 2^2 \\ 3 \le 2^3 \end{cases}$ $\Leftarrow$ **يمكن ان نكتب**

$$\le \frac{2^1}{3^1}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\dots+\frac{2^n}{3^n}$$

$$\le \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{حداً } n}$$

يمثل الطرف الأيمن مجموع حدود لمتتالية هندسية حدها الأول $\frac{2}{3}$ وأساسها $\frac{2}{3}$

$$u_n \le \frac{2}{3}.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$u_n \le 2 \underbrace{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{سالب}}$$

$$u_n \le 2$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى بالعدد (2) وهو عنصر راجح عليها.

* * *

متتاليات متجاورة

تعريف: نقول إن المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا تحقق:

- **إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.**
- **تقارب المتتالية $(S_n-t_n)_{n\ge0}$ من الصفر.**

مبرهنة: نتأمل متتاليتين متجاورتين $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ عندئذ:

1) **تكون المتتاليتان $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ متقاربتين.**

2) **يكون للمتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ النهاية نفسها.**

تمرين: اثبت ان المتتاليتان $(t_n)_{n\ge1}$ ، $(S_n)_{n\ge1}$ المعرفتان وفق:

$t_n = \frac{n}{n+1}$ ، $S_n = \frac{n+1}{n}$ متجاورتان؟

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$S_n = \frac{n+1}{n}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - (n+1)^2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\ge1}$ متناقصة تماماً

$$t_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$t_n = \frac{n}{n+1}$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\ge1}$ متزايدة تماماً

$$S_n - t_n = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - t_n) = 0$$

إذاً المتتاليتين $(t_n)_{n\ge1}$ ، $(S_n)_{n\ge1}$ متجاورتين.

* * *

تمرين: نتأمل المتتاليتين: $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ المعرفتين تدريجياً وفق:

$$\begin{cases} S_0 = 12 \\ S_{n+1} = \dfrac{t_n + 3S_n}{4} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n + 2S_n}{3} \end{cases}$$

1) اثبت ان المتتالية $(S_n - t_n)_{n\ge0}$ هندسية. واحسب نهايتها.

$$\hbar_n = S_n - t_n$$

$$\hbar_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1} \quad = \frac{t_n + 3S_n}{4} - \frac{t_n + 2S_n}{3} = \frac{3t_n + 9S_n - 4t_n - 8S_n}{12}$$

$$\hbar_{n+1} = \frac{1}{12}\left(\underbrace{S_n - t_n}\right)$$

$$\hbar_{n+1} = \frac{1}{12} \quad \hbar_n$$

$\Rightarrow q = \frac{1}{12}$ المتتالية $(\hbar_n)_{n\ge0}$ هندسية واساسها

بما ان $-1 < q = \frac{1}{12} < 1$ إذاً المتتالية متقاربة ونهايتها (0).

$$\hbar_n = S_n - t_n$$

$$\hbar_0 = S_0 - t_0 = 12 - 1 = 11 > 0 \Rightarrow \boxed{S_n - t_n > 0}$$

2) اثبت ان المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ متجاورتان:

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= \frac{t_n+3S_n}{4}-S_n \\ &= \frac{t_n+3S_n-4S_n}{4} \\ &= \frac{t_n-S_n}{4} \\ &= \frac{-1}{4}\underbrace{(S_n-t_n)}_{>0}<0 \end{aligned}$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً

$$\begin{aligned} t_{n+1}-t_n &= \frac{t_n+2S_n}{3}-t_n \\ &= \frac{t_n+2S_n-3t_n}{3} \\ &= \frac{2S_n-2t_n}{3} \\ &= \frac{2}{3}\underbrace{(S_n-t_n)}_{>0}>0 \end{aligned}$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً

ومن الطلب (1) بما ان $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-t_n)=0$ نجد ان المتتاليتين السابقتين متجاورتين.

3) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق $u_n=3t_n+8S_n$ ثابتة:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 3t_{n+1}+8S_{n+1}-3t_n-8S_n \\ &= 3\underbrace{(t_{n+1}-t_n)}_{}+8\underbrace{(S_{n+1}-S_n)}_{} \\ &= 3\left[\frac{2}{3}(S_n-t_n)\right]+8\left[-\frac{1}{4}(S_n-t_n)\right] \\ &= 2(S_n-t_n)-2(S_n-t_n) \end{aligned}$$

$$u_{n+1}-u_n=0 \implies \boxed{u_{n+1}=u_n}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ ثابتة و لإيجاد قيمتها:

$$\begin{aligned} u_0 &= 3t_0+8S_0 \\ &= 3(1)+8(12)=99 \implies \boxed{u_n=99} \end{aligned}$$

4) اوجد نهاية كل من المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$

المتتاليات $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ ، $(u_n)_{n\ge0}$ جميعها متقاربة.

لدينا: $u_n=3t_n+8S_n$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=3\lim_{n\to\infty}t_n+8\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$99=3\ \ell\ +8\ \ell$$

$$99=11\,\ell \implies \boxed{\ell=9}$$

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}S_n=9$$

تدرب صفحة 132:

① لتكن $(t_n)_{n\ge0}$ ، $(S_n)_{n\ge0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق: $t_n=\frac{-1}{2n+4}$ ، $S_n=\frac{1}{n+1}$.
اثبت انهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة.

$$S_{n+1}=\frac{1}{n+2}$$

$$S_n=\frac{1}{n+1}$$

$$t_{n+1}=\frac{-1}{2(n+1)+4}=\frac{-1}{2n+6}$$

$$t_n=\frac{-1}{2n+4}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً

$$t_{n+1} - t_n = \frac{-1}{2n+6} + \frac{1}{2n+4}$$
$$= \frac{-2n-4+2n+6}{(2n+6)(2n+4)}$$
$$= \frac{2}{(2n+6)(2n+4)} > 0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

و نبرهن ان نهاية الفرق $\lim_{n\to\infty}(S_n - t_n) = 0$

$$S_n - t_n = \frac{1}{n+1} - \frac{-1}{2n+4}$$
$$= \frac{2n+4+n+1}{(n+1)(2n+4)} = \frac{3n+5}{2n^2+6n+4}$$

$\lim_{n\to\infty}(S_n - t_n) = 0$

إذاً المتتاليتان $(t_n)_{n\geq0}$ ، $(S_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

---

② لتكن $(t_n)_{n\geq0}$ ، $(S_n)_{n\geq0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق: $t_n = \frac{n-1}{n}$ و $S_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

اثبت انهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة.

$$t_n = \frac{n-1}{n}$$
$$t_{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$t_{n+1} - t_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$$
$$= \frac{n^2-n^2+1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

$$S_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$
$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$S_{n+1} - S_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}$$
$$= \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً

$$S_n - t_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{n-1}{n}$$
$$= 1 + \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1+n}{n^2}$$

$\lim_{n\to\infty}(S_n - t_n) = 0$

إذاً المتتاليتان $(t_n)_{n\geq0}$ ، $(S_n)_{n\geq0}$ متجاورتان .

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

③ في كل من الحالات الآتية، تبين إذا كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ ، $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان ام لا؟

$\boxed{1}$

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-2n-1+2n+2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)}$$

$$y_{n+1} - y_n = \underbrace{x_{n+1} - x_n} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} + \frac{-1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n-4n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ متناقصة تماماً

$$y_n = x_n + \frac{1}{4n}$$

$$y_n - x_n = \frac{1}{4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ ، $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان .

$\boxed{2}$

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$x_{n+1} - x_n = \underbrace{\frac{-1}{n} + \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}$$

$$= \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-2n-1+2n}{2n(2n+1)}$$

$$= \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ متناقصة تماماً

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$y_{n+1} - y_n = \underbrace{\frac{-1}{n+1}} + \frac{1}{2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}$$

$$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-2n-1+2n+2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً

$$y_n - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ ، $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان

3

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$y_{n+1} - y_n = \underbrace{x_{n+1} - x_n} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n - n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ ، $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

4

$$x_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً

$$y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

$$y_{n+1} = 2 + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

$$y_n - x_n = 2 + \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ ، $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

* * *

تمرينات و مسائل صفحة 137

1) المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق : $u_n = \frac{1}{n!}$

1. احسب الحدود الستة الأولى منها .

$$u_1 = \frac{1}{1!} = 1 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \quad , \quad u_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \quad ,$$

$$u_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \quad , \quad u_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \quad , \quad u_6 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

2. تيقن $0 < u_n \le \frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$

نعلم أن : $n! \ge n$

$$0 < \frac{1}{\underbrace{n!}_{}} \le \frac{1}{n}$$

$$0 < u_n \le \frac{1}{n}$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

---

2) المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق : $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

1. اعط قيماً تقريبية لحدودها الأولى من u_1 وحتى u_{11}

$$u_1 = \left(\frac{1}{10} - 1\right)^1 = \frac{-9}{10} \qquad u_7 = \left(\frac{7}{10} - 1\right)^7 = \frac{-2187}{10^7}$$

$$u_2 = \left(\frac{2}{10} - 1\right)^2 = \frac{64}{10^2} \qquad u_8 = \left(\frac{8}{10} - 1\right)^8 = \frac{256}{10^8}$$

$$u_3 = \left(\frac{3}{10} - 1\right)^3 = \frac{-34}{10^3} \qquad u_9 = \left(\frac{9}{10} - 1\right)^9 = \frac{-1}{10^9}$$

$$u_4 = \left(\frac{4}{10} - 1\right)^4 = \frac{1296}{10^4} \qquad u_{10} = \left(\frac{10}{10} - 1\right)^{10} = 0$$

$$u_5 = \left(\frac{5}{10} - 1\right)^5 = \frac{-3125}{10^5} \qquad u_{11} = \left(\frac{11}{10} - 1\right)^{11} = \frac{1}{10^{11}}$$

$$u_6 = \left(\frac{6}{10} - 1\right)^6 = \frac{4096}{10^6}$$

2. اثبت ان جميع حدودها بدءاً من الحد u_{31} تحقق $u_n \ge 2^n$ ، استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$

من اجل $n \ge 31$

$$\frac{n}{10} \ge \frac{31}{10} \qquad \div 10$$

$$\frac{n}{10} - 1 \ge \frac{31}{10} - 1$$

$$\frac{n}{10} - 1 \ge 2.1 \ge 2$$

$$\frac{n}{10} - 1 \ge 2$$

$$\Big(\underbrace{\frac{n}{10}-1}\Big)^n \ge 2^n$$

$$u_n \quad \ge 2^n$$

بما ان $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

---

3) المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$

1. احسب حدودها الستة الأولى .

$$u_1 = \frac{1}{1!} = 1 \quad , \quad u_2 = \frac{2^3}{2!} = 4 \quad , \quad u_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{9}{2}$$

$$u_4 = \frac{4^3}{4!} = \frac{8}{3} \quad , \quad u_5 = \frac{5^3}{5!} = \frac{25}{24} \quad , \quad u_6 = \frac{6^3}{6!} = \frac{3}{10}$$

2. a) اثبت ان $n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$ اياً كانت $n \ge 4$

بفرض الخاصة $E(n)$ هي: $E(n): n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$

1) نثبت صحة الخاصة من اجل $n = 4$

$$E(4): \left.\begin{array}{l} L_1 = \quad 4! \quad = 24 \\ L_2 = 4\times3\times2\times1 = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \ge L_2$$

فالخاصة $E(4)$ صحيحة.

2) نفرض صحة الخاصة $E(n)$ أي: $E(n): \quad n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$ صحيحة

3) لنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ اي لنثبت ان:

$$E(n+1): \quad (n+1)! \ge (n+1)n(n-1)(n-2)$$

لدينا من (2) : $n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$

نضرب بـ $n+1$: $\underbrace{(n+1)n!} \ge n(n-1)(n-2)(n-3)(n+1)$

نعيد ترتيب الجداء : $(n+1)! \ge (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$

نحذف $n-3$ لان $n \ge 4$: $(n+1)! \ge (n+1)n(n-1)(n-2)$

فالخاصة صحيحة من أجل $E(n+1)$ فهي صحيحة أياً كانت $n \ge 4$

b) استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

من (a) وجدنا أن:

$$n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$$

نأخذ مقلوب المتراجحة :

$$0 < \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

نضرب بـ n^3 :

$$0 < \frac{n^3}{n!} \le \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$0 < u_n \le \frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty}(0) = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

4) اوجد نهاية كل من المتتاليات $(t_n)_{n\ge1}$،$(w_n)_{n\ge1}$،$(y_n)_{n\ge1}$، $(x_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق :

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{x_n}{n} \quad , \quad w_n = x_n - n \quad , \quad t_n = \frac{y_n-1}{w_n-1}$$

لنكتب اولاً جميع المتتاليات بدلالة n :

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{x_n}{n} = \frac{\frac{n^2+1}{n+1}}{n} = \frac{n^2+1}{n^2+n}$$

$$w_n = x_n - n = \frac{n^2+1}{n+1} - n = \frac{n^2+1-n^2-n}{n+1} = \frac{1-n}{n+1}$$

$$t_n = \frac{y_n-1}{w_n-1} = \frac{\frac{n^2+1}{n^2+n}-1}{\frac{1-n}{n+1}-1} = \frac{\frac{n^2+1-n^2-n}{n^2+n}}{\frac{1-n-n-1}{n+1}} = \frac{\frac{1-n}{n(n+1)}}{\frac{-2n}{n+1}} = \frac{n-1}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} w_n = -1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

---

5) اوجد نهاية كل من المتتاليات $(t_n)_{n\ge1}$،$(w_n)_{n\ge1}$،$(y_n)_{n\ge1}$، $(x_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق :

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad , \quad y_n = x_n\sqrt{n} \quad , \quad w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad t_n = \frac{y_n}{w_n}$$

لنكتب اولاً جميع المتتاليات بدلالة n :

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad , \quad y_n = x_n\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\sqrt{n} = \frac{n}{n+1}$$

$$w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{-1}{\sqrt{n}(n+1)} \quad , \quad t_n = \frac{y_n}{w_n} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{-1}{\sqrt{n}(n+1)}} = -n\sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} w_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$$

---

6) اوجد نهاية كل من المتتاليات $(u_n)_{n\ge1}$،$(y_n)_{n\ge1}$، $(x_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق :

$$x_n = \frac{3n^2-4}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{x_n}{n} \quad , \quad u_n = x_n - 3n$$

لنكتب اولاً جميع المتتاليات بدلالة n :

$$x_n = \frac{3n^2-4}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{\frac{3n^2-4}{n+1}}{n} = \frac{3n^2-4}{n^2+n}$$

$$u_n = x_n - 3n = \frac{3n^2-4}{n+1} - 3n = \frac{3n^2-4-3n^2-3n}{n+1} = \frac{-3n-4}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 3 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -3$$

---

7) المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة بالصيغة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1. اثبت ان $0 < u_n \le 1$ اياً يكن n.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

- اياً يكن $n \ge 0$:

$$\boxed{u_n > 0} \Leftarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$$

- اياً يكن $n \ge 0$:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \ge 1$$

$$\underbrace{0 \le \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le 1}_{u_n \le 1}$$

ومنه : $0 < u_n \le 1$

2. a) اثبت انه إذا كان $n > 10^4$ كان $0 < u_n < 10^{-2}$

- نعلم ان : $n > 10^4$ فإن $\sqrt{n} > 10^2$
- نعلم ان : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \underset{\overset{\shortparallel}{\text{١٠}^2}}{\sqrt{n}}$

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > 10^2$$
$$0 < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}_{} < \frac{1}{10^2} \Leftarrow \Bigg\{$$
$$0 < u_n < 10^{-2}$$

b) اثبت انه إذا كان $n > 10^8$ كان $0 < u_n < 10^{-4}$

- بما ان $n > 10^8$ فإن $\sqrt{n} > 10^4$
- نعلم ان : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n}$

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > 10^4$$
$$0 < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}_{} < \frac{1}{10^4} \Leftarrow \Bigg\{$$
$$0 < u_n < 10^{-4}$$

c) كيف نختار n كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$؟

نختار $n > 10^{16}$ لنحصل على $u_n < 10^{-8}$

3. ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

$$u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

---

8) المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1},(y_n)_{n\geq1}$ معرفتان وفق : $y_n = \frac{1}{n}$ ، $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

1. اثبت ان العدد (1) راجح على $(x_n)_{n\geq1}$

- ايا ً يكن $n \geq 1$:

$$n^2+1 \geq 1$$
$$\sqrt{n^2+1} \geq 1$$
$$0 < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{} \leq 1$$
$$0 < x_n \leq 1$$

العدد (1) راجح على $(x_n)_{n\geq1}$

2. اثبت ان $x_n \leq y_n$ ايا ً يكن $n \geq 1$

- ايا ً يكن $n \geq 1$:

$$n^2+1 \geq n^2$$
$$\sqrt{n^2+1} \geq n$$
$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{}$$
$$x_n \leq y_n$$

3. اي النتيجتين السابقتين اكثر إثارة للاهتمام ؟

النتيجة ② اكثر إثارة للاهتمام لأنها تفيدنا في إثبات ان: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ حسب مبرهنة الإحاطة.

9) المتتاليتان $(y_n)_{n\ge1}$ ، $(x_n)_{n\ge1}$ معرفتان وفق : $y_n = 5n$ ، $x_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1}$

.1 اثبت ان $x_n \le y_n$ ايا ً يكن $n \ge 1$

$$x_n - y_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1} - 5n = \frac{2n^2+5n+3-10n^2-5n}{2n+1}$$

$$= \frac{-8n^2+3}{2n+1} = \frac{-\overset{\boxplus}{\overbrace{(8n^2-3)}}}{2n+1} \le 0$$

$$x_n - y_n \le 0 \Rightarrow \boxed{x_n \le y_n}$$

.2 اثبت ان $x_n \ge \frac{1}{5}y_n$ ايا ً يكن $n \ge 1$

$$x_n - \frac{1}{5}y_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1} - \frac{1}{5}(5n) = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1} - n$$

$$= \frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1} \ge 0$$

$$x_n - \frac{1}{5}y_n \ge 0 \Rightarrow \boxed{x_n \ge \frac{1}{5}y_n}$$

---

10) المتتالية $(u_n)_{n\ge4}$ معرفة وفق: $u_n = \frac{1}{n^2-5n+6}$ اثبت انها محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} - u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2-5n+6} = \frac{n^2-5n+6-2}{2(n^2-5n+6)} = \frac{n^2-5n+4}{2(n^2-5n+6)}$$

$$= \frac{(n-4)(n-1)}{2(n-3)(n-2)} \ge 0 \left(\begin{matrix} \text{البسط موجب من اجل } n \ge 4 \\ \text{المقام موجب من اجل } n \ge 4 \end{matrix}\right)$$

$$\frac{1}{2} - u_n \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ge u_n$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

---

11) ليكن b ، a عددين يحققان $a > b > 0$ و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق : $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$

ادرس تقارب هذه المتتالية.

لدراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ نميز الحالات الآتية باعتبار $a > b > 0$:

- $a > 1 \ , \ b > 1$:

يصبح: $\lim_{n\to\infty} b^n = +\infty$ ، $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ عندئذ نحصل على حالة عدم تعيين في البسط $\infty - \infty$.

اي: $\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n) = \infty - \infty$

- $a > 1 \ , \ b < 1$:

يصبح : $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ ، $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ عندئذٍ نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

اي : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right) = \frac{\infty}{\infty}$

- $a = 1 \ , \ b < 1$:

يصبح : $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ ، $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$ عندئذٍ نحصل على :

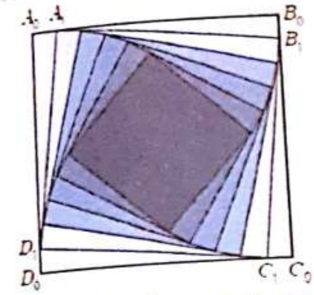
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-b^n}{1+b^n} = 1$$

- بشكل عام $a > b > 0$:

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)}{a^n\left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \left(1 > \frac{b}{a} \Leftarrow a > b\right)$$

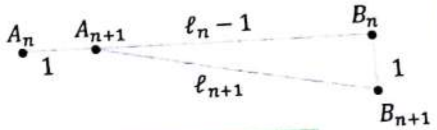
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$



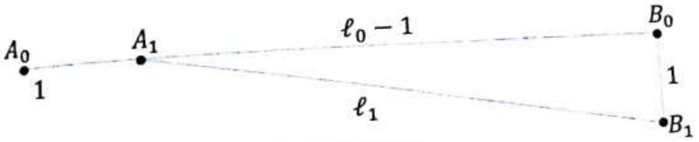
12) دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$

نرمز إلى المربع $A_0B_0C_0D_0$ الذي طول ضلعه 10 بالرمز S_0 ، و إلى المربع $A_1B_1C_1D_1$ الذي تقع رؤوسه على اضلاع S_0 (كما يشير الشكل المرافق) بالرمز S_1 حيث : $A_0A_1 = 1$. بالطريقة التي رسمنا فيها S_1 انطلاقاً من S_0، نرسم S_2 انطلاقاً من S_1 ونقبل إمكانية الاستمرار بهذا الرسم عدداً غير منتهٍ من المرات. نرمز إلى طول ضلع المربع S_n بالرمز ℓ_n .

نهدف إلى دراسة المتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ و تعيين نهايتها.



المرحلة $n+1$



المرحلة الأولى

.1 علل صحة المتراجحة $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$ أياً يكن العدد الطبيعي n ؟

- بما أن الوتر في المثلث القائم أكبر الأضلاع فإن :

$$1 < \ell_{n+1}$$

- بما أن مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالثة :

$$\ell_{n+1} < \underbrace{\ell_n - 1}+1$$

$$\ell_{n+1} < \ell_n$$

$$\Rightarrow 1 < \ell_{n+1} < \ell_n$$

.2 لماذا يمكن استنتاج ان المتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ متقاربة ؟

$$\left.\begin{array}{r} \text{وجدنا ان } \ell_{n+1} < \ell_n \text{ فإن المتتالية متناقصة} \\ 1 < \ell_{n+1} < \ell_n \text{ فهي محدودة من الأدنى بالعدد(1)} \end{array}\right\} \Rightarrow (\ell_n)_{n\geq1}$$

متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة .

.3 اثبت ان $\ell_{n+1} = \sqrt{1 + (\ell_n - 1)^2}$

حسب فيثاغورث في المثلث $A_{n+1}B_nB_{n+1}$ نجد :

$$\ell^2{}_{n+1} = 1 + (\ell_n - 1)^2$$

$$\ell_{n+1} = \sqrt{1 + (\ell_n - 1)^2}$$

- يبقى تحديد العدد ℓ نهاية المتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ ، إحدى الطرق العامة لذلك هي الاستعانة بالتابع f المعرف بالعلاقة: $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$

1. عين التابع f المستعان به .

بما ان $\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$ يكون :

$$\ell_{n+1} = f(\ell_n) = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$$

2. اثبت ان ℓ حل المعادلة

نربع الطرفين :

$$x = \sqrt{1+(x-1)^2}$$
$$x^2 = 1+(x-1)^2$$
$$x^2 = 1 + x^2 - 2x + 1$$
$$2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1 = \ell}$$

3. استنتج من ذلك قيمة النهاية ℓ .

بما ان المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى ومعرفة بالعلاقة التدريجية $\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$ نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(x) = x$ $\Leftarrow$ $\boxed{\ell = 1}$

13) مجموع عدد غير منته من الحدود :

ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n و ليكن :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

لنكتب u_n بشكل ابسط (مجموع كسري) وذلك بطريقة تفريق الكسور :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$ نوحد المقامات

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+B(n)}{n(n+1)}$$ نحذف المقامات المتساوية

$$1 = An + A + Bn$$

$$0\,n + 1 = (A+B)n + A \xRightarrow{\text{بمطابقة الطرفين}} \left.\begin{matrix} A+B=0 \\ A=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \end{matrix}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$S_n = \frac{n}{n+1}$$
$$S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$
$$S_{n+1} - S_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$ $\Rightarrow$ المتتالية متزايدة تماماً

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

14) دراسة متتاليتين في آن واحد

ليكن a و b عددين يحققان $0 < a < b$ ولنتامل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \frac{2x_n \cdot y_n}{x_n + y_n} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} y_0 = b \\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$

عند كل عدد طبيعي .

نهدف إلى دراسة المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ في آن معاً و ذلك كما يلي :

1) نشكل المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $t_n = x_{n+1} \cdot y_{n+1}$

و ذلك بملاحظة ان مقام x_{n+1} يساوي بسط y_{n+1} .

$$t_n = x_{n+1} \cdot y_{n+1} = \frac{2x_n \cdot y_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{x_n + y_n}{2} = x_n \cdot y_n$$

$$\Longrightarrow \ t_n = x_{n+1} \cdot y_{n+1} = x_n \cdot y_n$$

ومنه المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ ثابتة .

حدها الاول : $t_0 = x_0 \cdot y_0 = a \cdot b$ و منه فإن جميع الحدود متساوية و تساوي العدد $a \cdot b$

بما ان $0 < a < b$ فإن $a \cdot b > 0$ اي $x_n \cdot y_n > 0$

2) لنثبت ان : $x_n > 0$ و $y_n > 0$ بالتدريج .

- نثبت صحة الخاصة من اجل $n = 0$:

$x_0 = a > 0$ و $y_0 = b > 0$ فالخاصة صحيحة من اجل $n = 0$.

- نفرض ان الخاصة صحيحة من اجل n اي :

$x_n > 0$ و $y_n > 0$ صحيحة و عندها يكون $\boxed{x_n + y_n > 0}$ و $\boxed{x_n \cdot y_n > 0}$

- نثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت :

$x_{n+1} > 0$ و $y_{n+1} > 0$

$x_{n+1} = \frac{2x_n \cdot y_n}{x_n + y_n} > 0$ و $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} > 0$

فالخاصة صحيحة من اجل $n + 1$

و منه الخاصة السابقة صحيحة من اجل n .

3) اثبت ان المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتين و ذلك بعد إثبات صحة الخاصة: $y_n - x_n \leq \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0)$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2x_n \cdot y_n}{x_n + y_n} - x_n \\ &= \frac{2x_n y_n - x_n^2 - x_n \cdot y_n}{x_n + y_n} \\ &= \frac{x_n\, y_n - x_n^2}{x_n + y_n} \\ &= \frac{x_n}{x_n + y_n}\,(y_n - x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{x_n + y_n}{2} - y_n \\ &= \frac{1}{2}(x_n - y_n) \end{aligned}$$

في الحالتين السابقتين لا نستطيع معرفة إشارة الفرق حتى نعرف إشارة $y_n - x_n$ و نوجد ذلك من دراسة إشارة $y_{n+1} - x_{n+1}$:

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_n\, y_n}{x_n + y_n} = \frac{(x_n + y_n)^2 - 4x_n\, y_n}{2(x_n + y_n)}$$

$$y_{n+1}-x_{n+1}=\frac{x_n^2+2x_n\,y_n+y_n^2-4x_n\,y_n}{2(x_n+y_n)}$$

$$=\frac{x_n^2-2x_n\,y_n+y_n^2}{2(x_n+y_n)}=\frac{(x_n-y_n)^2}{2(x_n+y_n)}\ge 0$$

$$y_{n+1}-x_{n+1}\ge 0 \Longrightarrow \boxed{y_n-x_n\ge 0} \Longrightarrow \boxed{x_n-y_n\le 0}$$

بالعودة إلى دراسة إشارة الفرق :

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n}{x_n+y_n}\,(y_n-x_n)\ge 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً .

$$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{2}\,(x_n-y_n)\le 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً

لنثبت ان $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$:

لدينا مما سبق :

$$x_{n+1}\ge x_n$$

$$-x_{n+1}\le -x_n$$

نضيف y_{n+1} للطرفين :

$$y_{n+1}-x_{n+1}\le \underbrace{y_{n+1}}-x_n$$

$$y_{n+1}-x_{n+1}\le \frac{x_n+y_n}{2}-x_n$$

$$\boxed{y_{n+1}-x_{n+1}\le \frac{1}{2}(y_n-x_n)} \quad *$$

- لنثبت الخاصة : $y_n-x_n\le \frac{1}{2^n}\,(y_0-x_0)$ (بالتدريج)
- نثبت صحة الخاصة من اجل $n=0$:

$$L_1=y_0-x_0=b-a$$
$$L_2=\frac{1}{2^0}\,(b-a)=b-a$$
$$\Longrightarrow L_1\le L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n=0$.

- نفرض صحة الخاصة من اجل n أي : $y_n-x_n\le \frac{1}{2^n}(y_0-x_0)$ صحيحة .
- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ أي : $y_{n+1}-x_{n+1}\le \frac{1}{2^{n+1}}\,(y_0-x_0)$

وجدنا من العلاقة $(*)$:

$$y_{n+1}-x_{n+1}\le \frac{1}{2}\,\underbrace{(y_n-x_n)}_{\text{من الفرض}}$$

$$y_{n+1}-x_{n+1}\le \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2^n}\,(y_0-x_0)\right]$$

$$y_{n+1}-x_{n+1}\le \frac{1}{2^{n+1}}\,(y_0-x_0)$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$

و منه الخاصة السابقة صحيحة من اجل n .

عندئذ :

$$y_n-x_n\le \frac{1}{2^n}\,(y_0-x_0)$$

$$0\le y_n-x_n\le \frac{1}{2^n}\,(b-a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}(0)=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\,(b-a)\right)=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{حسب مبرهنة الإحاطة}}\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$$

فالمتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتين . وهما متقاربتين من نفس النهاية ℓ و بما ان :

ايا ً تكن قيمة n فإن:

$$x_n \cdot y_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$$

$$\ell \cdot \ell = a \cdot b$$

ℓ عدد موجب

$$\ell = \sqrt{a \cdot b}$$

15) ادرس تقارب كل من المتتاليتين:

$\boxed{1}$ $$x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$$

$$= \frac{3^n\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^n\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ لان } q = \frac{2}{3} < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ لان } q = \frac{1}{3} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1-0}{1-0} = 1 \text{ ومنه}$$

$\boxed{2}$ $$y_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1}$$

$$= \frac{10^n\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{10^n\left[1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

بما ان $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ لان $q = \frac{1}{10} < 1$

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1-0}{1+0} = 1$

16) المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 : n \in N \end{cases}$$

1. اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج ان $1 \leq u_n \leq 2$ ايا ً يكن $n \in N$

- من اجل $n = 0$ نجد $1 \leq u_0 = \frac{3}{2} \leq 2$
- نفرض ان الخاصة صحيحة من اجل n اي: $1 \leq u_n \leq 2$ صحيحة.
- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت: $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

$$= \underbrace{u_n^2 - 2u_n + 1} + 1$$

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

لدينا فرضاً $1 \leq u_n \leq 2$

$$0 \leq u_n - 1 \leq 1$$

$$0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1$$

$$1 \leq \underbrace{(u_n - 1)^2 + 1} \leq 2$$

$$1 \leq \quad u_{n+1} \quad \leq 2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$ إذاً الخاصة $1 \leq u_n \leq 2$ صحيحة من اجل $n \in N$

.2 a) اثبت ان $u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$ ايا ً يكن $n\in N$.

$$u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$$
$$u_{n+1}-u_n=u_n^2-2u_n+2-u_n$$
$$=\underbrace{u_n^2-3u_n+2}$$
$$=(u_n-2)(u_n-1)$$

b) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

$$u_{n+1}-u_n=\underbrace{(u_n-2)}_{\substack{\text{سالبة}\\1\leq u_n\leq2}}\underbrace{(u_n-1)}_{\substack{\text{موجبة}\\1\leq u_n\leq2}}\leq0$$

$$u_{n+1}-u_n\leq0\quad\Rightarrow\quad u_{n+1}\leq u_n$$

فالمتتالية متناقصة

.3 اهي متقاربة؟

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (1) فهي متقاربة.

---

17) المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة عند كل $n\geq1$ وفق: $u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$

.1 اثبت مستعملا ً البرهان بالتدريج ان $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

من اجل $n=1$:

$$\left.\begin{aligned}L_1&=\frac{1}{1!}=1\\L_2&=\frac{1}{2^{1-1}}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow L_1\leq L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n=1$

- نفرض أن الخاصة صحيحة من اجل n اي: $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ صحيحة
- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت: $\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$

لدينا من الفرض $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

نضرب بـ $\frac{1}{n+1}$ الموجب تماماً

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n!}}\leq\frac{1}{2^n.2^{-1}}\cdot\frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}\cdot\underbrace{\frac{2}{n+1}}_{\leq1}$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$. إذا ً الخاصة السابقة صحيحة من اجل $n\geq1$.

.2 استنتج ان العدد (3) راجع على المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

وجدنا $\boxed{\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}}$

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$
$$\leq1+\underbrace{\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{\substack{\text{مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول (1)}\\ \text{واساسها } q=\frac{1}{2} \text{ وعدد حدودها } n}}$$

$$u_n \le 1 + 1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$u_n \le 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

$$u_n \le 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$u_n \le 1 + 2 \underbrace{-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{سالب}}$$

$$u_n \le 3$$

إذاً (3) عدد راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

3. اثبت ان $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة.

$$u_{n+1} - u_n = \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \ \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

فالمتتالية متزايدة .

$(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة.

---

18) نتامل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ تحقق الشرط التالي: يوجد عدد حقيقي $\ell > 0$ يحقق عند كل n العلاقة: $0 \le u_{n+1} - \ell \le \frac{2}{3}(u_n - \ell)$

اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة إلى ℓ بافتراض ان $u_0 = 1$ عين عدداً طبيعياً N يحقق: $u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[$ عند كل $n \ge N_0$.

الحل: لدينا من العلاقة:

$$0 \le \frac{2}{3}(u_n - \ell)$$
$$0 \le u_n - \ell$$
$$\ell \le u_n$$

فالمتتالية محدودة من الأدنى بالعدد (ℓ).

- لدينا من العلاقة:

$$u_{n+1} - \ell \le \frac{2}{3}(u_n - \ell)$$

نضرب بـ 3 :

$$3u_{n+1} - 3\ell \le 2(u_n - \ell)$$

$$3u_{n+1} - 3\ell \le 2u_n - 2\ell$$

$$3u_{n+1} - 2u_n \le \ell$$

نطرح u_n :

$$3u_{n+1} - 3u_n \le \ell - u_n$$

$$3(u_{n+1} - u_n) \le -\underbrace{(u_n - \ell)}_{\boxed{+}}$$

$$3(u_{n+1} - u_n) \le 0$$

$$u_{n+1} \le u_n$$

فالمتتالية متناقصة.

اصبحت $(u_n)_{n\ge0}$ محدودة من الأدنى ومتناقصة فهي متقاربة.

- لنثبت ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من ℓ :

لدينا: $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3}(u_n - \ell)$

لنفرض ان $x_n = u_n - \ell$ فيكون $x_{n+1} = u_{n+1} - \ell$

تصبح العلاقة: $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{2}{3}x_n$

من اجل $n = 0$: $x_1 \leq \frac{2}{3}x_0$

من اجل $n = 1$: $x_2 \leq \frac{2}{3}x_1$ ومنه $x_2 \leq \frac{2}{3}.\frac{2}{3}x_0$ ومنه $x_2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0$

من اجل $n = 2$: $x_3 \leq \frac{2}{3}x_2$ ومنه $x_3 \leq \frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0$ ومنه $x_3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 x_0$

ولنفرض أن: $\boxed{x_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n x_0}$ ولنثبت صحتها من اجل $n+1$ اي لنثبت:

$$0 \leq x_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} .x_0$$

$$x_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right).x_n$$

$$x_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^n x_0$$

$$x_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} .x_0$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$

أصبح لدينا: $\boxed{0 \leq x_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n .x_0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}(0) = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x_0 = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{حسب الإحاطة}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{x_n}_{\downarrow} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n - \ell) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

فالمتتالية متقاربة من ℓ .

$$u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[$$

نطرح ℓ : $\ell - 10^{-3} \leq u_n \leq \ell + 10^{-3}$

$$-10^{-3} \leq u_n - \ell \leq 10^{-3}$$

$$\underbrace{|u_n - \ell|} \leq 10^{-3}$$

$$x_n \leq 10^{-3}$$

لكن $x_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n .x_0$

نضرب بـ 10^3 : $\left(\frac{2}{3}\right)^n .x_0 \leq 10^{-3}$

نقسم على $\left(\frac{2}{3}\right)^n$: $10^3 \left(\frac{2}{3}\right)^n .x_0 \leq 1$

ناخذ لوغاريتم الطرفين : $10^3.x_0 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$\ln(10^3.x_0) \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\ln 10^3 + \ln x_0 \leq n(\ln 3 - \ln 2)$$

$$N_0 = \frac{3\ln 10 + \ln x_0}{\ln 3 - \ln 2} \leq n$$

19) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1. اثبت ان $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

بما ان :

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 1$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$$

$$0 < \quad u_n \quad \leq 1$$

فالمتتالية محدودة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n$$

فالمتتالية متناقصة.

بما أن المتتالية محدودة من الأدنى ومتناقصة فهي متقاربة ويكون:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

2. المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a) استفد من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n.

وجدنا ان :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$= 1 + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

بالاختزال نجد :

$$\boxed{v_n = \sqrt{n}}$$

b) استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

19) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

.1 اثبت ان $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

بما أن : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 1$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$$

$$0 < \quad u_n \quad \leq 1$$

فالمتتالية محدودة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n$$

فالمتتالية متناقصة.

بما أن المتتالية محدودة من الأدنى ومتناقصة فهي متقاربة ويكون:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

.2 المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a) استفد من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n.

وجدنا أن :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$= 1 + \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

بالاختزال نجد :

$$\boxed{v_n = \sqrt{n}}$$

b) استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

19) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1. اثبت ان $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج ان $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

بما أن :

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 1$$

$$0 < \quad u_n \quad \leq 1$$

فالمتتالية محدودة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n$$

فالمتتالية متناقصة.

بما أن المتتالية محدودة من الأدنى ومتناقصة فهي متقاربة ويكون:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

2. المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a) استفد من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n.

وجدنا أن :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$= 1 + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

بالاختزال نجد :

$$\boxed{v_n = \sqrt{n}}$$

b) استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

20) ما العبارات الصحيحة وما العبارات غير الصحيحة فيما يأتي؟ تحقق من إجابتك في كل حالة.

1. إذا كانت $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية عندئذ ليس للمتتالية $(u_n+v_n)_{n\ge0}$ نهاية حقيقية.

العبارة صحيحة :

لنفرض جدلاً ان

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad , \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \mp\infty$$

عندئذ: $\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\dot{\ell}$

$$v_n = \underbrace{(u_n+v_n)}_{} - \underbrace{u_n}_{\ell}$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \dot{\ell} - \ell$$

وهذا يناقض كون ليس للمتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ نهاية حقيقية، إذاً الفرض الجدلي خاطئ.

2. إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية عندئذ ليس للمتتالية $(u_n.v_n)_{n\ge0}$ نهاية حقيقية.

العبارة غير صحيحة:

بفرض $u_n=\frac{1}{n+1}$ وعندها $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

و $v_n=(-1)^n$ ليس لها نهاية

$$u_n.v_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \Leftarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n.v_n) = 0 \quad \text{(بالإحاطة)}$$

3. إذا كان $\lim_{n\to\infty} u_n.v_n=\ell$ و $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$ كان $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$

العبارة صحيحة:

بما ان $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$ فإن $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$ عندئذ :

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{(u_n.v_n)}_{}.\frac{1}{u_n}\right]$$

$$= (\ell)\,(0) = 0$$

4. إذا كان لمتتالية عنصر قاصر عنها، كان لها عنصر راجح عليها.

العبارة غير صحيحة: ليس بالضرورة أن يكون لمتتالية عنصر قاصر أن يكون لها عنصر راجح.

مثلاً : المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ حيث $u_n=n+1$ يكون العدد (1) قاصر عنها وليس لها عنصر راجح.

---

21) المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل $n\ge1$ وفق:

$$u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$$

1. اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة.

$$u_{n+1}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$$

$$u_{n+1}-u_n>0 \Rightarrow u_{n+1}>u_n$$

فالمتتالية متزايدة.

2. a) اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج ان $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ اياً يكن $n \geq 1$.

- من اجل $n = 1$:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= u_1 = \frac{1}{1^2} = 1 \\ L_2 &= 2 - \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_1 \leq L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n = 1$.

- نفرض صحة الخاصة من اجل n اي: $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ صحيحة.
- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت: $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{من الفرض}}}{u_n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

نضيف ونطرح $\frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}_{\text{توحيد المقامات}}$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1} - \underbrace{\frac{1}{n(n+1)^2}}_{\text{سالب}}$$

$$\boxed{u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n + 1$

فالخاصة السابقة صحيحة من اجل $n \geq 1$

b) ماذا يمكنك ان تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

بما أن $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ (فهي محدودة من الأعلى)

و $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة فإن المتتالية متقاربة.

---

22) ليكن عند كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1. اوجد عددين حقيقيين a ، b يحققان عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

$$u_n = \frac{2an + a + 2bn - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{(2a+2b)n + a - b}{(2n-1)(2n+1)} \\ &\text{لكن} \\ u_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بالمطابقة}} \left.\begin{aligned} 2a + 2b &= 0 \\ a - b &= 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بالحل المشترك}} \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}}$$

2. ليكن في حالة عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$\begin{aligned}
S_n = &\quad u_0 \quad + \quad u_1 \quad + \quad u_2 \quad + \cdots + \quad u_n \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[(-1-1) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left[-1 - \frac{1}{2n+1}\right]} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-1}{2}$$

23) لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n، $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

فالمتتالية متزايدة.

2. اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج ان $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

استنتاج $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$:

نلاحظ أن :

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq \cdots \geq \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}$$

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{\underbrace{n+1}_{\downarrow}} + \frac{1}{\underbrace{n+2}_{\downarrow}} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$u_{2n} - u_n \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ مرة}}$$

$$u_{2n} - u_n \geq n\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\boxed{u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}}$$

3. اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج ان $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ ايا ً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم.

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = u_{2^1} = u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ L_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \geq L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n = 1$. $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ صحيحة.

- نفرض صحة الخاصة من اجل n أي: $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت: $u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

$$L_1 = u_{2^{n+1}} = u_{2.2^n}$$

$$= \underbrace{u_{2^n}}_{\text{من الفرض}} + \underbrace{u_{2.2^n} - u_{2^n}}_{\text{من الطلب السابق}}$$

$$\geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\geq \frac{n+1}{2}$$

نضيف ونطرح u_{2^n}

$$u_{2.2^n} - u_{2^n} \geq \frac{1}{2}$$

$$u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n + 1$. ومنه الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n \geq 1$

4. هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية.

نلاحظ ان:

$$\frac{n}{2} < u_{2^n} < u_n \Leftarrow \begin{cases} u_{2^n} < u_n \\ \frac{n}{2} < u_{2^n} \end{cases} \quad \text{ولكن}$$

وبما ان $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

اي ليس للمتتالية نهاية حقيقية

---

24) المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) اثبت ان $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ ايا ً يكن $n \geq 1$

ملاحظة : الحدود في المتتالية u_n متناقصة.

اكبرها هو الحد الأول $\frac{n}{n^2+1}$ وأصغرها هو الحد الأخير $\frac{n}{n^2+n}$.

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+2} \geq \cdots \geq \frac{n}{n^2+n}$$

$$u_n = \frac{n}{\underbrace{n^2+1}_{\downarrow}} + \frac{n}{\underbrace{n^2+2}_{\downarrow}} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

$$u_n \geq \underbrace{\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}}_{n \text{ مرة}}$$

$$u_n \geq n\left(\frac{n}{n^2+n}\right)$$

$$u_n \geq \frac{n^2}{n^2+n} \qquad (1)$$

$$u_n = \frac{n}{\underbrace{n^2+1}_{\downarrow}} + \frac{n}{\underbrace{n^2+2}_{\downarrow}} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

$$u_n \le \underbrace{\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1}}_{n \text{ مرة}}$$

$$\le n\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$$u_n \le \frac{n^2}{n^2+1} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد: $\frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$

2) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ ما نهايتها؟

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n} = 1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

---

25) المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \ge 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) اثبت ان $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ اياً يكن $n \ge 1$.

ملاحظة: الحدود في المتتالية متناقصة، اكبرها هو الحد الأول $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ واصغرها هو الحد الأخير $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \ge \cdots \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$u_n = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{\downarrow}} + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n^2+2}}_{\downarrow}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$u_n \ge \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ مرة}}$$

$$u_n \ge n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

$$\boxed{u_n \ge \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}} \qquad (1)$$

$$u_n = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{\downarrow}} + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n^2+2}}_{\downarrow}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$u_n \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ مرة}}$$

$$u_n \le n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

$$\boxed{u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ ما نهايتها؟

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)=1 \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

---

26) بين ان المتتاليتين $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ الاتيتين متجاورتان:

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n} \quad , \quad x_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$$

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\underbrace{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}_{\text{بعد الضرب والقسمة على المرافق}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}>0$$

$$x_{n+1}-x_n>0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1}>x_n$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\ge1}$ متزايدة.

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}$$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\underbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}_{\text{بعد الضرب والقسمة على المرافق}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}<0$$

$$y_{n+1}-y_n<0 \Rightarrow y_{n+1}<y_n$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\ge1}$ متناقصة

$$x_n - y_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\right)$$

$$= -2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \;\; = -2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \boxed{\frac{-2}{\infty}} = 0$$

إذاً المتتاليتين $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتين.

27) المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1} \end{cases} \qquad : n \in N$$

1) اثبت ان $u_n > 0$ ايا يكن n.

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3 > 0$ محققة .

- نفرض أن الخاصة صحيحة من اجل n اي : $u_n > 0$ صحيحة.

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت: $u_{n+1} > 0$

لدينا من الفرض: $u_n > 0$

$$u_n + 1 > 0$$

$$\frac{1}{u_n + 1} > 0$$

$$\frac{2}{u_n + 1} > 0 \qquad \text{نضرب بـ } 2$$

$$u_{n+1} > 0$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$. إذاً الخاصة السابقة صحيحة من اجل n.

2) المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق: $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{u_n+1} - 1}{\frac{2}{u_n+1} + 2} = \frac{\frac{2-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2+2u_n+2}{u_n+1}} = \frac{1 - u_n}{4 + 2u_n} = \frac{-1}{2}\boxed{\frac{(u_n - 1)}{(u_n + 2)}} = -\frac{1}{2}t_n$$

$t_{n+1} = -\frac{1}{2}t_n \quad \Rightarrow \quad q = \frac{-1}{2}$ فالمتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ هندسية اساسها

$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ لان $-1 < q = \frac{-1}{2} < 1$

3) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

لدينا : $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

$$t_n(u_n + 2) = u_n - 1$$

$$t_n u_n + 2t_n = u_n - 1$$

$$t_nu_n - u_n = -2t_n - 1$$

$$u_n(t_n - 1) = -2t_n - 1$$

$$u_n = \frac{-2t_n - 1}{t_n - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \left(\lim_{n\to\infty} t_n = 0 \quad (2) \text{ وجدنا من}\right)$$

اصبح لدينا $u_n > 0$ ولها نهاية حقيقية فهي متقاربة.

---

28) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \qquad : n \in N \end{cases}$$

1) اثبت $u_n > 0$ ايا يكن n .

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 2 > 0$ محققة .
- نفرض أن الخاصة صحيحة من اجل n أي: $u_n > 0$ صحيحة .
- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ أي لنثبت: $u_{n+1} > 0$

لدينا من الفرض: $u_n > 0$ عندئذ:

$$\underbrace{\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}}_{} > 0 : \text{مجموع مقدارين موجبين هو مقدار موجب} \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} > 0 \\ \dfrac{1}{u_n} > 0 \end{cases}$$

$$u_{n+1} > 0$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$، إذاً الخاصة السابقة صحيحة من أجل n.

2. المتتالية معرفة بالصيغة من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$ عين التابع f المعرف على $]0, +\infty[$

a) ادرس تغيرات التابع f و ارسم خطه البياني C_f و مقارباته و ارسم على الشكل نفسه مستقيم $d: y = x$ بعد ان تحسب إحداثيتا نقطة تقاطع d مع C_f .

$$f:]0, +\infty[\to R \qquad : \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$$

f معرف و اشتقاقي على $]0, +\infty[$.

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty \qquad : \quad +\infty \text{ بجوار } y\grave{y} \text{ منطبق على } C_f \text{ مقارب شاقولي لـ } x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\grave{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 2$$

إما $x = \sqrt{2}$: $f(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

أو $x = -\sqrt{2}$ $\notin]0, +\infty[$ مرفوض

$$t_nu_n - u_n = -2t_n - 1$$

$$u_n(t_n - 1) = -2t_n - 1$$

$$u_n = \frac{-2t_n - 1}{t_n - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \left(\lim_{n\to\infty} t_n = 0 \quad (2) \text{ وجدنا من}\right)$$

اصبح لدينا $u_n > 0$ ولها نهاية حقيقية فهي متقاربة.

……

28) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases} \quad : n \in N$$

1) اثبت $u_n > 0$ اياً يكن n .

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 2 > 0$ محققة .
- نفرض أن الخاصة صحيحة من اجل n اي: $u_n > 0$ صحيحة .
- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n + 1$ اي لنثبت: $u_{n+1} > 0$

لدينا من الفرض: $u_n > 0$ عندئذ:

$$\begin{cases} \dfrac{u_n}{2} > 0 \\ \dfrac{1}{u_n} > 0 \end{cases} \text{مجموع مقدارين موجبين هو مقدار موجب : } \underbrace{\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}}_{} > 0$$

$$u_{n+1} > 0$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$. إذاً الخاصة السابقة صحيحة من اجل n.

2. المتتالية معرفة بالصيغة من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$ عين التابع f المعرف على $]0, +\infty[$

a) ادرس تغيرات التابع f و ارسم خطه البياني C_f و مقارباته و ارسم على الشكل نفسه مستقيم $d: y = x$ بعد ان تحسب إحداثيتا نقطة تقاطع d مع c_f .

$$f:]0, +\infty[\to R \qquad : \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$$

f معرف و اشتقاقي على $]0, +\infty[$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty \qquad : \quad +\infty \text{ بجوار } y\grave{y} \text{ منطبق على } C_f \text{ مقارب شاقولي لـ } x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\grave{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 2$$

إما $x = \sqrt{2}$: $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

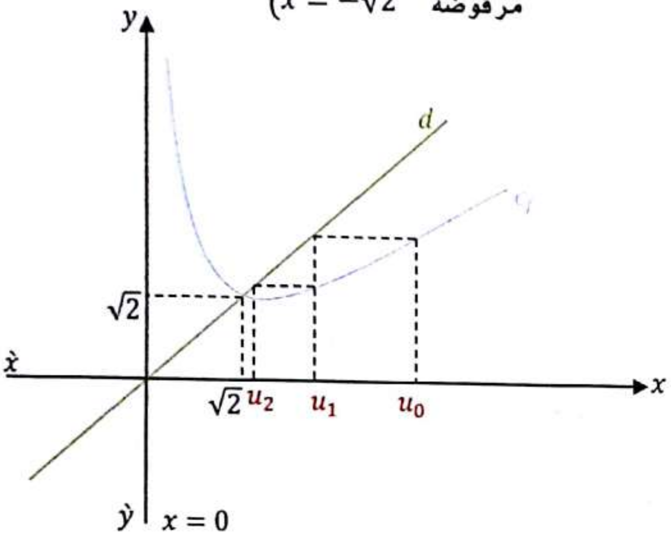
او $x = -\sqrt{2} \quad \notin]0, +\infty[$ مرفوض

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

حساب إحداثيات نقطة تقاطع d مع C_f

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x} \\ \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=y \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{x}=x \\ \frac{1}{x}=\frac{x}{2} \\ x^2=2 \\ \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \quad \text{مرفوضة} \end{cases} \end{array}$$

نقطة تقاطع C_f مع d هي $(\sqrt{2},\sqrt{2})$



b) بين ان ما سبق يفيد في إثبات ان f متزايد على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ و ان $f(x)\le x$ على هذا المجال.

من جدول التغيرات نجد أن $f(x)$ متزايد تماماً على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$

ومن الرسم تبين أن C_f يقع تحت d في المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ اي ان $f(x)\le x$

3. استفد من الرسم لتنشئ الحدود الأولى من المتتالية المدروسة اتجدها مطردة ؟ ما جهة اطرادها ؟

اهي محدودة ؟ ثم برهن صحة توقعاتك عن طريق الاستفادة من $b\boxed{2}$

لتبرهن بالتدريج $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$ مهما كان n.

$$n=0 \;\Rightarrow\; u_0=2$$

$$n=1 \;\Rightarrow\; u_1=\frac{u_0}{2}+\frac{1}{u_0}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$n=2 \;\Rightarrow\; u_2=\frac{u_1}{2}+\frac{1}{u_1}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}$$

نلاحظ أن المتتالية متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$ (من الرسم).

$$\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$$

لنثبت صحة الخاصة من اجل $n=0$ لدينا : $\sqrt{2}\le u_1=\frac{3}{2}\le u_0=2$ محققة.

لنفرض أن الخاصة صحيحة من اجل n اي : $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$ محققة .

لنثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ أي لنثبت : $\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

لدينا من الفرض : $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$

بما ان f متزايد على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$: $\underbrace{f(\sqrt{2})}_{\downarrow} \le \underbrace{f(u_{n+1})}_{\Downarrow} \le f(u_n)$

$$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$. فالخاصة السابقة صحيحة من اجل n.

4. استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة و احسب نهايتها.

بما ان المتتالية متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد $(\sqrt{2})$ فهي متقاربة.

بما ان $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة و هي معرفة تدريجياً بالعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ و f مستمر عندئذٍ تكون نهايتها حلاً للمعادلة $f(x)=x$ (وجدنا مما سبق ان $f(x)=x$ حلها $x=\sqrt{2}$)

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$

……

29) المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0=\frac{1}{2}$ و عند كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^2+2u_n$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5 .

$$n=0 \Rightarrow u_1=\frac{-1}{3}u_0^2+2u_0=\frac{-1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{12}$$

$$n=1 \Rightarrow u_2=\frac{-1}{3}u_1^2+2u_1=\frac{-1}{3}\left(\frac{11}{12}\right)^2+2\left(\frac{11}{12}\right)=\frac{671}{432}$$

$$n=2 \Rightarrow u_3=\frac{-1}{3}u_2^2+2u_2=\frac{-1}{3}\left(\frac{671}{432}\right)^2+2\left(\frac{671}{432}\right)=\frac{1288991}{559872}\approx 2.302$$

$$n=3 \Rightarrow u_4=\frac{-1}{3}u_3^2+2u_3=\frac{-1}{3}(2.302)^2+2(2.302)\approx 2.838$$

$$n=4 \Rightarrow u_5=\frac{-1}{3}u_4^2+2u_4=\frac{-1}{3}(2.838)^2+2(2.838)\approx 2.991$$

2) نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على R وفق : $f(x)=\frac{-1}{3}x^2+2x$

a) ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها .

f معرف و اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{-2}{3}x+2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{-2}{3}x+2=0 \\ x=3 \quad : f(3)=3 \end{array}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

b) اثبت انه إذا انتمى x إلى المجال $[0,3]$ انتمى $f(x)$ إلى المجال $[0,3]$

$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(3)=3 \end{array}\right.$ و f متزايد على المجال $[0,3]$ $\Big\} \Rightarrow f([0,3])=[0,3]$

3) استنتج من السؤال السابق ان :

a) العدد (3) راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

لنثبت بالتدريج: $E(n): \quad 0 \leq u_n \leq 3$

$E(0): \quad 0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 3$

$E(n): \quad 0 \leq u_n \leq 3$

$E(n+1): \quad \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq 3}$

لدينا فرضاً: $0 \leq u_n \leq 3$

f متزايد : $f(0) \leq \underbrace{f(u_n)} \leq f(3)$

$0 \leq u_{n+1} \leq 3$

إذاً العدد (3) راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$

b) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{3}u_n^2 + 2u_n - u_n$$

$$= \frac{-1}{3}u_n^2 + u_n = -\frac{1}{3}\underbrace{u_n}_{+}\underbrace{[u_n - 3]}_{-} \geq 0$$ المتتالية متزايدة

4) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها مع ملاحظة $u_{n+1} = f(u_n)$.

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة .

و بما ان $u_{n+1} = f(u_n)$ و f مستمر فإن نهايتها هي حل المعادلة

$$f(x) = x$$

$$\frac{-1}{3}x^2 + 2x = x$$

$$\frac{-1}{3}x^2 + x = 0$$

$$x\left(\frac{-1}{3}x + 1\right) = 0$$

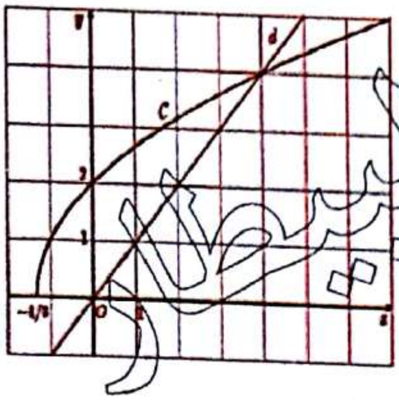
إما $x = 0$ مستحيلة (لأن المتتالية متزايدة واول حد فيها $u_0 = \frac{1}{2}$)

أو $\frac{-1}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow x = 3$ مقبول

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

---

30) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق : $u_0 > \frac{-4}{3}$ و $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n نجد في الشكل ادناه ، الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $\left[\frac{-4}{3}, +\infty\right[$ وفق : $f(x) = \sqrt{4+3x}$ و المستقيم d الذي معادلته $y = x$.



1. ما إحداثيا نقطة تقاطع الخط C و المستقيم d ؟

$$\left.\begin{matrix} f(x) = \sqrt{4+3x} \\ y = x \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} \sqrt{4+3x} = x \quad ; x > 0 \\ 4 + 3x = x^2 \end{matrix}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

إما $x = 4 \Longrightarrow y = 4 : (4,4)$

او $x = -1 ;$ مرفوضة $(x > 0)$

2. نفترض في هذا السؤال ان $u_0 = 6$

a) اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الادنى .

b) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

نلاحظ من الشكل المجاور ان الخط البياني يتقاطع مع منصف الربع الاول في نقطة فاصلتها (4) و $f(x) \leq x$ على المجال $[4, +\infty[$

بما ان C تحت المنصف اي:

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

و لنثبت هذه الخاصة بالتدريج .

- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n = 0$: $u_0 = 6$

$$u_1 = \sqrt{4+3(6)} = \sqrt{22} \Rightarrow 4 \leq \sqrt{22} \leq 6$$

- نفرض أن الخاصة صحيحة من اجل n اي : $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$ صحيحة
- لنثبت صحة الخاصة من اجل $n+1$ اي لنثبت : $4 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا فرضاً : $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$

f تابع متزايد تماماً على $\left]\frac{-4}{3}, +\infty\right[$ فإن :

$$\underbrace{f(4)}_{\Downarrow} \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{\Downarrow} \leq f(u_n)$$

$$4 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n+1$. و بالتالي الخاصة السابقة صحيحة من اجل n .

فالمتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بالعدد (4) .

c) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة .

و بما ان f مستمر على المجال السابق نستنتج من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ أن $\ell = f(\ell)$

و العدد ℓ هو فاصلة تقاطع C مع منصف الربع الأول اي $\ell = 4$ و منه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$

التابع اللوغاريتمي النيبري

مبرهنة وتعريف:

يوجد تابع واحد معرف واشتقاقي على R_+^*، ينعدم عند $x = 1$ ومشتقه على R_+^* هو التابع $x \longmapsto \frac{1}{x}$

يسمى هذا التابع تابع اللوغاريتم النيبري ونرمز إليه ln.

ملاحظة: نعتبر التابع ln هو التابع المعرف بالعلاقة $f(x) = \ln x$

التابع ln يحقق

معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ ينعدم عند $x = 1$ مشتقه على $]0,+\infty[$ هو $f'(x) = \frac{1}{x}$

نتائج هامة :

1) مجموعة تعريف التابع ln هي $]0,+\infty[= R_+^*$

$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ حيث $e \simeq 2.7$.

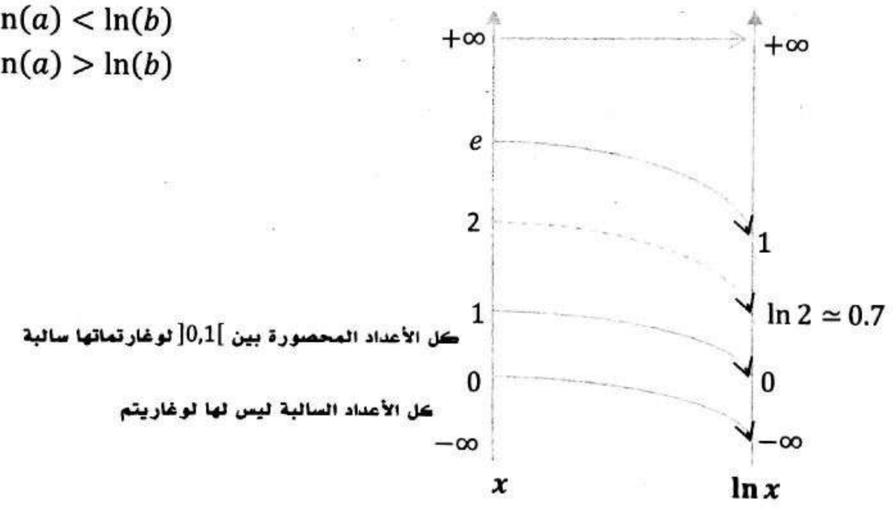
التابع ln اشتقاقي على R_+^* و $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

التابع ln مستمر على R_+^* لأنه اشتقاقي على هذا المجال.

2) التابع ln متزايد تماماً على R_+^* لأن $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ حيث $x > 0$

3) أياً كان العددان الموجبان تماماً b, a عندئذ:

- $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$
- $a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$



مما سبق نستنتج ما يلي:

- $x = 1 \Leftrightarrow \ln(1) = 0$
- $x \in \,]0,1[\Leftrightarrow \ln(x) < 0$
- $x \in \,]1,+\infty[\Leftrightarrow \ln(x) > 0$

مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي من الشكل $f(x) = \ln[g(x)]$:

$$D = \{x \;:\; g(x) > 0\}$$

اي مجموعة قيم x التي تجعل ما داخل اللوغاريتم اكبر تماماً من الصفر.

ملاحظة عن حل المتراجحات بشكل عام :

- كل متراجحة من الدرجة الأولى لإيجاد مجموعة حلولها ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى طرف آخر (لا نحتاج إلى دراسة إشارة).
- كل متراجحة من الدرجة الثانية فما فوق أو متراجحة كسرية لإيجاد مجموعة حلولها نعدمها وندرس إشارتها.

تمرين: أوجد مجموعة تعريف كل تابع من التوابع الآتية:

- $f(x)=\ln(x^2)$

شرط الحل $x^2>0$

نلاحظ ان المتراجحة محققة دائماً إلا عند $x=0$

ومنه : $D=R^*$

- $f(x)=\ln(6-3x)$

f معرف عندما $6-3x>0$

$6>3x$

$2>x$

$D=]-\infty,2[$

- $f(x)=\ln(x^2-3x)$

f معرف عندما $x^2-3x>0$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0 \qquad x=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2-3x>0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D=]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

- $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$

f معرف عندما $\frac{x+1}{3-x}>0$ متراجحة كسرية

$x+1=0 \qquad 3-x=0$

$x=-1 \qquad x=+3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+1}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$\frac{x+1}{3-x}>0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$D=]-1,3[$

- $f(x)=\ln\sqrt{x-2}$

f معرف عندما $\sqrt{x-2}>0$

$x-2>0$

$x>2$

$D=]2,+\infty[$

- $f(x)=\ln|x+2|-\ln|2x|$

f معرف عندما

$x+2\neq 0 \quad , \quad 2x\neq 0$

$x\neq -2 \quad , \quad x\neq 0$

$D=R\setminus\{-2,0\}$

* * *

خواص اللوغاريتم:

أياً كان العددان الحقيقيان الموجبان تماماً b,a عندئذ:

- $\ln(a^n)=n\ln a \quad : n\in N^* \ , a>0$
- $\ln(\sqrt{a})=\ln(a)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln a$

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln 1-\ln b=-\ln b$

طريقة حل المعادلة $\ln(g(x)) = \ln(h(x))$ او المتراجحة $\ln(g(x)) \leq \ln(h(x))$:

- نوجد D_g مجموعة قيم x التي تجعل $g(x) > 0$.
- نوجد D_h مجموعة قيم x التي تجعل $h(x) > 0$.
- مجموعة تعريف المعادلة او المتراجحة السابقة هي $D = D_g \cap D_h$
- نحل المعادلة $g(x) = h(x)$ او المتراجحة $g(x) \leq h(x)$ والحل الذي ينتمي إلى D هو حل المعادلة (او المتراجحة) اللوغاريتمية.

ملاحظة:

i. إذا كانت المعادلة اللوغاريتمية لا تحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها نختار الطرف الأبسط فتكون مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف المعادلة اللوغاريتمية.
إذا كانت المتراجحة اللوغاريتمية لا تحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها نختار الطرف الأصغر في المتراجحة فتكون مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف المتراجحة اللوغاريتمية.

ii. إذا كانت المعادلة اللوغاريتمية او (لمتراجحة اللوغاريتمية) تحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها نتبع الطريقة النظامية السابقة.

****

تمرين: حل المعادلات أو المتراجحات الآتية:

$2\ln(x) = \ln(2x^2 - 8x)$

حظ أن المعادلة تحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم

شرط الحل:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

$2x^2 - 8x > 0$

$2x^2 - 8x = 0 \quad (\div 2)$

$x(x-4) = 0$

إما $x = 0$ او $x = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$2x^2 - 8x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x^2 - 8x > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D_2 =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 =]4, +\infty[$

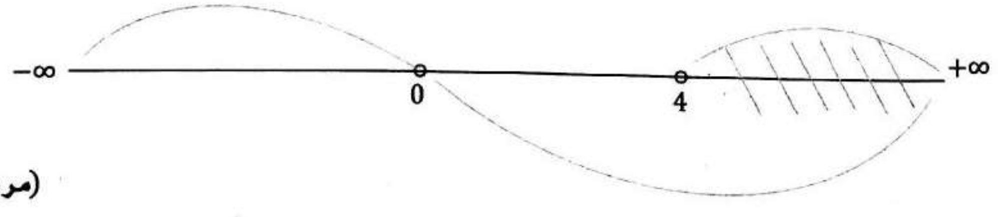
$2\ln x = \ln(2x^2 - 8x)$

$\ln x^2 = \ln(2x^2 - 8x)$

$x^2 = 2x^2 - 8x$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x-8) = 0$



إما $x = 0 \notin$ (مرفوض)

او $\boxed{x = 8} \in D$ (وهو حل المعادلة السابقة)

$\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$

لاحظ أن المعادلة لا تحتاج إلى استخدام خواص اللوغاريتم لحلها لذلك نختار مجموعة تعريف التابع الأبسط:

$3x - 4 > 0$ شرط الحل

$x > \frac{4}{3}$

$D = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

$\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

$3x-4 = x^2-4$

$x^2-3x = 0$

$x(x-3) = 0$

إما $x = 0 \notin D$ (مرفوض)

او $\boxed{x=3} \in$ (وهو حل المعادلة السابقة)

$\ln(x^2-4) \leq \ln(-3x)$

لاحظ: لا نحتاج لاستخدام خواص اللوغاريتم لحلها لذلك ناخذ مجموعة تعريف الطرف الأصفر

f معرف عندما $x^2-4>0$

$(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$ إما $x = 2$ او $x = -2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	
$x^2-4>0$	محققة			غير محققة		محققة	

$D =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$\ln(x^2-4) \leq \ln(-3x)$

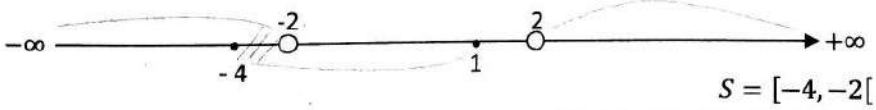
$x^2-4 \leq -3x$

$x^2+3x-4 \leq 0$

$(x+4)(x-1) = 0 \Rightarrow$ إما $x = -4$ او $x = 1$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		+	0	−	0	+	
$x^2+3x-4 \leq 0$	غير محققة			محققة		غير محققة	

$x \in [-4,1]$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة : $S = [-4,-2[$

****

تدريب صفحة 154:

1) في الحالات الآتية عين قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً :

- $\ln(x-3)$

  التابع معرف عندما $x-3>0$

  $x>3$

  $D =]3,+\infty[$

- $\frac{1}{x}\ln(1+x)$

  $\overbrace{x \neq 0 \qquad 1+x>0}^{\text{التابع معرف عندما}}$

  $x>-1$

  $D =]-1,+\infty[\setminus \{0\}$

- $\ln(x^2)$

  التابع معرف عندما $x^2>0$

  ($x=0$ محققة دائماً إلا عند)

  $D = R^*$

- $\ln(1-x)$

  التابع معرف عندما $1-x>0$

  $1>x$

  $D =]-\infty,1[$

- $\frac{1}{\ln x}$

التابع معرف عندما

$$\overbrace{\ln x \neq 0 \qquad\qquad x > 0}$$

$x \neq 1$

$D =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

- $\ln(x^2 + 4x)$

$x^2 + 4x > 0$ التابع معرف عندما

$x(x + 4) = 0$

$x = 0$ إما $\qquad$ $x = -4$ او

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$x^2 + 4x$		+	0	−	0	+	
$x^2 + 4x > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$

- $\ln(x^2 - 3x + 2)$

$x^2 - 3x + 2 > 0$ التابع معرف عندما

$(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 2$ إما $\qquad$ $x = 1$ او

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	−	0	+	
$x^2 - 3x + 2 > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

- $\ln|x + 1| - \ln|x - 1|$

التابع معرف عندما

$$\overbrace{x + 1 \neq 0 \qquad\qquad x - 1 \neq 0}$$

$x \neq -1 \qquad\qquad x \neq 1$

$D = R \setminus \{-1,1\}$

- $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

متراجحة كسرية $\frac{x-3}{2-x} > 0$ التابع معرف عندما

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x - 3$		−	−	−	0	+	
$2 - x$		+	0	−	−	−	
$\frac{x-3}{2-x}$		−	‖	+	0	−	
$\frac{x-3}{2-x} > 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$D =]2,3[$

2) f هو التابع المعرف على $I = R_+^*$ وفق $f(x) = 2 + \ln x$ بين ان f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$ واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها (1).

الحل: التابع $\ln x$ معرف واشتقاقي على R_+^*
التابع (2) معرف واشتقاقي على R
$\Leftarrow$ f شتقاقي على R_+^*

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

إيجاد معادلة المماس:

$$x = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$m = f'(1) = 1$$

$$: f(1) = 2 + 0 = 2$$

(1,2)

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 2 = 1(x - 1)$$
$$y = x + 1$$

---

3) f هو التابع المعرف على $I = R_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln$.

1. اثبت أن f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

التابع $\ln x$ معرف واشتقاقي على R_+^*
التابع $\frac{1}{x}$ معرف واشتقاقي على R^*
$\Leftarrow$ فالتابع f اشتقاقي على R_+^*

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1 + x}{x^2}$$

2. نظم جدولاً يبين جهة اطراد f.

f اشتقاقي على R_+^* ومنه:

$$f'(x) = \frac{-1 + x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + x = 0$$

$$\boxed{x = 1} \quad : \quad f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	↘	1	↗	

3. استنتج من المعادلة السابقة أن $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

من جدول الاطراد نلاحظ أن :

$$\left.\begin{matrix} x \in]0,1[\quad \Rightarrow f(x) > 1 \\ x \in [1, +\infty[\Rightarrow f(x) \geq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) \geq 1 \quad , \quad x \in I \text{ أياً يكن}$$

---

4) حل المعادلات الآتية:

1) $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$

شرط الحل $2x > 0$ ومنه $x > 0$

$$D =]0, +\infty[$$
$$\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$$
$$2x = x^2 - 1$$
$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 > 0$$
$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$
$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \notin D$$ (مرفوض)
$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = \boxed{1 + \sqrt{2}} \quad \in D$$ (مقبول)

2) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

شرط الحل $-3x > 0$ ومنه $x < 0$

$D =]-\infty, 0[$

$ln(-3x) = ln(x^2-4)$

$-3x = x^2 - 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x+4)(x-1) = 0$

إما $\boxed{x = -4}$ $\in D$ (مقبول)

او $x = 1$ $\notin D$ (مرفوض)

---

3) $\ln(x-2) = \ln(2)$

شرط الحل $x - 2 > 0$ ومنه $x > 2$

$D =]2, +\infty[$

$\ln(x-2) = \ln(2)$

$x - 2 = 2$

$\boxed{x = 4}$ $\in D$ (مقبول)

4) $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

شرط الحل $x - 2 > 0$ ومنه $x > 2$

$D =]2, +\infty[$

$\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

$x - 2 = x^2 - 2$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

إما $x = 0$ $\notin D$ (مرفوض)

او $x = 1$ $\notin D$ (مرفوض)

ذاً المعادلة السابقة مستحيلة الحل.

---

5) حل المتراجحات الآتية :

1) $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$

شرط الحل $x - 2 > 0$ ومنه $x > 2$

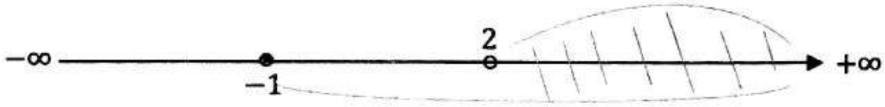
$D =]2, +\infty[$

$\ln(x-2) \leq \ln 0(2x-1)$

$x - 2 \leq 2x - 1$

$-1 \leq x \quad : \quad x \in [-1, +\infty[$

مجموعة حلول المتراجحة هي $S =]2, +\infty[$



---

2) $\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

شرط الحل $x^2 - 1 > 0$

$(x-1)(x+1) = 0$

إما $x = 1$ او $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2-1>0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

$2x \geq x^2 - 1$

$x^2 - 2x - 1 \leq 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 > 0$

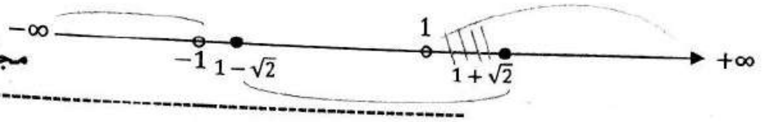
$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2-2x-1 \leq 0$	غير محققة		محققة			غير محققة	

$x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

مجموعة حلول المتراجحة هي $S =]1,1+\sqrt{2}]$



---

3) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geq \ln(x)$

$x > 0$ شرط الحل

$D =]0,+\infty[$

$$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geq \ln(x)$$

$$1+\frac{2}{x} \geq x$$

بما ان $x > 0$ نضرب المتراجحة بـ x

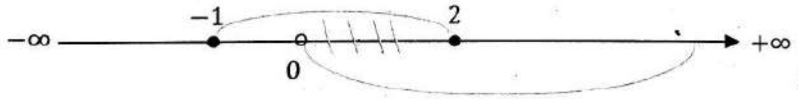
$$x+2 \geq x^2$$

$$x^2-x-2 \leq 0$$

$(x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow$ إما $x = 2$ او $x = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2-x-2 \leq 0$	غير محققة		محققة			غير محققة	

$x \in [-1,2]$



مجموعة حلول المتراجحة هي $S =]0,2]$

---

4) $\ln x \leq \ln(x^2-2x)$

$x > 0$ شرط الحل

$D =]0,+\infty[$

$$\ln x \leq \ln(x^2-2x)$$

$$x \leq x^2-2x$$

$$x^2-3x \geq 0$$

$x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow$ إما $x = 0$ او $x = 3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2-3x \geq 0$	محققة		غير محققة			محققة	

$x \in]-\infty,0] \cup [3,+\infty[$

مجموعة حلول المتراجحة هي $S = [3,+\infty[$

تدريب صفحة 157:

1- **بسط كتابة الأعداد الآتية:**

1) $\boldsymbol{a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}}$

$= \ln 3 + \ln 1 - \ln 3 = 0$

2) $\boldsymbol{b = \ln \frac{1}{16}}$

$= \ln 1 - \ln 16$

$= 0 - \ln 2^4 = -4 \ln 2$

3) $\boldsymbol{c = \frac{1}{2} \ln\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2} \ln(2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \ln 2$

2- **اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$, $\ln$:**

$\boldsymbol{a = \ln 50}$

$= \ln(25 \times 2)$

$= \ln 25 + \ln 2$

$= \ln(5)^2 + \ln 2$

$= 2 \ln 5 + \ln 2$

$\boldsymbol{b = \ln \frac{16}{25}}$

$= \ln 16 - \ln 25$

$= \ln(2)^4 - \ln(5)^2$

$= 4 \ln 2 - 2 \ln 5$

$\boldsymbol{c = \ln 250}$

$= \ln(125 \times 2)$

$= \ln 125 + \ln 2$

$= \ln(5)^3 + \ln 2$

$= 3 \ln 5 + \ln 2$

3- **اثبت ان $\mathrm{l}(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = 0$**

$L_1 = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$

$= \ln[(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]$

$= \ln(4 - 3) = \ln(1) = 0 = L_2$

4- **في كل من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x , y دون استعمال آلة حاسبة:**

1) $\boldsymbol{x = \ln 5}$, $\boldsymbol{y = \ln 2 + \ln 3}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \ln 5 \\ y = \ln 2 + \ln 3 = \ln(2.3) = \ln 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x < y$$

2) $x = 2 \ln 3$, $\boldsymbol{y = 3 \ln 2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \ln 3 = \ln(3)^2 = \ln 9 \\ y = 3\ln 2 = \ln(2)^3 = \ln 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x > y$$

5- **فيما يلي بسط كتابة كل من a , b:**

$\boldsymbol{a = \ln 567 - \ln 72 - \ln \frac{7}{8} + \ln \frac{1}{27}}$

$a = \ln 567 + \ln \frac{1}{27} - \left(\ln 72 + \ln \frac{7}{8}\right)$

$= \ln\left(\frac{567}{27}\right) - \ln\left(72 \times \frac{7}{8}\right)$

$= \ln(21) - \ln(63)$

$= \ln\left(\frac{21}{63}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \ln 1 - \ln 3$

$= -\ln 3$

$\boldsymbol{b = \ln\sqrt{216} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}}$

$= \ln\sqrt{216} - \ln\sqrt{27} + \ln\sqrt{75} - \ln 15$

$= \ln \sqrt{\frac{216}{27}} + \ln\sqrt{25 \times 3} - \ln 15$

$= \ln\sqrt{8} + \ln 5\sqrt{3} - \ln 15$

$= \frac{1}{2} \ln 8 + \ln\left(\frac{5\sqrt{3}}{15}\right)$

$= \frac{1}{2} \ln(2)^3 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{3}{2} \ln 2 - \ln\sqrt{3}$

$= \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$

6- **اثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x > 0$**

$$\ln(1+x^2) = 2\ln \quad + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$L_2 = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1'}{x^2}\right) = \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \ln(x^2+1) = L_1$$

$$\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$L_2 = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \ln(x+1) = L_1$$

7- **في كل من الحالتين الآتيتين، جد مجموعة قيم x التي تحقق المساواة:**

1) $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x-1)$

شرط الحل:

$x^2 - x > 0$

$x(x-1) = 0$

إما $x = 0$

او $x = 1$

$x > 0$

$x \in]0, +\infty[$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$x \in]1, +\infty[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - x > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

ومنه فإن مجموعة قيم x هي المجال: $]1, +\infty[$

---

2) $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

شرط الحل:

$\dfrac{x-1}{x+2} > 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$x \in]1, +\infty[$

$x + 2 > 0$

$x > -2$

$x \in]-2, +\infty[$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{x+2} > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$

ومنه فإن مجموعة قيم x هي المجال: $]1, +\infty[$

ملاحظة: في التمرين السابق نستطيع إيجاد مجموعة تعريف الطرف الأيمن لأن الطرف الأيمن هو مقصور الطرف الأيسر بعد استخدام خواص اللوغاريتم.

-8 في كل حالة مما يأتي: جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة المعطاة:

1) $2^n \leq 100$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\ln 2^n \leq \ln 100$$
$$n \ln 2 \leq \ln 100$$
$$n \leq \frac{\ln 100}{\ln 2}$$
$$n \leq \frac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln 2}$$
$$n \leq \frac{2\ln 2 + 2\ln 5}{\ln 2}$$

حيث : $\begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \end{pmatrix}$

$$n \leq \frac{2(0.7) + 2(1.6)}{0.7}$$
$$n \leq \frac{1.4 + 3.2}{0.7}$$
$$n \leq 6.57$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي

$\{0,1,2,3,4,5,6\}$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{100}$$
$$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \ln\frac{1}{100}$$
$$-n\ln 3 \leq -\ln 100$$
$$n \geq \frac{-\ln 100}{-\ln 3}$$
$$n \geq \frac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln 3}$$
$$n \geq \frac{2\ln 2 + 2\ln 5}{\ln 3}$$

حيث : $\begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \\ \ln 3 \approx 1.1 \end{pmatrix}$

$$n \geq \frac{2(0.7) + 2(1.6)}{1.1}$$
$$n \geq 4.18$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي

$\{5,6,7, \dots \dots\}$

---

3) $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\frac{2}{10} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$\ln\left(\frac{2}{10}\right) \geq \ln\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$\ln\left(\frac{2}{10}\right) \geq n\ln\frac{2}{5}$$
$$\frac{\ln\left(\frac{2}{10}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \leq n$$
$$\frac{\ln 2 - \ln 2 - \ln 5}{\ln 2 - \ln 5} \leq n$$
$$\frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} \leq n$$

حيث : $\begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \end{pmatrix}$

$$\frac{1.6}{0.9} \leq n$$
$$1.77 \leq n$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي

$\{2,3,4, \dots \dots\}$

4) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

ناخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\left(\frac{103}{100}\right)^n \geq 2$$
$$\ln\left(\frac{103}{100}\right)^n \geq \ln 2$$
$$n\ln\frac{103}{100} \geq \ln 2$$
$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 103 - \ln 100}$$

; $\begin{pmatrix} \ln 2 \approx 0.7 \\ \ln 5 \approx 1.6 \\ \ln 103 \approx 4.63 \end{pmatrix}$

$$n \geq \frac{0.7}{4.63 - 4.60}$$
$$n \geq \frac{0.7}{0.03}$$
$$n \geq 23.33$$

n عدد طبيعي ومنه مجموعة قيم العدد n هي

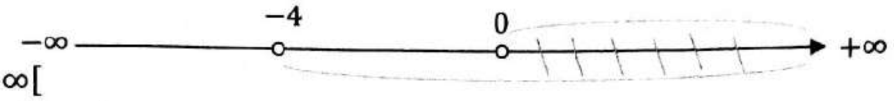
$\{24,25,26, \dots \dots\}$

-9 **حل كل متراجحة او معادلة فيما يأتي:**

1) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

شرط الحل:

$$\overbrace{\begin{matrix} x > 0 & x+4>0 & 2x>0 \\ x \in]0,+\infty[& x>-4 & x>0 \\ & x \in]-4,+\infty[& x \in]0,+\infty[\end{matrix}}$$



$D =]0,+\infty[$
$2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$
$\ln x^2 = \ln[(x+4)(2x)]$
$\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$
$x^2 = 2x^2 + 8x$
$x^2 + 8x = 0$
$x(x+8) = 0$

إما $x = 0 \quad \notin D$ (مرفوض)

او $x = -8 \quad \notin D$ (مرفوض) **فالمعادلة مستحيلة الحل**

---

2) $2\ln x = \ln(2x^2+8x)$

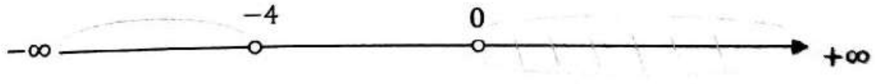
شرط الحل:

$$\overbrace{\begin{matrix} x > 0 & 2x^2+8x>0 \quad (\div 2) \\ x \in]0,+\infty[& x(x+4)=0 \end{matrix}}$$

إما $x = 0$ او $x = -4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x^2+4x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2+4x>0$		محققة		غير محققة		محققة	

$x \in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$



$D =]0,+\infty[$
$2\ln x = \ln(2x^2+8x)$
$\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$
$x^2 = 2x^2 + 8x$
$x^2 + 8x = 0$
$x(x+8) = 0$

إما $x = 0 \quad \notin D$ (مرفوض)

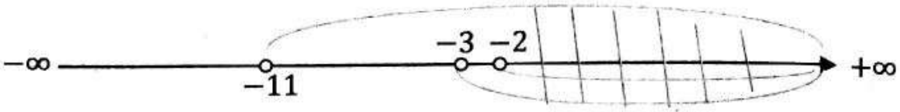
او $x = -8 \quad \notin D$ (مرفوض) **فالمعادلة مستحيلة الحل**

---

3) $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$

شرط الحل:

$$\overbrace{\begin{matrix} x+11>0 & x+3>0 & x+2>0 \\ x>-11 & x>-3 & x>-2 \\ x \in]-11,+\infty[& x \in]-3,+\infty[& x \in]-2,+\infty[\end{matrix}}$$



$D =]-2, +\infty[$

$\ln(x + 11) = \ln(x + 3) + \ln(x + 2)$

$\ln(x + 11) = \ln[(x + 3)(x + 2)]$

$\ln(x + 11) = \ln(x^2 + 5x + 6)$

$x + 11 = x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

إما $x = -5$ $\notin D$ (مرفوض) او $\boxed{x = 1}$ $\in D$ (مقبول)

---

4) $\ln(x + 11) = \ln(x + 3)(x + 2)$

المعادلة لا تحتاج إلى استخدام خواص اللوغاريتم نختار الطرف الأبسط.

شرط الحل: $x + 11 > 0$ ومنه $x > -11$

$D =]-11, +\infty[$

$\ln(x + 11) = \ln(x + 3)(x + 2)$

$(x + 11) = (x + 3)(x + 2)$

$x + 11 = x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

إما $\boxed{x = -5}$ $\in D$ (مقبول) او $\boxed{x = 1}$ $\in D$ (مقبول)

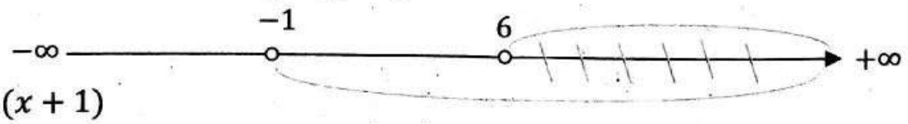
---

5) $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x - 6) + \ln(x + 1)$

شرط الحل:

$x - 6 > 0$
$x > 6$
$x \in]6, +\infty[$

$x + 1 > 0$
$x > -1$
$x \in]-1, +\infty[$



$D =]6, +\infty[$

$\ln 4 + \ln 2 = \ln(x - 6) + \ln(x + 1)$

$\ln(4 \times 2) = \ln[(x - 6)(x + 1)]$

$\ln 8 = \ln(x^2 - 5x - 6)$

$8 = x^2 - 5x - 6$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x - 7)(x + 2) = 0$

إما $\boxed{x = 7}$ $\in D$ (مقبول) او $x = -2$ $\notin D$ (مرفوض)

---

6) $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3 - x) - \ln\sqrt{x + 1}$

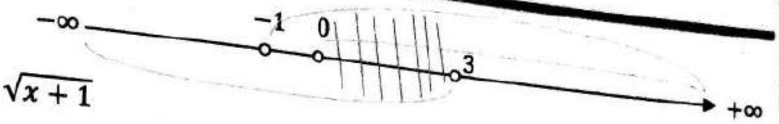
شرط الحل:

$2x > 0$
$x > 0$
$x \in]0, +\infty[$

$3 - x > 0$
$3 > x$
$x \in]-\infty, 3[$

$\sqrt{x + 1} > 0$
$x + 1 > 0$
$x > -1$
$x \in]-1, +\infty[$

$D =]0,3[$



$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

$\ln(2x) = 2\ln(3-x) - 2\ln\sqrt{(x+1)}$

$\ln 2x = \ln(3-x)^2 - \ln(x+1)$

$\ln 2x = \ln\frac{(3-x)^2}{x+1}$

$2x = \frac{(3-x)^2}{x+1}$

$2x(x+1) = (3-x)^2$

$2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

إما $x = -9$ $\notin D$ (مرفوض)

او $\boxed{x = 1}$ $\in D$ (مقبول)

---

7) $\ln 3 \le \ln(5-x) + \ln(x-1)$

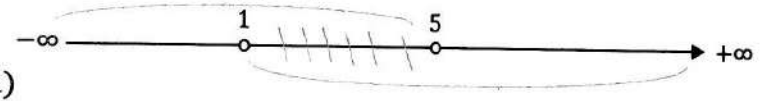
شرط الحل :

$5 - x > 0$ $\quad$ $x - 1 > 0$

$5 > x$ $\quad$ $x > 1$

$x \in]-\infty, 5[$ $\quad$ $x \in]1, +\infty[$

$D =]1,5[$



$\ln 3 \le \ln(5-x) + \ln(x-1)$

$\ln 3 \le \ln[(5-x)(x-1)]$

$\ln 3 \le \ln(-x^2 + 6x - 5)$

$3 \le -x^2 + 6x - 5$

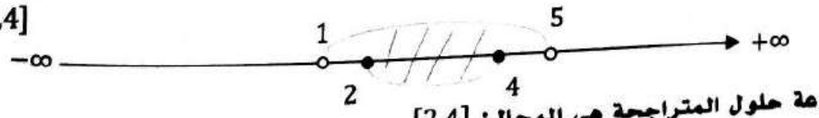
$-x^2 + 6x - 8 \ge 0$

$x^2 - 6x + 8 \le 0$

$(x-4)(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow$ إما $x = 4$ $\quad$ او $x = 2$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - 6x + 8 \le 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$x \in [2,4]$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي المجال: $[2,4]$

---

8) $\ln(3x^2 - x) \le \ln x + \ln$

شرط الحل :

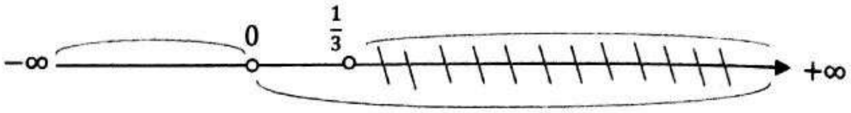
$3x^2 - x > 0$ $\quad$ $x > 0$

$x(3x-1) = 0$ $\quad$ $x \in]0, +\infty[$

إما $x = 0$ $\quad$ او $x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2-x$		+	0	−	0	+	
$3x^2-x>0$		محققة		غير محققة		محققة	

$x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$



$D=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

$\ln(3x^2-x) \le \ln x + \ln 2$

$\ln(3x^2-x) \le \ln(2x)$

$3x^2-x \le 2x$

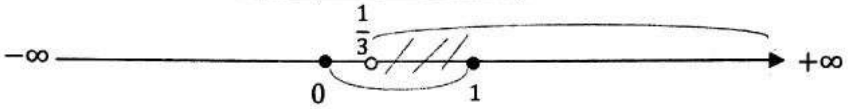
$3x^2-3x \le 0 \quad (\div 3)$

$x(x-1)=0$

إما $x=0$ او $x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x^2-3x$		+	0	−	0	+	
$3x^2-3x\le 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$x \in [0,1]$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي المجال: $\left]\frac{1}{3},1\right]$

---

9) $\ln(6x+4) \le \ln(3x^2-x-2)$

المتراجحة لا تحتاج إلى استخدام خواص اللوغاريتمنأخذ مجموعة تعريف الطرف الأصفر.

$6x+4>0$ شرط الحل

$6x>-4$

$x>\frac{-2}{3}$

$D=\left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$

$\ln(6x+4) \le \ln(3x^2-x-2)$

$6x+4 \le 3x^2-x-2$

$3x^2-7x-6 \ge 0$

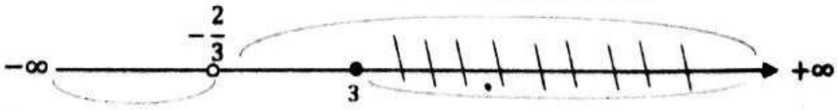
$3x^2-7x-6=0$

$\Delta=49-4(3)(-6)=121 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta}=11$

$x_1=\frac{7-11}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3} \quad , \quad x_2=\frac{7+11}{6}=3$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2-7x-6$		+	0	−	0	+	
$3x^2-7x-6\ge 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$x \in \left]-\infty,\frac{-2}{3}\right] \cup [3,+\infty[$



مجموعة حلول المتراجحة هي $[3,+\infty[$

10) $3\ln x > \ln(3x-2)$

شرط الحل:

$$\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

$x > 0$

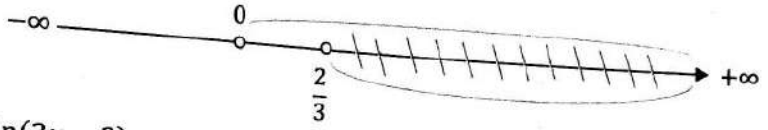
$x \in]0, +\infty[$

$3x - 2 > 0$

$x > \frac{2}{3}$

$x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

$D = \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

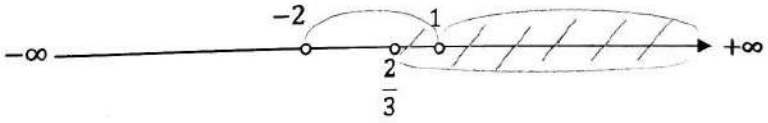


$$3\ln x > \ln(3x-2)$$
$$\ln x^3 > \ln(3x-2)$$
$$x^3 > 3x-2$$
$$x^3 - 3x + 2 > 0$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$
$$x^3 - x - 2x + 2 = 0$$
$$x(x^2-1) - 2(x-1) = 0$$
$$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0$$
$$(x-1)[x(x+1)-2] = 0$$
$$(x-1)(x^2+x-2) = 0$$
$$(x-1)(x+2)(x-1) = 0$$
$$(x-1)^2(x+2) = 0$$

إما $x = 1$, أو $x = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+		+	0	+	
$x+2$		−	0	+		+	
$(x-1)^2(x+2)$		−	0	+	0	+	
$(x-1)^2(x+2) > 0$		غير محققة		محققة		محققة	

$x \in]-2,1[\cup]1, +\infty[$



ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي المجال: $\left]\frac{2}{3}, 1\right[\cup]1, +\infty[$

-10 في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ مجموعة النقاط المحققة للشرط المشار اليه:

1) $\ln x = \ln(y+1)$

شرط الحل:

$$\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

$x > 0$

$x \in]0, +\infty[$

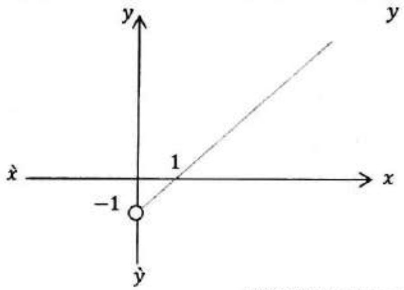
$y + 1 > 0$

$y > -1$

$y \in]-1, +\infty[$

$$\ln x = \ln(y+1)$$
$$x = y + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x - 1}$$

النقاط $M(x,y)$ تمثل نصف مستقيم محمول على المستقيم $y = x - 1$



----

2) $\ln y = 2\ln x$

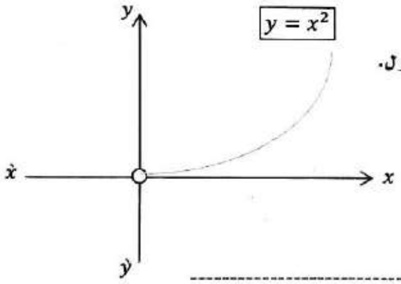
شرط الحل:

$x > 0$ $\quad$ $y > 0$

$x \in]0,+\infty[$ $\quad$ $y \in]0,+\infty[$

$$\ln y = 2\ln x$$
$$\ln y = \ln x^2$$
$$\boxed{y = x^2}$$

النقاط $M(x,y)$ تمثل جزء من قطع مكافئ موجود في الربع الأول.



----

3) $\ln x + \ln y = 0$

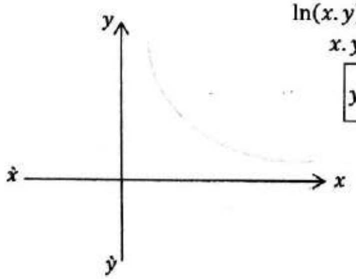
شرط الحل:

$y > 0$ $\quad$ $x > 0$

$y \in]0,+\infty[$ $\quad$ $x \in]0,+\infty[$

$$\ln x + \ln y = 0$$
$$\ln(x.y) = \ln 1$$
$$x.y = 1$$
$$\boxed{y = \frac{1}{x}}$$

النقاط $M(x,y)$ تمثل فرع القطع الزائد الموجود في الربع الأول.



* * *

التابع اللوغاريتمي النيبري

[redacted]

مبرهنة:

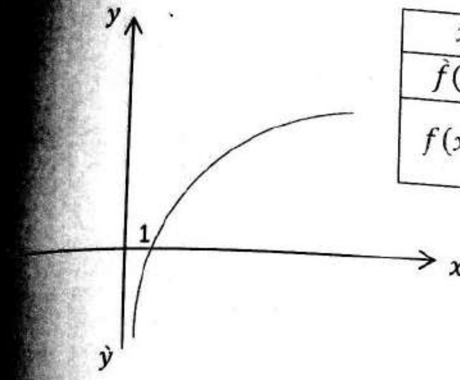
$$f(x) = \ln(x)$$

دراسة التابع اللوغاريتمي $D =]0, +\infty[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$\grave{f}(x) = \frac{1}{x} > 0$$

x	0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$+$	
$f(x)$	▨	$-\infty \longrightarrow$	$+\infty$



نقطة مساعدة : C قطع $x\acute{x}$ اي $f(x) = 0$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1 \qquad (1,0)$$

ملاحظة هامة:

1) اياً كان $x \in R$ فإن $\ln e^{x} = x$

2) اياً كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $e^{ln} \;\; = x$

المعادلة $\ln x = m$ (m عدد حقيقي)

اعتماداً على دراسة التابع اللوغاريتمي نجد انه اياً كان العدد $m \in R$ كان للمعادلة $\ln x = m$ حل وحيد في $]0, +\infty[$

مثال: حل المعادلة الآتية :

$$\mathbf{ln}(x + \mathbf{1}) = \mathbf{2}$$

المعادلة معرفة عندما $x + 1 > 0$ اي $x > -1$ ومنه $D =]-1, +\infty[$

$$\ln(x + 1) = \ln e^{2}$$

$$x + 1 = e^{2}$$

$$x = e^{2} - 1 \in D$$

اي للمعادلة حل وحيد

مثال: حل المتراجحة الآتية :

$$\mathbf{ln}(x + \mathbf{1}) \geq \mathbf{2}$$

المتراجحة معرفة عندما $x + 1 > 0$ اي $x > -1$ ومنه $D =]-1, +\infty[$

$$\ln(x + 1) \geq \ln e^{2}$$

$$x + 1 \geq e^{2}$$

$$x \geq e^{2} - 1$$

ومنه $x \in [e^{2} - 1, +\infty[$ وبالتالي مجموعة الحلول هي $S = [e^{2} - 1, +\infty[$.

* * *

دراسة تابع لحل متراجحة:

1- ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد فنحصل على احد الشكلين $f(x) < 0$ او $f(x) > 0$.

2- ندرس اطراد التابع $f(x)$.

3- من جدول الاطراد ومن سطر $f(x)$ نحصل على حل المتراجحة.

مثال: اثبت صحة المتراجحة $x \geq \mathbf{ln}(x + \mathbf{1})$ اياً يكن $x > -1$

المتراجحة السابقة تكافئ

$$x - \ln(x + 1) \geq 0$$

$$f(x) = x - \ln(x + 1)$$

f اشتقاقي على المجال $]-1,+\infty[$

$$\acute{f}(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0} \;:\; f(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	↘	0	↗	

من جدول الاطراد أياً كانت $x\epsilon]-1,+\infty[$ فإن:

$$f(x) \geq 0$$

اي

$$x - \ln(x+1) \geq 0$$

$$x \geq \ln(x+1)$$

المتراجحة لسابقة محققة اياً يكن $x > -1$

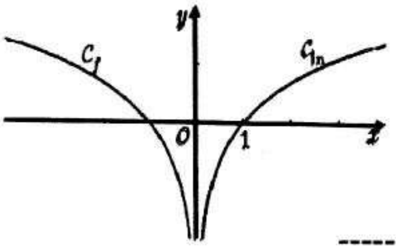
***

تدرب صفحة 162:

1) انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \longmapsto \ln x$ ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية:

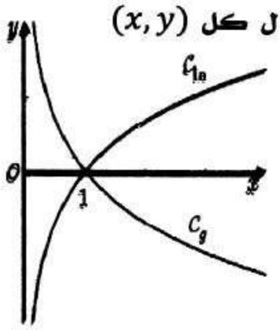
$x \longmapsto \ln(-x)$

C_f الخط البياني للتابع $x \longmapsto \ln(-x)$ ينتج عن الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(-x,y)$ اي C_f نظير C_{ln} بالنسبة لـ $y\grave{y}$



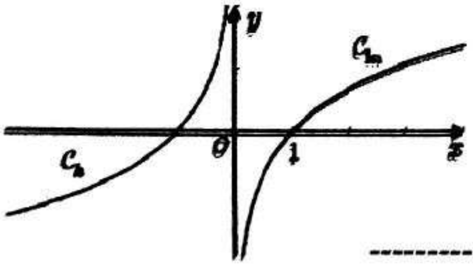
$x \longmapsto -\ln x$

C_g الخط البياني للتابع $x \longmapsto -\ln x$ ينتج عن الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(x,-y)$ اي C_g نظير C_{ln} بالنسبة لـ $x\grave{x}$



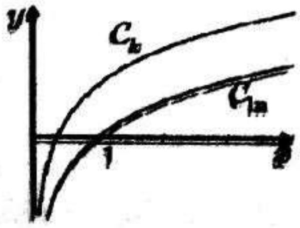
$x \longmapsto -\ln(-x)$

C_h الخط البياني للتابع $x \longmapsto -\ln(-x)$ ينتج عن الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(-x,-y)$ اي C_h نظير C_{ln} بالنسبة لمبدا الإحداثيات $O(0,0)$



$x \longmapsto 1 + \ln x$

C_k الخط البياني للتابع $x \longmapsto 1+\ln x$ ينتج عن الخط البياني C_{ln} للتابع $x \longmapsto \ln x$ بإبدال كل (x,y) بـ $(x,1+y)$ اي C_k ينتج عن C_{ln} بانسحاب شعاعه $\vec{J}$.



2) **اثبت ان $\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$ اياً يكن $x > 0$ واستنتج ان $2 < e < 4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x.**

- **لإثبات المتراجحة ندرس اطراد التابع:**

$$2(\sqrt{x}-1) - \ln x \quad \geq 0$$

$$(x) = 2(\sqrt{x}-1) - \ln x \quad ; \quad D =]0,+\infty[$$

fاشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\acute{f}(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{x=1} \; : \; f(1) = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	↘	0	↗	

نلاحظ من جدول الاطراد ان اياً كانت $x \in]0,+\infty[$ **فإن:** $f(x) \geq 0$

$$2(\sqrt{x}-1) - \ln x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$$

- **الآن من المتراجحة المثبتة** $\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$

* **نختار** $x = \frac{1}{e}$ **فيكون:**

$$\ln\frac{1}{e} \leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}} - 1\right)$$

$$-1 \leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}} - 1\right)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{e}} - 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{e}}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e} \leq 4$$

* **نختار** $x = e$ **فيكون:**

$$\ln e \leq 2(\sqrt{e}-1)$$

$$1 \leq 2(\sqrt{e}-1)$$

$$\frac{1}{2} \leq (\sqrt{e}-1)$$

$$\frac{1}{2} + 1 \leq \sqrt{e}$$

$$\frac{3}{2} \leq \sqrt{\mathrm{e}}$$

$$2.25 = \frac{9}{4} \leq e$$

ومنه نستطيع ان نكتب $2 < e$

وبالتالي نستنتج ان $\boxed{2 < e < 4}$

---

3) **في كل من الحالتين الآتيين، قارن بين العددين x، y دون استعمال الآلة الحاسبة:**

1) $x = \ln e^3 - 2 \quad , \quad y = \ln(e\sqrt{e})$

$$\left.\begin{array}{l} x = \ln e^3 - 2 = 3 - 2 = 1 \\ \\ y = \ln(e\sqrt{e}) = \ln\left(e.e^{\frac{1}{2}}\right) = \ln e^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y > x$$

2) $x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3 \quad , \quad y = \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

$$\left.\begin{array}{l} x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3 = 3\ln\frac{1}{e} = 3(-1) = -3 \\ \\ y = \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 = \ln\frac{1}{e} \times \ln\frac{1}{e} = -1 \times -1 = 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y > x$$

4) حل كل متراجحة أو معادلة مما يلي:

1) $\ln(1-x)=-2$

المعادلة معرفة عندما $1-x>0$ ومنه $1>x$ أي :

$D=]-\infty,1[$

$\ln(1-x)=-2$

$\ln(1-x)=\ln e^{-2} \Rightarrow 1-x=e^{-2}$

$$x=1-\frac{1}{e^2}=\frac{e^2-1}{e^2}\in D$$

أي للمعادلة حل وحيد $x=\frac{e^2-1}{e^2}$

---

2) $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

المعادلة معرفة عندما $(x-2>0)\cap(x+1>0)$

$(x>-1)\cap(x>2)$

$D=]2,+\infty[$

$$\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$$

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=2$$

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=\ln e^2$$

$$\frac{x-2}{x+1}=e^2$$

$$x-2=e^2(x+1)$$

$$x-2=e^2x+e^2$$

$$x-e^2x=e^2+2$$

$$x(1-e^2)=e^2+2$$

$x=\frac{e^2+2}{1-e^2}<0\notin D$ المعادلة مستحيلة الحل

---

3) $(\ln x)^2=16$

المعادلة معرفة عندما $x>0$ أي : $D=]0,+\infty[$

و منه : $(\ln x)^2=16$

إما $\ln x=4\Rightarrow x=e^4\in D$

أو $\ln x=-4\Rightarrow x=e^{-4}\in D$

وبالتالي مجموعة الحلول هي $S=\{e^{-4},e^4\}$

---

4) $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

المعادلة معرفة عندما $x>0$ أي : $D=]0,+\infty[$

إما $\ln x-1=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e\in D$

أو $\ln x+2=0\Rightarrow \ln x=-2\Rightarrow x=e^{-2}\in D$

وبالتالي مجموعة الحلول هي $S=\{e^{-2},e^2\}$

---

5) $\ln(2-x)\geq 1$

المتراجحة معرفة عندما $2-x>0$ ومنه $x<2$ أي :

$D=]-\infty,2[$

$\ln(2-x)\geq 1$

$\ln(2-x)\geq \ln e^1$

$2-x\geq e$

$x\leq 2-e$

أي $x\in]-\infty,2-e]$

وبالتالي مجموعة الحلول هي $S=]-\infty,2-e]$

---

6) $\ln\frac{1}{x}>2$

المتراجحة معرفة عندما $\frac{1}{x}>0$ أي :

$D=]0,+\infty[$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)>2$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)>\ln e^2$$

$$\frac{1}{x}>e^2$$

$$x<\frac{1}{e^2}$$

ومنه $x\in\left]-\infty,\frac{1}{e^2}\right[$ وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S=\left]0,\frac{1}{e^2}\right[$$

* * *

مشتق التابع $\ln[g(x)]$:

إذا كان g تابعاً اشتقاقياً على المجال I وموجباً تماماً على I ، عندئذٍ :

التابع $x\mapsto\ln[g(x)]$ اشتقاقي على I ، و $x\mapsto\frac{g'(x)}{g(x)}$ هو تابعه المشتق على I.

* * *

التابع اللوغاريتمي النيبري

تمرين: في كل مما يلي اثبت ان التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب $\acute{f}$.

$f(x) = \ln x - \ln(x+1) \ : \ D =]0, +\infty[$

$x \longmapsto x$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : $x \longmapsto \ln x$ اشتقاقي على D

$x \longmapsto x+1$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : $x \longmapsto \ln(x+1)$ اشتقاقي على D

وبما ان f مجموع تابعين اشتقاقيين على فإن f اشتقاقي على D.

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

$f(x) = \ln(1-x^2) \ : \ D =]-1, 1[$

$x \longmapsto 1-x^2$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : f اشتقاقي على D.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$f(x) = \ln(\frac{x+1}{3-x}) \ : \ D =]-1, 3[$

$x \longmapsto \frac{x+1}{3-x}$ اشتقاقي وموجب تماماً على $\overset{\circ}{D}$ ومنه : f اشتقاقي على D.

$$\acute{f}(x) = \frac{\frac{1(3-x)-(-1)(x+1)}{(3-x)^2}}{\frac{x+1}{3-x}} = \frac{3-x+x+1}{\frac{(x+1)}{(3-x)}(3-x)^2} = \frac{4}{(x+1)(3-x)}$$

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \ : \ D = R$

$x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$ اشتقاقي وموجب تماماً على D ومنه : f اشتقاقي على D.

$$\acute{f}(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

* * *

مبرهنات في نهايات التابع اللوغاريتمي:

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \ ; \ n \in N^*$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

* * *

تمرينات صفحة 165:

1) جد كلاً من النهايات الآتية:

② $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^2-x)\ln x\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\left((x^2-x)\ln x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left((x-1)x\ln x\right)$

$=$ [redacted] $= 0$

$\lim \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim \frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) =$ [redacted] $= 0$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=? \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\ \text{حالة عدم تعيين من الشكل}\right)$$

نجري تغيير في المتحول:

$\sqrt{x}=t \qquad , \qquad x\to+\infty$

$x=t^{2} \qquad , \qquad t\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\ln t^{2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{2\ln t}=\frac{1}{2}(+\infty)=+\infty$$

---

2) **فيما يأتي، جد نهاية التابع f عند اطراف مجالات تعريفه:**

1) $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

شرط للوغاريتم $\qquad$ شرط الكسر

$x>0 \qquad\qquad x\neq 0$

$D=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty \qquad , \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

---

2) $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$

شرط للوغاريتم $\qquad$ شرط الكسر

$x>0 \qquad\qquad x\neq 0$

$D=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{0-(-\infty)}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=? \quad \left(\infty-\infty\ \text{حالة عدم تعيين من الشكل}\right)$$

$$f(x)=\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}=1-\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$$

3) $f(x)=x-\ln x$

$D=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=0-(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=? \quad \left(\infty-\infty\ \text{حالة عدم تعيين من الشكل}\right)$$

$$f(x)=x-\ln x=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$$

---

4) $f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

f معرف عندما $1+\frac{1}{x}>0$ اي $\frac{x+1}{x}>0$ ندرس إشارته :

$x+1=0 \ \to\ x=-1 \qquad , \qquad x=0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$\frac{x+1}{x}>0$		محققة		غير محققة		محققة	

ومنه $D=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=? \quad \left(-\infty\times0\ \text{حالة عدم تعيين من الشكل}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=? \quad \left(+\infty\times0\ \text{حالة عدم تعيين من الشكل}\right)$$

التابع اللوغاريتمي النيبري

طريقة اولى لإزالة عدم التعيين : نجري تغيير في المتحول: نفرض $\frac{1}{x} = t$ **ومنه :** $x = \frac{1}{t}$

$x \to +\infty$, $t \to 0^+$, $x \to -\infty$, $t \to 0^-$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to0^-}\left[\frac{1}{t} + \frac{\ln(1+t)}{t}\right] = -\infty + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t} + \frac{\ln(1+t)}{t}\right] = +\infty + 1 = +\infty$$

طريقة ثانية لإزالة عدم التعيين :

$$f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right] = -\infty(1+0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right] = +\infty(1+0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -1 + (-1)\ln\left(1+\frac{1}{(-1)}\right) = -1 + (-1)(-\infty) = +\infty$$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = ?$ $\left(\text{حالة عدم تعيين من الشكل } 0\times\infty\right)$

$$f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$f(x) = x + x[\ln(x+1) - \ln x] = x + x\ln(x+1) - x\ln x$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 + 0 - 0 = 0$$

---

5) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

$\overbrace{x>0 \qquad\qquad x\neq 0}$ شرط اللوغاريتم شرط الكسر

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - (+\infty) = -\infty$

---

6) $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$

$\overbrace{x>0 \qquad\qquad x\neq -1}$ شرط اللوغاريتم شرط الكسر

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\left(\text{حالة عدم تعيين من الشكل } \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} = \frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{1+0} = +\infty$

---

7) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$\overbrace{x>0 \qquad\qquad \ln x\neq 0}$ شرط اللوغاريتم شرط الكسر

$x \neq 1$

$D =]0,1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

---

8) $f(x) = x(1-\ln x)$

f معرف عندما $x>0$ اي : $D =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = ?$

$\left(\text{حالة عدم تعيين من الشكل } 0\times(+\infty)\right)$

$$f(x) = x(1-\ln x) = x - x\ln x$$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-\infty) = -\infty$

---

9) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

f معرف عندما $\frac{x+1}{x-4} > 0$ ندرس إشارة الكسر: $x - 4 = 0 \rightarrow x = +4$ ، $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-4}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$\frac{x+1}{x-4} > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

ومنه $D =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \ln\frac{0}{-5} = \ln 0 = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \ln\left(\frac{5}{0^+}\right) = +\infty$

---

10) $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$

شرط اللوغاريتم $x > 0$ ، شرط الكسر $x \neq 0$

$D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty(-\infty - 1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $0 \times \infty$)

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

11) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

شرط اللوغاريتم $x > 0$ ، شرط الكسر $\ln x \neq 0$

$x \neq 1$

$D =]0,1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$)

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

---

12) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

$D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 + \ln(1) - (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$)

$$f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x = x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

---

3) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق $f(x) = x + 1 - \frac{\ln}{x}$

-1 لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C ؟

$$f(x) - y_d = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1) = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_d] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}\right] = 0$$

ومنه $d: y = x + 1$ مقارب مائل للخط C عند الـ $+\infty$.

-2 **ادرس الوضع النسبي للخطين d و C.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_d = 0 \\ \dfrac{-\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} - \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_d$	▨	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	▨	C فوق d	$(1,2)$	C تحت d	

4) **في كل مما يأتي، اثبت ان التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'**

$f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$; $I =]2, +\infty[$

لدينا التابع $x \mapsto x - 2$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln(x-2)$ اشتقاقي على I.

والتابع $x \mapsto x + 2$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln(x+2)$ اشتقاقي على I.

ومنه فإن f تابع اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين على I.

$$(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2-x+2}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4}$$

$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $I =]1, +\infty[$

لدينا التابع $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ اشتقاقي على I

ومنه فإن f تابع اشتقاقي على I ، نكتب f بالشكل: $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

$(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $I =]0, +\infty[$

لدينا التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي وموجب تماماً على I

والتابع $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنه $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I.

ومنه فإن f تابع اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين على I.

$$(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

$x) = \ln(1+x^2)$, $I = R$

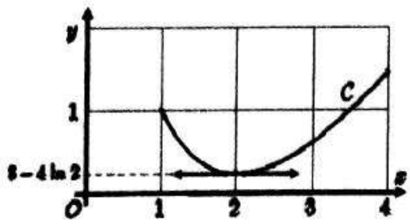
لدينا التابع $x \mapsto 1 + x^2$ اشتقاقي وموجب تماماً على I

ومنه $\ln(1+x^2)$ اشتقاقي على I ومنه f اشتقاقي على I.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

تمرينات ومسائل صفحة 171

1) نتامل تابعاً f معرفاً على المجال $I = [1,4]$ وفق $f(x) = ax + b + \quad \ln x$ حيث c و b و a اعداد حقيقية نهدف إلى تعيينها. نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع.



1- اثبت ان f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $\grave{f}(x)$.

$$f(x) = ax + b + \quad \ln x$$

لاحظ ان: $ax + b$ ابع صحيح فهو اشتقاقي على R.

$c \ln x$ ابع لوغاريتمي اشتقاقي على $]0, +\infty[$

إذاً $f(x)$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$ فهو اتقاقي على اي مجال جزئي منه، فهو اشتقاقي على $I = [1,4]$.

$$\grave{f}(x) = a + \frac{c}{x}$$

2- استفد من المعلومات المدونة على الشكل لإثبات ان :

$$a + b = 1 \quad , \quad 2a + c = \quad , \quad 2a + b + c \ln 2 = 3 - 4 \ln 2$$

* لخط البياني يمر بالنقطة $(1,1)$ فإن :

$$f(1) = 1$$
$$a(1) + b + c \ln(1) = 1$$
$$\boxed{a + b = 1}$$

* المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 2$ افقي عندئذ : $\grave{f}(2) = 0$

$$a + \frac{c}{2} = 0 \qquad (\times 2)$$
$$\boxed{2a + c = 0}$$

* الخط البياني يمر بالنقطة $(2, 3 - 4 \ln 2)$ فإن:

$$f(2) = 3 - 4 \ln 2$$
$$a(2) + b + c \ln(2) = 3 - 4 \ln 2$$
$$\boxed{2a + b + c \ln 2 = 3 - 4 \ln 2}$$

3- جد قيم c و b و a ثم اكتب عبارة $f(x)$:

$$\left.\begin{array}{lll} ① & a + b = 1 & \longrightarrow \quad b = 1 - a \\ ② & 2a + c = 0 & \longrightarrow \quad c = -2a \\ ③ & 2a + b + c \ln 2 = 3 - 4 \ln 2 & \end{array}\right\}$$

نعوض في ③

$$2a + 1 - a - 2a \ln 2 = 3 - 4 \ln 2$$
$$a - 2a \ln 2 = 2 - 4 \ln 2$$
$$a(1 - 2 \ln 2) = 2(1 - 2 \ln 2)$$

$$a = \frac{2(1 - 2 \ln 2)}{1 - 2 \ln 2} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{a = 2}$$
$$b = 1 - a = 1 - 2 = -1 \quad \Rightarrow \boxed{b = -1}$$
$$c = -2a = -2(2) = -4 \quad \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

اصبح: $\boxed{f(x) = 2x - 1 - 4 \ln x}$

---

2) ليكن a , b عددين حقيقيين. في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق $f(x) = ax + b + \frac{1}{x} \ln x$. النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من C ، والمماس للخط البياني C في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$ استفد من هذه المعطيات لتعين a و b.

$$f(x) = ax + b \quad \frac{1}{x} \ln x$$

$A(1,0) \in C \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$$\boxed{a + b = 0} \qquad (*)$$

المماس في A يوازي $y = 3x + 2$ إذاً $m_y = m_{\text{مماس}}$

$$m_y = 3 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{مماس}} = \grave{f}(1) = 3$$

$$\grave{f}(x) = a + \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

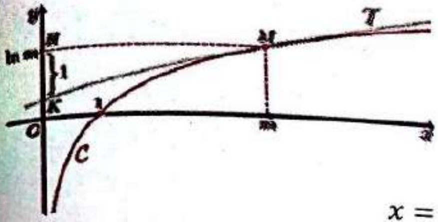
$$\grave{f}(x) = a - \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$$
$$\grave{f}(1) = 3$$
$$a - 1. \ln(1) + 1 = 3$$
$$a + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 2}$$

نعوض قيمة a في $(*)$:

$$2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -2}$$

$$\boxed{f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x} \ln x}$$

3) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، رسمنا C هو الخط البياني للتابع ln لتكن M نقطة من C فاصلتها m.



-1 جد بدلالة m معادلة للمماس T للخط C في النقطة M.

$$x = m\ :\ f(m) = \ln(m)\quad : M(m,\ln m)$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \acute{f}(m) = \frac{1}{m}$$

معادلة المماس من الشكل :

$$y - y_m = \text{ميل}\,(x - x_m)$$

$$y - \ln m = \frac{1}{\mathrm{m}}\,(x - m) \Rightarrow y = \frac{x}{m} - 1 + \ln m$$

-2 لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس T مع هذا المحور.

a) اثبت ان ترتيب النقطة K يساوي $\ln(m) - 1$ أياً يكن $m > 0$.

Kنقطة تقاطع المماس مع $y\acute{y}$ اي $x = 0$نعوض في معادلة المماس:

$$y = 0 - 1 + \ln(m) \;\Rightarrow\; y = \ln(m) - 1$$

$$K(0,\ln(m) - 1)$$

b) استنتج ان: $\overrightarrow{KH} = \vec{j}$.

$$\overrightarrow{KH} = (x_H - x_K)\vec{i} + (y_H - y_K)\vec{j}$$
$$= (0 - 0)\vec{i} + (\ln(m) - \ln(m) + 1)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{KH} = \vec{j}$$

c) استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط C من نقطة كيفية منه.

بفرض M نقطة ما من C خذ مسقطها على محور التراتيب وليكن H. ثم ناخذ صورة H وفق انسحاب $-\vec{j}$ ولتكن K فيكون المماس للخط C في النقطة M هو المستقيم (MK).

4) كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + l\ (m+1) = 0$ جذران مختلفان.

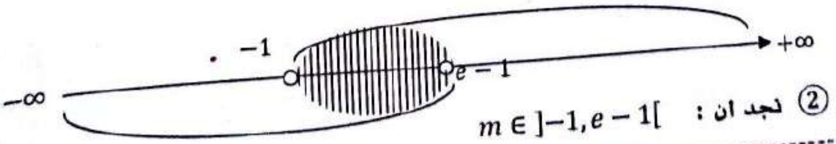
المعادلة معرفة عندما: $m + 1 > 0$ ومنه $\boxed{m > -1}$ ①

$$x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\ln(m+1) = 4[1 - \ln(m+1)]$$

يكون للمعادلة جذران مختلفان يجب أن يكون $\Delta > 0$

$$4[1 - \ln(m+1)] > 0 \qquad (\div 4)$$
$$1 - \ln(m+1) > 0$$
$$1 > \ln(m+1)$$
$$\ln e^1 > \ln(m+1)$$
$$e > m + 1$$
$$\boxed{e - 1 > m} \qquad ②$$



من تقاطع ① و ② نجد ان : $m \in\ ]-1, e-1[$

5) لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

1- جد نهاية هذه المتتالية:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=1 \quad\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 1=0$$

2- نضع $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\dots\dots+u_n$

a) اثبت ان $S_n=\ln(n+1)$

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+u_3+\cdots\dots\dots+u_n\\&=\ln 2+\ln\tfrac{3}{2}+\ln\tfrac{4}{3}+\cdots\dots+\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)\\&=\ln\left[2\times\tfrac{3}{2}\times\tfrac{4}{3}\times\dots\times\tfrac{n+1}{n}\right]\end{aligned}$$

باستخدام خواص اللوغاريتم

$$S_n=\ln(n+1)$$

b) ما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty \quad\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$$

6) اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $f:x\mapsto x-x\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ في جوار $+\infty$.

$$f(x)-y=x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x+1 \;=-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+1$$

$$=-x.\frac{1}{x}.\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}+1=-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}+1$$

نجري تغيير في المتحول : نفرض $\frac{1}{x}=t$ ، $x\to+\infty \Rightarrow t\to0$

$$f(x)-y=-\frac{\ln(1+t)}{t}+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim_{t\to0}\left[-\frac{\ln(1+t)}{t}+1\right]=-1+1=0$$

مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ ، و معادلته :

$$f(x)-y=0 \;\Rightarrow\; y=f(x) \;\Rightarrow\; \boxed{y=x-1}$$

7) نتأمل التابع f المعرف على $I=R_+^*$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-\ln x)\,, & x>0\\ 0\quad, & x=0\end{cases}$$

احسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ واستنتج ان f اشتقاقي عند الصفر

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^2(1-\ln x)-0}{x}=x(1-\ln x)=x-x\ln x$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=0-0=0\in R$$

ومنه حسب تعريف قابلية الاشتقاق يكون f اشتقاقي عند (0) من اليمين .

التابع اللوغاريتمي النيبري

8) التوابع الآتية معرفة على $I =_{+}^{*}$. ادرس تغيرات كل منها وارسم خطه البياني:

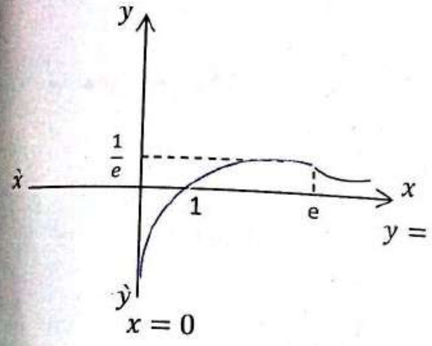
1) $f: x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \frac{-\infty}{+0} = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}(x) = \dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \\ \grave{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e} : f(e) = \frac{1}{e}$$



x	0			e			$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$f(x)$	▨	$-\infty$ ↗		$\frac{1}{e}$	↘		0

نقطة مساعدة : C قطع $x\grave{x}$ أي $y = 0$

$$\frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 : x = 1$$

إذاً $A(1,0)$ نقطة تقاطع C مع $x\grave{x}$

---

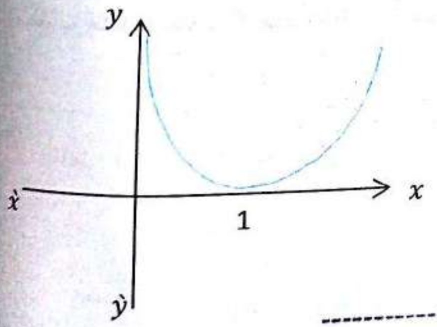
2) $f: x \longmapsto (\ln x)^2$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}(x) = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x} \\ \grave{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} : f(1) = 0$$



x	0		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

---

3) $f: x \longmapsto \frac{1}{x} + \ln x$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

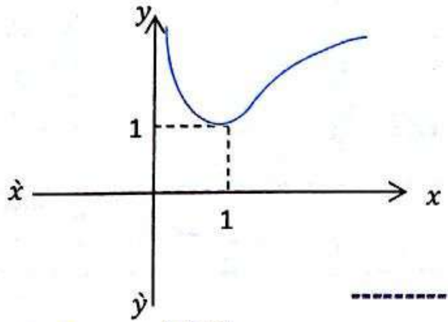
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$)

$$f(x) = \frac{1 + x\ln x}{x}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ⇒ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2} \\ \grave{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} : f(1) = 1$$



x	0		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

---

4) $f : x \longmapsto \frac{1 - \ln x}{x}$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ ⇒ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $+\infty$

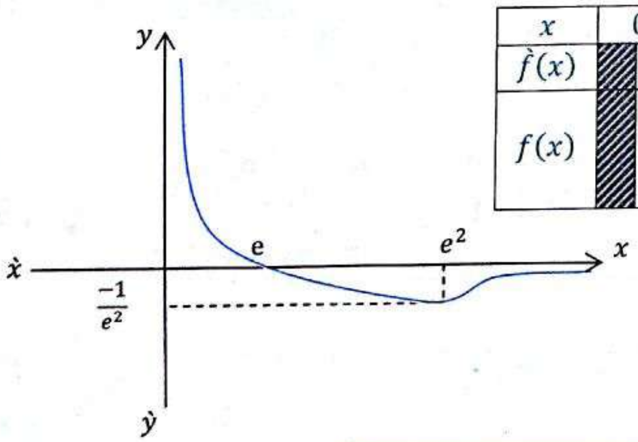
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{-\infty}{+\infty}$)

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ⇒ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}.x - 1(1 - \ln x)}{x^2} = \dfrac{-1 - 1 + \ln x}{x^2} = \dfrac{-2 + \ln x}{x^2} \\ \grave{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -2 + \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = e^2} \end{array}$$

$$\boxed{x = e^2} \quad : f(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^2} = \frac{1 - 2}{e^2} = \frac{-1}{e^2}$$



x	0		e^2		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{e^2}$	↗	0

نقطة مساعدة : C قطع $x\grave{x}$ اي $y = 0$

$$\frac{1 - \ln x}{x} = 0$$

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

$(e, 0)$ نقطة تقاطع C مع $\grave{x}$

---

5) $f : x \longmapsto x - \ln x$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

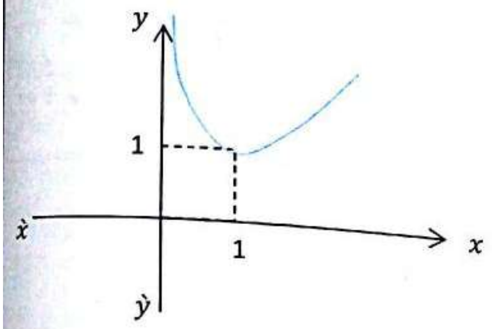
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ ⇒ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$)

$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-0) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\grave{f}(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \\ \grave{f}(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} : f(1) = 1$$



x	0		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	

---

6) $f : x \longmapsto x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين مقاربه عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =?$ ($+\infty - \infty$ حالة عدم تعيين من الشكل)

$f(x) = x\left(x - 8 + \frac{8}{x} + \frac{6\ln x}{x}\right)$

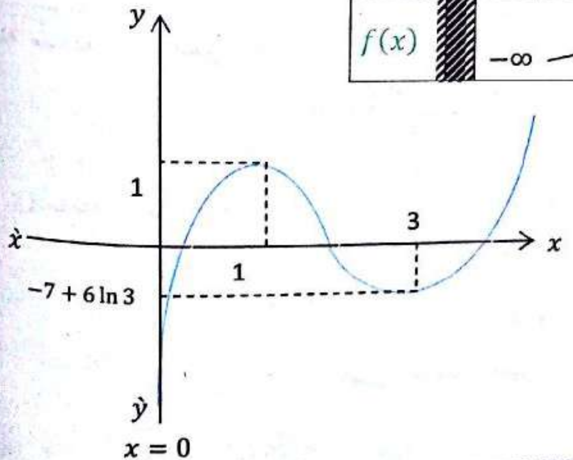
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 8 + 0 + 0) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\grave{f}(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x} \\ \grave{f}(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ (x-3)(x-1) = 0 \end{array}$$

إما $\boxed{x=3}$: $f(3) = -7 + 6\ln 3$

أو $\boxed{x=1}$: $f(1) = 1$

x	0		1		3		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨	$-\infty$ ↗	1	↘	-7+6 ln 3	↗ $+\infty$	



9) في كل مما يلي، اثبت ان التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب $\grave{f}(x)$.

1) $f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$: $]e, +\infty[$

f معرف عندما: $\ln(\ln x) > 0$

$\ln(\ln x) > \ln 1$

ln متزايد تماماً: $\ln x > 1 \quad \Leftarrow \quad \ln x > \ln e$

$x > e$

ومنه f اشتقاقي على $]e, +\infty[$

$$\grave{f}(x) = \frac{[\ln(\ln x)]^{\grave{}}}{\ln(\ln x)} = \frac{1}{\ln(\ln x)} . [\ln(\ln x)]^{\grave{}} = \frac{1}{\ln(\ln x)} . \frac{(\ln x)^{\grave{}}}{\ln x}$$
$$= \frac{1}{\ln(\ln x)} . \frac{1}{\ln x} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x\, [\ln(\ln x)]}$$

---

2) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)$: $]1, +\infty[$

$(x+1)$ اشتقاقي وموجب تماماً على $]1, +\infty[$ ، $\ln x$ اشتقاقي وموجب تماماً على $]1, +\infty[$.

ومنه $\frac{x+1}{\ln}$ اشتقاقي وموجب تماماً على $]1, +\infty[$ إذا f اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$\grave{f}(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)'}{\frac{x+1}{\ln x}} = \frac{\frac{\ln x - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x)^2}}{\frac{x+1}{\ln x}} = \frac{\ln x - \frac{(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} . \frac{\ln x}{x+1}$$
$$= \frac{\frac{x \ln x - x - 1}{x}}{(\ln x)(x+1)} = \frac{x \ln x - x - 1}{x(x+1)(\ln x)}$$

---

10) حساب لوغاريتمي :

نفرض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحققان $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$ ، احسب $\frac{a}{b}$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln(a \times b)}{2}$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(a \times b)$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln(a \times b)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\sqrt{a \times b}$$
$$\frac{a+b}{3} = \sqrt{a \times b}$$
$$\frac{(a+b)^2}{9} = a.b$$
$$(a+b)^2 = 9\, a.b$$

$$a^2 + 2a.b + b^2 = 9a.b$$

$a^2 - 7a.b + b^2 = 0 \qquad \div\ (a.b) \neq 0$

$\frac{a}{b} - 7 + \frac{b}{a} = 0 \qquad$ نفرض $\left(\frac{a}{b} = t\right)$

$t - 7 + \frac{1}{t} = 0 \qquad (\times t)$

$$t^2 - 7t + 1 = 0$$
$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{5}$$
$$t_1 = \frac{a}{b} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} > 0$$
$$t_2 = \frac{a}{b} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} > 0$$

---

11)حل جملة معادلتين :

a عدد حقيقي موجب تماماً، حل في R^2 جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x.y = a^2 & ① \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 & ② \end{cases}$$

لاحظ ان $a > 0$ (فرضاً) ، $\underbrace{x > 0 \ , \ y > 0}_{②\ \text{من}}$

$$x.y = a^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{a^2}{x}} \quad *$$

نعوض في المعادلة الثانية :

$$(\ln x)^2 + \left[\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)\right]^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2$$

$$(\ln x)^2 + [\ln a^2 - \ln x]^2 - \frac{5}{2}(\ln a)^2 = 0$$

$$(\ln x)^2 + [2\ln a - \ln x]^2 - \frac{5}{2}(\ln a)^2 = 0$$

$$\underline{(\ln x)^2} + \underline{4(\ln a)^2} - 4\ln a \ln x + \underline{(\ln x)^2} - \underline{\frac{5}{2}(\ln a)^2} = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ $(\ln x)$:

$$2(\ln x)^2 - 4\ln a \ln x + \frac{3}{2}(\ln a)^2 = 0$$

$$\Delta = 16(\ln a)^2 - 4(2)\left(\frac{3}{2}\right)(\ln a)^2 = 16(\ln a)^2 - 12(\ln a)^2 = 4(\ln a)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\ln a$$

إما : $\ln x = \frac{4\ln a - 2\ln a}{2(2)} = \frac{1}{2}\ln a = \ln a^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{a}$

$$\ln x = \ln\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a}} \xrightarrow{\text{نعوض في}*} y = \frac{a^2}{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{y = a\sqrt{a}}$$

أو : $\ln x = \frac{4\ln a + 2\ln a}{2(2)} = \frac{3}{2}\ln a = \ln a^{\frac{3}{2}} = \ln\sqrt{a^3}$

$$\ln x = \ln\sqrt{a^3} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a^3}} \xrightarrow{\text{نعوض في}*} y = \frac{a^2}{\sqrt{a^3}} = a^2.a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{a}}$$

حل جملة المعادلتين هو : $(x,y) = (\sqrt{a^3}, \sqrt{a})$ ، $(x,y) = (\sqrt{a}, a\sqrt{a})$

12)مسألة وجود : ايوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحققان $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$

تدلنا هذه المساواة إلى وجود تابع معرف على $]0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، لندرس تغيراته:

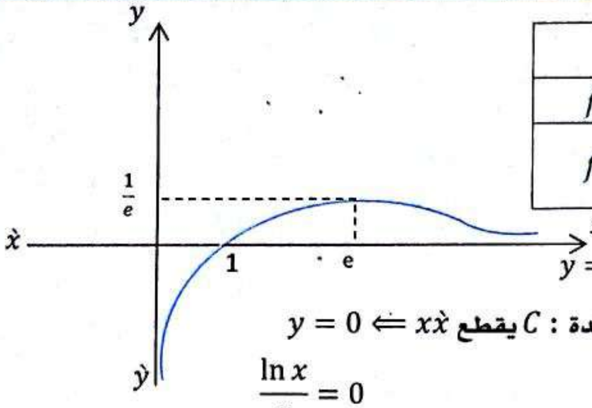
$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ مقارب منطبق على } y\grave{y} \text{ عند } -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ مقارب منطبق على } x\grave{x} \text{ عند } +\infty$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e} : f(e) = \frac{1}{e}$$

x		0		e		$+\infty$
$f'(x)$	▨		$+$	0	$-$	
$f(x)$	▨	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



لنناقش $f(x) = \lambda$

$\lambda \in]-\infty, 0[$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda = 0$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda \in]0, \frac{1}{e}[$ للمعادلة حلين مختلفين

$\lambda = \frac{1}{e}$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda \in]\frac{1}{e}, +\infty[$ المعادلة مستحيلة الحل.

نقطة مساعدة : C يقطع $x\acute{x}$ ⇐ $y = 0$

$$\frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\ln x = 0$$
$$x = 1$$

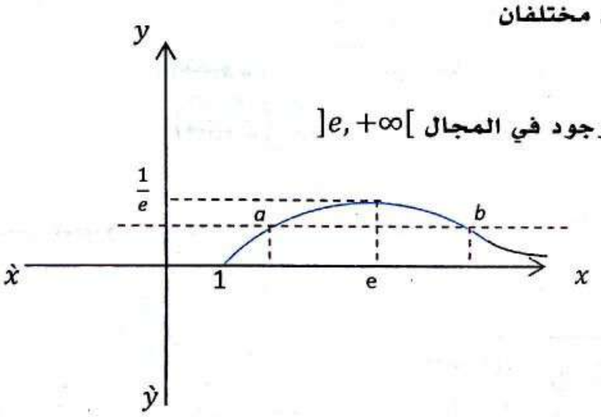
C يقطع $x\acute{x}$ في $(1,0)$

ومنه الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلان مختلفان

يجب أن يكون $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ ، بما أن $\lambda \in]0, \frac{1}{e}[$.

فإن أحد الجذرين موجود في المجال $]1, e[$ والجذر الآخر موجود في المجال $]e, +\infty[$

$$f(a) = f(b) = \lambda$$
$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$
$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$$



---

14) حل كلاً من المعادلات الآتية :

1) $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

$|x+2| > 0$
$x + 2 \neq 0$
$x \neq -2$
$D_1 = R\backslash\{-2\}$

$|x-2| > 0$
$x - 2 \neq 0$
$x \neq 2$
$D_2 = R\backslash\{2\}$

$$D = R\backslash\{-2,2\}$$
$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$$
$$\ln(|x+2|.|x-2|) = 0$$
$$\ln(|x^2-4|) = 0$$
$$\ln(|x^2-4|) = \ln 1$$
$$|x^2-4| = 1$$

$x^2 - 4 = -1$
$x^2 = 3$
$\boxed{x = +\sqrt{3}} \in D$ (مقبول)
$\boxed{x = -\sqrt{3}} \in D$ (مقبول)

$x^2 - 4 = 1$
$x^2 = 5$
$\boxed{x = +\sqrt{5}} \in D$ (مقبول)
$\boxed{x = -\sqrt{5}} \in D$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة: $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

2) $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

$|x-2| > 0$

$x \neq 2$

$D_1 = R\backslash\{2\}$

$x + 4 > 0$

$x > -4$

$D_2 = \ ]-4,+\infty[$

$$D = D_1 \cap D_2 =]-4,+\infty[\backslash\{2\} =]-4,2[\cup]2,+\infty[$$

$$\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$$

$$\ln[|x-2|(x+4)] = \ln 2^3$$

$$\ln[|x-2|(x+4)] = \ln 8$$

$$|x-2|(x+4) = 8$$

إما

$(x-2)(x+4) = 8$

$x^2 + 2x - 8 = 8$

$x^2 + 2x - 16 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-16) = 68 \ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{17}$

$x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{17}}{2} = \boxed{-1+\sqrt{17}}$ (مقبول)

$x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{17}}{2} = -1-\sqrt{17}$ (مرفوض)

او

$(x-2)(x+4) = -8$

$x^2 + 2x - 8 = -8$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

إما $\boxed{x=0}$ (مقبول)

او $\boxed{x=-2}$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة: $S = \{-2\ ,\ 0\ ,\ -1+\sqrt{17}\}$

---

3) $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$|2x+3| > 0$

$2x + 3 \neq 0$

$x \neq \frac{-3}{2}$

$D_1 = R\backslash\left\{\frac{-3}{2}\right\}$

$|x-1| > 0$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D_2 = R\backslash\{1\}$

$|x| > 0$

$x \neq 0$

$D_3 = R\backslash\{0\}$

$$D = R\backslash\left\{\frac{-3}{2},0,1\right\} = \left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2},0\right[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$$

$$\ln(|2x+3||x-1|) = \ln|x|^2$$

$$\ln(|2x^2+x-3|) = \ln x^2$$

$$|2x^2+x-3| = x^2$$

$2x^2 + x - 3 = -x^2$

$3x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 36 = 37 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{37}$

$\boxed{x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}} \in D$ (مقبول)

$\boxed{x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{6}} \in D$ (مقبول)

$2x^2 + x - 3 = x^2$

$x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 12 = 13 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$

$\boxed{x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}} \in D$ (مقبول)

$\boxed{x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}} \in D$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة : $S = \left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, \frac{-1-\sqrt{37}}{6}\ , \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\ , \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

15)في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين :

$$\boxed{1}\begin{cases} x^2+y^2=10 & (1)\\ \ln x+\ln y=\ln 3 & (2)\end{cases}$$

المعادلة معرفة بشرط $\overbrace{x>0 \text{ و } y>0}^{\text{من (2)}}$

لدينا

$$\ln x+\ln y=\ln 3$$
$$\ln(x.y)=\ln 3$$
$$x.y=3$$
$$\boxed{x=\frac{3}{y}} \qquad (*)$$

نعوض في (1) : $\left(\frac{3}{y}\right)^2+y^2=10$

نضرب بـ y^2

$$\frac{9}{y^2}+y^2=10$$
$$9+y^4=10y^2$$
$$y^4-10\,y^2+9=0$$
$$(y^2-9)(y^2-1)=0$$

إما $y^2-9=0$

$$(y-3)(y+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=3} \xrightarrow{\text{نعوض في } (*)} \boxed{x=1} \ (\text{مقبول}) \\ y=-3\notin D \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

او $y^2-1=0$

$$(y-1)(y+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1} \xrightarrow{\text{نعوض في } (*)} \boxed{x=3} \ (\text{مقبول}) \\ y=-1\notin D \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

مجموعة حلول جملة المعادلتين هي : $(1,3)$, $(3,1)$

$$\boxed{2}\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 & (1)\\ 3\ln x-5\ln y=4 & (2)\end{cases}$$

المعادلة معرفة بشرط $x>0$ و $y>0$

نضرب المعادلة (1) بـ 5ونجمع مع المعادلة (2):

$$\begin{array}{l} 10\ln x+5\ln y=35 \\ 3\ln x \quad -5\ln y=4 \qquad + \\ \hline 13\ln x \quad =39 \end{array}$$

$$\ln x=3$$
$$\boxed{x=e^3}$$

نعوض في (1): $2\ln e^3+\ln y=7$

$$6+\ln y=7 \Rightarrow \ln y=1 \Rightarrow y=e$$

حل جملة المعادلتين هو: $(x,y)=(e^3,e)$

$$\boxed{3}\begin{cases} (\ln x).(\ln y)=-12 & (1)\\ \ln(x.y)=1 & (2)\end{cases}$$

المعادلة معرفة بشرط $\underbrace{x>0 \text{ و } y>0}_{\text{من (1)}}$

$$\ln(x.y)=1$$
$$\ln x+\ln y=1$$
$$\boxed{\ln y=1-\ln x} \qquad (*)$$

$\ln x.(1-\ln x) = -12$

نعوض في (1):

$\ln x - \ln^2 x = -12 \Rightarrow \ln^2 x - \ln x - 12 = 0$

$(\ln x - 4)(\ln x + 3) = 0$

$\ln x = 4$

$x = e^4$ نعوض في $(*)$:

$\ln y = 1 - \ln e^4 = 1 - 4$

$\ln y = -3$

$y = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

$(x,y) = \left(e^4, \frac{1}{e^3}\right)$

$\ln x = -3$

$x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$ نعوض في $(*)$:

$\ln y = 1 - \ln e^{-3} = 1 + 3$

$\ln y = 4$

$y = e^4$

مجموعة حلول جملة المعادلتين هي : $(x,y) = \left(\frac{1}{e^3}, e^4\right)$ ، $(x,y) = \left(e^4, \frac{1}{e^3}\right)$

---

16) حل كلاً من المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$ والمتراجحة $(\ln \ )^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$.

شرط الحل $x > 0$

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

$(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$

$\ln x = 3$

$\ln x = \ln e^3$

$x = e^3$

$\ln x = -1$

$\ln x = \ln e^{-1}$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

حل المتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$ بالاستفادة من حل المعادلة السابقة:

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3$	▨	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$	▨	محققة		غير محققة		محققة	

حلول المتراجحة: $S = \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e^3, +\infty[$

---

17) ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1- a) تحقق ان $P(-1) = 0$.

$P(-1) = -2 + 5 - 1 - 2 = 0$

b) استنتج ان $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

$x = -1$ جذر للمعادلة $P(x)$

$(x+1)$ هو عامل من عوامل $P(x)$ بإجراء القسمة التقليدية نجد:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 + x - 2 & x+1 \\ \hline 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline 3x^2 + x - 2 & \\ 3x^2 + 3x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$

c) حل المتراجحة $P(x) \leq 0$.

ندرس إشارة $P(x)$:

$P(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$

إما $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ او $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x = \frac{-3-5}{4} = -2$ ، $x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x) \le 0$		محققة		غير محققة		محققة		غير محققة	

حلول المتراجحة: $]-\infty,-2] \cup \left[-1,\frac{1}{2}\right]$

2- استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \le \ln(2-x)$

$$2\ln x + \ln(2x+5) \le \ln(2-x)$$

$x > 0$
$]0,+\infty[$

$2x+5>0$
$x > \frac{-5}{2}$
$\left]-\frac{5}{2},+\infty\right[$

$2-x>0$
$x<2$
$]-\infty,+2[$

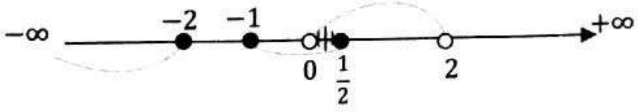
ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي $\boxed{D =]0,2[}$ (1)

$2\ln x + \ln(2x+5) \le \ln(2-x)$
$\ln x^2 + \ln(2x+5) \le \ln(2-x)$
$\ln[x^2(2x+5)] \le \ln(2-x)$
$\ln(2x^3+5x^2) \le \ln(2-x)$

$2x^3+5x^2 \le 2-x$
$2x^3+5x^2+x-2 \le 0$
$P(x) \le 0$

من جدول الطلب السابق نجد ان : $\boxed{x \in]-\infty,-2] \cup \left[-1,\frac{1}{2}\right]}$ (2)

من تقاطع (1) و (2) نجد:



إذاً حل المتراجحة السابقة: $\left]0,\frac{1}{2}\right]$

---

18)ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

1) اثبت ان f تابع فردي.

$*x \in]-1,1[\;\Rightarrow\; -x \in\;]-1,1[$ "محقق"

$$*f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1} \overset{\text{خواص اللوغاريتم}}{\widehat{=}} -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$$

فالتابع f فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

2) a) اثبت ان f اشتقاقي على I.

$x \mapsto \left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ تابع اشتقاقي وموجب تماماً على المجال I ومنه فإن f اشتقاقي على I.

b) ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$.

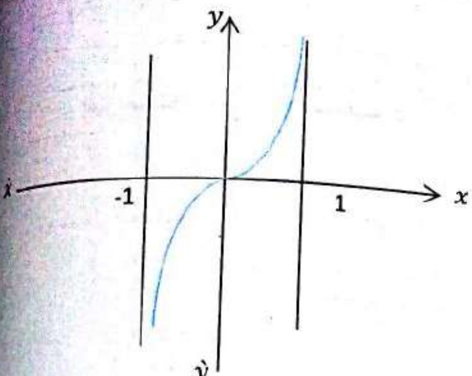
$f(0) = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad\Rightarrow\quad$ $x = 1$ مقارب يوازي $y\grave{y}$ و C يقع على يسار مقاربه عند $+\infty$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)} = \frac{(1)(1-x)-(-1)(x+1)}{(1-x)^2} \times \frac{(1-x)}{(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

$f'(x)$ لا ينعدم و البسط موجب والمقام موجب حسب مجموعة التعريف اي ان : $f'(x) > 0$



x	0		1
$\acute{f}(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) ارسم الخط البياني للتابع f.

التابع f فردي خطهالبياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ.

نرسم C_1الخط البياني للتابع f على المجال $]0,1[$

ونرسم C_2 نظير C_1 بالنسبة للمبدأ.

فيكون $C = C_1 \cup C_2$ هو الخط البياني للتابع f على I

---

19)ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I وارسم خطه البياني:

1) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $\quad , I =]1, +\infty[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1, +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow$ $x = 1$ مقارب شاقولي يوازي $y\acute{y}$ و C على يمين المقارب عند $+\infty$

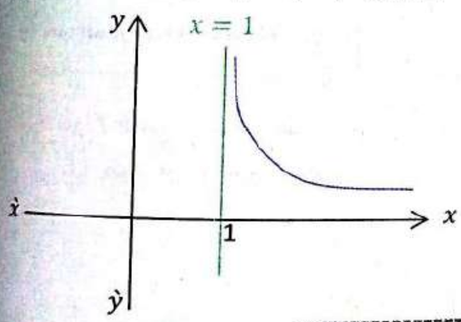
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right)}{x^2 \ln^2 x} = \frac{-\ln x - 1}{x^2 \ln^2 x}$$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow -\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \notin I$

$\acute{f}(x)$ لا ينعدم و البسط سالب و المقام موجب اي ان $\acute{f}(x) < 0$

x	1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	▨	$-$	
$f(x)$	▨ $+\infty$	$\searrow$	0



---

2) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ $\quad , I = R$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

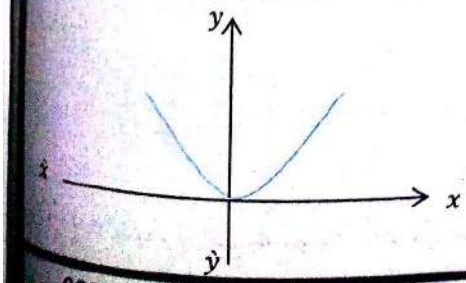
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} : f(0) = \ln(1) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



3) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad , I =]0, +\infty[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

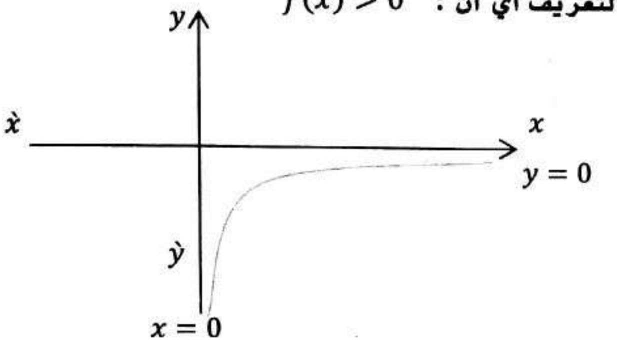
$\lim\limits_{\overset{>}{x \to 0}} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين المقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$\grave{f}(x) = \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$\grave{f}(x)$ لا ينعدم و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف اي ان : $\grave{f}(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$+$	
$f(x)$	▨	$-\infty \nearrow$	0



---

20)في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

-1 اثبت ان $g(x) \leq f(x)$ ايا يكن x من I.

$$\begin{aligned} \hbar(x) &= g(x) - f(x) \\ &= \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \\ &= \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x+1} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to -1} \hbar(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \qquad \left[\lim\limits_{x \to -1} (x+1)\ln(x+1) = 0 \right.$ علماً ان$\left.\right]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \hbar(x) = -\infty$

$\hbar(x)$ اشتقاقي على المجال $]-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \grave{\hbar}(x) &= \grave{g}(x) - \grave{f}(x) \\ &= \left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right) - \left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)} \\ &= \frac{1-(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$\grave{\hbar}(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \ : \ \hbar(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$\grave{\hbar}(x)$	▨	$+$	0	$-$	
$\hbar(x)$	▨	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ ان: $\underline{\hbar(x)} \leq 0$ اياً يكن $x \in]-1, +\infty[$

$g(x) - f(x) \leq 0$

$g(x) \leq f(x)$

-2 اثبت ان C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

*لنثبت ان $f(0) = g(0)$

$$(f(0) = 0\ ,\ g(0) = 0) \Rightarrow f(0) = g(0) = 0 \qquad (1)$$

إذاً النقطة التي فاصلتها $x = 0$هي نقطة مشتركة بين الخطين C_f و C_g

*لنثبت ان $f'(0) = g'(0)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

$(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$(0) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1$

نجد ان $\quad (2) \quad g'(0) = f'(0) = 0$

من (1) و (2) نجد ان الخطين C_f و C_g متماسان في المبدا إذاً يقبلان مماساًمشتركاً ووجدنا ان ميله $= 1$ (وبما انه يمر من مبدا الإحداثيات)إذاً معادلته من الشكل $y = x$

-3 ادرس تغيرات كل من f و g وارسم الخطين C_f و C_g مستفيداً من رسم المماس المشترك.

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad : D =]-1, +\infty[$$

fمعرف واشتقاقي على المجال $]-1, +\infty[$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = -1$مقارب $//y y'$ و C_f على يمين المقارب عند $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$

$f'(x)$لا ينعدم و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف $\quad f'(x) > 0$

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	▨ +	
$f(x)$	▨ $-\infty$ ↗	$+\infty$

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \qquad : D =]-1, +\infty[$$

gمعرف واشتقاقي على المجال $]-1, +\infty[$

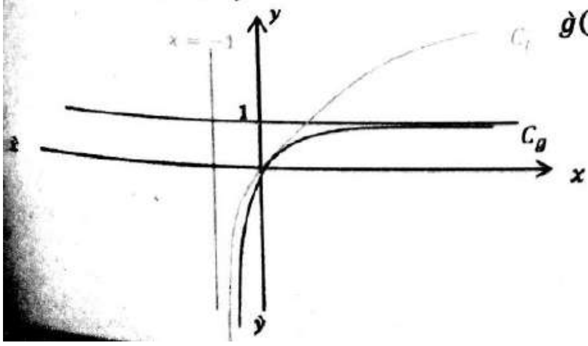
$\lim_{x \to -1^{>}} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \Longrightarrow$ $x = -1$مقارب $//y y'$ و C_g على يمين المقارب عند $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1 \quad \Longrightarrow$ $y = 1$مقارب افقي$// x x'$ عند $+\infty$

$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$g'(x)$ لا ينعدم و البسط موجب و المقام موجب اي ان $\quad g'(x) > 0$

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	■ +	
$g(x)$	■ $-\infty$ ↗	1



21)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]1, +\infty[$ $I =$ وفق:

$$f(x) = x + 1 + 2l\ \left(\frac{x}{x-1}\right)$$

-1 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]1, +\infty[$.

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \implies +\infty$ عند $+\infty$ يقع على يمين المقارب C و $y\grave{y}$ مقارب يوازي $x = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\grave{f}(x) = 1 + 2\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = 1 + \frac{2(-1)}{x(x-1)}$$

$$= 1 + \frac{-2}{x(x-1)} = 1 - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)-2}{x(x-1)} = \frac{x^2-x-2}{x(x-1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)}$$

$\grave{f}(x) = 0 \implies$ إما $\boxed{x = 2}$: $f(2) = 3 + 2\ln 2$

أو $x = -1 \notin I$ (مرفوض)

x	1		2		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨ $+\infty$	↘	$3 + 2\ln 2$	↗	$+\infty$

-2 اثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط في جوار $+\infty$

لنوجد $f(x) - y_d$:

$$f(x) - y_d = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x - 1$$

$$f(x) - y_d = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0 \implies +\infty$ عند C مقارب مائل للخط $y = x + 1$ إذاً

-3 ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d

الوضع النسبي: $x > x - 1$

$$\frac{x}{x-1} > 1$$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

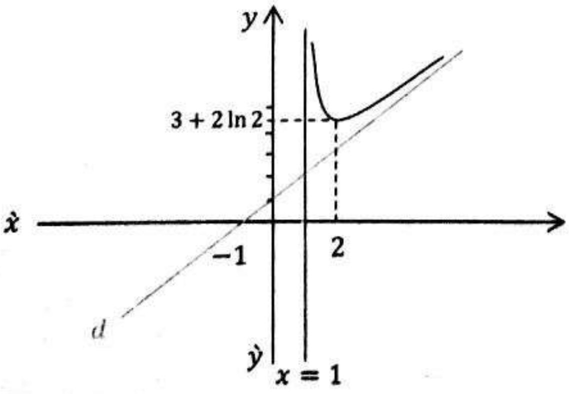
$$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

$$f(x) - y_d > 0$$

إذاً فوق المقارب .

-4 ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

نرسم المقارب:



$d: y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0

$(0,1)$, $(-1,0)$

التابع اللوغاريتمي النيبري

22)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ $I =$ وفق:

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1- اثبت ان f متزايد تماماً على I.

f معرف و مستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$=1+\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{(x+1)}} = 1+\frac{+1}{x(x+1)} = \frac{x(x+1)+1}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x}$$

$$=0 \Rightarrow x^2+x+1=0$$

$1-4(1)(1) = -3 < 0$ (مستحيلة الحل)

اي ان $\acute{f}(x)$ لا ينعدم ،وإشارة البسط دائماًتوافق إشارة x^2 والمقام موجب حسب مجموعة التعريف

اي ان $\acute{f}(x) > 0$ فالتابع fمتزايد تماماً على I.

2- أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

$$- y_d = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x + 4$$

$$- y_d = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$(f(x) - y_d) = 0 \implies$ إذاً $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

لاحظ ان $x < x + 1$

$$\frac{x}{x+1} < 1$$

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1)$$

$$f(x) - y_d < 0$$

$\Leftarrow$ C تحت المقارب d

4- ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

$x = 0$مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين المقارب $\Leftarrow$ $\lim_{\to 0} f(x) = -\infty$

$$\lim_{\to+\infty} f(x) = +\infty$$

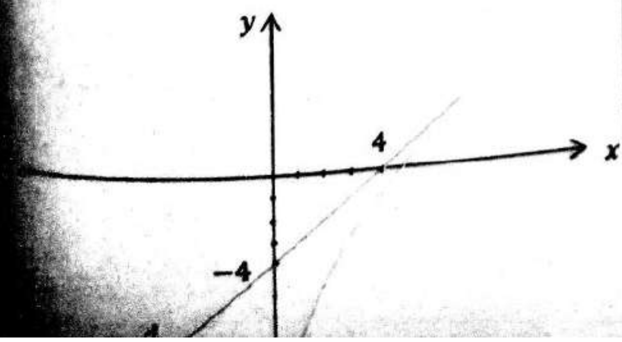
من (1) وجدنا ان : $(x) = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$

x	0	
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

$d: y = x-4$

x	0	4
y	-4	0

(0,−4) . (4,0)



التابع اللوغاريتمي النيبري

22)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1- اثبت ان f متزايد تماماً على I.

f معرف و مستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\acute{f}(x) = 1 + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{(x+1)}} = 1 + \frac{+1}{x(x+1)} = \frac{x(x+1)+1}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \ \Rightarrow \ x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

(مستحيلة الحل)

اي ان $\acute{f}(x)$ لا ينعدم ،وإشارة البسط دائماً توافق إشارة x^2 والمقام موجب حسب مجموعة التعريف

اي ان $\acute{f}(x) > 0$ فالتابع f متزايد تماماً على I.

2- اثبت ان المستقيم الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y_d = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x + 4$$

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0 \quad \Rightarrow$$

إذاً $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

لاحظ ان

$$x < x + 1$$

$$\frac{x}{x+1} < 1$$

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1)$$

$$f(x) - y_d < 0$$

$\Leftarrow$ C تحت المقارب d

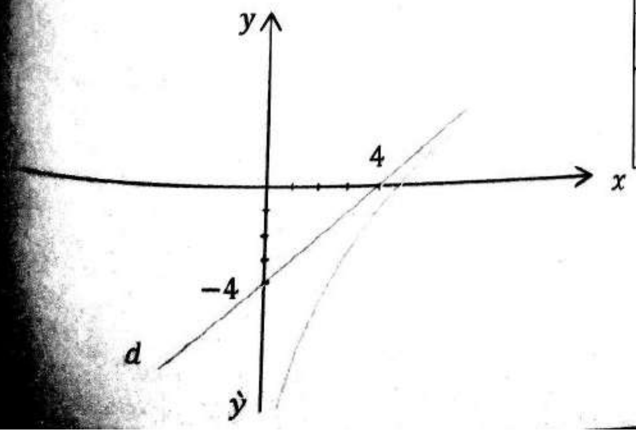
4- ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ و C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

من (1) وجدنا ان : $\acute{f}(x) = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$

x	0	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow +\infty$



$d: y = x$-4

x	0	4
y	-4	0

(0, −4) , (4,0)

23)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ $= I$ وفق :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

fمعرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ على يمين المقارب C و $y\grave{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\grave{f}(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x^2 + x} = \frac{2x^2 + x + 1}{2x^2 + x}$$

$\grave{f}(x) = 0 \to 2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0$ (مستحيلة الحل)

اي أن $\grave{f}(x)$ لا ينعدم وإشارة البسط دائماً توافق إشارة x^2 والمقام موجب حسب مجموعة التعريف اي ان $\grave{f}(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$+$	
$f(x)$	▨	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y_d = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - x + \ln 2$$
$$= \ln 2 - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0 \quad \Rightarrow$ $+\infty$ عند C مقارب مائل لـ $d: y = x - \ln 2$

3. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

$$f(x) - y_d = \ln 2 - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln 2 - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{\frac{2x+1}{x}}\right) = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

نلاحظ ان: $2x < 2x + 1$

$\frac{2x}{2x+1} < 1 \qquad \div (2x+1)$

$\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0$

$f(x) - y_d < 0 \quad \Rightarrow$ C تحت المقارب d

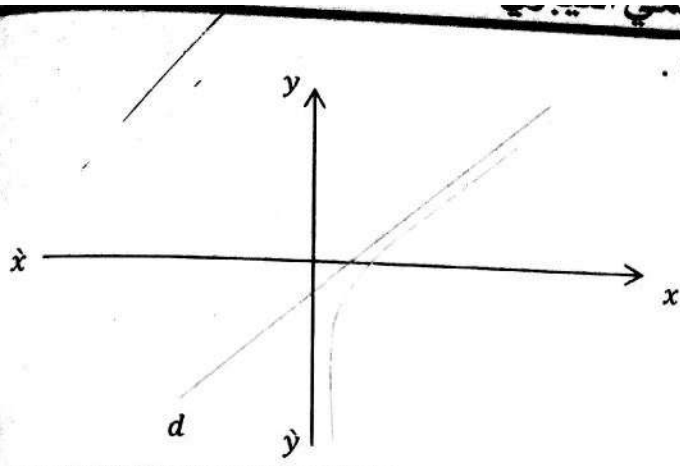
4. اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 - \ln 3 < 0 \\ f(2) = 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0$$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد ينتمي للمجال $]1,2[$

5. ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C .



$$d: y = x - \ln 2$$

x	0	$\ln 2$
y	$-\ln 2$	0

$(0, -\ln 2)$, $(\ln 2, 0)$

---

24) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]4, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = 5 - 2x + 31 \left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

1- اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب للخط C

$$f(x) - y_d = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) - (5 - 2x) = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_d] = 3\ln(1) = 0 \Rightarrow$ $d: y = 5 - 2x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

2- ادرس الوضع النسبي للخط C ومقاربه d.

ضمن مجموعة التعريف $]4, +\infty[$ نلاحظ ان : $x + 1 > x - 4$

ضمن مجموعة التعريف I $(x - 4 > 0)$: $\dfrac{x+1}{x-4} > 1$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$$

$$3\ \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$$

$f(x) - y_d > 0 \Rightarrow$ C فوق المقارب d

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني .

f معرف واشتقاقي على المجال $]4, +\infty[$

$\lim\limits_{\overset{>}{x\to4}} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = 4$ مقارب شاقولي لـ C و C يقع على يمين المقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -2 + 3\frac{\dfrac{x-4-(x+1)}{(x-4)^2}}{\dfrac{x+1}{x-4}} = -2 + 3\frac{x-4-x-1}{(x-4)(x+1)}$$

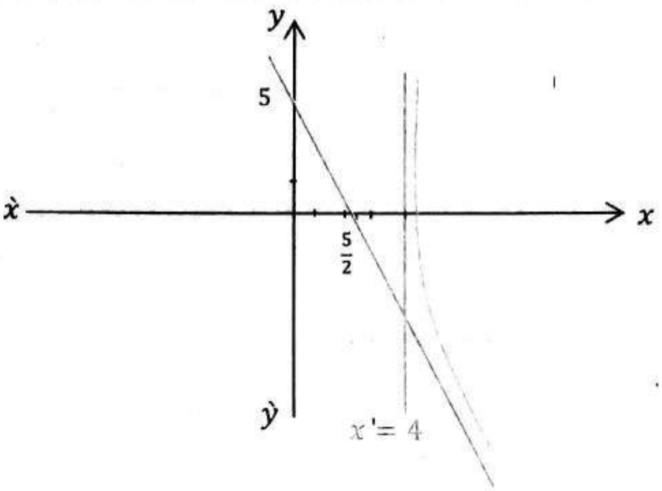
$$f'(x) = -2 - \frac{15}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-2(x^2 - 3x - 4) - 15}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-2x^2 + 6x + 8 - 15}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-2x^2 + 6x - 7}{x^2 - 3x - 4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6x - 7 = 0$$

$\Delta = 36 - 4(-2)(-7) = 36 - 56 = -20 < 0$ (مستحيلة الحل)

اي ان $f'(x)$ لا ينعدم و إشارة البسط توافق دائماً إشارة x^2 ،و المقام موجب حسب مجموعة التعريف

اي ان $f'(x) < 0$



x	4	$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$
$f(x)$	▨	$+\infty \searrow -\infty$

$d: y = 5 - 2x$

x	0	$\frac{5}{2}$
y	5	0

$(0,5) \quad , \quad \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

4- اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله يساوي 1.

f مستمر ومتناقص تماماً على $]4, +\infty[$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) \times \lim_{x \to +\infty} f(x) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في $]4, +\infty[$ نلاحظ:

$$\left.\begin{aligned} f(5) &= 5 - 10 + 3\ln\left(\frac{6}{1}\right) = -5 + 3\ln 6 > 0 \\ f(6) &= 6 - 12 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right) = -6 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right) < 0 \end{aligned}\right\} f(5) \times f(6) < 0$$

إذاً $f(x)$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]5,6[$

---

25) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

1. اثبت ان f متزايد تماماً على I.

$x^2 - 1$ اشتقاقي على $]1, +\infty[$ وهو موجب تماماً عليه ، إذاً $\ln(x^2 - 1)$ اشتقاقي على $]1, +\infty[$

و اشتقاقي على $]1, +\infty[$ ، وبالتالي f اشتقاقي على المجال $]1, +\infty[$ ومنه:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$$

$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x - 1)(x + 1) = 0$$
$$x = 1 \notin I \qquad x = -1 \notin I$$

وبالتالي $x^2 - 1 > 0$

أياً كان $x \in I$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 - 2 = 0$$
$$(x + 1)^2 - 2 = 0$$
$$(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}) = 0$$
$$x + 1 = \sqrt{2} \qquad x + 1 = -\sqrt{2}$$
$$x = \sqrt{2} - 1 \notin I \qquad x = -\sqrt{2} - 1 \notin I$$

وبالتالي $x^2 + 2x - 1 > 0$

أياً كان $x \in I$

وبالتالي $f'(x) > 0$ أياً كان $x \in I$ ومنه f متزايد تماماً على I.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+$
$f(x)$	▨	$-\infty \nearrow +\infty$

2. اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α .

f معرف واشتقاقي على $]1, +\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

fمستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1, +\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$جذراً وحيداً في المجال $]1, +\infty[$

3. اثبت ان $1 < \alpha < \sqrt{1 + \frac{1}{e}}$.

$$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left(1+\frac{1}{e}-1\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} f\left(\sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1 > 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$$

---

26)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على العلاقة: $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

-1 تحقق ان f مجموعة تعريف f هي $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

f معرف بشرط : $\frac{2x}{x-1} > 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$\frac{2x}{x-1} > 0$		محققة		غير محققة		محققة	

$D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

-2 احسب نهاية f عند كل طرف من اطراف مجموعة تعريفه D_f.

fمعرف واشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2 \quad \Longrightarrow$ $-\infty$ عند $x\grave{x}$ //مقارب $y = \ln 2$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow$ يقع على يسار المقارب C و $y\grave{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = +\infty \quad \Longrightarrow$ يقع على يمين المقارب C و $y\grave{y}$ // مقارب $x = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2 \quad \Longrightarrow$ $+\infty$ عند $x\grave{x}$ // مقارب $y = \ln 2$

-3 اثبت ان f متناقص تماماً على كل من مجالي D_f :

f مستمر و اشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

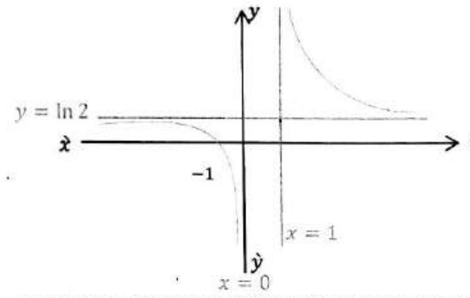
$$(x) = \frac{\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}}{2x} = \frac{\frac{-2}{x-1}}{2x} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0$$

نلاحظ ان البسط سالب دوماً ،والمقام $2x(x-1)$موجب ضمن مجموعة التعريف ، ومنه $\acute{f}(x) < 0$

فالتابع fمتناقص تماماً على كل من المجالين $]1,+\infty[$و$]-\infty,0[$

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	▨	▨	$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$\ln 2$

4- ارسم في معلم متجانس الخط البياني C



نقطة مساعدة : C قطع $x\grave{x}$ اي

$$y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x-1} = 1$$
$$2x = x - 1$$
$$x = -1$$

نقطة التقاطع مع $\grave{x}$: $(-1,0)$

---

27)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على العلاقة: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

1. تحقق ان مجموعة تعريف f و لتكن D_f هي $]1,3[$

$$\frac{x-1}{3-x} > 0$$
$$x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \quad , \quad 3 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x-1}{3-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$\frac{x-1}{3-x} > 0$	غير محققة			محققة		غير محققة	

$D_f =]1,3[$

2. اثبت ان $(4-x) \in D_f$ اياً يكن x من D_f:

$1 < x < 3$: نضرب بـ (-1)

$-1 > -x > -3$: نجمع 4

$4 - 1 > 4 - x > 4 - 3$

$3 > 4 - x > 1$

$\Rightarrow (4-x) \in]1,3[\Rightarrow (4-x) \in D_f$

3. a) احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x) + f(x)$

$$f(4-x) + f(x) = \ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$
$$= \ln\left[\left(\frac{3-x}{-1+x}\right)\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\right] = \ln 1 = 0$$

b) استنتج ان النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C.

تكون النقطة $M(x_0, y_0)$ مركز تناظر للخط البياني إذا تحقق الشرطان:

1) $(x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f)$ وهذا الشرط محقق لدى إثبات $(x \in D_f \Rightarrow 4 - x \in D_f)$.

2) $[f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)]$ وهذا الشرط محقق ايضاً لدى إثبات $f(4 - x) + f(x) = 0$

وبتحقق هذان الشرطان تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C

4. احسب نهاية f عند كل طرف من اطراف مجموعة تعريفه D_f.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $-\infty$ يقع على يمين المقارب عند C و $y\grave{y}$ // مقارب $x = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ $+\infty$ يقع على يسار المقارب عند C و $y\grave{y}$ // مقارب $x = 3$

5. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

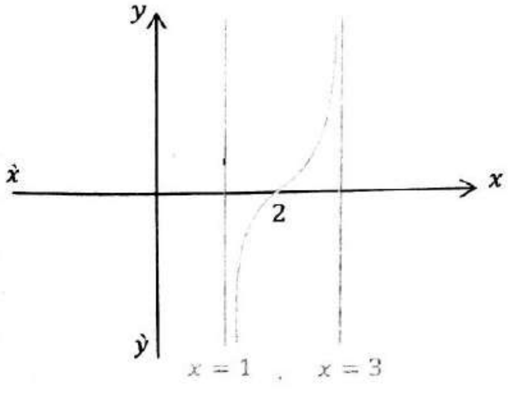
f معرف واشتقاقي على المجال $]1,3[$

$$\acute{f}(x) = \frac{\frac{3 - x + x - 1}{(3 - x)^2}}{\frac{x - 1}{(3 - x)}} = \frac{2}{(x - 1)(3 - x)}$$

$\acute{f}(x)$ لا ينعدم ،و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف ، اي ان $\acute{f}(x) > 0$

x	1	3
$\acute{f}(x)$	▨	$+$
$f(x)$	▨	$-\infty \nearrow +\infty$

6. ارسم الخط C في معلم متجانس.



نقطة مساعدة C قطع $x\grave{x}$ اي:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x - 1}{3 - x} = 1$$

$$x - 1 = 3 - x$$

$$2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

نقطة التقاطع مع $\grave{x}$: $(2,0)$

---

28) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال R_+^* وفق:

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1- احسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط C.

$f(x) = +\infty \quad \Rightarrow +\infty$ يقع على يمين المقارب عند C و $y\grave{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow +\infty$ عند $x\grave{x}$ مقارب منطبق على $y = 0$

-2 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط C.

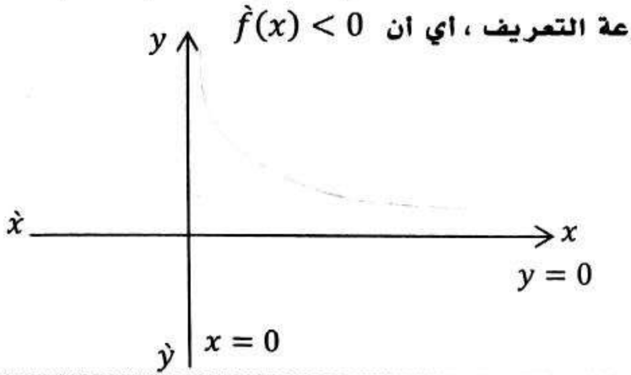
f معرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\grave{f}(x)=\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x^2+x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\grave{f}(x)=\frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\grave{f}(x)$ لا ينعدم ،و البسط سالب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف ، اي ان $\grave{f}(x)<0$

x	0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$-$	
$f(x)$	▨	$+\infty$ $\searrow$	0



---

29) في كل من الحالتين الآتيتين، ادرس التابع f على $I=R_+^*$ وارسم خطه البياني C

.1 $f(x)=(x+1)\ln x$

f معرف و اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty \Rightarrow$ $x=0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ عند $-\infty$ و C يقع على يمين المقارب

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\grave{f}(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x+1)=\ln x+1+\frac{1}{x}$$

((لمعرفة إشارة $\grave{f}$ ندرس تغيراته)) :

$$\grave{f}(x)=g(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$$

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=?$ $\left(\text{حالة عدم تعيين من الشكل } -\infty+\infty\right)$

$$g(x)=\frac{1}{x}(x\ln x+x+1)$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty(0+0+1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$$\grave{g}(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

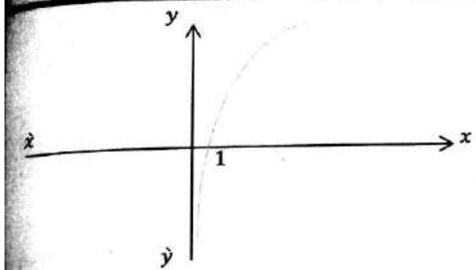
$\grave{g}(x)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow \boxed{x=1}$: $g(1)=2$

x	0				$+\infty$
$\grave{g}(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$g(x)$	▨	$+\infty$ $\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ ان $\grave{f}(x)=g(x)$ موجب تماماً اياً كان $x\epsilon]0,+\infty[$

وبالتالي يصبح جدول تغيرات f كما يلي :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+$	
$f(x)$	▨ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



نقطة مساعدة :نقطة التقاطع مع المحور $x\grave{x}$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{(x+1)\ln x}_{} = 0$$

$$x + 1 = 0 \qquad \ln x = 0$$

$$x = -1 \notin I \qquad x = 1$$

نقطة التقاطع مع $\grave{x}$: $(1,0)$

.2 $f(x) = \frac{1}{x} + x\ln x$

f **معرف و اشتقاقي على** $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = 0$ **مقارب منطبق على** $y\grave{y}$ **عند** $+\infty$ **و** C **يقع على يمين المقارب**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + x.\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$

((لمعرفة إشارة f' **ندرس تغيراته))** :

$f'(x) = g(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$

g **معرف و اشتقاقي على** $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = \frac{-(-2x)}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{2 + x^2}{x^3} > 0$

$g'(x)$ **لا ينعدم ،و البسط موجب و المقام موجب حسب مجموعة التعريف ، اي ان** $g'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	▨	$+$	
$g(x)$	▨ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

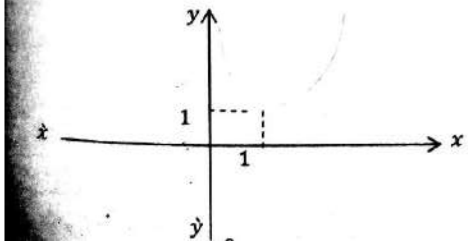
نلاحظ من جدول تغيرات $g(x)$ **وجود قيمة** $x \epsilon I$ **تحقق** $g(x) = 0$

وبملاحظة ان $x = 1$ **هو حل للمعادلة اي** $g(1) = -1 + 0 + 1 = 0$

و هو حل وحيد للمعادلة كون متزايد تماماً على I

$f'(1) = g(1) = 0 \ , \ x = 1 : f(1) = 1$

فيكون جدول تغيرات f **كما يلي:**



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	▨ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

30)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

1- احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط C.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\grave{y}$ عند $-\infty$ و C يقع على يمين المقارب

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$)

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

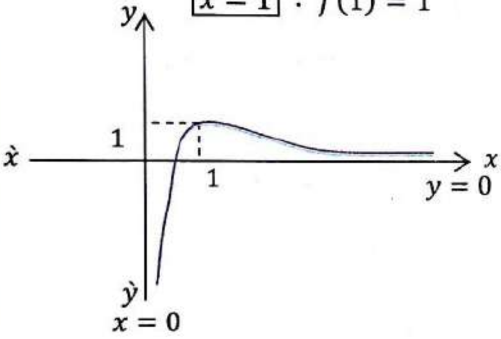
2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط C.

f معرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\grave{f}(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - (1)(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0$$

$$\boxed{x = 1} : f(1) = 1$$



x	0		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$	▨	$+$	0	$-$	
$f(x)$	▨	$-\infty$ ↗	1	↘	0

3- لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرفة كما يأتي :

M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل.

M_2 نقطة من C مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.

M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل.

M_4نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

a. احسب فواصل هذه النقاط.

- M_1 نقطة تقاطع Cمع محور الفواصل اي $f(x) = 0$

$$f(x_1) = 0 \Rightarrow \frac{1+\ln x_1}{x_1} = 0$$

$$1 + \ln x_1 = 0$$

$$\ln x_1 = -1$$

$$x_1 = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{1}{e}}$$

- M_2 نقطة من Cمماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات ،نكتب معادلة المماس في النقطة M_2

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_2 بالرمز x_2 فيكون :

$$f(x_2) = \frac{1+\ln x_2}{x_2}$$

فتكون نقطة التماس: $M_2\left(x_2, \frac{1+\ln x_2}{x_2}\right)$

ميل المماس :

$$m = \grave{f}(x_2) = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}$$

معادلة المماس T_{M_2} :

$$y - f(x_2) = m(x - x_2)$$

$$y = \frac{1+\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_2}{x_2^2}(x - x_2)$$

المماس T_{M_2} يمر من المبدا $(0,0)$ نعوض في المعادلة :

$$0 = \frac{1+\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_2}{x_2^2}(0 - x_2)$$
$$0 = \frac{1}{x_2} + \frac{\ln x_2}{x_2} + \frac{\ln x_2}{x_2}$$
$$0 = \frac{1}{x_2} + 2\frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$2\frac{\ln x_2}{x_2} = -\frac{1}{x_2}$$
$$\ln x_2 = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

◆ M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل.

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_3 بالرمز x_3

$m = \grave{f}(x_3) = 0$ ميل المماس

$$\frac{-\ln x_3}{x_3^2} = 0$$
$$\ln x_3 = 0$$
$$\boxed{x_3 = 1}$$

◆ M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_4 بالرمز x_4

$$\grave{\grave{f}}(x_4) = \frac{-1+2\ln x_4}{x_4^3}$$
$$\grave{\grave{f}}(x_4) = 0 \Rightarrow -1 + 2\ln x_4 = 0$$
$$\ln x_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{x_4 = \sqrt{e}}$$

b. اثبت ان تلك الفواصل هي اربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية ما أساسه ؟

$$x_1 = \frac{1}{e} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad , \quad x_3 = 1 \quad x_4 = \sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{e}} = \sqrt{e} \quad , \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e} \quad , \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$$

فواصل النقاط هي اربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية اساسها $\sqrt{e}$.

---

31) ليكن f التابع المعرف على $D_f = R\setminus\{0,1\}$ وفق $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس

1. a) اثبت ان $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$ اياً يكن x من D_f.

$$(1-x) = -\frac{1-x}{2} + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{-x}{1-x}\right| = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{-(x)}{-(x-1)}\right|$$
$$= \frac{-1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$
$$(x) + f(1-x) = \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$
$$= \ln\left[\left|\frac{x-1}{x}\right| \cdot \left|\frac{x}{x-1}\right|\right] - \frac{1}{2} = \ln(1) - \frac{1}{2}$$
$$) + f(1-x) = -\frac{1}{2} \qquad (\div 2)$$
$$+ f(1-x) \qquad 1$$

b) استنتج ان النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط C

الشرط الأول :

* بفرض $\left(a-\hbar=\frac{1}{2}-\hbar\right)\epsilon D=R\backslash\{0,1\}$

$$\frac{1}{2}-\hbar\neq 0$$
$$\hbar\neq\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}+\hbar\neq 1$$

$$\frac{1}{2}-\hbar\neq 1$$
$$\hbar\neq-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}+\hbar\neq 0$$

إذاً نجد $\left(a+\hbar=\frac{1}{2}+\hbar\right)\in D=R\backslash\{0,1\}$ بالتالي الشرط الأول محقق .

* بالاستفادة من الطلب الأول وبفرض $x=\frac{1}{2}+\hbar$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+\hbar\right)+f\left(1-\left(\frac{1}{2}+\hbar\right)\right)}{2}=\frac{-1}{4}$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+\hbar\right)+f\left(\frac{1}{2}-\hbar\right)}{2}=\frac{-1}{4}$$

و بالتالي الشرط الثاني محقق اي $\frac{f(a+\hbar)+f(a-\hbar)}{2}=b$

و منه النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$هي مركز تناظر الخط C.

2- ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

اولاً ندرس إشارة المقدار $u=\frac{x-1}{x}$

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$
$$x=0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & ;\quad x\epsilon]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ f_2(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{-x+1}{x}\right); & x\epsilon]0,1[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f_1(x)=\ln\left(\frac{-1}{0^-}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f_2(x)=\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty\end{array}\right\}$$

$x=0$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f_2(x)=-\frac{1}{2}+\ln(0)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f_1(x)=-\frac{1}{2}+\ln(0)=-\infty\end{array}\right\}$$

$x=1$ مقارب شاقولي يوازي $y\grave{y}$

التابع $f(x)$ معرف و اشتقاقي على $R\setminus\{0,1\}$

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=-\frac{1}{2}+\dfrac{\frac{1.x-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}.\frac{x}{x-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)} \\ f_2'(x)=-\frac{1}{2}+\dfrac{\frac{-1.x-(-x+1)}{x^2}}{\frac{-x+1}{x}}=-\frac{1}{2}+\frac{-1}{x^2}.\frac{x}{-x+1}=-\frac{1}{2}+\frac{-1}{x(-x+1)} \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-x} \\ f_2'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-x} \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-x}=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{-1}{x^2-x}$$

$$x^2-x=2$$

$$x^2-x-2=0$$

$(x-2)(x+1)=0 \Longrightarrow$ إما $\boxed{x=2} \Rightarrow f_1(2)=-1+\ln\frac{1}{2}=-1-\ln 2$

أو $\boxed{x=-1} \Rightarrow f_1(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$

3- اثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه d.

$$f(x)-y_d=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{2}x=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$f(x)-y_d=\begin{cases} f_1(x)-y_d=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & ;\ x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\\ f_2(x)-y_d=\ln\left(\frac{-x+1}{x}\right) & ;\ x\in\left]0,1\right[\end{cases}$$

و بالتالي نجد :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d)=\lim_{x\to-\infty}(f_1(x)-y_d)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)-y_d)=\ln 1=0$$

وبالتالي المستقيم $d: y=-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$ و $+\infty$

- لدراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_d$

$$(x)-y_d=0 \Rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=0 \Rightarrow e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}=e^{\ln 1} \Longrightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right|=1$$

$\frac{x-1}{x}=1 \Rightarrow x-1=x \Rightarrow -1=0$ (مستحيلة الحل في R)

$\frac{x-1}{x}=-1 \Rightarrow x-1=-x \Rightarrow 2x=1 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}$

$\left.\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\ln\left|\dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}\right|=-\frac{1}{4}+\ln(1)=-\frac{1}{4}$

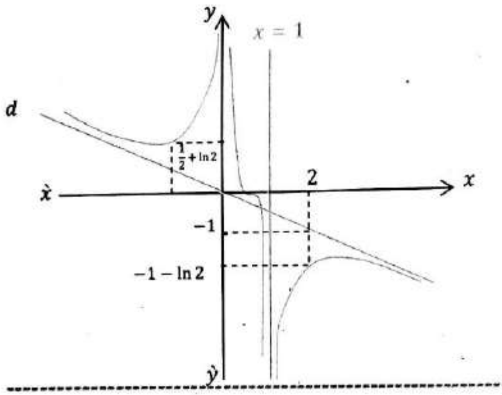
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)-y_d$		$+$	▮	$+$	0	$-$	▮	$-$	
الوضع النسبي		C فوق d	▮	C فوق d	$\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$	C تحت d	▮	C تحت d	

4- ارسم في معلم واحد d ثم C

$$d: y = -\frac{1}{2}x$$

x	0	2
y	0	-1

$(0,0)$, $(2,-1)$



---

32) ليكن التابع المعرف على $D_f = R_+^*$ وفق $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس:

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

التابع f معرف و اشتقاقي على R_+^*

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \Rightarrow -\infty$ عند $y\acute{y}$ مقارب شاقولي منطبق على $x = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2}.\frac{2\ln x}{x^2} = \frac{1}{2}.\frac{\ln x^2}{x^2}$$

نجري تغيير في المتحول : بفرض $u = x^2$

$f(x) = \frac{1}{2}.\frac{\ln u}{u}$. $(x \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \times 0 = 0 \Rightarrow +\infty$ عند $x\acute{x}$ مقارب افقي منطبق على $y = 0$ و بالتالي

$$\acute{f}(x) = \frac{\frac{1}{x}.x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow 1 = 2\ln x \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}}$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2}\frac{\ln e}{e} = \frac{1}{2e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	▮	$+$	0	$-$	
$f(x)$	▮ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

لتكن A النقطة من الخط C التي فاصلتها 1.

2. لتكن A النقطة من الخط C التي فاصلتها 1.

a) جد معادلة المستقيم T_A المماس للخط C في النقطة A

المماس في النقطة A حيث $x = 1$

$$)) = \frac{\ln 1}{1} = 0 \implies A(1,0)$$

$$= \acute{f}(1) = \frac{1 - 2\ln 1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

وبالتالي:

$$: y - f(1) = m_{T_A}(x-1)$$

$$T_A: \quad y - 0 = 1(x-1)$$

$$T_A: \quad y = x - 1$$

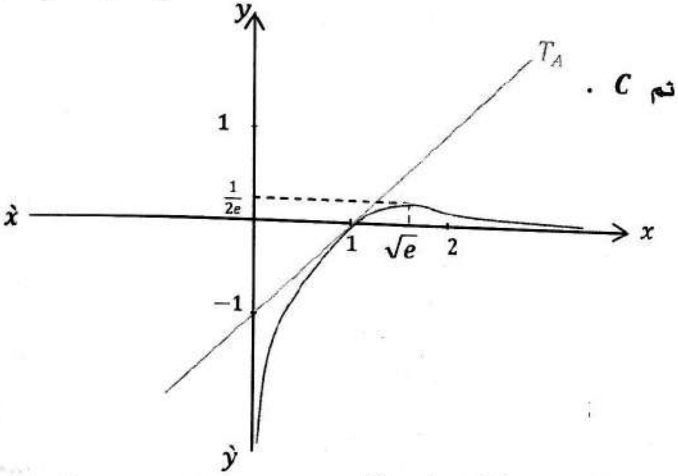
b) ارسم في معلم واحد T_A ومقاربات C ثم C .

$T_A: y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0

$(0,-1)$, $(1,0)$

نقطة التماس هي : $A(1,0)$



3. لتكن B نقطة من الخط C فاصلتها u اثبت ان $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون الم T_B للخط C في النقطة B موازياً للمستقيم Δ الذي معادلته $y = x$.

لنوجد ميل المماس T_B في النقطة $B(u, f(u))$

$$= \acute{f}(u) = \frac{1 - 2\ln u}{u^3}$$

وبما ان T_B يوازي المستقيم $\Delta: y = x$ فلهما الميل نفسه $\Leftarrow$ $m_{T_B} = 1$

$$\frac{2\ln u}{u^3} = 1 \Rightarrow u^3 = 1 - 2\ln u \implies u^3 - 1 + 2\ln u = 0$$

و هوالشرط اللازم والكافي ليكون T_B موازي لـ Δ.

4. a) حل المعادلة $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$.

لناخذ التابع $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

ولندرس تغيرات $g(x)$ على مجموعة تعريفه $D =]0, +\infty[$

$$g(x) = 0 - 1 + 2\ln 0 = 0 - 1 - \infty = -\infty$$

$$g(x) = +\infty - 1 + \infty = +\infty$$

$$= 3x^2 + 2\frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$$ (حسب مجموعة التعريف)

x	0		$+\infty$
$\acute{g}(x)$	▨	+	
$g(x)$	▨	$-\infty$ ↗ 0 ↗	$+\infty$

نلاحظ من جدول التغيرات وجود قيمة $x \in R$ تحقق $g(x) = 0$

نلاحظ ان التابع $g(x)$متزايد على مجال تعريفه .

$$g(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

وبما ان $0 \in g(]0,+\infty[)$ ، فالمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$

نلاحظ ان $x = 1$ هو حل للمعادلة ، اي $g(x) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$

b) استنتج ان A هي النقطة الوحيدة من C يكون المماس فيها موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$

من الطلب الثالث $(u = 1)$ حل للمعادلة $u^3 - 1 + 2\ln u = 0$

نستنتج أن T_Aهو المماس الوحيد للخط C عند النقطة A موازي لـ Δ.

---

33) في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

-1 a) احسب نهاية $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج ان f اشتقاقي عند $x = 0$.

$K(x)$معدل تغير $f(x)$, $D =]0,+\infty[$, $K(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$K(x) = \frac{\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) - 0}{x} = \frac{x}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x\ln x - \frac{3}{2}x\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} K(x) = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x = 0$ ومنه $\acute{f}(0) = 0$

b) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

C) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف و اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\acute{f}(x) = (x)\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= x\ln x - \frac{3}{2}x + \frac{x}{2}$$

$$= x\ln x - x$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Longrightarrow x\ln x - x = 0$$

$$x(\ln x - 1) = 0$$

إما $\boxed{x = 0}$: $f(0) = 0$

او $\ln x = 1 \rightarrow \boxed{x = e} : f(e) = -\frac{1}{4}e^2$

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}e^2$	↗	$+\infty$

-2 ليكن T مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ منه، جد معادلة لهذا المماس.

نقطة التماس: $f(1) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

ولتكن نقطة التماس $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$

ميل المماس T_A: $m = f'(1) = -1$

معادلة المماس T_A: $y - f(1) = f'(1).(x-1)$

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$
$$y = -\frac{3}{4} + (-1)(x-1)$$
$$y = -x + \frac{1}{4}$$

-3 نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط C والمماس T ولهذا نعرف التابع h على المجال $]0, +\infty[$ بالعلاقة $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$ ادرس إشارة $h'(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثم إشارة $h(x)$

دراسة الوضع النسبي للخط C والمماس T.

$h(x) = f(x) - y_T \quad , \quad \left(y_T = -x + \frac{1}{4}\right)$

$h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$

لمعرفة إشارة $h(x)$ ندرس تغيرات $h'(x)$، حيث $h(x)$ معرف و اشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$h'(x) = f'(x) + 1$

$h'(x) = x\ln x - x + 1$

$\lim_{x\to0^+} h'(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} h'(x) = ?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$)

$h'(x) = x(\ln x - 1) + 1$

$\lim_{x\to+\infty} h'(x) = +\infty(+\infty - 1) + 1 = +\infty$

$h''(x) = 1\ln x + \frac{1}{x}.x - 1 = \ln x$

$h''(x) = 0 \to \ln x = 0$

$\boxed{x = 1}$: $h'(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$h'(x)$	▨ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من الجدول: $h'(x) \geq 0$

ندرس تغيرات: $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$

$h(0) = f(0) + 0 - \frac{1}{4} = 0 + 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

نكتب جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$\acute{h}(x)$	1	$+$	0	$+$	$+\infty$
$h(x)$	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

$h(x) < 0$ على المجال $]0,1]$ ومنه C تحت $\mathcal{T}$

$h(x) > 0$ على المجال $]1,+\infty[$ ومنه C فوق $\mathcal{T}$

4- اكتب معادلات مماسات C في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل.

- نقاط تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

إما $\frac{x^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \; x = 0 \; \rightarrow Q(0,0)$

او $\ln x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow B\left(e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$

- معادلة المماس في النقطة $Q(0,0)$:

ميل المماس:

$$m_{T_Q} = \acute{f}(0) = 0$$

معادلة نصف المماس T_Q :

$$y - f(0) = m_{T_Q}(x - 0)$$

$$\boxed{y = 0}$$

- معادلة المماس في النقطة $B\left(e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$:

ميل المماس:

$$m_{T_B} = \acute{f}\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$$

معادلة المماس T_B :

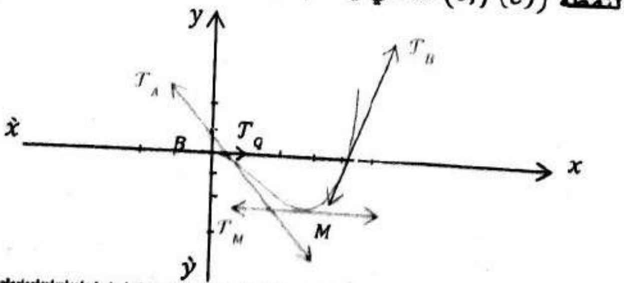
$$y - f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = m_{T_B}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}x - e^3\right)}$$

5- ارسم مماسات C التي وجدتها ثم ارسم الخط C في المعلم ذاته.

نرسم المماسات $\mathcal{T}_Q$ و $\mathcal{T}_A$ و $\mathcal{T}_B$

ثم نرسم المماس الأفقي $\mathcal{T}_M$ في النقطة $M(e, f(e))$ التي ينعدم فيها $\acute{f}(x)$



****

رؤية شاملة في التابع الأسي

ابع الأسي النيبر

تعريفه: التابع الأسي النيبري exp:

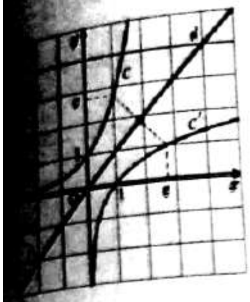
هو التابع المعرف على R كما يلي:

صورة كل x من R وفق exp هو العدد الذي لوغاريتمه النيبري يساوي x ونرمز له بالرمز e^x $xp(x) = e^x$

نتائج هامة:

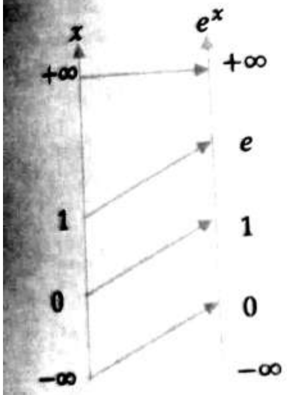
- ◆ $\ln x = y \Rightarrow x = e^y$
- ◆ $e^1 = e \quad , \quad e^0 = 1$
- ◆ ايآ يكن $x \in R$ فإن $\ln e^x = x$
- ◆ ايآ يكن $x \in \left]0, +\infty\right[$ فإن $e^{\ln x} = x$
- ◆ $exp: R \to R_+^* \quad : x \to e^x$
- ◆ $\ln: R_+^* \to R \quad : x \to \ln x$
- ◆ بما أن التقابل العكسي للتابع اللوغاريتمي النيبري هو التابع الأسي النيبري

فإن $\acute{C}$ هو نظير C بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث.



ملاحظات:

.1



$$x < 0 \iff 0 < e^x < 1$$
$$x = 0 \iff e^x = 1$$
$$x > 0 \iff e^x > 1$$

2. في حالة $x > 0$ نجد: $e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = e^{\ln \frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$

في حالة $x > 0$ نجد:
$$e^{|\ln x|} = \begin{cases} e^{\ln} & : x \geq 1 \\ e^{-\ln x} & : x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x & : x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & : x < 1 \end{cases}$$

3.. ايآ يكن العددين a , bفإن:

$$a = b \iff e^a = e^b$$
$$a < b \iff e^a < e^b$$
$$a \leq b \iff e^a \leq e^b$$

4. التابع $f(x) = e^x$ معرف على R

التابع $f(x) = e^{g(x)}$ معرف حيث يكون $g(x)$ معرف

ملاحظة

ل المعادلة $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ يكافئ حل المعادلة $f(x) = g(x)$

ل المتراجحة $e^{f(x)} \leq e^{g(x)}$ يكافئ حل المتراجحة $f(x) \leq g(x)$

تدريب صفحة 186:

1) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

$\boxed{2}\ B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$ $= e^{\ln\sqrt{16}} + e^{\ln 3}$ $= 4 + 3 = 7$	$\boxed{1}\ A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ $= 2 + 3 = 5$
$\boxed{4}\ D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$ $= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$	$\boxed{3}\ C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ $= -3 + 5 = 2$

2) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من العبارات الآتية مبيناً المجموعة التي تكون معرفة عليها.

شرط التعريف : $x > 0 \qquad 2e^x > 0$ $D =]0, +\infty[$	$\boxed{1}\ A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$ $= x - (\ln 2 + \ln e^x)$ $= x - \ln 2 - x$ $= -\ln 2$
شرط التعريف : $x - 1 > 0 \qquad x > 0 \qquad x \neq 0$ $D = \left]1, +\infty\right[$	$\boxed{2}\ B = e^{\ln(x-1)-\ln x} + \frac{1}{x}$ $= e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} + \frac{1}{x}$ $= \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = 1$
شرط التعريف : $e^{\frac{1}{x}} > 0 \qquad x > 0$ $x \neq 0$ $D = \left]0, +\infty\right[$	$\boxed{3}\ C = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln x}$ $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

3) حل المعادلات أو المتراجحات الآتية:

$\boxed{2}\quad e^{2x^2+3} = e^{7x}$ $2x^2 + 3 = 7x$ $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $\Delta = 49 - 24 = 25$ إما : $x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$ أو: $x_2 = \frac{7+5}{4} = 3 \Longrightarrow \boxed{x_2 = 3}$	$\boxed{1}\ e^{3-x} = 1$ $e^{3-x} = e^0$ $3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$
$\boxed{4}\ 2e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}$ $\frac{2}{e^x} = \frac{1}{e^x + 1}$ $2e^x + 2 = e^x$ $e^x = -2$ (مستحيلة الحل)	$\boxed{3}\ \frac{e^x}{1 - 2e^x} = 5$ $e^x = 5 - 10e^x$ $11e^x = 5$ $e^x = \frac{5}{11} \Rightarrow \boxed{x = \ln\frac{5}{11}}$
$\boxed{6}\ \ln(2 - e^x) \geq 3$ $\ln(2 - e^x) \geq \ln e^3$ $2 - e^x \geq e^3$ $\underbrace{2 - e^3}_{\text{سالب}} \geq e^x$ (وهذه المتراجحة مستحيلة الحل)	$\boxed{5}\ \ln(e^x - 2) = 3$ $\ln(e^x - 2) = \ln e^3$ $e^x - 2 = e^3$ $e^x = e^3 + 2$ $\boxed{x = \ln(e^3 + 2)}$

7 $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$

$x^2 - 2 \leq 4 - x$

$x^2 + x - 6 \leq 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

إما $x = -3$ او $x = 2$

x	$-\infty \quad -3 \quad 2 \quad +\infty$		
$x^2 + x - 6$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$		
$x^2 + x - 6 \leq 0$	غير محققة	محققة	غير محققة

$S = [-3,2]$

8 $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$

$(e^x - 1)(e^x - 4) = 0$

إما $e^x = 1 \rightarrow x = 0$

او $e^x = 4 \rightarrow x = \ln 4$

x	$-\infty \quad 0 \quad \ln 4 \quad +\infty$		
$(e^x - 1)(e^x - 4)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$		
$(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$	غير محققة	محققة	غير محققة

$S =]0, \ln 4[$

9 $e^{2x^2-1} \geq 3$

$e^{2x^2-1} \geq e^{\ln 3}$

$2x^2 - 1 \geq \ln 3$

$2x^2 \geq 1 + \ln 3$

$2x^2 \geq \ln e + \ln 3$

$2x^2 \geq \ln 3e$

$x^2 \geq \frac{1}{2}\ln 3e$

$$\underbrace{x^2 \geq \ln\sqrt{3e}}$$

إما $x \geq \sqrt{\ln\sqrt{3e}}$ او $x \leq -\sqrt{\ln\sqrt{3e}}$

$$S = \left]-\infty, -\sqrt{\ln\sqrt{3e}}\right] \cup \left[\sqrt{\ln\sqrt{3e}}, +\infty\right[$$

تذكرة: $\underbrace{x^2 \geq a}$

إما $x \geq \sqrt{a}$ او $x \leq -\sqrt{a}$

4) اشرح لماذا تتفق إشارة $e^x - \frac{4}{e^x}$ مع إشارة $(e^x - 2)$؟ ثم حل المتراجحة $e^x - \frac{4}{e^x} < 0$

- $e^x - \frac{4}{e^x} = \frac{e^{2x}-4}{e^x} = \frac{(e^x-2)\overbrace{(e^x+2)}^{\nearrow\boxed{+}}}{e^x{}_{\searrow\boxed{+}}}$

$(e^x + 2)$ موجب تماماً و e^x موجب تماماً أصبحت إشارة المقدار السابق من إشارة $(e^x - 2)$

- $e^x - \frac{4}{e^x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x} < 0$

منه تكون المتراجحة السابقة محققة عندما يكون $e^x - 2 < 0$

$e^x < 2 \Rightarrow \quad x < \ln 2$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $S =]-\infty, \ln 2[$

****

واص التابع الأسي:

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^0 = 1 \quad , \quad e^1 = e$
$(e^a)^p = e^{ap}$	$e^{a+b} = e^a.e^b$
$e^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = e^{a_1}.e^{a_2}\ \ldots\ldots.e^{a_n}$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

ف:

الة عدد حقيقي موجب تماماً a ، وليكن x عدد حقيقي ما نعرف a^x كما يلي:

$$a^x = e^{x\ln a}$$

$3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln}$, $\pi^5 = e^{5\ln\pi}$

ة: اياً يكن العددان الحقيقيان الموجبان تماماً b, a والعددان الحقيقيان u, v:

$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$	$(a.b)^u = a^u.b^u$	$1^u = 1$
$\frac{a^u}{b^u} = \left(\frac{a}{b}\right)^u$	$(a^u)^v = a^{u.v}$	$a^u.a^v = a^{u+v}$

المقادير الموجبة دوماً : [illegible] >0
مشتقة لوغاريتمي >0
$e^x > 0$
جذر تربيعي >0
متمة [illegible] >0

رؤية شاملة في التابع الأسي

تدريب صفحة 190 :

ملاحظة: [illegible] أو حل معادلات
أفضل طريقة أن نستخرج e^x عامل مشترك

1) اثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين على R.

$\boxed{1}$ $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$

$$L_1=\underbrace{\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)}$$
$$=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^{-x}+1}\right)=\ln e^x=x=L_2$$

ط2:
$$L_1=\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)$$
$$=\ln[e^x(1+\frac{1}{e^x})]-\ln(e^{-x}+1)$$
$$=\ln e^x+\ln(1+e^{-x})-\ln(e^{-x}+1)$$
$$=\ln e^x=x=L_2$$

$\boxed{2}$ $\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{e^{-x}+1}$

$$L_1=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{1}{e^{-x}+1}=L_2$$

(ط2)
$$L_1=\frac{e^x \div e^x}{1+e^x \div e^x}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1}{e^{-x}+1}=L_2$$

أو طريقة 3
$$=\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x+1}=L_1$$

---

2) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

$\boxed{1}$ $A=\ln\sqrt{e^5}$ $=\ln e^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$	$\boxed{2}$ $B=\frac{e}{e^{2+\ln 3}}$ $=\frac{e}{e^2.e^{\ln 3}}=\frac{1}{3.e}$
$\boxed{3}$ $C=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$ $=\frac{e^2.e^{\ln 8}}{e^3.e^{\ln 4}}=\frac{8}{(e)(4)}=\frac{2}{e}$	$\boxed{4}$ $D=\frac{e^{4x}}{e.(e^x)^2}$ $=\frac{e^{4x}}{e.e^{2x}}=\frac{e^{2x}}{e}=e^{2x-1}$
$\boxed{5}$ $E=(e^{2x})^3.(e^{-x})^6$ $=e^{6x}.e^{-6x}=e^0=1$	$\boxed{6}$ $F=\frac{e^{3\pi}-e^{2\pi}}{e^{2\pi}-e^{\pi}}$ $=\frac{e^{\pi}(e^{2\pi}-e^{\pi})}{e^{2\pi}-e^{\pi}}=e^{\pi}$
$\boxed{7}$ $G=(32)^{\frac{3}{2}}$ $=((2)^5)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{15}{2}}$	$\boxed{8}$ $H=3^{\frac{-1}{\ln 3}}$ $=e^{\frac{-1}{\ln 3}.\ln 3}=e^{-1}=\frac{1}{e}$
$\boxed{9}$ $I=\sqrt[6]{27}.3^{\frac{1}{2}}$ $=\sqrt[6]{3^3}.3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}=3$	

ملاحظة $e^x.e^{-x}=1$ لا تنسَ

3) أثبت أن التابع f المعرف على R وفق:
$f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ هو تابع ثابت.

$$f(x)=\underbrace{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}_{\text{مطابقة}}$$
$$=[e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})][e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}]$$
$$=(2e^{-x})(2e^x)=4e^0=4\ (\text{ثابت})$$

$$=e^{2x}+2e^x.e^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^x.e^{-x}$$
$$=e^{2x}+2+\cancel{e^{-2x}}-e^{2x}+2-\cancel{e}$$
$$=4\ ;\ \text{ثابت}$$

---

4) حل المعادلات الآتية:

$\boxed{1}$ $e^{2x}-5e^x+4=0$ $(e^x-4)(e^x-1)=0$ إما $e^x=4\rightarrow\boxed{x_1=\ln 4}$ أو $e^x=1\rightarrow\boxed{x_2=0}$	$\boxed{2}$ $e^{2x}-e^x-6=0$ $(e^x-3)(e^x+2)=0$ إما $e^x=3\rightarrow\boxed{x=\ln 3}$ أو $e^x=-2$ (مرفوض)

3 $4e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$

(المعادلة مستحيلة الحل)

4 $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

$(e^{-x} - 6)(e^{-x} - 1) = 0$

إما $e^{-x} = 6 \rightarrow -x = \ln 6 \Rightarrow \boxed{x_1 = -\ln 6}$

او $e^{-x} = 1 \rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

---

5) حل المتراجحات الآتية:

1 $e^{x} - 4e^{-x} \leq 0$

$e^{x} - \frac{4}{e^{x}} \leq 0$

$e^{2x} - 4 \leq 0$

$(e^{x} - 2)\underbrace{(e^{x} + 2)}_{\boxed{+}} \leq 0$

فالإشارة من إشارة $e^{x} - 2$

$e^{x} - 2 \leq 0$

$e^{x} \leq 2$

$x \leq \ln 2$

$S =]-\infty, \ln 2]$

2 $(e^{x} - 2)e^{x} > 2(e^{x} - 2)$

$\underbrace{(e^{x} - 2)}\,e^{x} - 2\,\underbrace{(e^{x} - 2)} > 0$

$(e^{x} - 2)(e^{x} - 2) > 0$

$(e^{x} - 2)^2 > 0$

دائماً محققة إلا عندما : $e^{x} - 2 = 0$

$e^{x} = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

$S = R \setminus \{\ln 2\}$

ط2 تصحيح

$e^{2x} - \frac{2}{e^{x}} - 3 < 0$ نضرب بـ $0 < e^{x}$

$e^{3x} - 2 - 3e^{x} < 0$

نفرض أن

$e^{x} = t > 0$

$t^3 - 3t - 2 < 0$ قاعدة [illegible]

$t^3 - 3t - 2 \overset{?}{=} 0$ ← (نعوض كل عدد)

نلاحظ أن $t = 2$ يحقق المعادلة لذلك نقسم على $t - (+2)$

$$\begin{array}{l} \quad\; t^2 + 2t + 1 \\ t - 2 \,\big|\, t^3 - 3t - 2 \\ \quad\;\; t^3 - 2t^2 \quad - \\ \hline \quad\;\; 2t^2 - 3t - 2 \\ \quad\;\; 2t^2 - 4t \\ \hline \quad\;\; t - 2 \\ \quad\;\; t - 2 \\ \hline \quad\;\; 0 \end{array}$$

$\Downarrow$

$(t - 2)(t^2 + t + 1) = 0$

$(t - 2)(t + 1)(t + 1) = 0$

اما $t = 2$

او $t = -1$ مرفوض

3 $e^{x+2} \geq \frac{3}{e^{x}}$

$e^{x+2} . e^{x} \geq 3$

$e^{2x+2} \geq e^{\ln 3}$

$2x + 2 \geq \ln 3$

$x \geq \frac{\ln 3 - 2}{2}$

$x \geq \frac{1}{2}\ln 3 - 1$

$S = \left[\frac{1}{2}\ln 3 - 1, +\infty\right[$

بنوب فيتم تعميم اعتقاد
ونحفظ ايمانه
بنوب كمان بيطلع العدد 2

4 $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$

هذه الطريقة خاطئة لأنه من الفرض أنو $e^{x} = t > 0$ بيصير t تساوي -1

بروح ع ملاحظة
نص الملاحظة

$e^{2x} - \frac{2}{e^{x}} - 3 < 0$

$e^{3x} - 3e^{x} - 2 < 0$

نفرض $(e^{x} = t) > 0$ ومنه : $t^3 - 3t - 2 < 0$

$t^3 - 3t - 2 = 0$

معادلة من الدرجة الثالثة نأخذ حل تجريبي يحققها ومنه

نجد $t = -1$ ونقسم المعادلة على المعامل $(t + 1)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \quad\;\; t^2 - t - 2 \\ t + 1 \,\big|\, t^3 - 3t - 2 \\ \quad\;\; \underline{\mp t^3 \mp t^2} \\ \quad\;\; -t^2 - 3t - 2 \\ \quad\;\; \underline{\pm t^2 \pm t} \\ \quad\;\; -2t - 2 \\ \quad\;\; \underline{\pm 2t \pm 2} \\ \quad\;\; 0 \end{array}$$

$(t + 1)(t^2 - t - 2) < 0$

$(t + 1)(t - 2)(t + 1) < 0$

$(t + 1)^2(t - 2) < 0$

$\underbrace{(e^{x} + 1)^2}_{\boxed{+}}(e^{x} - 2) < 0$

فالإشارة من إشارة $(e^{x} - 2)$, $e^{x} - 2 < 0$

$e^{x} < 2 \Rightarrow x < \ln 2$

$S =]-\infty, \ln 2[$

t	0		2		$+\infty$
$t^3 - 3t - 2$	‖	$-$	0	$+$	
متراجحة < 0	‖	يحقق	|	///	

$t \in]0, 2[$

$e^{x} \in]0, 2[$ بالعودة

$x \in]-\infty, \ln 2[$

$S =]-\infty, \ln 2[$

نفس الحل بس بروح ع ملاحظات

$\boxed{5}$ $e^{x+\ln 4} > \frac{2}{3}$

$e^{x+\ln 4} > e^{\ln\frac{2}{3}}$

$x + \ln 4 > \ln\frac{2}{3}$

$x > \ln\frac{2}{3} - \ln 4$

$x > \ln\frac{1}{6}$

$x > -\ln 6$

$S =]-\ln 6, +\infty[$

$\boxed{6}$ $e^{x} + 4e^{-x} \leq 5$

نضرب بـ e^x : $e^{2x} + 4 \leq 5\,e^x$

$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$

ط2

$(e^x - 4)(e^x - 1) = 0$

نفرض $e^x = t > 0$

إما $e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

او $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

<table>
<tr><td>x</td><td colspan="3">$-\infty \quad 0 \quad \ln 4 \quad +\infty$</td></tr>
<tr><td>$(e^x - 1)(e^x - 4)$</td><td colspan="3">$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$</td></tr>
<tr><td>$(e^x - 1)(e^x - 4) \leq 0$</td><td>غير محققة</td><td>محققة</td><td>غير محققة</td></tr>
</table>

$S = [0, \ln 4]$

****

مبرهنات في نهايات التابع الأسي

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0\end{array}} \; n \in N$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$$

إذا كان xe^x في المقام عندئذ نهايته 0^- عندما $x \to -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n.e^{-x} = 0\end{array}} \; n \in N$$

ملاحظات هامة :

لإزالة حالات عدم التعيين في نهايات التابع الأسي نتبع ما يلي:

1. **نخرج عامل مناسب و هو e^x أو x وإذا وجدنا في التمرين e^{-x} نخرجها عامل مناسب**

   او $\dfrac{e^x \text{ من البسط}}{x \text{ من المقام}}$ او $\dfrac{x \text{ من البسط}}{e^x \text{ من المقام}}$

2. **عندما نحصل على حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ حصرياً نطبق القاعدة** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

3. **توحيد المقامات او توزيع البسط على المقام.**

4. **تغيير المتحول**

تمرين: احسب نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع.

$\boxed{1}$ $f(x) = e^x - 4x + 1 \ : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = e^x\left(1 - 4.\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \ : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x - 1} \ : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot \frac{(1 - 0)}{(1 - 0)} = +\infty$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{e^x - 5}{x} \ : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{5}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 1}{4x} \ : a = 0$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{4x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{3}{4} \cdot (1) = \frac{3}{4}$$

علماً ان: $\left(\lim_{x\to0} \dfrac{e^{3x} - 1}{3x} = 1\right)$

$\boxed{6}$ $f(x) = x + e^{-x} + 2 \ : a = -\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}} + 1 + \frac{2}{e^{-x}}\right)$$

$$= e^{-x}\left(\underbrace{x.e^x} + 1 + 2.e^x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 + 1 + 0) = +\infty$$

$\boxed{7}$ $f(x) = (x - 1).e^x \ : a = -\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty \times 0$

$$f(x) = x.e^x - e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$\boxed{8}$ $f(x) = 4x - 1 + e^{2-x} : a = -\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$f(x) = 4x - 1 + e^2.e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left(\frac{4x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + e^2\right)$$

$$= e^{-x}\left(4\underbrace{xe^x} - e^x + e^2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 - 0 + e^2) = +\infty$$

$\boxed{9}$ $f(x) = e^x - ln \ : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{ln\,(1 + 4x)}{1 - e^{3x}} \quad a = 0$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{ln\,(1 + 4x)}{-(e^{3x} - 1)}$$

$$= \frac{4x\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{-3x\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)}$$

$$= \frac{4\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{-3\frac{e^{3x}-1}{3x}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{-4}{3}$$

نهايات مميزة :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

مثال ① : اوجد نهاية التابع f عند $a=-2$: $f(x)=(3+x)^{\frac{2}{x+2}}$

حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذٍ :

$$f(x)=(1+x+2)^{\frac{2}{x+2}}$$

$$\boxed{\text{بفرض}\ \underbrace{u(x)=x+2}_{\substack{x\to-2\\u(x)\to0}}\Rightarrow\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{x+2}\Rightarrow\frac{2}{u(x)}=\frac{2}{x+2}}$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{u(x)\to0}[1+u(x)]^{\frac{2}{u(x)}}=\lim_{u(x)\to0}\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{2}=e^{2}$$

مثال ② : اوجد نهاية التابع f عند $a=+\infty$: $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذٍ :

$$f(x)=\left(\frac{x-1+1+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\text{بفرض}\ \underbrace{u(x)=\frac{4}{x-1}}_{\substack{x\to+\infty\\u(x)\to0}}\Rightarrow\frac{1}{u(x)}=\frac{x-1}{4}\Rightarrow\frac{1}{u(x)}=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{u(x)}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4}\Rightarrow\frac{2}{u(x)}+\frac{1}{2}=\frac{x}{2}}$$

$$f(x)=(1+u(x))^{\frac{2}{u(x)}+\frac{1}{2}}=(1+u(x))^{\frac{2}{u(x)}}.(1+u(x))^{\frac{1}{2}}=\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{2}\sqrt{1+u(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{u(x)\to0}\left[\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{2}\sqrt{1+u(x)}\right]=e^{2}$$

****

$f(x)=e^{g(x)}$

$f'(x)=g'(x).e^{g(x)}$

اذا كانت g(x) [illegible]

اشتقاق التابع الأسي:

- التابع $x\to e^{x}$ اشتقاقي على R و تابعه المشتق $x\to e^{x}$
- إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على مجال I

فإن التابع $f:x\longrightarrow e^{u(x)}$ اشتقاقي على I وتابعه المشتق $\grave{f}(x)=\grave{u}(x).e^{u(x)}$ مشتق الاس = نفسه x [illegible]

تمرين: في كل من الحالات الآتية، احسب التابع المشتق للتابع على المجموعة المشار إليها:

$\boxed{2}$ $f(x)=e^{\sqrt{x-1}}$ $\quad I=]1,+\infty[$ $\grave{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{\sqrt{x-1}}$	$\boxed{1}$ $f(x)=e^{x^{2}-4x+1}$ $\quad I=R$ $\grave{f}(x)=(2x-4)e^{x^{2}-4x+1}$
$\boxed{4}$ $f(x)=\pi^{x^{2}-x}$ $\quad I=R$ $=e^{(x^{2}-x)\ln\pi}$ $\grave{f}(x)=(2x-1)\ln\pi\,\underbrace{e^{(x^{2}-x)\ln\pi}}$ $=(2x-1)\ln\pi.(\pi)^{x^{2}-x}$	$\boxed{3}$ $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ $\quad I=R$ $\grave{f}(x)=\frac{e^{x}(e^{x}+1)-e^{x}.e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$ $=\frac{e^{2x}+e^{x}-e^{2x}}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$

$\boxed{5}$ $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ $\quad I =]0,+\infty[$

$$= e^{\sqrt{x}.\ln 2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 2 . \underbrace{e^{\sqrt{x}.\ln 2}}_{\downarrow}$$

$$= \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} \quad . \quad 2^{\sqrt{x}}$$

$\boxed{6}$ $f(x) = (x-1)e^{x}$ $\quad I = R$

$$\grave{f}(x) = 1.e^{x} + e^{x}(x-1)$$

$$= e^{x} + xe^{x} - e^{x} = xe^{x}$$

****

<u>تمرين رقم 3 صفحة 199:</u> جد نهاية كل من التوابع الآتية عند a :

1) $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$ $\quad : a = 1$

$f(x) = (1+1-x)^{\frac{3}{x-1}}$ حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذٍ :

$$\boxed{\text{نفرض } \underbrace{u(x) = 1-x}_{\substack{x \to 1 \\ u(x) \to 0}} \Rightarrow u(x) = -(x-1) \Rightarrow \frac{1}{u(x)} = \frac{-1}{x-1} \Rightarrow \frac{-3}{u(x)} = \frac{3}{x-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u(x)\to 0} [1+u(x)]^{\frac{-3}{u(x)}} = \lim_{u(x)\to 0} \left[\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{-3} = e^{-3}$$

2) $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $\quad : a = +\infty$

$f(x) = \left(\frac{x+1-1-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذٍ :

$$\boxed{\text{بفرض } \underbrace{u(x) = \frac{-3}{x+1}}_{\substack{x \to +\infty \\ u(x) \to 0}} \Rightarrow -u(x) = \frac{3}{x+1} \Rightarrow \frac{-1}{u(x)} = \frac{x+1}{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{u(x)\to 0} [1+u(x)]^{\frac{-1}{u(x)}} = \lim_{u(x)\to 0} \left[\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{-1} = e^{-1}$$

3) $f(x) = \frac{e^{x}-1}{2x}$ $\quad : a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$f(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{x}-1}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$

علماً أن : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1}$

4) $f(x) = 2xe^{-x}$ $\quad : a = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\quad \infty.0$ حالة عدم تعيين من الشكل

$f(x) = 2\frac{x}{e^{x}} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2(0) = 0$

5) $f(x) = \frac{e^{x}-1}{x-1}$ $\quad : a = +\infty, -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{0-1}{-\infty-1} = 0$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{e^{x}\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$$

6) $f(x) = e^{2x} - e^{x} + 3$ $\quad : a = +\infty, -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 - 0 + 3 = 3$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\quad \infty - \infty$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = e^{x}(e^{x}-1) + 3$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty-1) + 3 = +\infty$$

7) $f(x) = \ln(e^x + 2)$ $: a = +\infty , -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

8) $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $: a = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$

$f(x) = e^{-x}\left(\frac{2x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right)$

$= e^{-x}(2xe^x - e^x + 1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 - 0 + 1) = +\infty$

9) $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$ $a = 0, +\infty$

$\lim_{x\to0} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty . 0$

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $0 . \infty$

$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$

10) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $a = -\infty, +\infty, 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^0 = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$

$\lim_{\overset{<}{x\to0}} f(x) = 0$, $\lim_{\overset{>}{x\to0}} f(x) = +\infty$

تدريب صفحة 203 :

1) بسط كتابة كل من العددين : $A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$, $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$

$A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}} = e^{\frac{-1}{\ln 3}.\ln 3}$

$= e^{-1} = \frac{1}{e}$

$B = 2^{\frac{1}{\ln 4}} = 2^{\frac{1}{2\ln 2}}$

$= e^{\frac{1}{2\ln 2}.\ln 2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

2) حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة :

① $7^{x-1} = 3^x$

$e^{(x-1)\ln 7} = e^{x\ln 3}$

$(x-1).\ln 7 = x\ln 3$

$x\ln 7 - \ln 7 - x\ln 3 = 0$

$x\underbrace{(\ln 7 - \ln 3)} = \ln 7$

$x \ \ln\frac{7}{3} \quad = \ln 7$

$\boxed{x = \frac{\ln 7}{\ln\frac{7}{3}}}$

② $3^x = 4^{2x+1}$

$e^{x\ln 3} = e^{(2x+1)\ln 4}$

$x\ln 3 = (2x+1)\ln 4$

$x\ln 3 = 2x\ln 4 + \ln 4$

$x\ln 3 - 2x\ln 4 = \ln 4$

$x\underbrace{(\ln 3 - \ln 16)} = \ln 4$

$x \ \ln\frac{3}{16} \quad = \ln 4$

$\boxed{x = \frac{\ln 4}{\ln\frac{3}{16}}}$

③ $3^x > 4$

$e^{x\ln 3} > e^{\ln}$

$x\ln 3 > \ln 4$

$x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$

$S = \left]\frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[$

④ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$

$e^{x\ln\frac{1}{3}} > e^{\ln 4}$

$x\ln\frac{1}{3} > \ln 4$

$-x\ln 3 > \ln 4$

$x < \frac{-\ln 4}{\ln 3}$

$S = \left]-\infty, \frac{-\ln 4}{\ln 3}\right[$

⑤ $5^{-x} < 5^{2x}$

$-x < 2x$

$0 < 3x$

$0 < x$

$S =]0, +\infty[$

⑥ $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

$3.2^x < 2^x + 1$

$3.2^x - 2^x < 1$

$2.2^x < 1$

$2^{x+1} < 2^0$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$S =]-\infty, -1[$

---

3) فيما يأتي حل كلاً من المعادلات و المتراجحات الآتية :

① $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ ،

$(2^2)^x + 2.2^x - 3 = 0$

$2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$

$(2^x + 3)(2^x - 1) = 0$

إما $2^x = -3$ (مرفوض)

أو $2^x = 1$

$2^x = 2^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

بعد حل المعادلة نجد:

فالإشارة من إشارة$(2^x - 1)$

$\underbrace{(2^x + 3)}_{\text{موجبة دائماً}} (2^x - 1) \leq 0$

$2^x - 1 \leq 0$

$2^x \leq 1 = 2^0$

$2^x \leq 2^0$

$x \leq 0$

$S =]-\infty, 0]$

---

② $2^{x+1} - 10.2^x + 12 = 0$ ،

$\underline{2.2^x - 10.2^x} = -12$

$-8.2^x = -12$

$2^x = \frac{3}{2}$

$e^{x\ln 2} = e^{\ln\frac{3}{2}}$

$x\ln 2 = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 3/2}{\ln 2}}$

$2^{x+1} - 10.2^x + 12 \geq 0$

بعد حل المعادلة نجد:

$-8.2^x \geq -12$

$2^x \leq \frac{3}{2}$

$e^{x\ln 2} \leq e^{\ln\frac{3}{2}}$

$x\ln 2 \leq \ln\frac{3}{2} \Rightarrow x \leq \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln 2}$

$S = \left]-\infty, \frac{\ln 3/2}{\ln 2}\right]$

---

③ $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$ ،

$3^{2x+1} + 2 = 7.3^x$: (3^x) نضرب بـ

$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 = 0$

$\Delta = 49 - 4(3)(2) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

- إما $3^x = 2$

$e^{x\ln 3} = e^{\ln 2}$

$x\ln 3 = \ln 2 \quad \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$

- أو $3^x = \frac{1}{3}$

$e^{x\ln 3} = e^{\ln\frac{1}{3}}$

$x\ln 3 = -\ln 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

$3^{x+1} + 2.3^{-x} \geq 7$

$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 \geq 0$

بعد حل المعادلة نجد:

ان الحلين هما : $x_1 = \frac{\ln}{\ln 3}$ ، $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{\ln 2}{\ln 3}$		$+\infty$
المعادلة		+	0	−	0	+	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$S =]-\infty, -1] \cup \left[\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2^{x^2-2x}$

① ادرس تغيرات f .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$$f(x) = e^{(x^2-2x)\ln 2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\acute{f}(x) = (2x-2).\ln 2 . e^{(x^2-2x).\ln 2}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 2x-2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} : f(1) = e^{-\ln 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

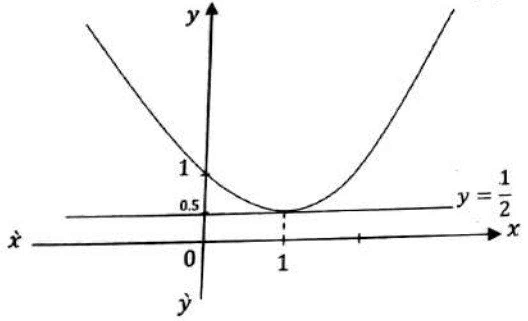
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

② اكتب معادلة d مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم $\acute{f}(x)$.

بما ان المماس في النقطة التي تعدم $\acute{f}(x)$ فإن المماس افقي و ميله يساوي الصفر

$$d:\ y = \frac{1}{2}$$

③ ارسم في معلم واحد المماس d ثم الخط C .



---

5) جد التابع المشتق لكل من التوابع الآتية :

① $f(x) = x^x$

$= e^{x\ln x}$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\acute{f}(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right).e^{x\ln x}$$

$$= (\ln x + 1).e^{x\ln x}$$

② $f(x) = 3^{x^2}$

$= e^{x^2\ln 3}$

f اشتقاقي على R

$$\acute{f}(x) = 2x\ln 3 . e^{x^2\ln 3}$$

③ $f(x) = \pi^{\ln x}$

$= e^{\ln x . \ln\pi}$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x} . \ln\pi . e^{\ln x . \ln\pi}$$

---

6) حل في R جملة المعادلتين :

$$3^x . 3^y = 9 \quad ①$$

$$3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \quad ②$$

الحل : من ② نجد ان : $\boxed{3^y = 4\sqrt{3} - 3^x}$ * نعوض * في ① :

$$3^x.\left(4\sqrt{3} - 3^x\right) = 9$$

$$4\sqrt{3}.3^x - 3^{2x} - 9 = 0$$

Scanned by CamScanner

$$3^{2x} - 4\sqrt{3}\,.\,3^x + 9 = 0$$ نضرب بـ (-1) :

$$\Delta = 48 - 4(1)(9) = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

- إما $3^x = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} 3^y = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$3^x = 3^{\frac{1}{2}}$, $3^y = 3.3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$, $\boxed{y = \frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

- او $3^x = \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} 3^y = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$3^x = 3.\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}$, $3^y = 3^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$, $\boxed{y = \frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

---

7) إذا علمت ان $a > 0$ و $b > 0$ ، فهل صحيح ان $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ ؛

$$L_1 = a^{\ln} = e^{\ln\ .\ln} = \left(e^{\ln}\ \right)^{\ln a} = b^{\ln a} = L_2$$

---

8) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = x.2^{-x}$ ادرس تغيرات f و ارسم خطه البياني .

$$f(x) = x.2^{-x} = x.e^{-x\ln 2}$$

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \times +\infty = -\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty.0$

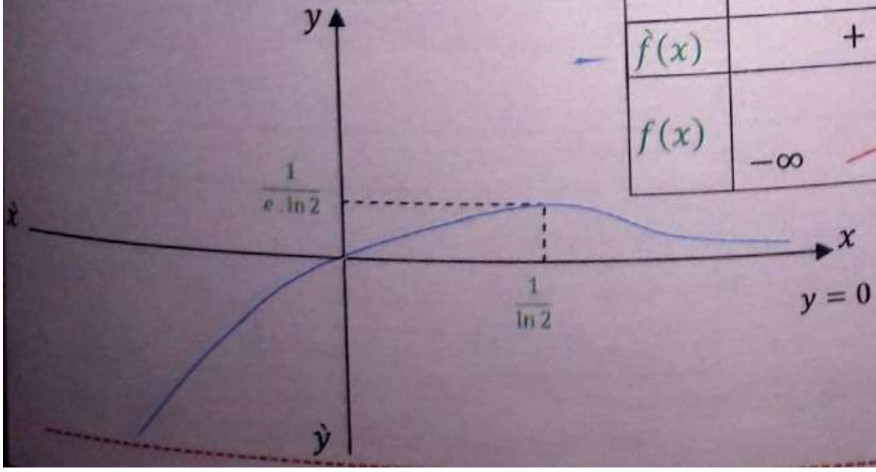
$$f(x) = x.e^{-x\ln 2} = \frac{x}{e^{x\ln 2}} = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{x.\ln 2}{e^{x.\ln 2}}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

$$\acute{f}(x) = 1.e^{-x\ln 2} - \ln 2\ .e^{-x\ln 2}.x$$
$$= e^{-x\ln 2}(1 - x\ln 2)$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 1 - x\ln 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln 2}} : f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.e^{\frac{-1}{\ln}.\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.e^{-1} = \frac{1}{e.\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e.\ln 2}$	↘	0



نقطة مساعدة :

$x = 0 : f(0) = 0$

$(0,0)$

9) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$

① ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

نكتب f بشكل أبسط :

$$f(x) = 2^{2x} - 2^2 . 2^x = e^{2x\ln 2} - 4 . e^{x\ln 2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $-\infty$ عند $x\grave{x}$ منطبق على C مقارب أفقي لـ $y = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\quad +\infty - \infty$ عدم تعيين

$f(x) = e^{x.\ln 2}[e^{x\ln 2} - 4]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 4) = +\infty$

$$\grave{f}(x) = 2.\ln 2 . e^{2x\ln 2} - 4\ln 2\ e^{x\ln 2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \Rightarrow 2\ln 2\ e^{2x\ln 2} - 4\ln 2\ e^{x\ln 2} = 0 \quad (\div 2\ln 2)$$

$$e^{2x\ln 2} - 2e^{x\ln 2} = 0$$

$$e^{x\ln 2}(e^{x\ln 2} - 2) = 0$$

$$e^{x\ln 2} = 2$$

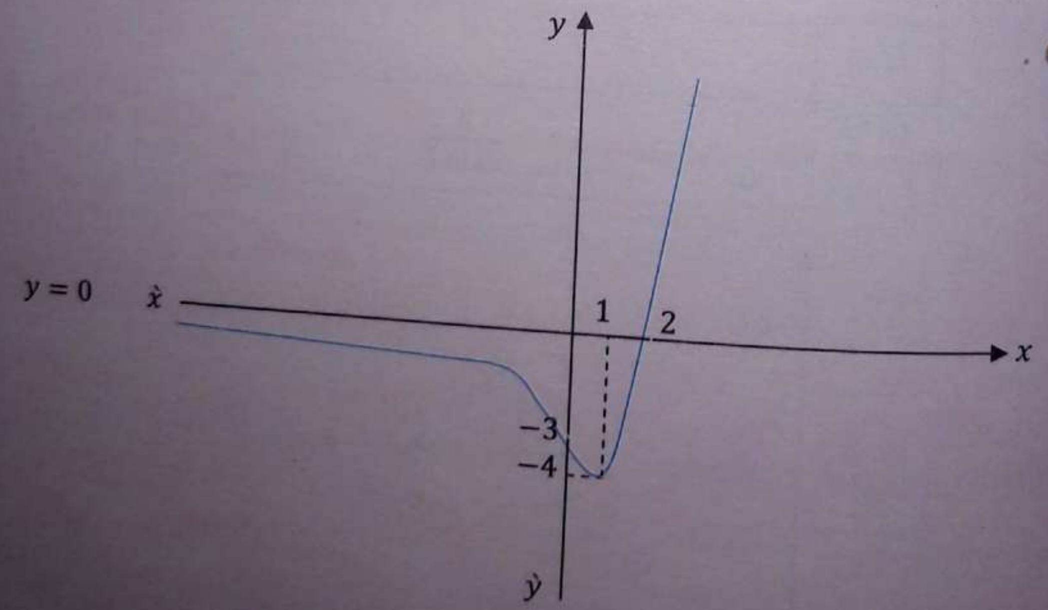
$$e^{x\ln 2} = e^{\ln 2}$$

$$x\ln 2 = \ln 2$$

$$\boxed{x = 1} : f(1) = -4$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	$+\infty$

② ارسم C .



نقط مساعدة :

C قطع $x\grave{x}$ اي $y = 0$

$$0 = 2^{2x} - 2^{x+2}$$

$$2^{x+2} = 2^{2x}$$

$$x + 2 = 2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,0)$$

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$: f(0) = -3$

$(0, -3)$

10) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = (1-x).2^x$

ادرس تغيرات f و ارسم خطه البياني .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$.

$f(x) = (1-x).e^{x\ln 2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $+\infty.0$

$$f(x) = (1-x)e^{x\ln 2} = e^{x\ln 2} - xe^{x\ln 2} = e^{x\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}.x\ln 2 .e^{x\ln 2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow$ $y=0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\left(\text{علماً ان :} \quad \lim\limits_{x\to-\infty}(x\ln 2 .e^{x\ln 2}) = 0\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

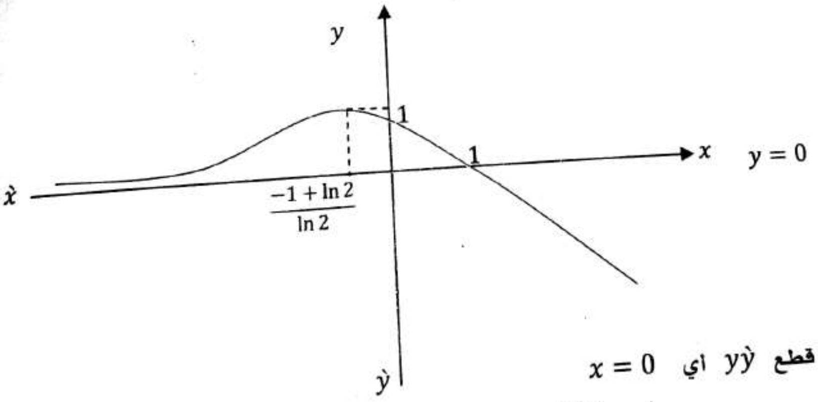
$$\acute{f}(x) = -e^{x\ln 2} + \ln 2 .e^{x\ln 2}(1-x)$$
$$= e^{x\ln 2}[-1+\ln 2(1-x)] = e^{x\ln 2}[-1+\ln 2 - x\ln 2]$$

$\acute{f}(x) = 0 \Longrightarrow -1+\ln 2 - x\ln 2 = 0$

$$\boxed{x = \frac{-1+\ln 2}{\ln 2}}$$

$$: f\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right) = \left(1-\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right).e^{\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right).\ln 2} = \left(\frac{\ln 2 + 1 - \ln 2}{\ln 2}\right)e^{-1+\ln 2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}.e^{-1+\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.e^{\ln 2 - 1} = \frac{1}{\ln 2}.e^{\ln\left(\frac{2}{e}\right)} = \frac{1}{\ln 2}.\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e.\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e.\ln 2}$	$\searrow$	$-\infty$



$x\grave{x}$ اي $y=0$: ، C قطع $y\grave{y}$ اي $x=0$

$f(0) = 1$

$0 = (1-x).$

$0 = 1-x$

$x = 1 \Rightarrow ($

****

معادلات تفاضلية بسيطة

مبرهنة: إن حلول المعادلة التفاضلية $a \neq 0 \;:\; \grave{y} = ay$ هي التوابع $f_k : x \to ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي.

مبرهنة: إن حلول المعادلة التفاضلية $(a \neq 0, b \in R) \;:\; \grave{y} = ay + b$

هي التوابع $g_k : x \to ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي. •

نتيجة: أياً كان (x_0, y_0) فيوجد حل وحيد f معرف على R للمعادلة التفاضلية $a \neq 0 \;:\; \grave{y} = ay$ يحقق: $f(x_0) = y_0$.

ملاحظة: نرتب المعادلة التفاضلية بالشكل النظامي قبل استخراج قيمة a.

****

تدريب صفحة 205:

1) حل المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\grave{y} = 3y$ $y = k.e^{3x} \;; k \in R$	2) $\grave{y} + 2y = 0$ $\grave{y} = -2y$ $y = k.e^{-2x} \;; k \in R$
3) $3\grave{y} = 5y$ $\grave{y} = \frac{5}{3}y$ $y = k.e^{\frac{5}{3}x} \;; k \in R$	4) $2\grave{y} + 3y = 0$ $\grave{y} = \frac{-3}{2}y$ $y = k.e^{\frac{-3}{2}x} \;; k \in R$

---

2) في كل حالة عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

1) $\grave{y} = 2y$ والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$.

حلها يكون $y = k.e^{2x}$، لكن $f(0) = 1$ أي نعوض ($y = 1$ و $x = 0$)

$$k.e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

عندئذ: $y = e^{2x}$

---

2) $\grave{y} + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(-2, 1)$.

$\grave{y} = -5y$ وحلها يكون $y = k.e^{-5x}$

لكن C يمر بالنقطة $A(-2,1)$ اي نعوض ($y = 1$ و $x = -2$)

$$k.e^{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e^{10}} \Rightarrow \boxed{k = e^{-10}}$$

عندئذ: $y = e^{-10}e^{-5x} = e^{-10-5x}$

---

3) $\acute{y} + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها (2−) من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

$\acute{y} = -2y$ وحلها يكون $y = k.e^{-2x}$

لكن ميل المماس يساوي $\frac{1}{2}$ اي $\left(\acute{y} = \frac{1}{2}\right)$ في النقطة التي فاصلتها (2−) اي $(x = -2)$

$$\acute{y} + 2y = 0$$

$$\frac{1}{2} + 2y = 0$$

$$y = \frac{-1}{4}$$

إذاً نقطة التماس $\left(-2, \frac{-1}{4}\right)$

$$y = k.e^{-2x} \Longrightarrow k.e^{4} = \frac{-1}{4} \Rightarrow k = \frac{-1}{4e^{4}} \Rightarrow \boxed{k = \frac{-e^{-4}}{4}}$$

عندئذ:

$$y = \frac{-1}{4}e^{-4}e^{-2x} = \frac{-1}{4}e^{-4-2x}$$

---

3) حل المعادلات التفاضلية الآتية:

2) $y + 3\acute{y} = 2$ $\acute{y} = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$ $y = k.e^{\frac{-1}{3}x} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-1}{3}}$ $y = ke^{\frac{-1}{3}x} + 2 \quad ; k \in R$	1) $\acute{y} = 2y + 1$ $y = k.e^{2x} - \frac{1}{2} \quad ; k \in R$
4) $2y + 3\acute{y} - 1 = 0$ $\acute{y} = \frac{-2}{3}y + \frac{1}{3}$ $y = k.e^{\frac{-2}{3}x} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2}{3}}$ $y = k.e^{\frac{-2}{3}x} + \frac{1}{2} \quad ; k \in R$	3) $2\acute{y} = y - 1$ $\acute{y} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ $y = k.e^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{2}}$ $y = ke^{\frac{1}{2}x} + 1 \quad ; k$ $\in R$

تمرينات و مسائل صفحة 209

① في كل من الحالات الآتية ، احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها :

1 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x) \\ &= e^x[2x - 2 + x^2 - 2x] \\ &= e^x(x^2 - 2) \end{aligned}$$

2 $f(x) = e^{-x}.\ln x \quad : I =]0, +\infty[$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\ln x + \frac{1}{x}e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

3 $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x} \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - x + 1) \\ &= e^{-x}[2x - 1 - x^2 + x - 1] \\ &= e^{-x}(-x^2 + 3x - 2) \end{aligned}$$

4 $f(x) = \frac{1}{x}.e^x \quad : I = R\backslash\{0\}$

f اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{x^2}e^x + e^x.\frac{1}{x} \\ &= e^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = e^x\left(\frac{-1+x}{x^2}\right) \end{aligned}$$

5 $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}} \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1 + e^{-x}) + e^{-x}(e^x - 1)}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^x + 1 + 1 - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(1 + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

6 $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}} \quad : I = R\backslash\{0\}$

f اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}.x = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \end{aligned}$$

7 $f(x) = \ln(1 + e^x) \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

8 $f(x) = e^{x\ln x} \quad : I =]0, +\infty[$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right).e^{x\ln x} \\ &= (\ln x + 1)e^{x\ln x} \end{aligned}$$

9 $f(x) = (\sin x + \cos x).e^x \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

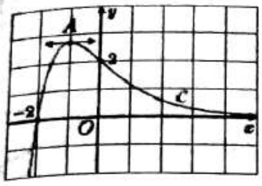
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x - \sin x)e^x + e^x(\sin x + \cos x) \\ &= e^x[\cos x - \sin x + \sin x + \cos x] \\ &= 2\,e^x\cos x \end{aligned}$$

10 $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

② C هو الخط البياني لتابع f معرف على R وفق $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان اعتماداً على ما تجد في الشكل :



1) احسب قيمة كل من a و b

من الخط البياني للتابع f نلاحظ ان C يمر بالنقطتين $(0,2)$ ، $(-2,0)$

$$(0,2) \in C \ : x = 0 \ , \quad f(0) = 2$$
$$(0+b)e^{0} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{b = 2}$$
$$(-2,0) \in C \ : x = -2 \ , \quad f(-2) = 0$$
$$(-2a+b)e^{+2} = 0 \qquad (\div e^{+2}) \ \ ,(b = 2)$$
$$-2a + 2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

نجد ان : $\boxed{f(x) = (x+2)e^{-x}}$

2) احسب $\acute{f}(x)$ ، و استنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f

f معرف واشتقاقي على R

$$\acute{f}(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x+2)$$
$$= e^{-x}(1 - x - 2) = e^{-x}(-1-x)$$
$$\acute{f}(x) = 0 \ \Rightarrow \ e^{-x}(-1-x) = 0$$
$$e^{-x} \neq 0$$
$$-1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$
$$: f(-1) = (-1+2)e = e \ \ : A(-1, e)$$

3) اثبت ان محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $+\infty.0$

$$f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^{x}} + 2e^{-x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$:

---

③ ارسم الخط البياني C للتابع الأسي exp ثم استنتج رسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية :

① $f: x \to e^{x} - 2$ ② $g: x \to 1 - e^{x}$ ③ $h: x \to |1 - e^{x}|$

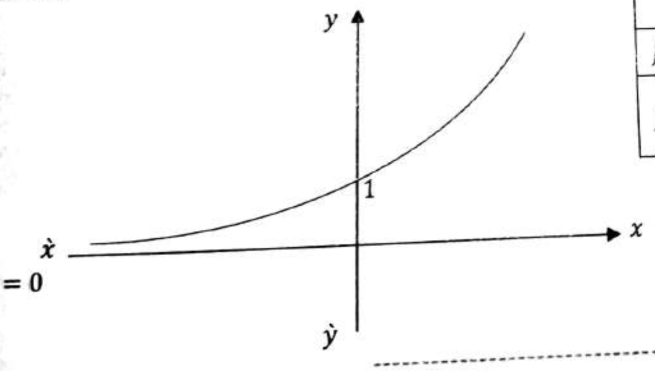
لنناقش : $\boxed{P(x) = exp(x) = e^{x}}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$: $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\acute{f}(x) = e^{x} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$



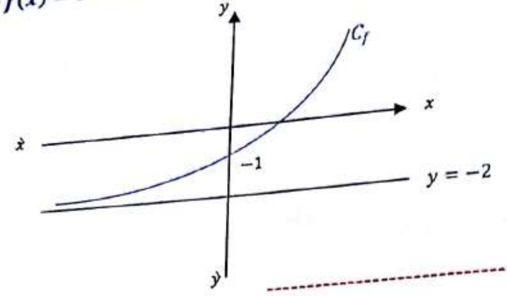
نقطة مساعدة:

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$$f(0) = e^{0} = 1$$
$$(0,1)$$

① $f(x) = e^x - 2 = P(x) - 2$

C_f ينتج عن C_P بانسحاب متجهه $\vec{u} = -2\vec{j}$



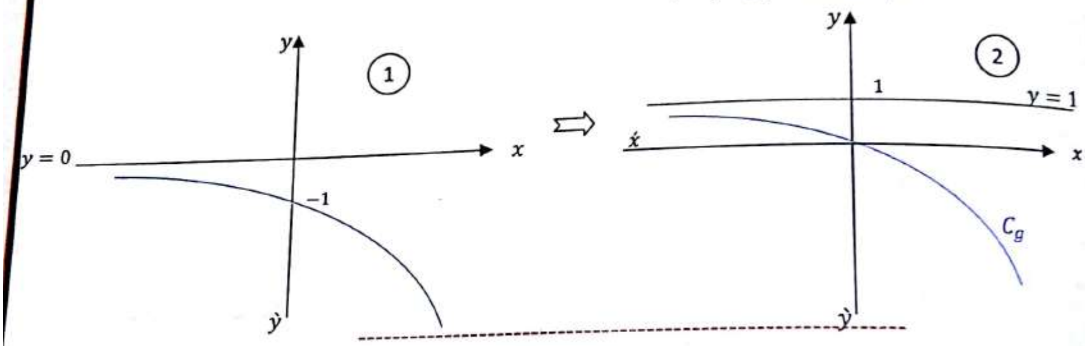
	بعد	قبل
المقارب	$y = -2$	$y = 0$
نقطة التقاطع مع $y\grave{y}$	$(0,-1)$	$(0,1)$

② $g(x) = 1 - e^x$

$= 1 - P(x) = -P(x) + 1$

C_g ينتج عن C_P بـ: 1) اخذ نظير C_P بالنسبة لـ $x\grave{x}$

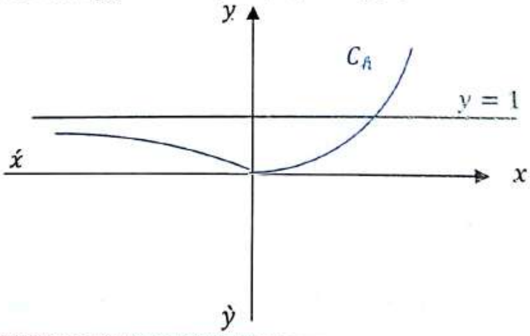
2) ثم انسحاب متجهة $\vec{u} = \vec{j}$



③ $h(x) = |1 - e^x|$

$= |g(x)|$

C_h ينتج عن C_g بأخذ نظائر النقاط ذات التراتيب السالبة بالنسبة لـ $x\grave{x}$ وإبقاء النقاط ذات التراتيب الموجبة كما هي:



④ ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

1) ما نهاية f عند طرفي مجموعة تعريفه؟

f معرف عند $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

2) ادرس تغيرات f وارسم C

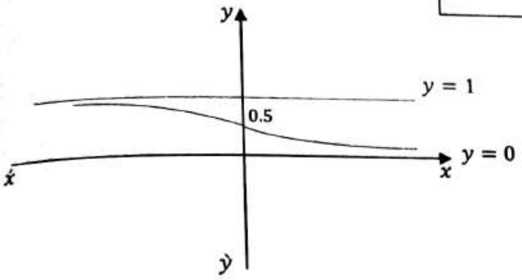
f معرف ومستمر واشتقاقي على R .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \implies$ $y = 1$ مقارب افقي // $x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \implies$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$\grave{f}(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\grave{f}(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$



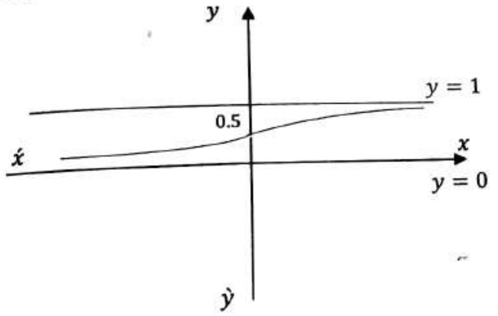
نقطة مساعدة:

C قطع $y\grave{y}$ اي

$x = 0 \ : f(0) = \frac{1}{2}$

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

3) g هو التابع المعرف على R وفق $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ اثبت ان $g(x) = f(-x)$ ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقاً من C.



C_g نظير C_f بالنسبة لـ $y\acute{y}$

⑤ في الحالات الآتية، بيّن أن الخط البياني C للتابع f المعطى على R يقبل مقارباً مائلاً d، عينه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

$\boxed{1}$ $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x - 1$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x - 1 + e^{-2x} - (x - 1) = e^{-2x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$f(x) - y_d = e^{-2x} > 0 \Rightarrow$ d فوق C

$\boxed{2}$ $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x + 1$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + 1 + 4e^{-x} - (x + 1) = 4e^{-x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـC عند $+\infty$

$f(x) - y_d = 4e^{-x} > 0 \Rightarrow$ C فوق d

$\boxed{3}$ $f(x) = x + 2 + xe^{x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x + 2$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + 2 + xe^{x} - (x + 2) = xe^{x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_d = xe^{x} \\ f(x) - y_d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} xe^{x} = 0 \\ e^{x} \neq 0 \\ \boxed{x = 0} : f(0) = 2 \end{array}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تحت d	$(0,2)$	C فوق d	

⑥ بين أن الخط البياني C للتابع f المعرف على R بالصيغة $f(x) = \ln(3 + e^{x})$ يقبل مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يطلب تعيينهما.

$f(x) = \ln(3 + e^{x})$: $I =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(3)$: $y = \ln 3$ مقارب أفقي $// \, x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \ln[e^{x}(3e^{-x} + 1)]$$
$$= \ln e^{x} + \ln(3e^{-x} + 1) = x + \ln(3e^{-x} + 1)$$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + \ln(3e^{-x} + 1) - x = \ln(3e^{-x} + 1)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = \ln 1 = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب لـ C عند $-\infty$

ملاحظة هامة نسيتها بالاشتراك

⑦ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{2e^{x}-3}{e^{x}+1}$

1) لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y = 2$ و d_2 الذي معادلته $y = -3$ مقاربان للخط C؟

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$: $y = -3$ مقارب أفقي لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

عندما يطلب دراسة التغيرات: نهايات + اشتقاق + نقرأ المشتق + جدول وأحيانا لا نعدم المشتق

$$f(x) = \frac{e^{x}(2 - 3e^{-x})}{e^{x}(1 + e^{-x})} = \frac{2 - 3e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ $y = 2$ مقارب أفقي لـ C عند $+\infty$

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

نقطة التقاطع مع $y'y$ اي

$$x = 0 : \quad f(0) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left(0, \frac{-1}{2}\right)$$

معادلة المماس

$$y - f(0) = m(x-0)$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x-0)$$

$$T \ : \ y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(0) = m = \frac{5e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{5}{4}$$

4) ادرس وضع C بالنسبة إلى T ثم ارسم في معلم متجانس C, T, d_2, d_1

الوضع النسبي للمماس مع المنحني :

$$f(x) - y_T = \underbrace{\frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}}$$

نلاحظ انه تابع غير مالوف لدراسة وضعه النسبي ندرس تغيراته:

$$g(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{20e^x - 5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2} = \frac{20e^x - 5(e^{2x}+2e^x+1)}{4(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{20e^x - 5e^{2x} - 10e^x - 5}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-5(e^{2x}-2e^x+1)}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -5(e^x-1)^2 = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x=0} : g(0) = 0$$

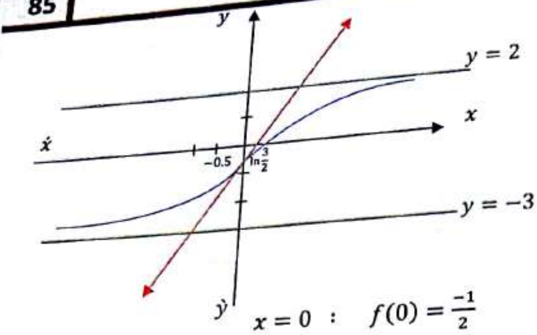
?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x) = f(x) - y_d$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
الوضع النسبي		C فوق T	$\left(0, \frac{-1}{2}\right)$	C تحت T	

$y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

x	0	$\frac{2}{5}$
y	$\frac{-1}{2}$	0

$\left(0, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{2}{5}, 0\right)$



نقط مساعدة:

$x = 0 \ : \ f(0) = \frac{-1}{2} \quad : \quad \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$y = 0 \ \Rightarrow 2e^x - 3 = 0 \Rightarrow x = \ln\frac{3}{2} \quad : \quad \left(\ln\frac{3}{2}, 0\right)$

---

⑧ ليكن C الخط البياني للتابع ***f*** المعرف على ***R*** وفق $f(x) = (x-1)e^x$ ادرس نهايات التابع ***f*** عند اطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات ***f*** ونظم جدولاً بها، ثم ارسم ***C***.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ? \quad -\infty.0$ حصلنا على حالة عدم تعيين

$f(x) = xe^x - e^x$

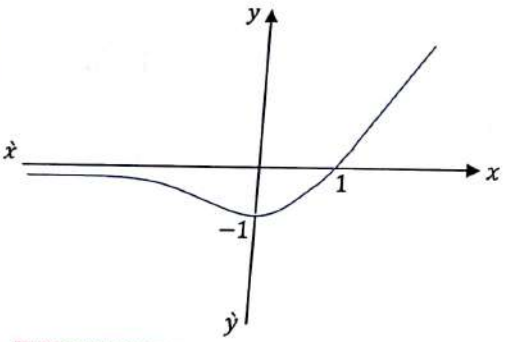
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $-\infty$ عند $\grave{x}x$ مقارب منطبق على $y = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\grave{f}(x) = e^x + e^x(x-1) = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$\grave{f}(x) = 0 \ \Rightarrow xe^x = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0} \ : \ f(0) = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	−1	↗	$+\infty$



نقطة مساعدة :

C قطع $\grave{x}x$ اي $y = 0$

$(x-1)e^x = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$(1,0)$

---

⑨ ليكن C الخط البياني للتابع ***f*** المعرف على ***R*** وفق: $f(x) = e^x - x$

1) جد نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه.

$f(x) = e^x - x \quad : \quad D = R =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$

حالة عدم تعيين $+\infty - \infty$

$f(x) = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-0) = +\infty \quad ;$

علماً أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

2) بين ان المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مقارب للخط C.

$f(x) - y_d = e^x - x - (-x) = e^x$

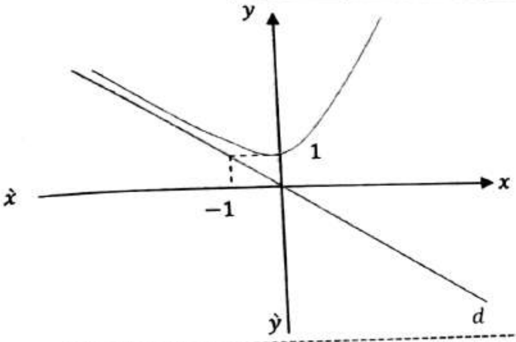
$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ $-\infty$ عند C مقارب مائل لـ $d: y = -x$

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم d و C .

$\acute{f}(x) = e^x - 1$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \;:\; \boxed{x = 0} : f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



$d: y = -x$

x	0	-1
y	0	1
	$(0,0)$	$(-1,1)$

---

⑩ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

1) جد نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه.

$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ $\qquad D = R =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$f(x) - y_d = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 1}$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ $+\infty$ عند C مقارب مائل لـ $d: y = x - 1$

3) اثبت ان المستقيم $\acute{d}$ الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

$f(x) - y_{\acute{d}} = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - (x + 3)$

$= \frac{4}{e^x + 1} - 4 = \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x}{e^x + 1}$

$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_{\acute{d}}) = 0 \Rightarrow$ $-\infty$ عند C مقارب مائل لـ $\acute{d}: y = x + 3$

4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\grave{f}(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \Rightarrow \ (e^x-1)^2 = 0 \Longrightarrow \ e^x = 1 \ \Longrightarrow \ \boxed{x=0} : f(0) = 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

5) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

نقطة التقاطع مع $y\grave{y}$ اي $x = 0$:

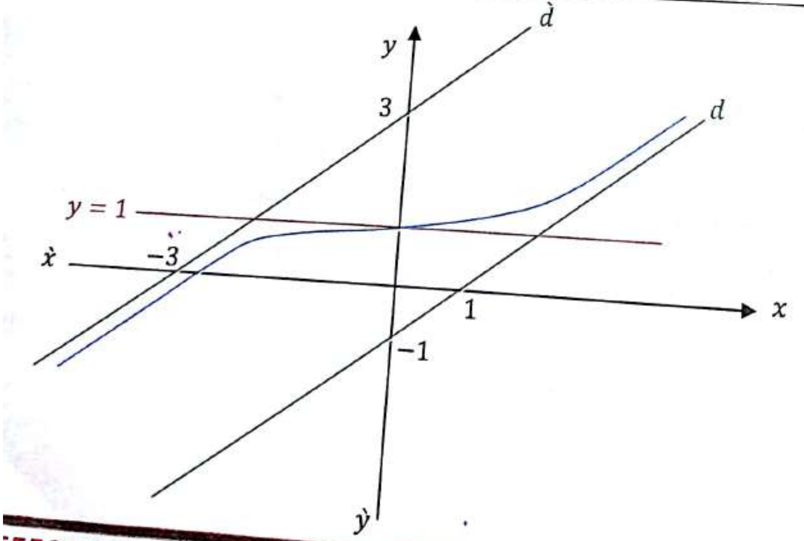
$$f(0) = 1 \quad : (0,1)$$
$$m = \grave{f}(0) = 0$$
$$y - f(0) = m(x-0)$$
$$y - 1 = 0(x-0) \ \Longrightarrow \ T: \boxed{y = 1}$$

6) ادرس وضع C بالنسبة إلى T ثم ارسم في معلم متجانس d و $\grave{d}$ و T و C .

$$f(x) - y = f(x) - 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$
$f(x) - 1$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
الوضع النسبي		C تحت T	$(0,1)$	C فوق T	

?



$d: y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0
	$(0,-1)$	$(1,0)$

$\grave{d}: y = x + 3$

x	0	-3
y	3	0
	$(0,3)$	$(-3,0)$

⑪ ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = 2e^x - x - 2$

1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$ عدم تعيين $+\infty - \infty$

$$f(x) = e^x \left(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(2 - 0 - 0) = +\infty$$

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2e^x - 1 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2e^x - 1 = 0 \\ e^x = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$x = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2}$$

$$:f(-\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 2$$

$$= \frac{2}{e^{\ln 2}} + \ln 2 - 2 = 1 + \ln 2 - 2 = -1 + \ln 2$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-1 + \ln 2$	↗	$+\infty$

3) استنتج من (2) أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر،

f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty, -\ln 2[$

$0 \in f(]-\infty, -\ln 2[) =]-1 + \ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]-\infty, -\ln 2[$

f مستمر و متزايد تماماً على $[-\ln 2, +\infty[$

$0 \in f([-\ln 2, +\infty[) = [-1 + \ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-\ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين في R

لاحظ أن:

$f(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$ و منه الجذر الأول هو $x = 0$

4) نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة: $f(x) = 0$ بالرمز α أثبت أن $-2 < \alpha < -1$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2e^{-1} + 1 - 2 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \\ f(-2) = 2e^{-2} + 2 - 2 = \frac{2}{e^2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(-1) \times f(-2) < 0 \\ -2 < \alpha < -1 \end{array}$$

5) ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x.

نلاحظ من جدول التغيرات و من حلول المعادلة $f(x) = 0$ و من سطر $f(x)$ أن:

إذا كان $x \in]-\infty, \alpha[$ فإن $f(x) > 0$

إذا كان $x \in]\alpha, 0]$ فإن $f(x) < 0$

إذا كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

?

1

⑫ ليكن C_ℓ, C_E الخطان البيانيان للتابع exp واللوغاريتمي ln بالترتيب ايقبل هذان الخطان مماسات مشتركة؟

$$g(x) = e^x$$

T_E مماس الخط C_E في النقطة B حيث:

$$x = b : g(b) = e^b : B(b, e^b)$$

$$\acute{g}(x) = e^x$$

$$m_E = \acute{g}(b) = e^b$$

$$T_E: y_B - e^b = e^b(x - b)$$

$$\boxed{y_B = e^b x - be^b + e^b}$$

$$f(x) = \ln x$$

T_ℓ مماس الخط C_ℓ في النقطة A حيث

$$x = a : f(a) = \ln a : A(a, \ln a)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$$

$$m_\ell = \acute{f}(a) = \frac{1}{a}$$

$$T_\ell: y_A - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$$

$$\boxed{y_A = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a}$$

لاحظ: إذا وجد مماس مشترك للخطين C_ℓ, C_E يمسهما على التوالي في A, B لكان المماسين منطبقين أي $(m_\ell = m_E)$ ومنه بالحل المشترك لهما:

$$y_A = y_B$$

$$(*) \quad \boxed{\frac{1}{a}x - 1 + ln\, a = e^b x - be^b + e^b}$$

بما أن $m_\ell = m_E$ فإن: ① $\boxed{\frac{1}{a} = e^b}$:

$$a = \frac{1}{e^b} \Rightarrow a = e^{-b} \Rightarrow \boxed{\ln a = -b} \text{ ②}$$

نعوض ① و ② في * فنجد:

$$e^b x - 1 - b = e^b x \underbrace{-be^b + e^b}$$

$$-1 - b = e^b(-b + 1) \qquad \div(-b + 1)$$

$$\frac{-1 - b}{-b + 1} = e^b$$

$$\frac{-(b + 1)}{-(b - 1)} = e^b$$

$$\frac{b + 1}{b - 1} = e^b$$

$$-e^b + \frac{b + 1}{b - 1} = 0$$

نلاحظ أن حل هذه المعادلة جبرياً صعبة جداً على الطالب وصعب إيجاد حلولها فلذلك نلجا لتحويلها إلى تابع وندرس تغيراته:

$$f(x) = -e^x + \frac{x + 1}{x - 1} \quad ; \quad R \setminus \{1\}$$

f مستمر واشتقاقي على المجالين $]1, +\infty[\cup]-\infty, +1[$ ومنه:

$$lim_{\to-\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$im_{\to1^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

$$x) = -e^x + \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = -e^x - \frac{2}{(x - 1)^2} < 0$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
)	$-$	‖	$-$
)	$1 \searrow 0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$

نلاحظ من تغيرات f أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين احدهما $(b_1 = a_1 < 1)$ والآخر $(b_2 = a_2 > 1)$ وبالتالي:

يوجد مماسان مشتركان للخطين C_ℓ, C_E .

- احدهما يمس C_E في النقطتين $(b_1, e^{b_1}), (b_2, e^{b_2})$
- والآخر يمس C_ℓ في النقطتين $(a_1, \ln a_1), (a_2, \ln a_2)$

⑬ تابع القوة : نهدف إلى دراسة التابع P_a المعرف على $]0,+\infty[$ ، بالصيغة $P_a(x) = x^a$

ليكن a عدداً حقيقياً غير معدوم .

نعلم ان $P_a(x) = x^a = e^{a\ln x}$ نفرض $u(x) = a\ln x$.

1) عيّن تبعاً لإشارة a جهة إطراد التابع u ، و استنتج جهة إطراد P_a .

لدينا $u(x) = a\ln x$ ، u اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ و مشتقه $\grave{u}(x) = \frac{a}{x}$

- ومنه في حال : $a > 0$ فإن $\grave{u}(x) > 0$ على المجال $]0,+\infty[$ و منه u متزايد تماماً

فيكون P_a متزايد تماماً على $]0,+\infty[$.

- واما في حال : $a < 0$ فإن $\grave{u}(x) < 0$ على المجال $]0,+\infty[$ و منه u متناقص تماماً

فيكون P_a متناقص تماماً على $]0,+\infty[$.

2) ادرس تبعاً لإشارة a نهاية P_a عند طرفي مجموعة تعريفه ، و بيّن انه في حالة $a > 0$ يمكننا ان نعرف $P_a(0) = 0$ فنحصل على تابع مستمر على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة .

$P_a(x) = e^{a\ln x}$ معرف على المجال $]0,+\infty[$.

- في حال $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = 0 \qquad ; \qquad \left(\lim_{x\to 0^+} a\ln x = -\infty\ , \quad \boxed{a > 0}\ \right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = +\infty \qquad ; \qquad \left(\lim_{x\to +\infty} a\ln x = +\infty\ , \quad \boxed{a > 0}\ \right)$$

- في حال $a < 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = +\infty \qquad ; \qquad \left(\lim_{x\to 0^+} a\ln x = +\infty\ , \quad \boxed{a < 0}\ \right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = 0 \qquad ; \qquad \left(\lim_{x\to +\infty} a\ln x = -\infty\ , \quad \boxed{a < 0}\ \right)$$

وجدنا في حالة $a > 0$ ان : $\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = 0$

والتابع P_a في هذه الحالة يكون متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$ و منه فإن :

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = P_a(0) = 0$$

ومنه يتحقق شرط الاستمرار اي التابع P_a معرف و مستمر على المجال $[0,+\infty[$

3) اثبت ان P_a اشتقاقي على $]0,+\infty[$ و أن $\grave{P}_a = a\,P_{a-1}$.

$P_a(x) = e^{a\ln x}$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ، لأن التابع $a\ln x$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ، و

$$P_a(x) = x^a$$
$$\grave{P}_a(x) = a\,x^{a-1} = a\,P_{a-1}(x)$$
$$\grave{P}_a = a\,P_{a-1}$$

4) نفترض $0 < a < 1$ و اننا عرفنا في هذه الحالة $P_a(0) = 0$ احسب نهاية نسبة التغير $x \mapsto T(x) = \frac{P_a(x)-P_a(0)}{x}$ عند الصفر ، ماذا تستنتج؟

$$T(x) = \frac{P_a(x) - P_a(0)}{x} = \frac{x^a - 0}{x} = x^{a-1} = e^{(a-1)\ln}$$

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = +\infty \ ; \ \left(\lim_{x\to 0^+} (a-1)\ln x = +\infty\ , 0 < a < 1\ \right)$$

اي نستنتج ان التابع P_a غير اشتقاقي عند الصفر ، في حالة $0 < a < 1$

5) اعد السؤال السابق في حال فرضنا ان $a > 1$
اعتماداً على ما حصلنا عليه سابقاً :

$$\lim_{x\to0^+} T(x) = \lim_{x\to0^+} e^{(a-1)\ln} = 0 \in R \; ; \quad \left(\lim_{x\to0^+}(a-1)\ln x = -\infty \, , \boxed{a>1}\right)$$

ومنه P_a اشتقاقي عند الصفر في حالة $a > 1$

6) اثبت ان $P_a \circ P_B = P_{a.B}$

لدينا :

$$P_B(x) = x^B \quad , \quad P_a(x) = x^a$$

$$(P_a \circ P_B)(x) = P_a(P_B(x)) = (x^B)^a = x^{a.B} = P_{a.B}$$

ونلاحظ ان $P_a \circ P_B$ و $P_{a.B}$ معرف على $]0,+\infty[$ و بالتالي فإن :

$$(P_a \circ P_B)(x) = P_{a.B}(x)$$

7) مقارنة تابع القوة بالتابعين الأسي و اللوغاريتمي .

1. اثبت انه في حالة $a > 0$ يكون $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0$ و $\lim_{x\to0} x^a \ln x = 0$?

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{a\ln x}{x^a}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln x^a}{x^a}\right) = \frac{1}{a}.0 = 0$$

$$\lim_{x\to0} x^a \ln x = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{a}x^a . a\ln x\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{a}x^a . \ln x^a\right) = \frac{1}{a}.0 = 0$$

2. اثبت في حالة $a > 0$ يكون $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0$

$$\frac{e^x}{x^a} = \frac{e^x}{e^{a\ln x}} = e^{x-a\ln x} = e^{x\left(1-a\frac{\ln x}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-a\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty$$

$$x^a e^{-x} = e^{a\ln x}.e^{-x} = e^{a\ln x-} = e^{x\left(a\frac{\ln x}{x}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^a.e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(a\frac{\ln}{x}-1\right)} = 0 \; ; \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{حيث} \quad \lim_{x\to+\infty} x\left(a\frac{\ln x}{x}-1\right) = -\infty\right)$$

---

⑭ حل كلاً من المعادلات او المتراجحات الآتية:

$\boxed{1}$ $\frac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$

شرط الحل : $e^x - 1 \neq 0$

$e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D = R\backslash\{0\}$

$e^{-x} - 1 = -2e^x + 2$

$2e^x + e^{-x} - 3 = 0$

$2e^{2x} + 1 - 3e^x = 0$ نضرب بـ (e^x) :

$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1$

اما $e^x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2}$

او $e^x = \frac{3+1}{4} = 1 \Rightarrow x = 0 \quad \notin D$ (مرفوض)

$\boxed{2}$ $4e^{2x} + e^{-2x} \leq 5$

نضرب بـ (e^{2x}) : $4e^{4x} + 1 \leq 5e^{2x}$

$4e^{4x} - 5e^{2x} + 1 \leq 0$

$4e^{4x} - 5e^{2x} + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 4(4)(1) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

اما $e^{2x} = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$

$2x = \ln\frac{1}{4}$

$2x = -\ln 4$

$x = -\frac{1}{2}\ln 4 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2}$

او $e^{2x} = \frac{5+3}{8} = 1$

$2x = \ln 1$

$2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

رؤية شاملة في التابع الأسي

3 $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

$e^{x+1}(e^{2x}+4e^x-5)=0$

$e^{x+1}(e^x+5)(e^x-1)=0$

إما $e^{x+1}=0$ (مرفوض)

أو $e^x=-5$ (مرفوض)

أو $e^x=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

4 $e^{2x}-3ee^x+2e^2=0$

$e^{2x}-3e\,.e^x+2e^2=0$

$(e^x-2e)(e^x-e)=0$

إما $e^x=2e \Rightarrow \boxed{x=\ln(2e)}$

او $e^x=e \Rightarrow \boxed{x=1}$

5 $e^x+\frac{e}{e^x}=1+e$

نضرب بـ (e^x) :

$e^{2x}+e=e^x+e\,.e^x$

$e^{2x}-e^x-e\,.e^x+e=0$

(لنحاول تحليلها باستخدام التجميع لفئات)

$e^x(e^x-1)-e(e^x-1)=0$

$(e^x-1)(e^x-e)=0$

إما $e^x=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

او $e^x=e \Rightarrow \boxed{x=1}$

6 $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+2}$

$e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}-e^{x+2}=0$

$e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}-e^2\,.e^x=0$

$e^x\left[\underbrace{e^{2x}-(e^2-1)e^x-e^2}\right]=0$

$e^x(e^x-e^2)(e^x+1)=0$

إما $e^x=0$ (مرفوض)

او $e^x=e^2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

او $e^x=-1$ (مرفوض)

7 $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}<\frac{e^x-2}{e^x+2}$

$(e^x-1)(e^x+2)<(e^{2x}+1)(e^x-2)$

$e^{2x}+e^x-2<e^{3x}-2e^{2x}+e^x-2$

$e^{3x}-3e^{2x}>0$

$e^{2x}(e^x-3)>0 \quad \div(e^{2x})$

$e^x-3>0$

$e^x>3$

$x>\ln 3$

$S=]\ln 3,+\infty[$

---

⑮ في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$(1)\quad \begin{cases} e^x-\frac{1}{e}e^y=1 & ① \\ 2e^x+e^y=4+e & ② \end{cases}$$

نضرب المعادلة ① بالعدد -2 ثم نجمع المعادلة الناتجة مع ② :

$$\begin{cases} -2e^x+\frac{2}{e}\,e^y=-2 \\ + \\ 2e^x+e^y\ =4+e \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{e}+1\right)e^y=2+e$$

$$\left(\frac{2+e}{e}\right)e^y=2+e \qquad \div(2+e)$$

$$\frac{1}{e}\,.e^y=1$$

$$e^y=e \Rightarrow \boxed{y=1}$$

نعوض في المعادلة ① :

$$e^x-\frac{1}{e}\,.\cancel{e}=1 \Rightarrow e^x=2\ :\ \boxed{x=\ln 2}$$

$$(2)\quad \begin{cases} e^{4x}e^{y} = \frac{1}{e^{2}} \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{4x+y} = e^{-2} \\ x\,.\,y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = -2 & ① \\ x\,.\,y = -2 & ② \end{cases}$$

من ① نجد ان:

$$y = -2 - 4x \quad (*)$$

نعوض (*) في المعادلة ② :

$$x(-2-4x) = -2$$
$$-2x - 4x^{2} = -2$$
$$4x^{2} + 2x - 2 = 0$$
$$2x^{2} + x - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

إما $x_1 = \frac{-1-3}{4} \Rightarrow \boxed{x = -1} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} y_1 = 2$

او $x_2 = \frac{-1+3}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} y_2 = -4$

$$(3)\quad \begin{cases} x + y = 1 & ① \\ 3e^{x} - e^{y+3} - 2e^{2} = 0 & ② \end{cases}$$

المعادلة ① نجد ان:

$$y = 1 - x \quad (*)$$

نعوض (*) في المعادلة ② :

$$3e^{x} - e^{-x+4} - 2e^{2} = 0 \quad (e^{x}) \text{ نضرب بـ}$$
$$3e^{2x} - e^{4} - 2e^{2}e^{x} = 0$$
$$3e^{2x} - 2e^{2}\,.\,e^{x} - e^{4} = 0$$
$$\Delta = 4e^{4} - 4(3)(-e^{4}) = 16e^{4}$$
$$\sqrt{\Delta} = 4e^{2}$$

إما $e^{x} = \frac{2e^{2} - 4e^{2}}{6} = \frac{-1}{3}e^{2}$ (مرفوض)

او $e^{x} = \frac{2e^{2} + 4e^{2}}{6} = e^{2}$

$e^{x} = e^{2} \Rightarrow \boxed{x = 2} \xrightarrow{\text{نعوض في*}} \boxed{y = -1}$

C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

a بين ان التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم C.

- $x \in R : -x \in R$ محقق
- $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -f(x)$ محقق

تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

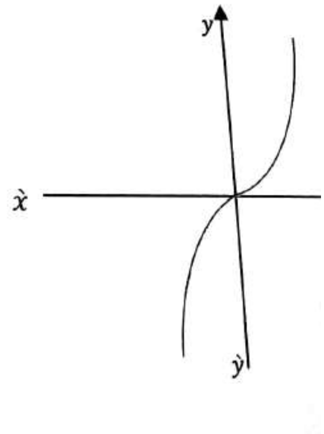
$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\acute{f}(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

نقطة مساعدة

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$(0,0)$



معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d

$$\left.\begin{aligned} \acute{f}(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \\ m = \acute{f}(0) &= \frac{1}{2}(e^{0} + e^{0}) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{d:\ y = x}$$

دراسة الوضع النسبي :

$f(x) - y_d = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$

نفرض أن:

$$g(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x} - 2x]$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = ?$ $+\infty - \infty$ عدم تعيين

$g(x) = \frac{e^x}{2}\left(1 - \frac{e^{-x}}{e^x} - \frac{2x}{e^x}\right)$

$g(x) = \frac{e^x}{2}\left(1 - e^{-2x} - 2\frac{x}{e^x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(1) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = ?$ $-\infty + \infty$ عدم تعيين

$g(x) = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{e^x}{e^{-x}} - 1 - \frac{2x}{e^{-x}}\right)$

$g(x) = \frac{e^{-x}}{2}(e^{2x} - 1 - 2xe^x)$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty(-1) = -\infty$

$$\dot{g}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{e^x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-x}(e^{2x} - 2e^x + 1) = \frac{1}{2}e^{-x}(e^x - 1)^2$$
$$\dot{g}(x) = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0$$
$$e^x - 1 = 0$$
$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \ : g(x) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dot{g}(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
الوضع النسبي		C تحت d	$(0,0)$	C فوق d	

2) a) ليكن m عدداً حقيقياً: أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في R ، ليكن α هذا الحل.

f مستمر ومتزايد تماماً على R
$m \in f(R) = R$

إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في R وليكن α بحيث $f(\alpha) = m$

b) اثبت ان المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$ ثم استنتج أن $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

$$f(x) = m$$
$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$$
$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2m$$

نضرب بـ (e^x) :

$$e^{2x} - 1 = 2m.e^x$$
$$e^{2x} - 2m.e^x - 1 = 0$$
$$\Delta = 4m^2 - 4(1)(-1) = 4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1)$$
$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

إما $e^x = \frac{2m + 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m + \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow \boxed{x = \ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right) = \alpha}$

أو $e^x = \frac{2m - 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m - \sqrt{m^2 + 1} < 0$ (مرفوض)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{0\}$ وفق: $.f(x) = e^x + \ln|x|$

وليكن g التابع المعرف على R وفق $.g(x) = xe^x + 1$

1) ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $.R \setminus \{0\}$

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\acute{g}(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$\acute{g}(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1} \ : g(-1) = -e^{-1} + 1 = \frac{-1+e}{e}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\acute{g}(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	$\frac{-1+e}{e}$	↗	$+\infty$

نلاحظ من جدول التغيرات انه اياً يكن $x \in R$: $g(x) \geq \frac{-1+e}{e}$ وبالتالي $g(x) > 0$

إذاً كانت : $\frac{g(x)}{x} > 0 \quad ; x \in]0, +\infty[$ ، إذاً كانت : $\frac{g(x)}{x} < 0 \quad ; x \in]-\infty, 0[$

2) ادرس تغيرات f وارسم $.C$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= R\setminus\{0\}$

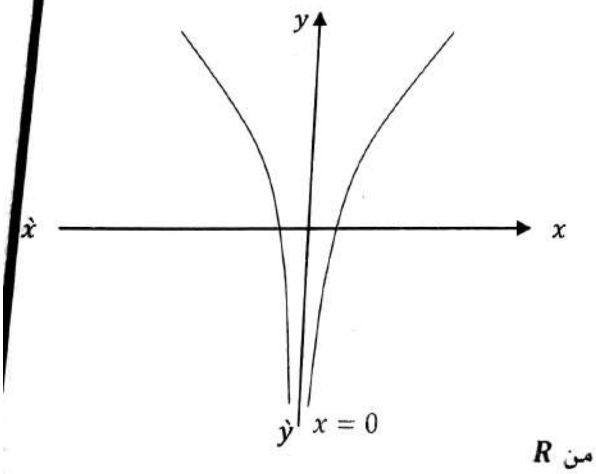
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\acute{y}$ عند $-\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على $y\acute{y}$ عند $+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \ln(x) & ; x > 0 \\ e^x + \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases} \quad , \quad \acute{f}(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ e^x + \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$\acute{f}(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x+1}{x} = \frac{g(x)}{x}$ (درسنا إشارتها في الطلب 1)



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

بت أن المعادلة $\acute{f}(x) = m$ تقبل حلين مختلفين أياً يكن m من R

مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty, 0[$

$m \in f(]-\infty, 0[) =$

إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0[$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$
$m \in f(]0,+\infty[) = R$
إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين في $R\backslash\{0\}$

---

⑱ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

1) تحقق من كلٍ من المقولات الآتية:

a) f معرف على R

شرط اللوغاريتم $e^{2x} - e^x + 1 > 0$

نفرض $e^{2x} - e^x + 1 = 0$

(مستحيلة الحل) ، $\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$

إذاً فهي توافق إشارة e^{2x} اي $(e^{2x} - e^x + 1 > 0)$ محققة دوماً) إذاً $D = R$

b) يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})]$$
$$f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

c) المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C.

$$f(x) - y_d = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$
$$= \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_d) = ?$ $\quad -\infty + \infty$ حالة عدم تعيين

$$f(x) - y_d = \ln[e^{-x}(e^x - 1 + e^{-x})]$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب مائل عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

وبالتالي d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$.

d) الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

المماس يوازي محور الفواصل $\Leftarrow m = 0$.

$$\grave{f}(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$ f اشتقاقي على R

نبحث عن نقطة x_0 بحيث: $\grave{f}(x_0) = m = 0$

$$\grave{f}(x_0) = 0 \Longrightarrow 2e^{2x_0} - e^{x_0} = 0$$
$$e^{x_0}(2e^{x_0} - 1) = 0$$

$$2e^{x_0} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x_0} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_0 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$:f(-\ln 2) = \ln\left(e^{2(-\ln 2)} - e^{-\ln 2} + 1\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{e^{2\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \qquad \Longrightarrow A\left(-\ln 2, \ln\frac{3}{4}\right)$$

الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل معادلته : $\Delta: y_\Delta = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $+\infty - \infty$ حصلنا على حالة عدم تعيين

$f(x) = \ln\left[e^x\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

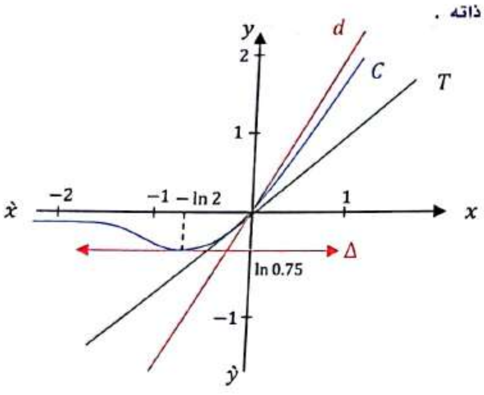
$\grave{f}(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \Rightarrow \grave{f}(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2} \ : f(-\ln 2) = \ln\frac{3}{4}$ (وذلك بالاستفادة من الطلب السابق)

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\ln\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

3) اكتب معادلة المماس **T** للخط البياني **C** في النقطة التي فاصلتها **0** منه .

$f(0) = 0 \ : O(0,0) \ , \qquad m = \grave{f}(0) = \frac{2-1}{1} = 1 \ \Rightarrow T{:}\, y_T = x$

4) ارسم كلاً من **d** و **Δ** و **T** ، ثم ارسم **C** في المعلم ذاته .



* $d{:}\, y_d = 2x$ (مقارب)

x	0	1
y	0	2
	$(0,0)$	$(1,2)$

* يوازي محور $x\grave{x}$ $\quad \Delta{:}\, y_\Delta = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

* $T{:}\, y_T = x$ (مماس)

x	0	1
y	0	1
	$(0,0)$	$(1,1)$

---

⑲ ليكن f التابع المعرف على المجال R_+^* وفق $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

1) ادرس تغيرات $g{:}\, x \to e^x.\grave{f}(x)$

f اشتقاقي على R_+^* :

$$\grave{f}(x) = -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{1}{x}e^{-x}$$

$$\grave{f}(x) = e^{-x}\left[-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right]$$

$$g(x) = e^x.\grave{f}(x) = e^x.e^{-x}\left(-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}}$$

g معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$: $+\infty$ عند $y\grave{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\grave{g}(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0 \quad , \quad x \in]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$\grave{g}(x)$	▨	$-$	
$g(x)$	▨	$+\infty \searrow 0 \searrow$	$-\infty$

2) استنتج دراسة تغيرات f.

التابع g مستمر و متناقص تماماً و ينتقل من قيمة موجبة $(+\infty)$ إلى قيمة سالبة $(-\infty)$

و بالتالي يمر من الصفر من اجل قيمة $x = \alpha$

وبما ان $\grave{f}(x) = \frac{g(x)}{e^x} > 0$ في المجال $]0,\alpha[$ ويكون فيه f متزايد تماماً .

وايضاً $\grave{f}(x) = \frac{g(x)}{e^x} < 0$ في المجال $]\alpha,+\infty[$ ويكون فيه f متناقص تماماً .

f معرف على $]0,+\infty[$

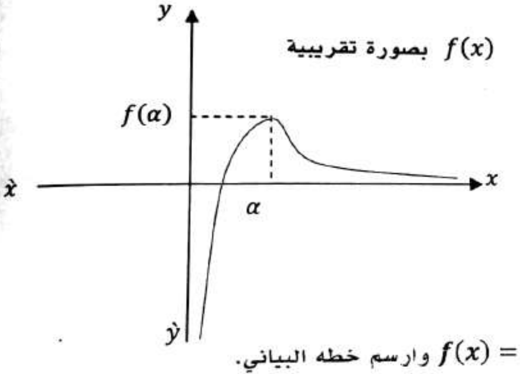
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty \implies$ $x = 0$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$ عند الـ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $0.\infty$

$$f(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{x}{e^x}\left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ [redacted] $= 0 \implies$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$f(x)$ بصورة تقريبية



x	0		α		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

⑳ ادرس تغيرات التابع f المعرف على $R \setminus \{1\}$ بالصيغة $f(x) = \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

f معرف واشتقاقي على $R \setminus \{1\}$: $f(x) = e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} \implies$ $y = \frac{1}{e}$ مقارب افقي // $x\grave{x}$ عند $-\infty$

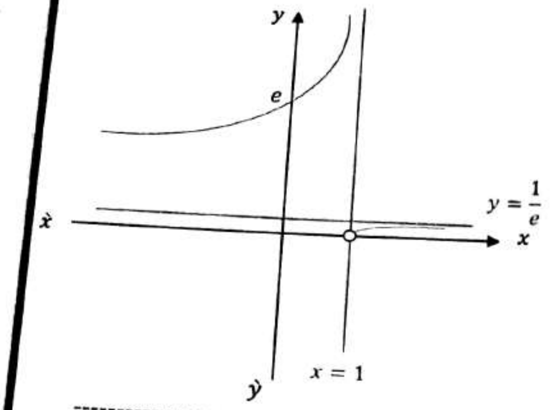
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} \implies$ $y = \frac{1}{e}$ مقارب افقي // $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty \implies$ $x = 1$ مقارب شاقولي // $y\grave{y}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0$: لاحظ $(1,0)$ نقطة مقاربة (على الشكل نرسمها مفرغة)

$$\grave{f}(x) = \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} \,.\, e^{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)^2} \,.\, e^{\frac{1+x}{1-x}} > 0$$

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$		▨		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$	▨	0	↗	$\frac{1}{e}$



نقطة مساعدة :

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$f(0) = e$

نقطة التقاطع مع محور $y\grave{y}$ هي : $(0, e)$

㉑ ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$

1) a) جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

b) اثبت ان $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

$$= \ln\left[e^{-x}\left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)\right] = \ln[e^{-x}(e^x + 1)]$$

$$= \ln e^{-x} + \ln(1 + e^x) = -x + \ln(e^x + 1)$$

c) استنتج أن الخط C يقبل مقارباً مائلاً وليكن d في جوار $-\infty$.

بفرض المستقيم $d: y_d = -x$ ومنه:

$$f(x) - y_d = -x + \ln(1 + e^x) + x = \ln(1 + e^x)$$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_d) = \ln 1 = 0 \Rightarrow$ $d: y_d = -x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم في معلم واحد d ثم C

f معرف واشتقاقي على R:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$\grave{f}(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} < 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

$d: y_d = -x$

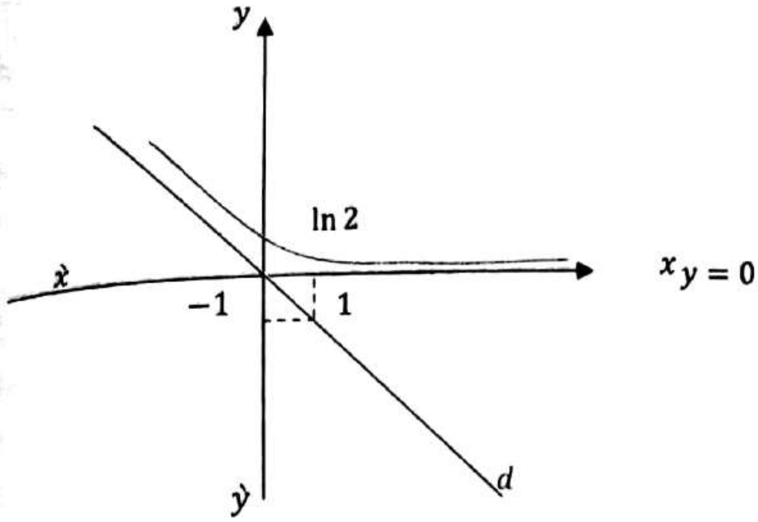
x	0	1
y	0	-1
	$(0,0)$	$(1,1)$

نقطة مساعدة

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$f(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln 2$

نقطة التقاطع مع محور $y\grave{y}$ هي: $(0, \ln 2)$



3) نرمز إلى نقاط C التي فواصلها (0) و (1) و (-1) على التوالي بالرموز D, B, A

أثبت ان مماس C في A يوازي المستقيم (BD).

مماس الخط C في A يوازي المستقيم BD اي ان : $m_A = m_{BD}$

أولاً لنوجد إحداثيات النقاط D, B, A

$$x_A = 0 : f(0) = \ln(2) \quad : \boxed{A(0, \ln 2)}$$

$$x_B = 1 : f(1) = \ln(e^{-1} + 1) = \ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) = \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$$

$$= \ln(1 + e) - \ln e = \ln(1 + e) - 1 \quad : \boxed{B(1, \ln(e+1) - 1)}$$

$$x_D = -1 : f(-1) = \ln(e + 1) \quad : \boxed{D\,(-1, \ln(e+1)\,)}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

$$m_A = \grave{f}(x_A) = \grave{f}(0) = \frac{-e^0}{e^0 + 1} = \frac{-1}{2}$$

$$m_{BD} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D}$$

$$= \frac{\ln(e+1) - 1 - \ln(e+1)}{1 - (-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$m_A = m_{BD} = \frac{-1}{2}$$

إذاً مماس الخط C في A يوازي BD

㉒ محل هندسي:

تامل التابعين: $f_1 : x \to e^x$, $f_2 : x \to e^{-x}$ وخطاهما البيانيان C_2, C_1 في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

يقطع المستقيم المرسوم من $A(m, o)$ موازياً محور التراتيب الخطين C_2, C_1 في N, M بالترتيب.

1) ارسم C_2, C_1.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\grave{f_1}(x)$	$+$
$f_1(x)$	$0 \nearrow +\infty$

* $f_1(x) = e^x > 0$

f_2 ، f_1 معرفان على R

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$

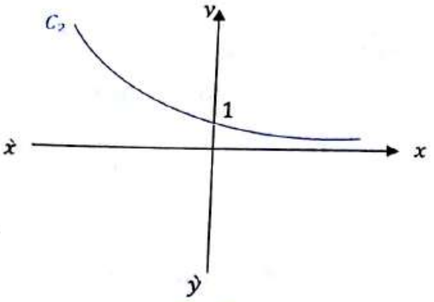
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

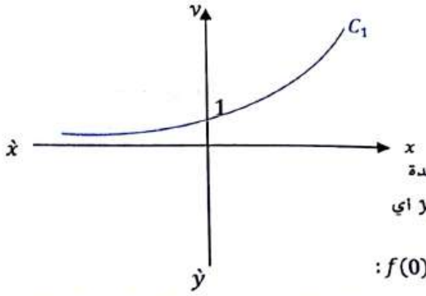
$\grave{f}(x) = e^x > 0$

** $f_2(x) = e^{-x} > 0$

نلاحظ ان : $f_1(x) = f_2(-x)$

اي : C_2 نظير C_1 بالنسبة لـ $y\grave{y}$





نقطة مساعدة

C_1 يقطع $y\grave{y}$ اي

$x = 0$

$: f(0) = 1 \Rightarrow (0,1)$

2) نرمز بالرمزين T_2,T_1 إلى مماسي C_2,C_1 في N,M بالترتيب، اكتب معادلة لكل من T_2,T_1

واستنتج ان T_2,T_1 متعامدان

بما ان المستقيم المار من $A(m,0)$ يقطع C_2,C_1 فإن فاصلتي كل N,M هي m ومنه:

$x_N = m$	$x_M = m$
$f_2(m) = e^{-m}$	$f_1(m) = e^m$
$N(m, e^{-m})$	$M(m, e^m)$
$\acute{f}_2(x) = -e^{-x}$	$\acute{f}_1(x) = e^x$
$m_{T_2} = -e^{-m}$	$m_{T_1} = e^m$
$y - e^{-m} = -e^{-m}(x - m)$	$y - e^m = e^m(x - m)$
T_2: $y_{T_2} = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m}$	T_1: $y_{T_1} = e^m x - me^m + e^m$

$m_{T_1} \times m_{T_2} = (e^m) \times (-e^{-m}) = -e^0 = -1 \Rightarrow$ متعامدان T_1, T_2

3) اثبت ان إحداثيي P، نقطة تقاطع T_2,T_1 هما $\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &: y_{T_1} = e^m x - me^m + e^m \\ T_2 &: y_{T_2} = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{بالحل المشترك}$$

$$e^m x - me^m + e^m = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m}$$

$$e^m x + e^{-m}x = me^m + me^{-m} - e^m + e^{-m}$$

$$(e^m + e^{-m})x = m(e^m + e^{-m}) - (e^m - e^{-m}) \qquad \div (e^m + e^{-m})$$

$$\boxed{x = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}}$$

نعوض في T_1 :

$$y = e^m\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}\right) - me^m + e^m$$

$$= me^m - \frac{e^{2m} - 1}{e^m + e^{-m}} - me^m + e^m$$

$$= -\frac{e^{2m} - 1}{e^m + e^{-m}} + e^m = \frac{-e^{2m} + 1 + e^{2m} + 1}{e^m + e^{-m}} = \frac{2}{e^m + e^{-m}}$$

$$P\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$$

4) لتكن النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

a) احسب بدلالة m إحداثيي النقطة I.

$$M(m,e^m) \quad , \quad N(m,e^{-m})$$

$$I\left(\frac{m+m}{2},\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right) \Rightarrow I\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$$

b) جد Γ المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول m في R.

لاحظ ان النقطة I إحداثييها $\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$ فمعادلة المحل الهندسي Γ للنقطة I هي: $y=\frac{e^m+e^{-m}}{2}$

اي ان Γ هو الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R وفق: $f_I(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

c) ارسم مجموعة النقاط I في المعلم الذي رسمت فيه الخطين C_2 , C_1 .

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$: D=R$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

f معرف واشتقاقي على R

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \\ f'(x)&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=0$$

$$e^x-e^{-x}=0$$

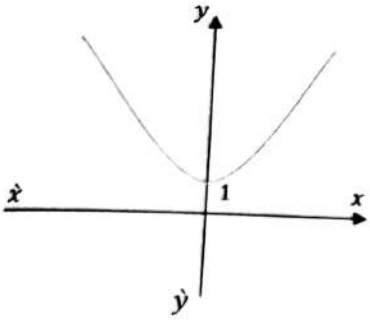
$$e^x=e^{-x} \Rightarrow x=0 \ : \ f(0)=1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

لسهولة الرسم:

سنرسم نقط المحل الهندسي للنقطة I فقط

ورسمنا سابقاً C_2 , C_1 .



5) a) احسب بدلالة m، مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{IP}$

$$A(m,0) \quad , \quad P\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}},\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right) \quad , \quad I\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AP}=\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}-m\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}-0\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{IP}=\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}-m\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}-\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{4-(e^m+e^{-m})^2}{2(e^m+e^{-m})}\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{2(e^m+e^{-m})}\right)\vec{j}$$

b) استنتج ان المستقيم (IP) مماس للخط Γ في النقطة I وان الطول AP ثابت.

$$* \quad m_{IP} = \frac{y_P - y_I}{x_P - x_I} = \frac{\frac{2}{e^m+e^{-m}} - \frac{e^m+e^{-m}}{2}}{m - \frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}} - m} = \frac{\frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{2(e^m+e^{-m})}}{-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}}$$

$$m_{IP} = \frac{2 - e^{2m} - e^{-2m}}{-2(e^m - e^{-m})} = \frac{-(e^{2m} - 2 + e^{-2m})}{-2(e^m - e^{-m})} = \frac{(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m - e^{-m})} = \frac{1}{2}(e^m - e^{-m})$$

$$\boxed{m_{IP} = \frac{1}{2}(e^m - e^{-m})} \qquad ①$$

لكن $f_I(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

حيث $I\left(m, \frac{e^m + e^{-m}}{2}\right)$ ، $f'_I(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$\boxed{f'_I(m) = \frac{1}{2}(e^m - e^{-m})} \qquad ②$$

من ① و ② نجد ان: $f'_I(m) = m_{IP}$ ومنه IP مماس للخط Γ في I.

$$** \quad \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{\frac{(e^m-e^{-m})^2}{(e^m+e^{-m})^2} + \frac{4}{(e^m+e^{-m})^2}} = \sqrt{\frac{e^{2m}-2+e^{-2m}+4}{(e^m+e^{-m})^2}} = \sqrt{\frac{e^{2m}+2+e^{-2m}}{(e^m+e^{-m})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(e^m + e^{-m})^2}{(e^m + e^{-m})^2}} = \sqrt{1} = 1$$

ومنه فإن $\|\overrightarrow{AP}\| = 1$ ثابت.

ابحث عن نهاية كل من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية :

1 $u_n = \dfrac{e^{-n} + 1}{e^{-n} + 3}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

2 $u_n = \dfrac{e^{2n}}{(1 + n)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = ? \quad \frac{+\infty}{+\infty}$$

عدم تعيين

$$u_n = \frac{e^{2n}}{1 + 2n + n^2} = \frac{e^{2n}}{n^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1\right)}$$

$$= \left(\frac{e^n}{n}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\left(\frac{1}{1}\right) = +\infty$$

3 $u_n = \ln(2 + e^{-n})$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$$

4 $u_n = e^{1+\frac{-1}{n}+\frac{-1}{n^2}}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e$$

5 $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

$$u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

نفرض $\begin{cases} \frac{1}{n} = t \\ n \to +\infty \Rightarrow t \to 0 \end{cases}$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t - 1}{t}\right] = 1$$

6 $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$$

㉔ المشتق من المرتبة n:

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$

ولتكن $f^{(1)} = \acute{f}$ و $f^{(2)} = \acute{\acute{f}}$ وهكذا...... $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n \geq 1)$.

1) احسب $f^{(1)}$ و $f^{(2)}$.

$$f^{(1)}(x) = \acute{f}(x) = (2x+1).e^x + e^x(x^2+x-1)$$
$$= e^x(2x+1+x^2+x-1) = (x^2+3x)e^x$$
$$f^{(2)}(x) = \acute{\acute{f}}(x) = (2x+3).e^x + e^x(x^2+3x)$$
$$= e^x(2x+3+x^2+3x) = (x^2+5x+3)e^x$$

2) a) اثبت أن: $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ مع $a_{n+1} = a_n + 2$ و $b_{n+1} = b_n + a_n$.

لنثبت صحة الخاصة السابقة بالتدريج:

- لنثبت تحقق الخاصة من اجل $n = 1$, $n = 2$

$$n=1\begin{cases} f^{(1)}(x) = (x^2+3x)e^x = (x^2+3x+0)e^x \\ f^{(n)}(x) = (x^2+a_nx+b_n)e^x \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x) = (x^2+a_1x+b_1)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 3 \\ b_1 = 0 \end{matrix}$$

$$n=2\begin{cases} f^{(2)}(x) = (x^2+5x+3)e^x = (x^2+(3+2)x+3)e^x \\ f^{(n)}(x) = (x^2+a_nx+b_n)e^x \xrightarrow{n=2} f^{(2)}(x) = (x^2+a_2x+b_2)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_2 = 3+2 \\ b_2 = 3 = 0+3 \end{matrix}$$

لاحظ ان $a_2 = 3+2$ و $b_2 = 3 = 0+3$

$a_2 = a_1 + 2$ و $b_2 = b_1 + a_1$

ومنه $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2 \quad و \quad b_{n+1} = b_n + a_n}$

فالخاصة صحيحة من اجل $n = 1$ و $n = 2$

- نفرض ان الخاصة صحيحة من أجل n أي: $\boxed{\boxed{f^{(n)}(x) = (x^2 + a_nx + b_n)e^x}}$ صحيحة .
- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي : $\boxed{\boxed{f^{(n+1)}(x) \overset{?}{=} (x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})e^x}}$

لدينا : $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_nx + b_n)e^x$

نشتق : $\left[f^{(n)}(x)\right]' = f^{(n+1)}(x) = (2x + a_n)e^x + e^x(x^2 + a_nx + b_n)$

$$L_1 = f^{(n+1)}(x) = e^x[2x + a_n + x^2 + a_nx + b_n]$$
$$= e^x[x^2 + a_nx + 2x + a_n + b_n]$$
$$= e^x[x^2 + (a_n+2)x + (a_n+b_n)]$$
$$= e^x[x^2 + a_{n+1}\,x + b_{n+1}] = L_2$$

الخاصة صحيحة من اجل $n+1$.

الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n \geq 1$.

ستنتج أن a_n و b_n أعداد عادية .

ا أن $a_1 = 3$, $b_1 = 0$ فهما عددان طبيعيان من أجل $n = 1$

$a_2 = 5 = a_1 + 2$, $b_2 = 3 = 0 + 3 = b_1 + a_1$ فهما عددان طبيعيان من أجل $n = 2$

$a_{n+1} = a_n + 2$ مجموع عددين طبيعيين هو عدد طبيعي .

$b_{n+1} = b_n + a_n$ مجموع عددين طبيعيين هو عدد طبيعي .

مع ملاحظة أن كل عدد طبيعي هو عدد عادي .

3) في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n .

a) اثبت ان المتتالية (a_n) حسابية ، استنتج كتابة a_n بدلالة n .

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 2 \quad \text{(ثابت)}$$

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و حدها الأول $a_1 = 3$.

دستور الحد العام في المتتالية الحسابية :

$$a_n = a_m + (n-m)r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad : \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$= 3 + (n-1)(2)$$

$$= 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

$$\boxed{a_n = 2n + 1}$$

b) تحقق من ان $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$ (أياً يكن $n \geq 1$) ، ثم استنتج b_n بدلالة n

$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

و منه $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2}$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + b_{n-3}$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + b_{n-4}$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

نجد أن b_n مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية حدها الأول $a_1 = 3$ و عدد حدودها $(n-1-1+1 = n-1)$

لدينا : $a_n = 2n + 1$ ، فيكون حدها الأخير $a_{n-1} = 2(n-1) + 1$

$$= 2n - 2 + 1 = 2n - 1$$

$$b_n = S = (n-1)\left(\frac{2n-1+3}{2}\right) = (n-1)\left(\frac{2n+2}{2}\right) = (n-1)\left(\frac{2(n+1)}{2}\right) = (n-1)(n+1)$$

و منه نكتب $b_n = (n-1)(n+1)$

معادلة تفاضلية :

1) لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2\grave{y} + 3y = 0$ عين جميع حلول (E) .

$$\grave{y} = \frac{-3}{2}\ y$$

$a = \frac{-3}{2}$ حلولها : $y = f_k(x) = k.e^{\frac{-3}{2}x}$ حيث : $k \epsilon R$

(لتكن $(\grave{E})$ المعادلة التفاضلية $2\grave{y} + 3y = x^2 + 1$

a) عين كثير حدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة $(\grave{E})$.

ليكن كثير الحدود من الدرجة الثانية $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ \grave{y} = 2ax + b \end{cases}$

لدينا $2\grave{y} + 3y = x^2 + 1$

بالتعويض :

$$2(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$$

$$4ax+2b+3ax^2+3bx+3c=x^2+0x+1$$

$$3ax^2+(4a+3b)x+(2b+3c)=x^2+0x+1$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} 3a \quad =1 \rightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}} \\ 4a+3b=0 \rightarrow 4\left(\frac{1}{3}\right)+3b=0 \rightarrow \boxed{b=-\frac{4}{9}} \\ 2b+3c=1 \rightarrow 2\left(\frac{-4}{9}\right)+3c=1 \rightarrow 3c=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9} \rightarrow \boxed{c=\frac{17}{27}} \end{cases}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}}$$

b) بين انه إذا كان g حلاً للمعادلة $(\grave{E})$ كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E)

و برهن بالعكس انه إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة $(\grave{E})$.

- بما ان g هو حل للمعادلة: $(\grave{E}): 2\grave{y}+3y=x^2+1$

إذاً: $2\grave{g}+3g=x^2+1 \quad (*)$

وبما ان f هو حل للمعادلة $(\grave{E})$ ايضاً إذاً: $(**)$ $\quad 2\grave{f}+3f=x^2+1$

بطرح $(**)$ من $(*)$ طرفاً لطرف نجد:

$$2\grave{g}+3g-2\grave{f}-3f=0$$
$$2\grave{g}-2\grave{f}+3g-3f=0$$
$$2(\grave{g}-\grave{f})+3(g-f)=0$$
$$2(g-f)'+3(g-f)=0$$

اي $g-f$ هو حل للمعادلة $(E): \quad 2\grave{y}+3y=0$

- إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة $(E): \quad 2\grave{y}+3y=0$

$$2(g-f)'+3(g-f)=0$$
$$2\grave{g}-2\grave{f}+3g-3f=0$$
$$2\grave{g}+3g-(2\grave{f}+3f)=0 \qquad (*)$$

لكن f حل للمعادلة التفاضلية :

$$\grave{E}: \quad 2\grave{y}+3y=x^2+1$$
$$2\grave{f}+3f=x^2+1$$

بالتعويض في $(*)$ نجد ان:

$$2\grave{g}+3g-(x^2+1)=0$$
$$2\grave{g}+3g=x^2+1$$

و منه g حلاً للمعادلة $(\grave{E}): 2\grave{y}+3y=x^2+1$.

c) استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية $(\grave{E})$.

$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$ حلاً للمعادلة $(\grave{E})$.

$y=ke^{-\frac{3}{2}x} \; ;k\in R$ حلاً للمعادلة (E) ومنه :

$$y=k.e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27} \qquad ;k\in R$$

[illegible] نتامل المعادلة التفاضلية $(E) : \grave{y} + 3y = 2e^{-x}$

1) عين العدد a ليكون التابع $x \to ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E) .

$y = ae^{-x}$ فإن $\grave{y} = -ae^{-x}$ نعوض في المعادلة (E) :

$$-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$$

$$2ae^{-x} = 2e^{-x}$$

$(\div e^{-x} \neq 0)$ $$2a = 2 \to \boxed{a = 1}$$

2) ليكن العدد a الذي وجدناه في ① و ليكن g تابعاً اشتقاقياً على R نعرف التابع $h: x \to g(x) - ae^{-x}$

اثبت ان التابع g حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا و فقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية $(F) : \grave{y} + 3y = 0$

بما ان $a = 1$ إذاً $h(x) = g(x) - e^{-x}$ و منه $g(x) = h(x) + e^{-x}$

يجب ان نثبت ان:

$$\boxed{g(x) = h(x) + e^{-x} \text{ حل للمعادلة } (E): \grave{y} + 3y = 2e^{-x} \Leftrightarrow h(x) = g(x) - e^{-x} \text{ حل للمعادلة } (F): \grave{y} + 3y = 0}$$

اولاً : بفرض $g(x) = h(x) + e^{-x}$ حل للمعادلة $(E) : \grave{y} + 3y = 2e^{-x}$

$\grave{g}(x) = \grave{h}(x) - e^{-x}$ نعوض في المعادلة :

$$\grave{y} + 3y = 2e^{-x}$$

$$\grave{h}(x) - e^{-x} + 3(h(x) + e^{-x}) = 2e^{-x}$$

$$\grave{h}(x) - e^{-x} + 3h(x) + 3e^{-x} = 2e^{-x}$$

$$\grave{h}(x) + 3h(x) = 0$$

إذاً $h(x)$ حل للمعادلة $(F) : \grave{y} + 3y = 0$.

ثانياً : $h(x) = g(x) - e^{-x}$ حل للمعادلة $(F): \grave{y} + 3y = 0$:

$\grave{h}(x) = \grave{g}(x) + e^{-x}$ نعوض في المعادلة :

$$\grave{y} + 3y = 0$$

$$\grave{g}(x) + e^{-x} + 3(g(x) - e^{-x}) = 0$$

$$\grave{g}(x) + e^{-x} + 3g(x) - 3e^{-x} = 0$$

$$\grave{g}(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$$

إذاً $g(x)$ حل للمعادلة التفاضلية $(E): \grave{y} + 3y = 2e^{-x}$.

3) حل المعادلة التفاضلية (F) و استنتج مجموعة حلول (E) .

$$(F): \quad \grave{y} + 3y = 0$$

$$\grave{y} = -3y$$

$: a = -3$

حلها :

$$f_k(x) = k.e^{-3x} \quad ; \quad k \in R$$

إذاً (F) $$h(x) = ke^{-3x}$$

- وبما ان $h(x)$ هو حل للمعادلة $g(x) = h(x) + e^{-x}$

لكن

وهي مجموعة حلول (E) المطلوبة : $$g(x) = ke^{-3x} + e^{-x}$$

ليكن n عدداً طبيعياً اكبر او يساوي 2 .

1) a) حل المعادلة التفاضلية (1) الاتية :

$$\grave{y} - \frac{1}{n}y = 0$$

$$\grave{y} = \frac{1}{n}y, \quad a = \frac{1}{n}$$

حلها : $y = f_k(x) = ke^{\frac{1}{n}x}$ حيث : $k \in R$

b) نتامل المعادلة التفاضلية (2) الآتية : $\dot{y} - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

عين a ، b ليكون التابع $x \to g(x) = ax + b$ المعرف على R حلاً للمعادلة (2) .

$\begin{cases} g(x) = ax + b \\ \dot{g}(x) = a \end{cases}$ نعوض في المعادلة التفاضلية

$$a - \frac{1}{n}(ax + b) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$$

$$a - \frac{a}{n}x - \frac{b}{n} = \frac{-x}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{-a}{n}x + \left(a - \frac{b}{n}\right) = \frac{-1}{n(n+1)}x - \frac{1}{n(n+1)}$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} \frac{-a}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{n+1}} \\ \\ a - \frac{b}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{b}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} \end{cases}$$

$$\frac{-b}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+1}$$

$$b = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

إذاً $g(x) = \frac{1}{n+1}x + 1$ هو حل للمعادلة (2)

c) 1. اثبت انه ليكون تابع h معرف على R حلاً للمعادلة (2) يلزم و يكفي ان يكون $h - g$ حلاً للمعادلة (1)

$$\boxed{\hbar \text{ حلاً للمعادلة } (2): \dot{y} - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \hbar - g \text{ حلاً للمعادلة } (1): \dot{y} - \frac{1}{n}y = 0}$$

أولاً : $\hbar$ حلاً للمعادلة (2) اي :

$$\dot{\hbar} - \frac{1}{n}\hbar = -\frac{x+1}{n(n+1)} \qquad (*)$$

لكن من الطلب (b) نجد أن $g(x)$ حلاً للمعادلة (2) فإن :

$$\dot{g} - \frac{1}{n}g = -\frac{x+1}{n(n+1)} \qquad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\dot{\hbar} - \frac{1}{n}\hbar = \dot{g} - \frac{1}{n}g$$

$$\dot{\hbar} - \dot{g} - \frac{1}{n}\hbar + \frac{1}{n}g = 0$$

$$\left(\dot{\hbar} - \dot{g}\right) - \frac{1}{n}(\hbar - g) = 0$$

$$(\hbar - g)' - \frac{1}{n}(\hbar - g) = 0$$

ثانياً : $\hbar - g$ حلاً للمعادلة (1) فإن :

$$(\hbar - g)' - \frac{1}{n}(\hbar - g) = 0$$

$$\dot{\hbar} - \dot{g} - \frac{1}{n}\hbar + \frac{1}{n}g = 0$$

$$\dot{\hbar} - \frac{1}{n}\hbar = \dot{g} - \frac{1}{n}g \qquad (\dot{*})$$

من الطلب (b) وجدنا أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (2) أي :

$$\dot{g} - \frac{1}{n}g = -\frac{x+1}{n(n+1)}$$

نعوض في $(\dot{*})$:

$$\dot{\hbar} - \frac{1}{n}\hbar = -\frac{x+1}{n(n+1)}$$

إذاً $\hbar$ حلاً للمعادلة التفاضلية (2)

إذاً $\hbar - g$ حلاً للمعادلة التفاضلية (1) .

2. استنتج من ذلك حلول المعادلة (2) .

$g(x) = \frac{1}{n+1}x + 1$ حل للمعادلة التفاضلية (2) .

$y = ke^{\frac{1}{n}x}$ حل للمعادلة التفاضلية (1) .

y حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا كان $y - g$ هو حل للمعادلة التفاضلية (1):

$$y - g(x) = ke^{\frac{1}{n}x} \qquad : k \in R$$

$$y = ke^{\frac{1}{n}x} + g(x)$$

$$\boxed{y = ke^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1}x + 1} \qquad (I)$$

3. و من بينها عيّن تلك الحلول f التي تحقق $f(0) = 0$

نعوض في (I) :

$$0 = ke^{0} + 0 + 1$$

$$k = -1$$

$$\boxed{y = -e^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1} .x + 1}$$

2) نتامل التابع f_n المعرف على R بالعلاقة : $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$

a) ادرس إشارة $\grave{f}_n(x)$ واستنتج جدول تغيرات التابع f_n

اثبت على الخصوص أن التابع f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة يطلب تعيينها

$f_n(x)$ معرف و مستمر و اشتقاقي على R :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty \qquad (n \geq 2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = ? \qquad +\infty - \infty \text{ عدم تعيين}$$

$$f_n(x) = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{n.\frac{x}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty\left(0 + \frac{1}{n+1} - \infty\right) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \grave{f}_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}} \\ \grave{f}_n(x) = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n+1} \\ e^{\frac{x}{n}} = \frac{n}{n+1} \end{array}$$

$$\ln e^{\frac{x}{n}} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow \boxed{x = n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$f_n\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = 1 + \frac{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n+1} - e^{\frac{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n}}$$

$$= 1 + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - e^{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= 1 + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

x	$-\infty$		$n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

$$M\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\ \text{و}\ \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$$

) اثبت ان الخط البياني C_n للتابع f_n يقبل مقارباً مائلاً d_n ، اعط معادلة للمستقيم d_n

ارسم كلاً من d_2 و C_2 .

فرض لدينا المستقيم $d_n : y_{d_n} = 1+\frac{x}{n+1}$ و منه :

$$f_n(x) - y_{d_n} = 1+\frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}} - \left(1+\frac{x}{n+1}\right) = -e^{\frac{x}{n}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f_n(x)-y_{d_n}\right)=0 \quad \Rightarrow$ $d_n : y = 1+\frac{x}{n+1}$ مقارب مائل للخط C_n عند $-\infty$

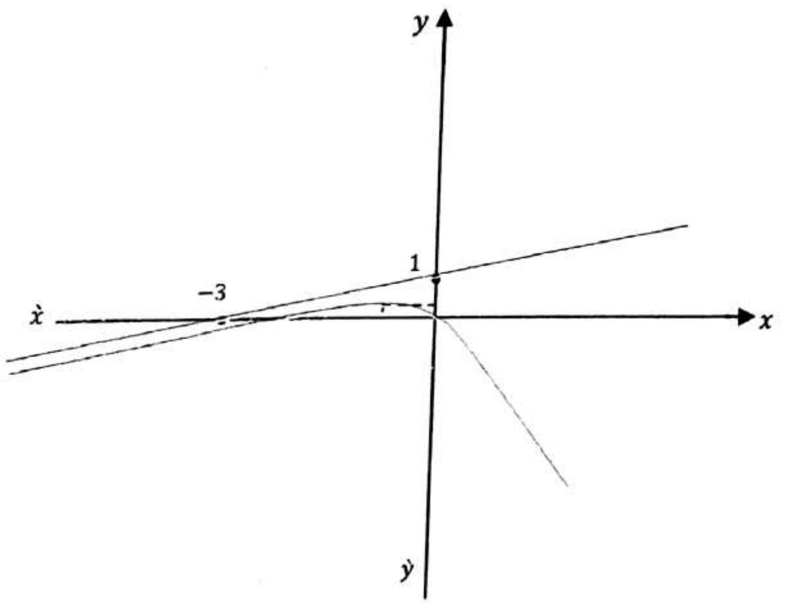
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-y_{d_n}\right)=-\infty \quad \Rightarrow$ d_n ليس مقارب مائل لـ C_n عند $+\infty$

<u>**الرسم**</u> : من اجل $n = 2$:

$$\overbrace{d_2 : y_{d_2} = 1+\frac{1}{3}x \quad , \quad f_2(x) = 1+\frac{1}{3}x - e^{\frac{1}{2}x}}$$

x	$-\infty$		$2\ln\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'_2(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

x	0	-3
y	1	0
	$(0,1)$	$(-3,0)$



Scanned by CamScanner

التوابع الأصلية

تعريف التابع الأصلي :

بفرض f تابع معرف على المجال $J \subseteq R$ نقول إن F تابع اصلي على المجال I للتابع f إذا وفقط إذا تحقق:

- ♥ التابع F اشتقاقي على المجال I.
- ♥ اياً كان $x \in I$ فإن $\grave{F}(x) = f(x)$.

مثال: ليكن لدينا التابعان المعرفان على R وفق :

$$f(x) = 3x^2 - x + 4 \qquad F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x + 2$$

نلاحظ ان $F(x)$ اشتقاقي على R ويحقق $\grave{F}(x) = 3x^2 - x + 4 = f(x)$ ومنه $F(x)$ تابع اصلي لـ f

قواعد في التوابع الأصلية:

$\boxed{1}$ $f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = c$

$\boxed{2}$ $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{3}$ $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1$ $\quad \frac{x^3}{3}$

$\boxed{4}$ $f(x) = (ax+b)^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1 \ , a \neq 0$

$\boxed{5}$ $f(x) = \grave{H}(x) . H^r(x) \Rightarrow F(x) = \dfrac{H^{r+1}(x)}{r+1} + c \quad : r \neq -1$

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{\grave{g}(x)}{g(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|g(x)| + c \quad : g(x) \neq 0$

$\boxed{7}$ $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$

$\boxed{8}$ $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a} . e^{ax+b} + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{9}$ $f(x) = \grave{g}(x)\, e^{g(x)} \Rightarrow F(x) = e^{g(x)} + c$

$\boxed{10}$ $f(x) = \sin(ax+b) \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{a} . \cos(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{11}$ $f(x) = \cos(ax+b) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a} . \sin(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

[redacted]

تذكرة : ♥ $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ ♥ $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\boxed{12}$ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)} = 1 + \tan^2(ax+b) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a} . \tan(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

$\boxed{13}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)} = 1 + \cot^2(ax+b) \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{a} . \cot(ax+b) + c \quad : a \neq 0$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

ميز بين القاعدتين

$\dfrac{\grave{g}(x)}{g(x)}$	$\grave{H}(x) \ . H^r(x)$
يجب ان يكون اس $g(x)$ يساوي (1).	يجب ان يكون اس $H(x)$ يساوي $r \in R/\{-1\}$

تمرين شامل: اوجد التابع الأصلي لكل تابع مما يلي :

القاعدة : $:n \neq -1$ $\quad f(x) = x^n \quad \Longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$1) f(x) = 3x^2 - 5x^4 + 1$$

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{5x^5}{5} + x + c = x^3 - x^5 + x + c$$

$$2)\ f(x) = \frac{x^5 + 3x^3}{x^2}$$

$$= \frac{x^5}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} = x^3 + 3x$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + c$$

$$3)\ f(x) = \frac{x-1}{x^3}$$

$$= \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^{-2} - x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$$

$$4)\ f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$$

$$5) f(x) = x\sqrt{x} - e$$

$$= x.x^{\frac{1}{2}} - e = x^{\frac{3}{2}} - e$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - ex + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - ex + c$$

$$6) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \ln 2$$

$$= \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \ln 2 = x^2.x^{\frac{-1}{3}} - \ln 2 = x^{\frac{5}{3}} - \ln 2$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - (\ln 2)x + c$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - (\ln 2)x + c$$

$$7) f(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x.x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{-3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$8)\ f(x) = \frac{2}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} = 2x^{\frac{-3}{4}}$$

$$F(x) = \frac{2x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 8\sqrt[4]{x} + c$$

$$9)\ f(x) = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4}{x^{\frac{1}{2}}} = (x^2 + 4x + 4).x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= x^2.x^{\frac{-1}{2}} + 4x.x^{\frac{-1}{2}} + 4x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 8\sqrt{x} + c$$

$$10)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + c$$

القاعدة: $f(x) = (ax+b)^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$ $: n \neq -1$ $: a \neq 0$

11) $f(x) = (2x-3)^4$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(2x-3)^5}{5} + c$$
$$= \frac{1}{10}.(2x-3)^5 + c$$

12) $f(x) = \frac{3}{(1-x)^3}$

$$= 3(1-x)^{-3}$$
$$F(x) = 3.\frac{1}{-1}.\frac{(1-x)^{-2}}{-2} + c$$
$$= \frac{3}{2(1-x)^2} + c$$

13) $f(x) = \sqrt{3x-2}$

$$= (3x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{3}.\frac{(3x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + c$$

14) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$

$$= (2-x)^{\frac{1}{3}}$$
$$F(x) = \frac{1}{-1}.\frac{(2-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$
$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2-x)^4} + c$$

15) $f(x) = \sqrt[5]{4x^2 - 4x + 1}$

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$
$$f(x) = \sqrt[5]{(2x-1)^2} = (2x-1)^{\frac{2}{5}}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c$$
$$= \frac{5}{14}\sqrt[5]{(2x-1)^7} + c$$

$f(x) = [(x \mp a) - a]\sqrt{x \mp a}$

ملاحظة: كل تمرين من الشكل: $f(x) = x\sqrt{x \mp a}$

لحله: نضيف لـ x (خارج الجذر) المقدار a ونطرح a، او نطرح a ونضيف a حسب إشارة a داخل الجذر.

16) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$= [(x+1) - 1](x+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}} - 1(x+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{1}.\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{1}.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$$

17) $f(x) = x\sqrt{x-2}$

$$= [(x-2) + 2](x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-2)(x-2)^{\frac{1}{2}} + 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-2)^{\frac{3}{2}} + 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{1}.\frac{(x-2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2.\frac{1}{1}.\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-2)^3} + c$$

18) $f(x) = (x+4)\sqrt{x-1}$

ضفنا (1)
طرحنا (-1)
حتى الحل
ما يتغير
و[illegible]
[illegible]

$$= (x - 1 + 1 + 4)(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= [(x-1) + 5]\,(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}} + 5\,(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x-1)^{\frac{3}{2}} + 5(x-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{1}.\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 5.\frac{1}{1}.\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{10}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c$$

$$19)\ f(x) = x\,.\,(x^2-3)^3$$

$$= \frac{1}{2}.\underbrace{2x}_{H}.\underbrace{(x^2-3)^3}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(x^2-3)^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{8}.(x^2-3)^4 + c$$

$$20)\ f(x) = \frac{x^2}{(x^3+8)^4}$$

$$= x^2.(x^3+8)^{-4}$$

$$= \frac{1}{3}.\underbrace{3x^2}_{H}.\underbrace{(x^3+8)^{-4}}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}.\frac{(x^3+8)^{-3}}{-3} + c$$

$$= \frac{-1}{9(x^3+8)^3} + c$$

$$21)\ f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \underbrace{(2x-1)}_{H}\underbrace{(x^2-x+1)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x^2-x+1} + c$$

$$22)\ f(x) = \frac{4x+8}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$= (4x+8)(x^2+4x+5)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2\underbrace{(2x+4)}_{H}\underbrace{(x^2+4x+5)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x) = 2\frac{(x^2+4x+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 4\sqrt{x^2+4x+5} + c$$

$$23)\ f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x}_{H}}.\underbrace{\ln x}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$$24)\ f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x}_{H}}.\underbrace{\ln^3 x}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

$$25)\ f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x}_{H}}\underbrace{(1+\ln x)}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + c$$

$$26)\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

$$= \frac{1}{x(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\underbrace{x}_{H}}\underbrace{(1+\ln x)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1+\ln x} + c$$

$$27)\ f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}.(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = 2.\frac{1}{\underbrace{2.\sqrt{x}}_{H}}.\underbrace{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x) = 2.\frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + c$$

28) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}=\frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}.(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}.(1+\sqrt{x})^{\frac{-1}{2}}$$

$$=2.\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\dot{H}}.\underbrace{(1+\sqrt{x})^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x)=2.\frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$$

29) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^5}}$

$$=\sqrt{\frac{x-1}{x^4.x}}=\frac{1}{|x^2|}.\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$=\frac{1}{x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\dot{H}}.\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}+c$$

30) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$$=\underbrace{\cos x}_{\dot{H}}.\underbrace{\sin^{-2}x}_{H^r}$$

$$F(x)=\frac{\sin^{-1}x}{-1}+c=\frac{-1}{\sin x}+c$$

31) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$=\sin x.\cos^{-2}x$$

$$=-\underbrace{(-\sin x)}_{\dot{H}}.\underbrace{\cos^{-2}x}_{H^r}$$

$$F(x)=-\frac{\cos^{-1}x}{-1}+c=\frac{1}{\cos x}+c$$

32) $f(x)=\underbrace{\sin^4 x}_{H^r}.\underbrace{\cos x}_{\dot{H}}$

$$F(x)=\frac{\sin^5 x}{5}+c$$

33) $f(x)=\underline{\sin 2x}.\sin x$

$$=2\sin x.\cos x.\sin x$$

$$=2\underbrace{\cos x}_{\dot{H}}.\underbrace{\sin^2 x}_{H^r}$$

$$F(x)=2\frac{\sin^3 x}{3}+c$$

34) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$

$$=\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}.\frac{1}{\cos^2 x}=\tan^3 x.\frac{1}{\cos^2 x}$$

لكن : $\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\ ,(\tan x)'=1+\tan^2 x}$

$$=\underbrace{\tan^3 x}_{H^r}.\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{\dot{H}}$$

$$F(x)=\frac{\tan^4 x}{4}+c$$

35) $f(x)=\cos^3 x$

$$=\cos^2 x.\cos x=(1-\sin^2 x).\cos x$$

$$=\left(\cos x-\underbrace{\cos x}_{\dot{H}}\ \underbrace{\sin^2 x}_{H^r}\right)\Rightarrow F(x)$$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$$

36) $f(x)=\sin^3 x$

$$=\sin^2 x.\sin x=(1-\cos^2 x).\sin x$$

$$=\sin x-\sin x.\cos^2 x$$

$$=\sin x+\underbrace{(-\sin x)}_{\dot{H}}.\underbrace{\cos^2 x}_{H^r}$$

$$F(x)=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

قاعدة:

$$f(x)=\frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \quad \Longrightarrow F(x)=ln|g(x)|+c$$

$$ln|g(x)|=\begin{cases} ln\big(g(x)\big)+c & D \text{ موجب تماماً على } g(x) \\ ln\big(-g(x)\big)+c & D \text{ سالب تماماً على } g(x) \end{cases}$$

$$37)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad : x\in R$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{(2x)^{\nearrow \dot{g}}}{(x^2+1)_{\searrow g}}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

$$38)\ f(x)=\frac{5}{2x-1} \quad : x\in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$$

$$=\frac{5}{2}.\frac{2^{\nearrow \dot{g}}}{(2x-1)_{\searrow g}}$$

$$F(x)=\frac{5}{2}.\ln|2x-1|+c$$

$$=\frac{5}{2}.\ln(-2x+1)+c$$

ملاحظة:

كل تابع كسري حدودي درجة بسطه اكبر او تساوي درجة مقامه لإيجاد تابعه الأصلي اولاً نقسم البسط على المقام ثم نكامل.

$$39)\ f(x)=\frac{2x-3}{x-1} \quad : x\in]1,+\infty[$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x-1 & 2x-3 \\ & \mp 2x \pm 2 \\ \cline{2-2} & -1 \end{array} \qquad :\frac{2x}{x}=2$$

$$f(x)=2-\frac{1^{\nearrow \dot{g}}}{(x-1)_{\searrow g}}$$

$$F(x)=2x-\ln|x-1|+c \ =2x-\ln(x-1)+c$$

$$40)\ f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1} \quad : x\in]-\infty,1[$$

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x-1 & x^2+2x+1 \\ & \mp x^2 \pm x \\ \cline{2-2} & 3x+1 \\ & \mp 3x \pm 3 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} :\frac{x^2}{x}=x \\ :\frac{3x}{x}=3 \end{array}$$

$$f(x)=\ x+3+\frac{4}{x-1}\ =x+3+4.\frac{1^{\nearrow \dot{g}}}{(x-1)_{\searrow g}}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+4\ln|x-1|+c \ =\frac{x^2}{2}+3x+4\ln(-x+1)+c$$

$$41)\ f(x)=\frac{e^{x\nearrow \dot{g}}}{(e^x+1)_{\searrow g}} \quad : x\in R$$

$$F(x)=\ \ln|e^x+1|+c\ =\ \ln(e^x+1)+c$$

$$42)\ f(x)=\frac{2}{e^x+1} \quad : x\in R$$

نضرب البسط والمقام بـ e^{-x}:

$$=\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}=-2.\frac{(-e^{-x})^{\nearrow \dot{g}}}{(1+e^{-x})_{\searrow g}}$$

$$F(x)\ =\ -2\ln|1+e^{-x}|+c$$

$$=\ -2\ln(1+e^{-x})+c$$

$$43)f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \quad : x\in R$$

$$=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$=\frac{(e^x)^{\nearrow \dot{g}}}{(e^x+1)_{\searrow g}}+\frac{(-e^{-x})^{\nearrow \dot{g}}}{(1+e^{-x})_{\searrow g}}$$

$$F(x)=\ln|e^x+1|+\ln|1+e^{-x}|+c$$

$$=\ln(e^x+1)+\ln(1+e^{-x})+c$$

$$44)\ f(x)=\frac{1}{x.\ln x} \qquad : x\in]0,1[$$

نقسم البسط والمقام على x:

$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow \dot{g}}}{(\ln x)_{\searrow g}}$$

$$\Rightarrow F(x)=\ln|\ln x|+c\ =\ \ln(-\ln x)+c$$

$$45)\ f(x)=\tan x \qquad : x\in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{(-\sin x)^{\nearrow \dot{g}}}{(\cos x)_{\searrow g}}$$

$$F(x)\ =\ -\ln|\cos x|+c$$

$$=\ -\ln(-\cos x)+c$$

$$46)\ f(x)=\cot x \qquad : x\in]0,\pi[$$

$$=\frac{(\cos x)^{\nearrow \dot{g}}}{(\sin x)_{\searrow g}}$$

$$F(x)=\ \ln|\sin x|+c\ =\ \ln(\sin x)+c$$

$$47)f(x)=\frac{1}{\sin 2x} \quad : x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

نعلم ان:

$$\boxed{1=\sin^2 x+\cos^2 x}$$

$$\boxed{\sin 2x=2\sin x.\cos x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\ \cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{(-\sin x)}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}(-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|)+c$$

$$=\frac{1}{2}(-\ln(\cos x)+\ln(\sin x))\ +c$$

$$48)\ f(x)=\frac{1+\ln x}{x\ln x} \quad :]1,+\infty[$$

$$=\frac{1}{x\ln x}+\frac{\ln x}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}+\frac{1}{x}$$

$$F(x)=\ln|\ln x|+\ln|x|+c$$

$$=\ln(\ln x)+\ln(x)+c$$

القاعدة :

$$f(x)=e^x \qquad \Longrightarrow F(x)=e^x+c$$

$$f(x)=e^{ax+b} \qquad \Longrightarrow F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c \qquad : a\neq 0$$

$$f(x)=\dot{g}(x).e^{g(x)} \qquad \Longrightarrow F(x)=e^{g(x)}+c$$

$$49)\ f(x)=e^{2x-3}+e^{-x}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-3}-e^{-x}+c$$

$$50)\ f(x)=e^{1-x}+e$$

$$F(x)=\ -e^{1-x}+ex+c$$

$$51)\ f(x)=x.e^{x^2+4}+\frac{1}{e^{4x}}$$

$$=\frac{1}{2}.2x.e^{x^2+4}+e^{-4x}$$

$$F(x)\ =\frac{1}{2}e^{x^2+4}+\frac{1}{-4}e^{-4x}+c$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2+4}-\frac{1}{4}e^{-4x}+c$$

$$52)\ f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)_{\searrow \dot{g}}.e^{(\sqrt{x})^{\nearrow g}}-x^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x)=2.e^{\sqrt{x}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c\ =2.e^{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+c$$

$$53)f(x)=e^{x+e^x}$$

$$=e^x.e^{e^x}$$

$$F(x)=e^{e^x}+c$$

$$54)\ f(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}} - 6}{x^2}$$

$$= \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2} - \frac{6}{x^2} = \left(\frac{1}{x^2}\right)_{\searrow g} e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\nearrow g}} - 6x^{-2}$$

$$F(x) = e^{1-\frac{1}{x}} - \frac{6x^{-1}}{-1} + c = e^{\frac{x-1}{x}} + \frac{6}{x} + c$$

القاعدة:

$f(x) = sin(ax)$	$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a}cos(ax) + c$	$: a \neq 0$
$f(x) = cos(ax)$	$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}sin(ax) + c$	$: a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{cos^2(ax)} = 1 + tan^2 x$	$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}tan(ax) + c$	$: a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{sin^2(ax)} = 1 + cot^2 x$	$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a}cot(ax) + c$	$: a \neq 0$

$$55)\ f(x) = 4\cos 2x - 9\sin 3x$$

$$F(x) = \frac{4}{2}\sin 2x + \frac{9}{3}\cos 3x + c$$

$$= 2\sin 2x + 3\cos 3x + c$$

$$56) f(x) = \sin^2 x$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$57)\ f(x) = cos^2 x$$

$$= \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

ملاحظةفي بعض التمارين احياناً نضطر لاستخدام دساتير التحويل من جداء إلى مجموع إذا كانت الزاويتان مختلفتان.

مثلاً: $f(x) = \sin 3x \,.\, \cos 4x$

دساتير التحويل من جداء إلى مجموع :

- $\cos x \,.\, \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\sin x \,.\, \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$
- $\sin x \,.\, \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos x \,.\, \sin y = \frac{1}{2}[\sin\ (x+y) - \sin(x-y)]$

$$58)\ f(x) = \sin 3x \,.\, \cos 2x$$

لاحظ: احدهما ليسمشتق الآخر والزاويتان مختلفتان إذاً نستطيع تطبيقدساتير التحويل من جداء إلى مجموع.

$$\boxed{\text{Sin}\ 3x \cos 2x = \frac{1}{2}[\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)] = \frac{1}{2}[\sin 5x + \sin x]}$$

بالتعويض :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right) + c$$

59) $f(x) = \cos 4x \,.\cos 2x$

$$= \frac{1}{2}[\cos(4x+2x) + \cos(4x-2x)] = \frac{1}{2}[\cos 6x + \cos 2x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x\right] + c$$

* * *

تدرب صفحة 222

1) في كل من الحالات الآتية، تحقق ان F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{1}$ $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = \tan x - x$, $f(x) = \tan^2 x$

Fاشتقاقي على المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\grave{F}(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{2}$ $I = R$, $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$

Fاشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$\grave{F}(x) = \cos x - x\sin x = f(x)$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{3}$ $I =]0, +\infty[$, $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$

Fاشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$$\grave{F}(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^4-1}{x^3}\right) = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{4}$ $I =]0, 1[$, $F(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

Fاشتقاقي على المجال $]0,1[$

$$\grave{F}(x) = \frac{0 - (x-1+x)(-1)}{x^2(x-1)^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{5}$ $I =]0, +\infty[$, $F(x) = x\ln x - x$, $f(x) = \ln x$

Fاشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$\grave{F}(x) = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x = f(x)$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{6}$ $I =]1, +\infty[$, $F(x) = \ln(\ln x)$, $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

Fاشتقاقي على المجال $]1, +\infty[$

$$\grave{F}(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} = f(x)$$

ومنه Fتابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{7}$ $I = R \quad , \quad F(x) = x - ln(1+e^x) \quad , \quad f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

F اشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$\acute{F}(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = f(x)$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال I

$\boxed{8}$ $I = R \quad , \quad F(x) = 2\sqrt{e^x} \quad , \quad f(x) = \sqrt{e^x}$

F اشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$\acute{F}(x) = 2\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \sqrt{e^x} = f(x)$$

ومنه F تابع اصلي للتابع f على المجال $]-\infty, +\infty[$

---

2) في كل من المجالات الآتية تحقق ان G, F تابعان اصليان للتابع f على المجال I

$\boxed{1}$ $I =]1, +\infty[\quad , \quad G(x) = \dfrac{x^2+7x-5}{x-1} \quad , \quad F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$

G, F اشتقاقيان على المجال $]1, +\infty[$

$$\acute{F}(x) = \frac{(2x+3)(x-1)-(1)(x^2+3x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

$$\acute{G}(x) = \frac{(2x+7)(x-1)-(1)(x^2+7x-5)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

ومنه $\acute{F}(x) = \acute{G}(x)$ و G, F تابعان اصليان للتابع $f : x \to \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ على المجال $]1, +\infty[$

$\boxed{2}$ $I = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\quad , \quad G(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad F(x) = \tan^2 x$

G, F اشتقاقيان على المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ، نلاحظ ان :

$\boxed{1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$:

$$F(x) = \tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\acute{F}(x) = \frac{0 - 2\cos x\,(-\sin x)}{\cos^4 x} - 0 = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\acute{G}(x) = \frac{0 - 2\cos x\,(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

ومنه $\acute{F}(x) = \acute{G}(x)$ و G, F تابعان اصليان للتابع $f : x \to \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ على المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\boxed{3}$ $I = \left]\dfrac{5}{4}, +\infty\right[\quad , \quad G(x) = \dfrac{-4x^2+2x-9}{10-8x} \quad , \quad F(x) = \dfrac{2x^2-3x+7}{4x-5}$

G, F اشتقاقيان على المجال $\left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$

$$\acute{F}(x) = \frac{(4x-3)(4x-5)-(4)(2x^2-3x+7)}{(4x-5)^2} = \frac{8x^2-20x-13}{(4x-5)^2}$$

$$\acute{G}(x) = \frac{(-8x+2)(10-8x)-(-8)(-4x^2+2x-9)}{(10-8x)^2} = \frac{32x^2-80x-52}{[-2(4x-5)]^2}$$

$$= \frac{4(8x^2-20x-13)}{4(4x-5)^2} = \frac{8x^2-20x-13}{(4x-5)^2}$$

ومنه $\acute{F}(x) = \acute{G}(x)$ و G, F تابعان اصليان للتابع $f : x \to \frac{8x^2-20x-}{(4x-5)^2}$ على المجال $\left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$

$\boxed{4}$ $I=R$, $G(x)=\frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$, $F(x)=\frac{1}{x^2+1}$

G, F اشتقاقيان على المجال $]-\infty,+\infty[$

$\grave{F}(x)=\frac{0-(2x)(1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$\grave{G}(x)=\frac{(6x)(2(1+x^2))-(4x)(5+3x^2)}{4(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$\grave{F}(x)=\grave{G}(x)$ ومنه G,F تابعان اصليان للتابع $f:x\to\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ على المجال I

$\boxed{5}$ $I=R$, $G(x)=2-\cos^2 x$, $F(x)=\sin^2 x$

G, F اشتقاقيان على المجال $]-\infty,+\infty[$

$\grave{F}(x)=2\sin x\cos x$

$\grave{G}(x)=-2\cos x\,(-\sin x)=2\sin x\cos x$

$\grave{F}(x)=\grave{G}(x)$ ومنه G,F تابعان اصليان للتابع $f:x\to 2\sin x\cos x$ على المجال I

---

3) ايكون التابعان G,F الآتيان تابعين اصليين للتابع f ذاته على R؟

$G(x)=\sin x-3\sin^3 x$, $F(x)=\sin(3x)-2\sin x$

G, F اشتقاقيان على المجال $]-\infty,+\infty[$

$\grave{G}(x)=\cos x-9\sin^2 x\cos x=\cos x-9(1-\cos^2 x)\cos x$

$=\cos x-9\cos x+9\cos^3 x=9\cos^3 x-8\cos x$

$\grave{F}(x)=3\cos 3x-2\cos x=3(4\cos^3 x-3\cos x)-2\cos x$ (نعلم ان $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$)

$=12\cos^3 x-11\cos x$

$\grave{F}(x)\neq\grave{G}(x)$ ومنه G,F ليسا تابعان اصليان لنفس التابع على R

***

تدرب صفحة 227

1) في كل من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً للتابع $f:x\to f(x)$ على المجال I

$\boxed{1}$ $I=R$, $f(x)=8x^3+6x^2-2x+3$

$F(x)=8\frac{x^4}{4}+6\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+3x+c$

$F(x)=2x^4+2x^3-x^2+3x+c$

$\boxed{2}$ $I=]0,+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{x^4}$

$f(x)=x^{-4}$

$F(x)=\frac{x^{-3}}{-3}+c=-\frac{1}{3x^3}+c$

$\boxed{3}$ $I=]-\infty,0[$, $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{x^2}$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}-3x^{-2}=x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{-1}{3}}-3x^{-2}$

$F(x)=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}-3\frac{x^{-1}}{-1}+c$

$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x}+c$

$\boxed{4}$ $I=]1,+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}$

$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$

$F(x)=\frac{1.}{-1}.\frac{(1-x)^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{1-x}+c$

$\boxed{5}$ $I=]-\infty,-1[$, $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

$f(x)=(2x+1)(x^2+x)^{-2}$

$F(x)=\frac{(x^2+x)^{-1}}{-1}+c=\frac{-1}{(x^2+x)}+c$

6 $I =]1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \dfrac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$

$$f(x) = \frac{4x-2}{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}} = (4x-2)(x^2-x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2\underbrace{(2x-1)}_{\acute{H}}\underbrace{(x^2-x)^{\frac{-1}{2}}}_{H^r}$$

$$F(x) = 2\frac{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{x^2-x} + c$$

7 $I = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[\quad , \quad f(x) = \dfrac{5}{4x-3}$

$$f(x) = \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{4x-3}$$

$$F(x) = \frac{5}{4}\ln|4x-3| + c = \frac{5}{4}\ln(-4x+3) + c$$

8 $I =]0, +\infty[\quad , \quad f(x) = \dfrac{3x+1}{2x}$

$$f(x) = \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ln|x| + c$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ln x + c = \frac{3}{2}x + \ln\sqrt{x} + c$$

9 $I =]-\infty, 2[\quad , \quad f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$F(x) = x + 3\ln|x-2| + c$$

$$= x + 3\ln(-x+2) + c$$

10 $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad , \quad f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{4}\cdot\frac{2}{2x-1}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln|2x-1| + c$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln(2x-1) + c$$

2) في كل من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً للتابع $f: x \to f(x)$ على المجال I

1 $I = R \quad , \quad f(x) = \cos^2 3x$

نعلم ان: $\left(\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

$$f(x) = \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

2 $I = R \quad , \quad f(x) = \cos^4 x$

$$f(x) = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

3 $I = R \quad , \quad f(x) = \cos 3x \cos x$

$$f(x) = \frac{1}{2}.(\cos 4x + \cos 2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

4 $I =]0, \pi[\quad , \quad f(x) = \cot^2 x$

$$f(x) = \underbrace{1 + \cot^2 x} - 1$$

$$F(x) = -\cot x - x + c$$

$\boxed{5}$ $I = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $f(x) = \tan x$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$F(x) = -\ln|\cos x| + c = -\ln(-\cos x) + c$$

$\boxed{6}$ $I =]0, \pi[$, $f(x) = \cot x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$F(x) = \ln|\sin x| + c = \ln(\sin x) + c$$

$\boxed{7}$ $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5} + c$$

$\boxed{8}$ $I = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

$$f(x) = \frac{1}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}} = (3-2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{-2} \cdot \frac{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{3-2x} + c$$

$\boxed{9}$ $I = R$, $f(x) = x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

$$f(x) = x(x^2+1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2+1)^5} + c$$

$\boxed{10}$ $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$

$$f(x) = \frac{x}{(3-x^2)^{\frac{1}{2}}} = x(3-x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2}(-2x)(3-x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{(3-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{3-x^2} + c$$

---

* * *

التكامل المحدد و خواصه

تعريف التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال :

ليكن fتابعاً مستمراً على مجال I، و ليكن Fاحد توابعه الأصلية على هذا المجال،و ليكن a و b عددين من I . عندئذ لا يتعلق العدد $\left[F(x)\ \right]_a^b = F(b) - F(a)$ بالتابع الأصلي المختار للتابع fنسمي هذا العدد التكامل المحدد للتابع f من a إلى b،و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\ dx$

إذن $\int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\ \right]_a^b = F(b) - F(a)$ حيث F تابع اصلي ما للتابع f على I

خواص التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال :

ليكن f و g تابعين مستمرين على مجال I ، وليكن a و b عددين من I ، و λ عدد حقيقي.

عندئذ تتحقق الخواص الآتية :

1) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$

2) $\int_a^b (\lambda f(x))\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$

3) $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

* * *

تدرب صفحة 235 رقم (1):

احسب التكاملات الآتية:

$$\boxed{1}\ I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos 2x)}\ dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(2\sin^2 x)}\ dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 x}\ dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2|\sin x|\ dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x\ dx$$

$$= 2\left[\cos x\ \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 2\left(\cos 2\pi - \cos\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 2(1 - 0) = 2$$

$$\boxed{2}\ J = \int_{-1}^{2} x|x - 1|\ dx$$

$(x-1)$ سالب تماماً على $]-1,1[$

$(x-1)$ موجب تماماً على $]1,2[$

$$= \int_{-1}^{1} x(-x+1)\ dx + \int_{1}^{2} x(x-1)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^2 + x)\ dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\ dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\boxed{3}\ k = \int_{0}^{1} (e^{2x} - e^{-2}\ )\ dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{-2} - 1\ = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}$$

$$\boxed{4}\ L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x - 1}{x - 1}\ dx$$

باستخدام القسمة الإقليدية نجد ان:

$$= \int_{-2}^{-1} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)\ dx$$

$$= \left[2x + \ln|x - 1|\ \right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left[2x + \ln(-x + 1)\ \right]_{-2}^{-1}$$

$$= (-2 + \ln 2) - (-4 + \ln 3)$$

$$= -2 + \ln 2 + 4 - \ln 3\ = 2 + \ln\frac{2}{3}$$

$$\boxed{5}\ M = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\ dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left[-\ln(\cos x)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\ln\frac{1}{2}\right) - \left(-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \ln 2 + \ln\sqrt{3} - \ln 2 = \ln\sqrt{3}$$

$$\boxed{6}\ N = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\ dx$$

$$= \left[\ln|\cos x + \sin x|\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\ln(\cos x + \sin x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln(0 + 1) - \ln(1 + 0) = 0$$

طريقة التكامل بالتجزئة

مبرهنة : نتامل تابعين u و v قابلين للاشتقاق على مجال I . نفترض ان المشتقان لـ u و v مستمران على I عندئذ اياً يكن العددان a و b من I كان

$$\int_a^b u(x).\grave{v}(x)\ \ dx = [u(x).v(x)\ \ ]_a^b - \int_a^b v(x).\grave{u}(x)\ \ dx$$

- نستخدم التكامل بالتجزئة للتكاملات من الشكل:

1) $\int_a^b x^m.\sin(ax)\ \ dx$ 2) $\int_a^b x^m.\cos(ax)\ \ dx$ 3) $\int_a^b x^m.e^{ax}\ \ dx$ 4) $\int_a^b x^m.\ln x\ \ dx$

$U(x)$ $V'(x)$ $V'(x)$ $U(x)$

ملاحظة : في الحالات 1 و 2 و 3 نضع دائماً $u(x) = x^m$ ، في الحالة 4 نضع $u(x) = \ln x$.

تمرين: اوجد باستخدام التكامل بالتجزئة:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x.\sin x\ \ dx$$

$u(x) = 2x \Rightarrow \grave{u}(x) = 2$ $\grave{v}(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$

$$I = [-2x\cos x\ \ ]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos x\ \ dx = [-2x\cos x + 2\sin x\ \ ]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0+2)-(0+0) = 2$$

تدرب صفحة 236 رقم (2): احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل التجزئة:

$\boxed{1}$ $I = \int_1^e x\ln x\ \ dx$

$u(x) = \ln x \longrightarrow \grave{u}(x) = \frac{1}{x}$

$\grave{v}(x) = x \longrightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\ \ dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - 0\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

$\boxed{2}$ $J = \int_0^{\pi} (x-1)\cos x\ \ dx$

$u(x) = x-1 \longrightarrow \grave{u}(x) = 1$

$\grave{v}(x) = \cos x \longrightarrow v(x) = \sin x$

$$J = [(x-1)\sin x\ \ ]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\ \ dx$$

$$= [(x-1)\sin x\ \ ]_0^{\pi} + [\cos x\ \ ]_0^{\pi}$$

$$= (0-0) + (-1-1) = -2$$

$\boxed{3}$ $k = \int_0^1 (x+2)e^x\ \ dx$

$u(x) = x+2 \longrightarrow \grave{u}(x) = 1$

$\grave{v}(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$$k = [(x+2)e^x\ \ ]_0^1 - \int_0^1 e^x\ \ dx$$

$$= [(x+2)e^x\ \ ]_0^1 - [e^x\ \ ]_0^1$$

$$= (3e-2) - (e-1) = 2e-1$$

$\boxed{4}$ $L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\ \ dx$

$u(x) = x \longrightarrow \grave{u}(x) = 1$

$\grave{v}(x) = \sin 3x \longrightarrow v(x) = \frac{-1}{3}\cos 3x$

$$L = \left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3}\cos 3x\right)\ \ dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{9} - 0\right) + (0-0) = \frac{\pi}{9}$$

$\boxed{5}$ $M=\int_0 e^x\cos x\ \ dx$

$u(x)=e^x \longrightarrow \grave{u}(x)=e^x$

$\grave{v}(x)=\cos x \longrightarrow v(x)=\sin x$

$$M=\left[e^x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sin x\ \ dx$$

نرمز بـ $T=\int_0^{\pi} e^x\sin x\ \ dx$

$M=[e^x\sin x\ \ ]_0^{\pi}-T$ $\boxed{*}$

نحسب تكامل T بالتجزئة : $T=\int_0^{\pi} e^x\ \sin x\ \ dx$

$u(x)=e^x \longrightarrow \grave{u}(x)=e^x$

$\grave{v}(x)=\sin x \longrightarrow v(x)=-\cos x$

$$T=\left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\cos x\ \ dx$$

$$=\left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi}+M$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$M=[e^x\sin x\ \ ]_0^{\pi}-[-e^x\cos x\ \ ]_0^{\pi}-M$

$2M=[e^x\sin x\ \ ]_0^{\pi}+[e^x\cos x\ \ ]_0^{\pi}$

$2M=(0-0)+(-e^{\pi}-1)$

$2M=-e^{\pi}-1$

$M=\frac{-1}{2}(e^{\pi}+1)$

$\boxed{6}$ $N=\int_0^{\pi} e^x\sin x\ \ dx$

$u(x)=e^x \longrightarrow \grave{u}(x)=e^x$

$\grave{v}(x)=\sin x \longrightarrow v(x)=-\cos x$

$$N=\left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\cos x\ \ dx$$

نرمز بـ $T=\int_0^{\pi} e^x\cos x\ \ dx$

$N=\left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi}+T$ $\boxed{*}$

نحسب تكامل T بالتجزئة : $T=\int_0^{\pi} e^x\ \cos x\ \ dx$

$u(x)=e^x \longrightarrow \grave{u}(x)=e^x$

$\grave{v}(x)=\cos x \longrightarrow v(x)=\sin x$

$$T=\left[e^x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sin x\ \ dx$$

$$=\left[e^x\sin x\right]_0^{\pi}-N$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$N=[-e^x\cos x\ \ ]_0^{\pi}+[e^x\sin x\ \ ]_0^{\pi}-N$

$2N=[-e^x\cos x\ \ ]_0^{\pi}+[e^x\sin x\ \ \ ]_0^{\pi}$

$2N=(e^{\pi}+1)+0$

$N=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

تدرب صفحة 236 رقم (3): جد تابعاً أصلياً للتابع $f:x\to f(x)$ على المجال I:

$\boxed{1}$ $I=R$, $f(x)=x\cos x$

بفرض $x=t$ إذاً : $f(t)=t\ \cos t$

$u(t)=t \longrightarrow \grave{u}(t)=1$

$\grave{v}(t)=\cos t \longrightarrow v(t)=\sin t$

$$\int_0^x t\cos t\ \ dt=[t\,.\sin t\ \ ]_0^x-\int_0^x \sin t\ \ dt$$

$$=[t.\sin t+\cos t\ \ ]_0^x$$

$$=(x\sin x+\cos x)-(0+1)$$

$$F(x)=x\sin x+\cos x-1$$

$\boxed{2}$ $I=R$, $f(x)=x\sin 2x$

بفرض $x=t$ إذاً : $f(t)=t\ \sin 2t$

$u(t)=t \longrightarrow \grave{u}(t)=1$

$\grave{v}(t)=\sin 2t \longrightarrow v(t)=-\frac{1}{2}\cos 2t$

$$\int_0^x t\sin 2t\ \ dt=\left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^x-\int_0^x -\frac{1}{2}\cos 2t\ \ dt$$

$$=\left[\frac{-1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x$$

$$=\left(\frac{-1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)-(0+0)$$

$$F(x)=\frac{-1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

$\boxed{3}$ $I = R \quad , \quad f(x) = x^2 e^x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2 e^t$

$u(t) = t^2 \longrightarrow \grave{u}(t) = 2t$

$\grave{v}(t) = e^t \longrightarrow v(t) = e^t$

$$\int_0^x t^2 e^t \;\; dt = \left[t^2 e^t \;\right]_0^x - \int_0^x 2t\, e^t \;\; dt$$

$u(t) = 2t \longrightarrow \grave{u}(t) = 2$ نكامل بالتجزئة مرة ثانية:

$\grave{v}(t) = e^t \longrightarrow v(t) = e^t$

$$\int_0^x t^2 e^t \;\; dt = \left[t^2 e^t \;\right]_0^x - \left[\left[2t\, e^t \;\right]_0^x - \int_0^x 2\, e^t \;\; dt\right]$$

$$= \left[t^2\, e^t - 2t\, e^t + 2e^t \;\right]_0^x$$

$$= (x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2e^x) - (2)$$

$$F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$$

$\boxed{4}$ $I =]0, +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2 \ln x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2 \;\ln t$

$u(t) = \ln t \longrightarrow \grave{u}(t) = \dfrac{1}{t}$

$\grave{v}(t) = t^2 \;\longrightarrow v(t) = \dfrac{t^3}{3}$

$$\int_1^x t^2 \ln t \;\; dt = \left[\frac{t^3}{3} \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{3} \;\; dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} \ln t - \frac{t^3}{9}\right]_1^x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right) - \left(\frac{-1}{9}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$\boxed{5}$ $I = R \quad , \quad f(x) = x^2 \sin 2x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2 \;\sin 2t$

$u(t) = t^2 \quad \longrightarrow \grave{u}(t) = 2t$

$\grave{v}(t) = \sin 2t \longrightarrow v(t) = \dfrac{-1}{2} \cos 2\, t$

$$\int_0^x t^2 \sin 2t \;\; dt = \left[\frac{-1}{2} t^2 \cos 2t\right]_0^x + \int_0^x t \cos 2t \;\; dt$$

نكامل بالتجزئة مرة ثانية :

$u(t) = t \quad \longrightarrow \grave{u}(t) = 1$

$\grave{v}(t) = \cos 2t \longrightarrow v(t) = \dfrac{1}{2} \sin 2t$

$$\int_0^x t^2 \sin 2t \;\; dt$$

$$= \left[\frac{-1}{2} t^2 \cos 2t\right]_0^x + \left[\left[\frac{1}{2} t \sin 2t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2} \sin 2t \;\; dt\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{2} t^2 \cos 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t\right]_0^x$$

$$= \left(\frac{-1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x\right) - \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4}$$

$\boxed{6}$ $I = R \quad , \quad f(x) = x^2 \cos 3x$

بفرض $x = t$ إذاً : $f(t) = t^2 \;\cos 3t$

$u(t) = t^2 \quad \longrightarrow \grave{u}(t) = 2t$

$\grave{v}(t) = \cos 3t \longrightarrow v(t) = \dfrac{1}{3} \sin 3t$

$$\int_0^x t^2 \cos 3t \;\; dt = \left[\frac{1}{3} t^2 \sin 3t\right]_0^x - \int_0^x \frac{2}{3} t \sin 3t \;\; dt$$

نكامل بالتجزئة مرة ثانية:

$u(t) = \dfrac{2}{3} t \quad \longrightarrow \grave{u}(t) = \dfrac{2}{3}$

$\grave{v}(t) = \sin 3t \longrightarrow v(t) = \dfrac{-1}{3} \cos 3t$

$$\int_0^x t^2 \cos 3t \;\; dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} t^2 \sin 3t\right]_0^x - \left[\left[\frac{-2}{9} t \cos 3t\right]_0^x + \int_0^x \frac{2}{9} \cos 3t \;\; dt\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3} t^2 \sin 3t + \frac{2}{9} t \cos 3t - \frac{2}{27} \sin 3t\right]_0^x$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x\right) - (0)$$

$$F(x) = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x$$

* * *

حساب تكامل بعض التوابع الكسرية

سنكتفي بدراسة التوابع الكسرية $f:x\to\frac{A(x)}{B(x)}$ حيث $A(x),B(x)$ كثيري حدود من الدرجة الثانية (حده المسيطر x^2) وله جذران مختلفان r_1 ، r_2 اي يمكن تحليل $B(x)$ إلى جداء عوامل من الشكل $B(x)=(x-r_1)(x-r_2)$

مع ملاحظة ان البسط ليس مشتق المقام.

نهدف إلى حساب $I=\int_a^b f$ حيث a و b عددان من احد مجالات المجموعة $R\backslash\{r_1,r_2\}$

و نميز حالتين :

<u>الحالة الأولى :</u> درجة البسط $A(x)$ اصغر او تساوي الواحد

نقوم بتحليل المقام $B(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى مختلفة: $B(x)=(x-r_1)(x-r_2)$

عندها يمكن تفريق الكسر بالشكل: $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A}{x-r_1}+\frac{B}{x-r_2}$

لنعين A و B وذلك بتوحيد المقامات بين الطرفين ثم حذفها كما في المثال الآتي .

$$I=]-\infty,-3[\quad,\qquad f(x)=\frac{x+1}{x^2-9}$$

نلاحظ ان درجة البسط اصغر من درجة المقام والبسط ليس مشتق للمقام.

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{x+1}{(x-3)(x+3)}=\frac{A(x+3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\boxed{x+1=A(x+3)+B(x-3)}\qquad(*)$$

$$x=3\xrightarrow{\text{نعوض في}(*)}4=6A\Rightarrow\boxed{A=\frac{2}{3}}\quad,\quad x=-3\xrightarrow{\text{نعوض في}(*)}-2=-6B\Rightarrow\boxed{B=\frac{1}{3}}$$

$$f(x)=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+3}$$

$$F(x)=\frac{2}{3}\ln|x-3|+\frac{1}{3}\ln|x+3|+c=\frac{2}{3}\ln(-x+3)+\frac{1}{3}\ln(-x-3)+c$$

<u>الحالة الثانية</u> : درجة البسط $A(x)$ اكبر او تساوي 2

نجري القسمة الإقليدية لكثير الحدود A على B و نعود للحالة الأولى كما في المثال الآتي .

$$I=]-\infty,-2[\quad,\qquad f(x)=\frac{x^4+4}{x^2-4}$$

درجة البسط اكبر من درجة المقام ومنه نقسم البسط على المقام:

$$\left.\begin{array}{l|l} & x^2+4\\ \hline x^2-4 & x^4+4\\ & \mp x^4\pm 4x^2\\ \hline & 4x^2+4\\ & \mp 4x^2\pm 16\\ \hline & 20\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=x^2+4+\underbrace{\frac{20}{x^2-4}}_{\text{يلزمها تفريق كسور}}$$

$$\frac{20}{x^2-4}=\frac{20}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{20}{(x-2)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{20=A(x+2)+B(x-2)} \quad (*)$$

$$x=2\xrightarrow{\text{نعوض في}(*)}20=4A\Rightarrow\boxed{A=5} \quad , \quad x=-2\xrightarrow{\text{نعوض في}(*)}20=-4B\Rightarrow\boxed{B=-5}$$

$$f(x)=x^2+4+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$f(x)=x^2+4+\frac{5}{x-2}-\frac{5}{x+2}$$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+4x+5\ln|x-2|-5\ln|x+2|+c$$

$$=\frac{x^3}{3}+4x+5\ln(-x+2)-5\ln(-x-2)+c$$

* * *

تدرب صفحة 236 رقم (4):

جد تابعاً اصلياً للتابع $f:x\to f(x)$ على المجال I

$\boxed{1}$ $I=]1,+\infty[\quad , \quad f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$

$$f(x)=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{B(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\boxed{x+3=A(x+1)+B(x-1)} \quad (*)$$

$$x=1\xrightarrow{\text{نعوض في}(*)}4=2A\Rightarrow\boxed{A=2} \quad , \quad x=-1\xrightarrow{\text{نعوض في}(*)}2=-2B\Rightarrow\boxed{B=-1}$$

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$f(x)=2\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$=2\ln|x-1|-\ln|x+1|+c$$

$$F(x)=2\ln(x-1)-\ln(x+1)+c=\ln(x-1)^2-\ln(x+1)+c=\ln\frac{(x-1)^2}{(x+1)}+c$$

……

$\boxed{2}$ $I=]-\infty,-2[\quad , \quad f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{x+1 = A(x+2) + B(x-2)} \quad (*)$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 3 = 4A \Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{4}} \quad , \quad x=-2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} -1 = -4B \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{4}}$$

$$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + c = \frac{3}{4}\ln(-x+2) + \frac{1}{4}\ln(-x-2) + c$$

$\boxed{3}$ $I =]2,3[$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-6}$

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$\boxed{x = A(x+2) + B(x-3)} \quad (*)$$

$$x=3 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 3 = 5A \Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{5}} \quad , \quad x=-2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} -2 = -5B \Rightarrow \boxed{B=\frac{2}{5}}$$

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{3}{5}\ln|x-3| + \frac{2}{5}\ln|x+2| + c = \frac{3}{5}\ln(-x+3) + \frac{2}{5}\ln(x+2) + c$$

$\boxed{4}$ $I =]-1,0[$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{x(x+1)}$$

$$\boxed{2x-1 = A(x+1) + Bx} \quad (*)$$

$$x=0 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} \boxed{A=-1} \quad , \quad x=-1 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} -3 = -B \Rightarrow \boxed{B=3}$$

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{-1}{x} + 3\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = -\ln|x| + 3\ln|x+1| + c = -\ln(-x) + 3\ln(x+1) + c$$

$\boxed{5}$ $I =]2,+\infty[$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

درجة البسط اكبر من درجة المقام،بإجراء القسمة الإقليدية:

$$f(x) = x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A(x+1)}{(x-2)(x+1)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\boxed{3x+2 \quad = \quad A(x+1) \quad + \quad B(x-2)} \quad (*)$$

$x = 2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} 8 = 3A \Rightarrow \boxed{A = \frac{8}{3}}$, $x = -1 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} -1 = -3B \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}}$

$$f(x) = x+1+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

$$f(x) = x+1+\frac{8}{3}.\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+c = \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+c$$

$\boxed{6}$ $I =]-\infty,-2[$, $f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2}$

طريقة اولى :

$$f(x) = \frac{2x-1+4-4}{x^2+4x+4} = \frac{2x+4}{x^2+4x+4}-\frac{5}{(x+2)^2} = \frac{2x+4}{x^2+4x+4}-5(x+2)^{-2}$$

$$F(x) = \ln|x^2+4x+4|-\frac{5(x+2)^{-1}}{-1}+c = \ln(x^2+4x+4)+\frac{5}{x+2}+c$$

طريقة ثانية :

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\boxed{2x-1 \quad = \quad A(x+2) \quad + \quad B} \quad (*)$$

$x = -2 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} \boxed{B = -5}$, $x = 0 \xrightarrow{\text{نعوض في}(*)} -1 = 2A+B \Rightarrow -1 = 2A-5 \Rightarrow \boxed{A = 2}$

$$f(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

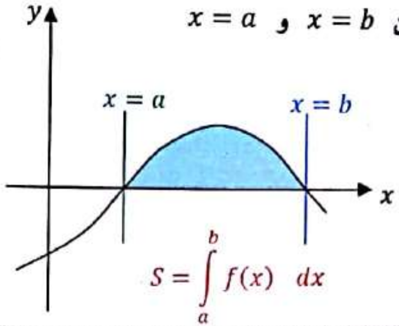
$$f(x) = 2\frac{1}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2} = 2.\frac{1}{x+2}-5(x+2)^{-2}$$

$$F(x) = 2\ln|x+2|+\frac{5}{x+2}+c = 2\ln(-x-2)+\frac{5}{x+2}+c$$

نقبل بصحة القضايا الآتية دون ذكر لبرهان:

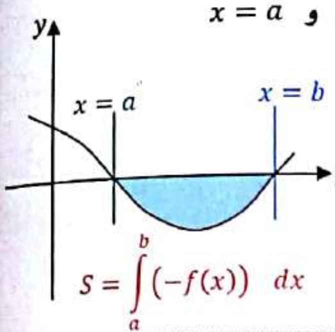
- مساحة اي سطح محدود فيالمستوي هو عدد حقيقي موجب.
- مساحة اجتماع سطحين منفصلين تساوي مجموع مساحتيهما.
- ولحساب مساحة سطح محدود بطريقة التكامل المحدد نميز الحالات الآتية :

① مساحة سطح محصور فوق المحور $x\acute{x}$ و المستقيمين $x = b$ و $x = a$



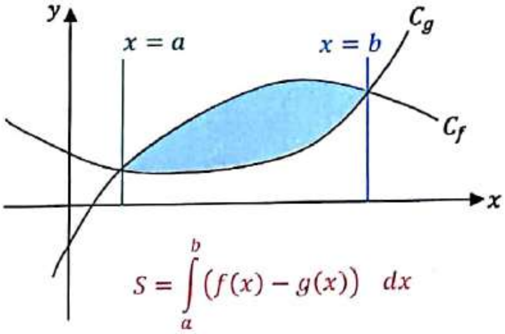
$$S = \int_a^b f(x)\ \ dx$$

② مساحة سطح محصور تحت المحور $x\acute{x}$ و المستقيمين $x = b$ و $x = a$



$$S = \int_a^b (-f(x))\ \ dx$$

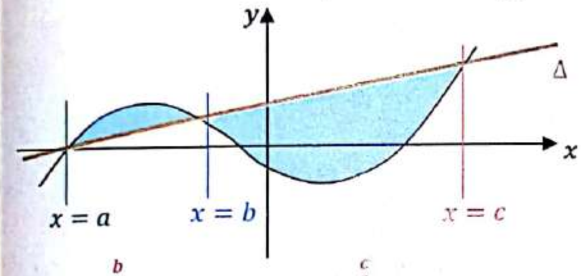
④ مساحة سطح محصوربين خطين بيانيين و المستقيمين $x = b$ و $x = a$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \ dx$$

لأن C_f فوق C_g في المجال $[a, b]$

⑤ مساحة سطح محصور بين خط بياني C_f و مستقيم $\Delta: y = ax + b$



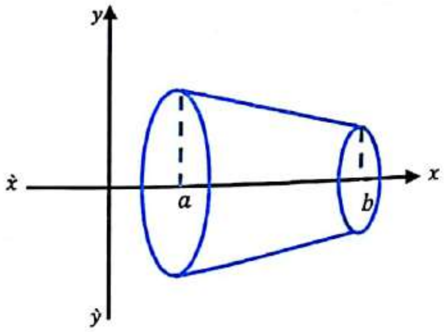
$$S = \int_a^b (f(x) - y_\Delta)\ \ dx + \int_b^c (y_\Delta - f(x))\ \ dx$$

****

حساب حجم مجسم دوراني:

حجم مجسم ناتج عن دوران سطح محصور بين المحور $x\acute{x}$ والمستقيمين $x = b$ و $x = a$

دورة كاملة



ملاحظة : يعطى قانون حجم الكرة بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

حيث : r نصف قطر الكرة

تمرينات ومسائل صفحة 244

1) في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$\boxed{1}$ $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$: $]0, +\infty[$

$$f(x) = 1 - x^{-2} + \frac{3}{x}$$

$$F(x) = x - \frac{x^{-1}}{-1} + 3\ln|x| + c$$

$$= x + \frac{1}{x} + 3\ln x + c$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}}$: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

$$f(x) = 2(1-2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = 2.\frac{1}{-2}.\frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -2\sqrt{1-2x} + c$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$: $]1, +\infty[$

$$f(x) = \underbrace{2x}_{H}\left(\underbrace{x^2-1}_{H^r}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x^2-1} + c$$

$\boxed{4}$ $f(x) = (2x-1)^3$: $I = R$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)^4 + c$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$: $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$

$$f(x) = (1-3x)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{-3}.\frac{(1-3x)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{3(1-3x)} + c$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$: $]-1, 3[$

$$f(x) = (x-1)(x^2-2x-3)^{-2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{2x-2}_{H}\right)\left(\underbrace{x^2-2x-3}_{H^r}\right)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{(x^2-2x-3)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(x^2-2x-3)} + c$$

2) في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$\boxed{1}$ $f(x) = \cos x\,(\sin^2 x - 3\sin x)$: $I = R$

$$f(x) = \underbrace{\cos x}_{H}\,\underbrace{\sin^2 x}_{H^r} - 3\,\underbrace{\cos x}_{H}\,\underbrace{\sin x}_{H^r}$$

$$F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{3\sin^2 x}{2} + c$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \frac{1}{x-1}$: $]4, +\infty[$

$$F(x) = \ln|x-1| + c$$

$$= \ln(x-1) + c$$

3 $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1 \quad : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1$$

$$F(x) = 2\tan(x) - x + c$$

4 $f(x) = \dfrac{1}{x-4} \quad :]-\infty, 4[$

$$F(x) = \ln|x-4| + c$$

$$F(x) = \ln(-x+4) + c$$

5 $f(x) = 2e^{3x-1} \quad : I = R$

$$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-1} + c$$

6 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} \quad :]-1, +\infty[$

$$f(x) = 2 - 3\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 2x - 3\ln|x+1| + c$$

$$= 2x - 3\ln(x+1) + c$$

3) في كل من الحالات الآتية، هات تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I، يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى.

1 $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x \quad : F(1) = 0$

$$f(x) = 2x^{-2} + x \qquad : I = R^*$$

$$F(x) = \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$$

$* \ F(1) = 0$

$$-2 + \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

2 $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2} \quad : F(0) = 0$

$$f(x) = (2x+1)^{-2} \qquad : I = R \backslash \left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(2x+1)} + c$$

$* \ F(0) = 0$

$$\frac{-1}{2} + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}$$

3 $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) : F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$F(x) = \frac{-1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + c \qquad : I = R$$

$$* \ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{-1}{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + c = 0$$

$$\frac{-1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + c = 0$$

$$\frac{-1}{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{-\sqrt{2}}{4}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4 $f(x) = \sin x \cos^2 x \quad : F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f(x) = -\underbrace{(-\sin x)}_{H'}\underbrace{\cos^2 x}_{H^{٢}} \qquad : I = R$$

$$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$* \ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$F(x) = \frac{-\cos^3 x}{3}$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{-1}{3-x}$ $: F(1) = +1$

$$F(x) = \ln|3-x| + c$$

$$F(x) = \ln(3-x) + c$$

$* \ F(1) = 1$

$$\ln 2 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1 - \ln 2}$$

$$F(x) = \ln(3-x) + 1 - \ln 2$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ $: F(0) = 0$

$$f(x) = x(x^2-1)^{-2} \qquad : I = R\backslash\{-1,1\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{2x}_{H}\Big(\underbrace{x^2-1}_{H^r}\Big)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1} + c$$

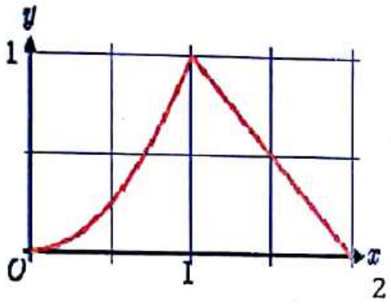
$$= \frac{-1}{2(x^2-1)} + c$$

$* \ F(0) = 0$

$$\frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{-1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2}$$

4) نرمز عادة بالرمز $\mathrm{min}(a,b)$ إلى أصغر العددين b, a تحقق ان الخط البياني C_f للتابع f المعرف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x) = \mathrm{m} \quad (x^2, 2-x)$ هو الخط المرسوم في الشكل المجاور،



❶ احسب التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ وقل ماذا يمثل هذا العدد.

- ♦ عندما $x \in [0,1]$ فإن $x^2 \le 2-x$ إذاً $f_1(x) = x^2$
- ♦ عندما $x \in [1,2]$ فإن $x^2 \ge 2-x$ إذاً $f_2(x) = 2-x$

$$\int_0^2 f(x)\ dx = \int_0^1 f_1(x)\ dx + \int_1^2 f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\ dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) - (0) + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

$\frac{5}{6} = \int_0^2 f(x)$ ويمثل :ا العدد مساحة السطح المحدد بالخط البياني للتابع f ومحور $x\grave{x}$.

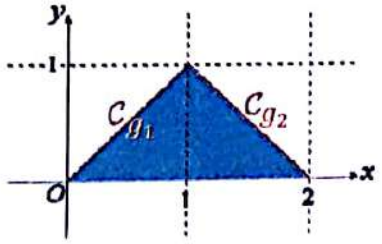
❷ احسب بالمثل $\int_0^2 g(x)\,dx$, $\int_0^1 h(x)\,dx$ في حالة:

$h(x) = \min(x^2, (x-1)^2)$, $g(x) = 1 - |1-x|$

$\boxed{1}$ $g(x) = 1 - |1-x|$

♦ عندما $x \in [0,1]$ فإن: $|1-x| = 1-x$ إذاً: $g_1(x) = 1 - (1-x) = x$

♦ عندما $x \in [1,2]$ فإن: $|1-x| = -1+x$ إذاً: $g_2(x) = 1-(-1+x) = 2-x$

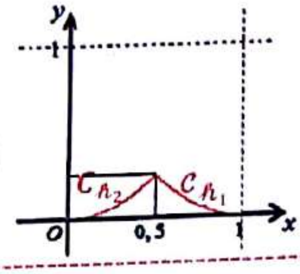


$$\int_0^2 g(x)\ dx = \int_0^1 g_1(x)\ dx + \int_1^2 g_2(x)\ dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (2-x)\, dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right) - (0) + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$\boxed{1}$ $h(x) = \min(x^2, (x-1)^2)$

♦ عندما $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ فإن: $x^2 \le (x-1)^2$ إذا $h_1(x) = x^2$

♦ عندما $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ فإن: $x^2 \ge (x-1)^2$ إذا $h_2(x) = (x-1)^2$



$$\int_0^1 h(x)\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)^2\, dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{24}\right) - (0) + (0) - \left(\frac{-1}{24}\right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

5) احسب التكاملات الآتية:

$\boxed{1}$ $I = \int_2^{-1} (x^2 - 4x + 3)\ dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_2^{-1} = \left(\frac{-1}{3} - 2 - 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) = -6$$

$\boxed{2}$ $I = \int_2^{-1} (x-2)(x^2 - 4x + 3)\ dx$

$$= \int_2^{-1} \frac{1}{2}\left(\underbrace{2x-4}_{H}\right)\left(\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{H^r}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-4x+3)^2}{2}\right]_2^{-1} = \frac{1}{4}\left[(x^2-4x+3)^2\right]_2^{-1} = \frac{1}{4}[64-1] = \frac{63}{4}$$

$\boxed{3}$ $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right)\ dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \ln|t|\right]_1^2 = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \ln t\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 - \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} - \ln 2 = \frac{23}{6} - \ln 2$$

$\boxed{4}$ $I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$$= \int_0^3 (1+t)^{\frac{-1}{2}}\ dt = \left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = 2\left[\sqrt{1+t}\right]_0^3 = 2[2-1] = 2$$

$\boxed{5}$ $I=\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$

$$=\int_1^2 \frac{1}{4}\cdot\frac{(4x^3)^{\nearrow g'}}{(x^4+2)_{\searrow g}}\,dx=\frac{1}{4}\Big[\ln|x^4+2|\Big]_1^2=\frac{1}{4}\Big[\ln(x^4+2)\Big]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}(\ln 18-\ln 3)=\frac{1}{4}\ln\frac{18}{3}=\frac{1}{4}\ln 6$$

$\boxed{6}$ $I=\int_0^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx$

$$=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}=-\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=+\sqrt{2}$$

$\boxed{7}$ $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-3}{x}\,dx$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x}-\frac{3}{x}\right)\,dx=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{3}{x}\right)\,dx=\big[x-3\ln|x|\ \big]_{-2}^{-1}=\big[x-3\ln(-x)\ \big]_{-2}^{-1}$$

$$=(-1-3\ln 1)-2-3\ln 2=1+3\ln 2$$

$\boxed{8}$ $I=\int_0^1 t.e^{t^2-1}\,dt$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\underbrace{2t}_{g'}\cdot\underbrace{e^{t^2-1}}_{e^g}\,dt=\frac{1}{2}\Big[e^{t^2-1}\Big]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

$\boxed{9}$ $I=\int_0^2\sqrt{2x+1}\,dx$

$$=\int_0^2(2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{1}{3}\Big[\sqrt{(2x+1)^3}\Big]_0^2=\frac{1}{3}(\sqrt{125}-1)=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

$\boxed{10}$ $I=\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

$$=\big[\ln|e^x+e^{-x}|\ \big]_0^1=\big[\ln(e^x+e^{-x})\ \big]_0^1=\ln(e+e^{-1})-\ln 2=\ln\left(e+\frac{1}{e}\right)-\ln 2$$

$$=\ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right)-\ln 2=\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

---

6) ليكن f التابع المعرف على $D = R\backslash\{-3\}$ وفق $f(x) = \frac{4x^2-5x+}{x+3}$

1. جد الأعداد c, b, a التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$ اياً يكن x من D

$$\begin{array}{r|l} & 4x-17 \\ \hline x+3 & 4x^2-5x+1 \\ & \mp 4x^2 \mp 12x \\ \hline & -17x+1 \\ & \pm 17x \pm 51 \\ \hline & 52 \end{array} \qquad \begin{array}{l} : \frac{4x^2}{x} = 4x \\ \\ : \frac{-17x}{x} = -17 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 4x - 17 + \frac{52}{x+3} \\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -17 \\ c = 52 \end{array}$$

2. احسب $J = \int_2^0 f(x)\ dx$

$$J = \int_2^0 \left(4x - 17 + \frac{52}{x+3}\right) dx = \left[2x^2 - 17x + 52\ln|x+3|\ \right]_2^0 = \left[2x^2 - 17x + 52\ln(x+3)\ \right]_2^0$$

$$= (0 - 0 + 52\ln 3) - (8 - 34 + 52\ln 5) = 52\ln 3 - 52\ln 5 + 26 = 52(\ln 3 - \ln 5) + 26 = 52\ln\left(\frac{3}{5}\right) + 26$$

---

7) ليكن f التابع المعرف على $D = R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

1. جد الأعداد c, b, a التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ اياً يكن x من D

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$
$$= \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-1 & x \\ & \mp x \pm 1 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad : \frac{x}{x} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \\ f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{array}$$

2. احسب $J = \int_{-3}^0 f(x)\ dx$

$$J = \int_{-3}^0 \left(1 + \frac{2}{x-1} + (x-1)^{-2}\right) dx = \left[x + 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^0$$

$$= \left[x + 2\ln(-x+1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^0$$

$$= \left[x + 2\ln(-x+1) - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0 = \left(0 + 2\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-3 + 2\ln 4 - \frac{1}{-4}\right)$$

$$= 1 + 3 - 2\ln 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} - 2\ln 4$$

---

8) اثبت ان $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ واستنتج قيمة $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$

$$L_1 = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = L_2$$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\Big[x-\ln|1+e^x|\Big]_0^1=\Big[x-\ln(1+e^x)\Big]_0^1$$

$$=(1-\ln(1+e))-(0-\ln 2)=1-\ln(1+e)+\ln 2=1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

---

9) باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ ، $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$ او باية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$, $\cos 4x$ ثم احسب $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^4 x\,dx$

- $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$
- $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$
- $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$ $\qquad$: $\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$=\left(\frac{3\pi}{64}-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{2}\right)-(0-0+0)=\frac{3\pi}{64}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{32}(1)$$

$$=\frac{3\pi}{64}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{32}=\frac{3\pi-8\sqrt{2}+2}{64}$$

---

10) احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

$\boxed{1}$ $I=\int_1^e (x-1)\ln x\,dx$

$$u(x)=\ln x \longrightarrow \grave{u}(x)=\frac{1}{x}$$

$$\grave{v}(x)=x-1\longrightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}-x$$

$$I=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x\right]_1^e=\left[\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\frac{e^2}{4}+e\right]-\left[0-\frac{1}{4}+1\right]$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$

2 $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2 - 1)e^x \, dx$

$u(x) = x^2 - 1 \rightarrow \grave{u}(x) = 2x$

$\grave{v}(x) = e^x \quad \rightarrow v(x) = e^x$

$$I = \Big[(x^2 - 1)\, e^x\Big]_{\ln}^{\ln} - \int_{\ln 2}^{\ln} \underbrace{2xe^x}_{\text{يلزمها تجزئة}} \, dx$$

$u(x) = 2x \longrightarrow \grave{u}(x) = 2$

$\grave{v}(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$$I = \Big[(x^2 - 1)e^x\Big]_{\ln}^{\ln 3} - \left[\Big[2xe^x\Big]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^x \, dx\right]$$

$$= \Big[(x^2 - 1)e^x - 2xe^x + 2e^x \Big]_{\ln 2}^{\ln}$$

$$= \left((\ln^2 3 - 1)e^{\ln 3} - 2(\ln 3)e^{\ln} + 2e^{\ln 3}\right) - \left((\ln^2 2 - 1)e^{\ln} - 2(\ln 2)e^{\ln} + 2e^{\ln 2}\right)$$

$$= (\ln^2 3 - 1)(3) - (2\ln 3)(3) + 6 - (\ln^2 2 - 1)(2) + (2\ln 2)(2) - 4$$

$$= 3\ln^2 3 - 3 - 6\ln 3 + 6 - 2\ln^2 2 + 2 + 4\ln 2 - 4$$

$$= 3\ln^2 3 - 6\ln 3 - 2\ln^2 2 + 4\ln 2 + 1$$

---

3 $I = \int_0^1 (2x + 1)e^{-x} \, dx$

$u(x) = 2x + 1 \longrightarrow \grave{u}(x) = 2$

$\grave{v}(x) = e^{-x} \quad \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$I = \Big[-(2x + 1)e^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x} \, dx$$

$$= \Big[(-2x - 1)e^{-x} - 2e^{-x}\Big]_0^1$$

$$= (-3e^{-1} - 2e^{-1}) - (-1 - 2) = -5e^{-1} + 3$$

$$= \frac{-5}{e} + 3$$

4 $I = \int_1^2 (t - 2)e^{2t} \, dt$

$u(t) = t - 2 \longrightarrow \grave{u}(t) = 1$

$\grave{v}(t) = e^{2t} \quad \longrightarrow v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$

$$I = \Big[\frac{1}{2}(t - 2)e^{2t}\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{2t} \, dt$$

$$= \Big[\frac{1}{2}(t - 2)e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}\Big]_1^2$$

$$= \left(0 - \frac{1}{4}e^4\right) - \left(\frac{-1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^4 + \frac{3}{4}e^2$$

11) **إثبات متراجحة:**

نفترض ان b,a عددان حقيقيان وان $0 \leq a < b \leq \pi$ اثبت صحة المتراجحة

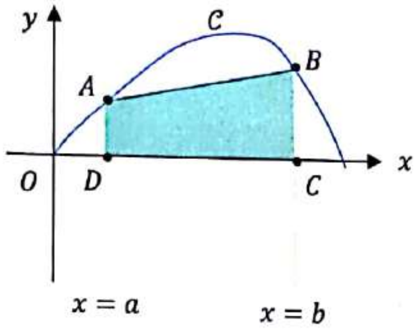
$$\cos \quad -\cos b \geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

نلاحظ انه من تطبيقات التكامل (حساب المساحات) يجب علينا الاستفادة من فكرة التكامل لإثبات صحة المتراجحة.

$$\underbrace{S_1}_{\text{المساحة المحصورة لخط بياني } C_1} \geq \underbrace{S_2}_{\text{المساحة المحصورة لخط بياني } C_2}$$

نلاحظ ان التابع الذي يعطينا الطرف الأيسر من المتراجحة هو $\sin x$ ومجال الدراسة من $[0,\pi]$

وخطه البياني الموضح بالشكل:



إذاً:

♦مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x\acute{x}$ والمستقيمين $x = b\ , x = a$ يعطى:

$$S_C = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \sin x\ dx = \Big[-\cos x\Big]_a^b = -\cos b + \cos a$$

وهو الطرف الأول من المتراجحة $\boxed{S_C = \cos a - \cos b}$

♦مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تعطى:

$$A(a,\sin a)\ ,B(b,\sin b)\ ,D(a,0)\ ,\ C(b,0)$$

$$DA = \sqrt{(a-a)^2 + (\sin a - 0)^2} = \sin a$$

$$CB = \sqrt{(b-b)^2 + (\sin b - 0)^2} = \sin b$$

$$DC = \sqrt{(b-a)^2 + (0-0)^2} = b - a$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \times DC$$

$f(x) = \sin x$ لحسابها

$$A \in C \Rightarrow x_A = a\ : f(a) = \sin a\ : A(a,\sin a)$$

$$B \in C \Rightarrow x_B = b\ : f(b) = \sin b\ : B(b,\sin b)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b)(b-a)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\sin a + \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

$$\left.\begin{array}{l} b > a \ \Rightarrow\ b - a > 0 \\ \sin x \geq 0\ ;\ x \in [0,\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(b-a)\sin a \geq 0$$

$$\Rightarrow\ S_{ABCD} \geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{من الرسم :} & S_C \geq S_{ABCD} \\ \text{و وجدنا :} & S_{ABCD} \geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_C \geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b \\ \cos a - \cos b \geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b \end{array}$$

---

12) **البحث عن تابع اصلي:**

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = e^{2x}\sin x$ عين تابعاً اصلياً F للتابع f

بما ان f مستمر على R فله تابع اصلي ومنه:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\ \ dx = \int_0^x e^{2x}\sin x\ dx$$

$$u(x)=\sin x \longrightarrow \grave{u}(x)=\cos x$$
$$\grave{v}(x)=e^{2x} \longrightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$
$$F(x)=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right]_0^x-\int_0^x \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}\cos x}_{\text{يلزمها تجزئة}}\,dx$$

$$u(x)=\frac{1}{2}\cos x \longrightarrow \grave{u}(x)=\frac{-1}{2}\sin x$$
$$\grave{v}(x)=e^{2x} \longrightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$
$$F(x)=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right]_0^x-\left[\left[\frac{1}{4}e^{2x}\cos x\right]_0^x-\int_0^x -\frac{1}{4}e^{2x}\sin x\ dx\right]$$
$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\underbrace{\int_0^x e^{2x}\sin x\ dx}_{\checkmark}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\widehat{F(x)}$$
$$F(x)+\frac{1}{4}F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}$$
$$\frac{5}{4}F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4} \qquad \left(\div\frac{5}{4}\right)$$
$$F(x)=\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x+\frac{1}{5}$$

---

13) **البحث عن تابع اصلي:**

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-x}$

ايوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F: x \to P(x)e^{-x}$ تابعاً اصلياً للتابع f على R

بما ان $F(x)$ تابع اصلي للتابع f عندئذ:

$$\grave{F}(x)=f(x)$$
$$\grave{P}(x).e^{-x}-e^{-x}P(x)=(1+x+x^2+x^3).e^{-x}$$
$$\left(\grave{P}(x)-P(x)\right).e^{-x}=(1+x+x^2+x^3).e^{-x}$$
$$\grave{P}(x)-P(x)=1+x+x^2+x^3 \qquad \boxed{*}$$

نقسم على $e^{-x}\neq 0$

ومنه نجد ان $P(x)$ كثير حدود من المرتبة الثالثة ولنفرض:

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$\grave{P}(x)=3ax^2+2bx+c$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$$3ax^2+2bx+c-ax^3-bx^2-cx-d=1+x+x^2+x^3$$
$$c-d+(2b-c)x+(3a-b)x^2-ax^3\underset{\text{بالمطابقة}}{=}1+x+x^2+x^3$$

$$\begin{cases} -a=1 \rightarrow \boxed{a=-1} \\ 3a-b=1 \rightarrow 3(-1)-b=1 \rightarrow \boxed{b=-4} \\ 2b-c=1 \rightarrow 2(-4)-c=1 \rightarrow \boxed{c=-9} \\ c-d=1 \rightarrow -9-d=1 \rightarrow \boxed{d=-10} \end{cases}$$

$P(x) = -x^3 - 4x^2 - 9x - 10$

ومنه نجد :

$F(x) = P(x).e^{-x} = (-x^3 - 4x^2 - 9x - 10).e^{-x}$

ويمكن التحقق بسهولة ان $F(x)$ تابع اصلي للتابع f كما يلي :

$$\begin{aligned}\grave{F}(x) &= (-3x^2 - 8x - 9)e^{-x} - e^{-x}(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)\\ &= e^{-x}[-3x^2 - 8x - 9 + x^3 + 4x^2 + 9x + 10]\\ &= e^{-x}(x^3 + x^2 + x + 1) = f(x)\end{aligned}$$

---

14) في كل حالة من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً F للتابع f على المجال I

$\boxed{1}\ f(x) = \dfrac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}$ $\qquad I = R$

$$f(x) = (1-2x)(2x^2-2x+1)^{-3}$$

$$= \frac{-1}{2}\Big(\underbrace{4x-2}_{\grave{H}}\Big)\Big(\underbrace{2x^2-2x+1}_{H^r}\Big)^{-3}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}.\frac{(2x^2-2x+1)^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{1}{4(2x^2-2x+1)^2} + c$$

$\boxed{2}\ f(x) = \cot x$ $\qquad I =]-\pi, 0[$

$$f(x) = \frac{(\cos x)^{\nearrow \grave{g}}}{(\sin x)_{\searrow g}}$$

$$F(x) = \ln|\sin x| + c = \ln(-\sin x) + c$$

$\boxed{3}\ f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}}$ $\qquad I = R$

$$f(x) = (1-x)(x^2-2x-2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2}\Big(\underbrace{2x-2}_{\grave{H}}\Big)\Big(\underbrace{x^2-2x-2}_{H^r}\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}.\frac{(x^2-2x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -\sqrt{x^2-2x-2} + c$$

$\boxed{4}\ f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$ $\qquad I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

تذكر :

$\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad , \quad 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x} + \frac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{-1}{2}.\frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\sin x| + c$$

$$= \frac{-1}{2}\ln(\cos x) + \frac{1}{2}\ln(\sin x) + c$$

$\boxed{5}\ f(x) = (1-2x)^4$ $\qquad I = R$

$$F(x) = \frac{1}{-2}.\frac{(1-2x)^5}{5} + c$$

$$= \frac{-1}{10}(1-2x)^5 + c$$

$\boxed{6}\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}.e^{\frac{-2}{x}}$ $\qquad I = R_+^*$

$$f(x) = \frac{1}{2}.\frac{2}{x^2}.e^{\frac{-2}{x}}$$

لاحظ : $\left(\dfrac{-2}{x}\right)' = \dfrac{2}{x^2}$

$$F(x) = \frac{1}{2}.e^{\frac{-2}{x}} + c$$

$\boxed{7}\ f(x) = 2e^{2-3x}$ $\qquad I = R$

$$F(x) = \frac{2}{-3}.e^{2-3x} + c$$

$\boxed{8}$ $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ $\qquad I = R_+^*$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}\ln x}_{g(x)} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\hbar(x)}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\ln x$$

$$u(x) = \ln x \qquad \longrightarrow \grave{u}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\grave{v}(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \longrightarrow v(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$$

$$G(x) = \left[\frac{-1}{x}\ln x \ \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$= \left(\frac{-1}{x}\ln x\right) - (0) + \int_1^x x^{-2}\ dx$$

$$= \frac{-1}{x}\ln x + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^x \quad = \frac{-1}{x}\ln x + \left(\frac{-1}{x} + 1\right)$$

$$G(x) = \frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + 1$$

$$\hbar(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$H(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$$

$$F(x) = G(x) - H(x) \quad = \frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1$$

$$F(x) = \frac{-1}{x}\ln x + 1$$

$\boxed{9}$ $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ $\qquad I = R_+^*$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\sin x - \frac{1}{x}\cos x = \underbrace{x^{-2}\sin x}_{g(x)} - \underbrace{\frac{1}{x}\cos x}_{\hbar(x)}$$

$$g(x) = x^{-2}\sin x$$

$$u(x) = \sin x \longrightarrow \grave{u}(x) = \cos x$$

$$\grave{v}(x) = x^{-2} \ \longrightarrow \dot{v}(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$$

$$G(x) = \left[\frac{-1}{x}\sin x\right]_0^x + \underbrace{\int_0^x \frac{1}{x}\cos x\ dx}_{H(x)}$$

$$F(x) = G(x) - H(x)$$

$$= \frac{-1}{x}\sin x + \int_0^x \frac{1}{x}\cos x\ dx - \int_0^x \frac{1}{x}\cos x\ dx$$

$$F(x) = \frac{-1}{x}\sin x + c$$

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$ $\qquad I =]-1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x + 2)(x + 1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[(3x + 3) - 1](x + 1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[3(x + 1) - 1](x + 1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3(x + 1)^{\frac{1}{2}} - (x + 1)^{\frac{-1}{2}}\right]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{3(x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{(x + 1)^3} - 2\sqrt{x + 1}\right] + c$$

$$= \sqrt{(x + 1)^3} - \sqrt{x + 1} + c$$

15) في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المعطى.

$\boxed{1}$ $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x}{x - 1}\ dx$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{x - 1 + 1}{x - 1}\ dx = \int_{-2}^{0}\left(1 + \frac{1}{x - 1}\right)dx = \Big[x + \ln|x - 1|\Big]_{-2}^{0} \ = \Big[x + \ln(-x + 1)\Big]_{-2}^{0}$$

$$= (0 + \ln 1) - (-2 + \ln 3) = 2 - \ln 3$$

$\boxed{2}$ $I = \int_0^2 \frac{4x-5}{2x+1}\,dx$

$$= \int_0^2 \left(2 - \frac{7}{2x+1}\right) dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{2x+1}\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{7}{2}\ln|2x+1|\right]_0^2 = \left[2x - \frac{7}{2}\ln(2x+1)\right]_0^2$$

$$= \left(4 - \frac{7}{2}\ln 5\right) - \left(0 - \frac{7}{2}\ln 1\right) = 4 - \frac{7}{2}\ln 5$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2x+1 & 4x-5 \\ & \mp 4x \mp 2 \\ \hline & \quad -7 \end{array}$$

$\boxed{3}$ $I = \int_{-1}^2 \frac{2x}{x^2-9}\,dx$

$$= \left[\ln|x^2-9|\ \right]_{-1}^2 = \left[\ln(-x^2+9)\ \right]_{-1}^2 = \ln 5 - \ln 8 = \ln\frac{5}{8}$$

$\boxed{4}$ $I = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$

$$= \int_0^3 (x+2)(x+1)^{-4}\,dx = \int_0^3 [(x+1)+1](x+1)^{-4}\,dx$$

$$= \int_0^3 \left((x+1)^{-3} + (x+1)^{-4}\right) dx = \left[\frac{(x+1)^{-2}}{-2} + \frac{(x+1)^{-3}}{-3}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{-1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}\right]_0^3 = \left(\frac{-1}{32} - \frac{1}{3(64)}\right) - \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{-7}{3(64)} + \frac{5}{6} = \frac{-7+160}{192} = \frac{153}{192}$$

$\boxed{5}$ $I = \int_0^1 \frac{2x^3-3x-4}{x-2}\,dx$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 + 4x + 5 + 6\frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\ln|x-2|\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\ln(-x+2)\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 2 + 5 + 0\right) - (0 + 0 + 0 + 6\ln 2)$$

$$= \frac{23}{3} - 6\ln 2$$

$$\begin{array}{r|l l} & 2x^2+4x+5 & \\ \hline x-2 & 2x^3-3x-4 & \\ & \mp 2x^3 \pm 4x^2 & : \frac{2x^3}{x} = 2x^2 \\ \hline & 4x^2-3x-4 & \\ & \mp 4x^2 \pm 8x & : \frac{4x^2}{x} = 4x \\ \hline & 5x-4 & \\ & \mp 5x \pm 10 & : \frac{5x}{x} = 5 \\ \hline & \quad 6 & \end{array}$$

$$\boxed{6}\ I = \int_1^2 \frac{8x^2 - 4}{4x^2 - 1}\, dx$$

$$= \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{4x^2 - 1}\right) dx$$

$$= \int_1^2 (2 - \frac{2}{\underbrace{(2x-1)(2x+1)}_{\text{يلزمها تفريق كسور}}})\ dx$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline 4x^2 - 1 & 8x^2 - 4 \\ & \mp 8x^2 \pm 2 \\ \cline{2-2} & \quad -2 \end{array} \qquad :\frac{8x^2}{4x^2} = 2$$

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1}$$

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A(2x+1) + B(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$\boxed{2 = A(2x+1) + B(2x-1)}\quad (*)$$

تعيين A نعوض $x = \frac{1}{2}$ في $(*)$:

$$2 = A(1+1) + 0 \quad \Rightarrow \boxed{\boxed{A = 1}}$$

تعيين B نعوض $x = \frac{-1}{2}$ في $(*)$:

$$2 = 0 + B(-1-1) \Rightarrow \boxed{\boxed{B = -1}}$$

$$I = \int_1^2 \left(2 - \frac{A}{2x-1} - \frac{B}{2x+1}\right) dx = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}\right) dx = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x+1}\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_1^2 = \left[2x - \frac{1}{2}\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_1^2$$

$$= \left(4 - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 5\right) - \left(2 - 0 + \frac{1}{2}\ln 3\right) = 2 - \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 5$$

---

16)في كل من الحالات الآتية جد تابعاً اصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\boxed{1}\ f(x) = \cos^3 x$$

$$f(x) = \cos x . \cos^2 x = \cos x\ (1 - \sin^2 x)$$

$$= \cos x - \underbrace{\cos x}_{\acute{H}} . \underbrace{\sin^2 x}_{H^r}$$

$$F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$\boxed{2}\ f(x) = \sin x + \sin^3 x$$

$$f(x) = \sin x(1 + \sin^2 x)$$

$$= \sin x\ (1 + 1 - \cos^2 x)$$

$$= \sin x\ (2 - \cos^2 x)$$

$$= 2\sin x - \sin x . \cos^2 x$$

$$= 2\sin x + \Big(\underbrace{-\sin x}_{\acute{H}}\Big) . \underbrace{\cos^2 x}_{H^r}$$

$$F(x) = -2\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$\boxed{3}\ f(x) = \sin^3 x . \cos^2 x$$

$$f(x) = \sin x . \sin^2 x . \cos^2 x$$

$$= \sin x\ (1 - \cos^2 x)\ . \cos^2 x$$

$$= \sin x . \cos^2 x - \sin x . \cos^4 x$$

$$= -\ \Big(\underbrace{-\sin x}_{\acute{H}}\Big)\ . \underbrace{\cos^2 x}_{H^r} + \Big(\underbrace{-\sin x}_{\acute{H}}\Big) . \underbrace{\cos^4 x}_{H^r}$$

$$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

17)ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sin^4 x$

1. احسب $f'(x)$, $f''(x)$ واكتب $f''(x)$ بدلالة $f(x)$, $\cos 4x$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 4\sin^3 x \,.\cos x$$

f' اشتقاقي على R

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4[3\sin^2 x\,.\cos x\,.\cos x + (-\sin x)\sin^3 x] \\ &= 4[3\sin^2 x\,.\cos^2 x - \sin^4 x] = 3\times 4\sin^2 x\,.\cos^2 x - 4\sin^4 x \\ &= 3(2\sin x\,.\cos x)^2 - 4\sin^4 x = 3\sin^2 2x - 4\sin^4 x \\ &= 3\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) - 4\sin^4 x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x - 4\sin^4 x \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x - 4f(x)$$

$$4f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x - f''(x) \qquad (\div 4)$$

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}f''(x)$$

2. استنتج تابعاً اصلياً F للتابع f على R

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}f''(x)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}f'(x) + c = \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}(4\sin^3 x\,.\cos x) + c \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \sin^3 x\,.\cos x + c \end{aligned}$$

---

18)ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3.e^{2x}$ جد تابعاً اصلياً F للتابع f على R بالصيغة $F(x) = P(x)e^{2x}$ حيث P تابع كثير حدود.

بما ان $F(x)$تابع اصلي للتابع f عندئذ:

$$F'(x) = f(x)$$

$$P'(x).e^{2x} + 2\,e^{2x}P(x) = x^3.e^{2x}$$

$$\left(P'(x) + 2P(x)\right)e^{2x} = x^3.e^{2x}$$

نقسم على $e^{2x} \neq 0$

$$P'(x) + 2P(x) = x^3 \qquad \boxed{*}$$

ومنه نجد ان $P(x)$كثير حدود من المرتبة الثالثة ولنفرض:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$$3ax^2 + 2bx + c + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3$$

$$3ax^2 + 2bx + c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3$$

$$2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + (c + 2d) \underset{\text{بالمطابقة}}{=} x^3$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \\ 3a + 2b = 0 \rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2b = 0 \rightarrow \boxed{b = \frac{-3}{4}} \\ 2b + 2c = 0 \rightarrow 2\left(\frac{-3}{4}\right) + 2c = 0 \rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}} \\ c + 2d = 0 \rightarrow \frac{3}{4} + 2d = 0 \rightarrow \boxed{d = \frac{-3}{8}} \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow F(x) = P(x).e^{2x} = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right).e^{2x}$$

---

19) نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ثم $I + J$ واستنتج I

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\ \right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I + J = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad I + \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$$

---

20) نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\,\mathrm{si}}\,dx$ احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ثم $I + J$ واستنتج I

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|1+2\sin x|\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+2\sin x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx \qquad : \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x.\cos x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,(2\sin x + 1)}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

$$I + J = 1 \quad \Rightarrow \quad I + \ln\sqrt{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad I = 1 - \ln\sqrt{3}$$

---

21) ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = e^{2x}.\cos x$

1. احسب $f'(x)$ ، $f''(x)$

f اشتقاقي على R

f' اشتقاقي على R

$$f'(x) = 2e^{2x}\cos x - \sin x\, e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x}\cos x - \sin x\,.\,2e^{2x} - (\cos x\, e^{2x} + 2e^{2x}.\sin x)$$

$$= 4e^{2x}\cos x - \sin x\,.\,2e^{2x} - \cos x\, e^{2x} - 2e^{2x}.\sin x$$

$$f''(x) = 3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x$$

2. عين عددين b, a يحققان المساواة $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ ايا كان x

$$L_2 = af'(x) + bf''(x)$$

$$= a(2e^{2x}.\cos x - \sin x\, e^{2x}) + b(3e^{2x}.\cos x - 4\sin x\, e^{2x})$$

$$= 2ae^{2x}.\cos x - a\sin x\, e^{2x} + 3be^{2x}.\cos x - 4b\sin x\ e^{2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} L_2 = (2a+3b)e^{2x}\cos x + (-a-4b)e^{2x}\sin x \\ L_1 = f(x) = e^{2x}.\cos x = 1e^{2x}.\cos x + 0 \end{array}\right\}$$

بالمطابقة $\begin{cases} 2a + 3b = 1 & ① \\ -a - 4b = 0 & ② \end{cases}$

نضرب ② بـ (2) و نجمعها مع ① :

$$\begin{array}{r} 2a + 3b = 1 \\ + \quad -2a - 8b = 0 \\ \hline -5b = 1 \end{array}$$

$$\boxed{b = \frac{-1}{5}}$$

لإيجاد a نعوض قيمة b في ② :

$$-a - 4b = 0$$

$$-a - 4\left(\frac{-1}{5}\right) = 0$$

$$\boxed{a = \frac{4}{5}}$$

إذاً : $f(x) = \frac{4}{5}\,f'(x) - \frac{1}{5}\,f''(x)$

3. استنتج تابعاً اصلياً F للتابع f على R

من الطلب 2 نجد :

$$f(x) = \frac{4}{5}f'(x) - \frac{1}{5}f''(x)$$

$$F(x) = \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x) + C = \frac{4}{5}.e^{2x}\cos x - \frac{1}{5}(2e^{2x}\cos x - \sin x\, e^{2x}) + c$$

$$= \frac{4}{5}.e^{2x}\cos x - \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\, e^{2x} + c$$

$$= \frac{2}{5}.e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}\ e^{2x}\sin x + c$$

---

22) G, F تابعان اصليان للتابعين: $f: x \to \cos(\ln x)$ ، $g: x \to \sin(\ln x)$ على $]0, +\infty[$ ينعدمان عند $x = 1$

انطلاقاً من الصيغتين:

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln x)\ dx \quad , \quad F(x) = \int_1^x \cos(\ln x)\ dx$$

1. اثبت باستعمال التكامل بالتجزئة ان :

$$G(x) = x\sin(\ln x) - F(x) \quad , \quad F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$$

$$*\ F(x) = \int_1^x \cos(\ln x)\ dx$$

$$u(x) = \cos(\ln x) \longrightarrow u'(x) = \frac{-1}{x}\sin(\ln x)$$

$$v'(x) = 1 \qquad \longrightarrow v(x) = x$$

$$F(x)=\Big[x.\cos(\ln x)\Big]_1^x-\int_1^x -\sin(\ln x)\ dx\ =x.\cos(\ln x)-1.\cos(0)+\int_1^x \sin(\ln x)\ dx$$

$$F(x)=x.\cos(\ln x)-1+G(x) \qquad \boxed{1}$$

$$** \ G(x)=\int_1^x \sin(\ln x)\ dx$$

$$u(x)=\sin(\ln x)\longrightarrow \grave{u}(x)=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

$$\grave{v}(x)=1 \qquad \longrightarrow v(x)=x$$

$$G(x)=\Big[x.\sin(\ln x)\Big]_1^x-\int_1^x \cos(\ln x)\ dx\ =x.\sin(\ln x)-1\sin(0)-F(x)$$

$$G(x)=x.\sin(\ln x)-F(x) \qquad \boxed{2}$$

2. استنتج عبارتي $F(x)$, $G(x)$

لدينا من $\boxed{1}$:

$$F(x)=x.\cos(\ln x)-1+\underbrace{G(x)}_{\text{نعوض } 2}$$

$$F(x)=x.\cos(\ln x)-1+x.\sin(\ln x)-F(x)$$

$$2F(x)=x.\cos(\ln x)+x.\sin(\ln x)-1 \qquad (\div 2)$$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)-\frac{1}{2}}$$

لدينا $\boxed{2}$:

$$G(x)=x.\sin(\ln x)-F(x)$$

$$=x.\sin(\ln x)-\left[\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\underline{x.\sin(\ln x)}-\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)\underline{-\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)}+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{G(x)=\frac{1}{2}x.\sin(\ln x)-\frac{1}{2}x.\cos(\ln x)+\frac{1}{2}}$$

---

23) إثبات متراجحة:

1. تيقن انه في حالة $0<x<a$ يكون $\frac{1}{1+a}\le\frac{1}{1+x}\le 1$

نضيف 1 : $0< \ x \ < \ a$

ناخذ مقلوب المتراجحة : $1\le 1+x\le 1+a$

$$1\ge\frac{1}{1+x}\ge\frac{1}{1+a}$$

2. استنتج ان $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$ في حالة $a > 0$

لدينا من الطلب 1 المتراجحة $1 \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{1+a}$

لناخذ : $f(x) = \frac{1}{1+a}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$

لدينابرهاناً من الطلب الأول:

$$\left(g(x) = \frac{1}{1+x}\right) \geq \left(f(x) = \frac{1}{1+a}\right)$$

ومنه: $g(x) \geq f(x)$

$$\int_0^a g(x)\ dx \geq \int_0^a f(x)\ dx \quad \text{حيث } (a > 0)$$

$$\int_0^a \frac{1}{1+x}\ dx \geq \int_0^a \underbrace{\frac{1}{1+a}}_{\text{ثابت}}\ dx$$

$$\Big[\ln(1+x)\Big]_0^a \geq \left[\frac{1}{1+a}x\right]_0^a$$

$$\boxed{\ln(1+a) \geq \frac{a}{1+a}} \quad \boxed{2}$$

لناخذ: $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = 1$

لدينا: $(g(x) = 1) \geq \left(f(x) = \frac{1}{1+x}\right)$ ومنه:

$$g(x) \geq f(x)$$

$$\int_0^a g(x)\ dx \geq \int_0^a f(x)\ dx \quad \text{حيث } (a > 0)$$

$$\int_0^a 1\ dx \geq \int_0^a \frac{1}{1+x}\ dx$$

$$\Big[x\Big]_0^a \geq \Big[\ln(1+x)\Big]_0^a$$

$$\boxed{a \geq \ln(1+a)} \quad \boxed{1}$$

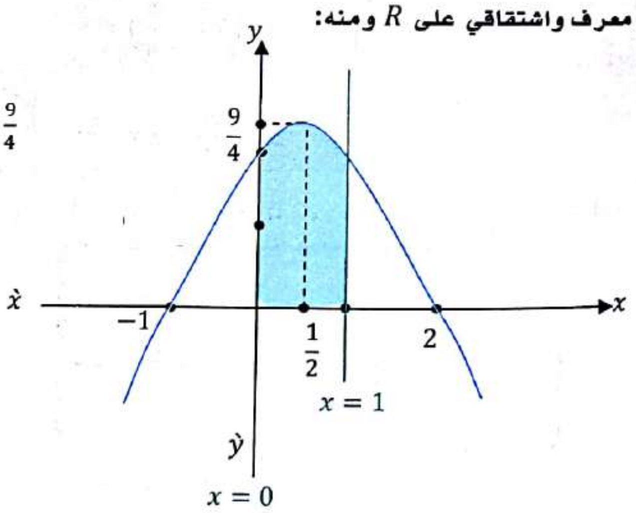
من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد ان: $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$

---

24) فيما يلي ارسم الخط البياني C الذي يمثل التابع f ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$, $x = b$

$\boxed{1}$ $f(x) = 2 + x - x^2$: $a = 0$, $b = 1$

f معرف واشتقاقي على R ومنه:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{aligned} \grave{f}(x) &= 1 - 2x \\ \grave{f}(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \quad : f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$

$$S = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 (2 + x - x^2)\ dx$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{13}{6}$$

$\boxed{2}\ f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ $\quad : a = 1 \quad , \quad b = 4$

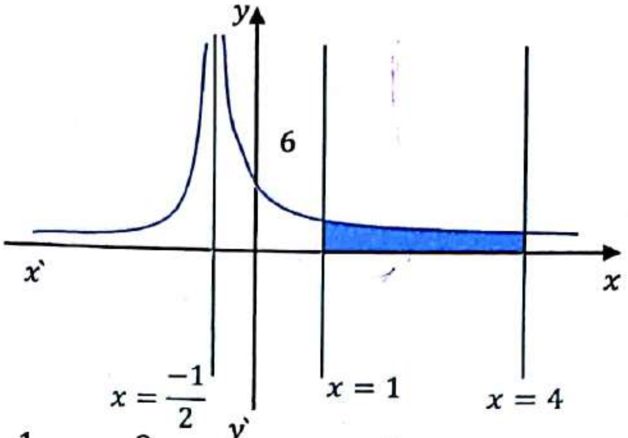
f معرف واشتقاقي على المجال $R \backslash \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ ومنه:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{-1}{2}} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$

$\acute{f}(x) = \frac{-(6)(2)(2x+1)(2)}{(2x+1)^4} = \frac{-24}{(2x+1)^3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0



$$S = \int_1^4 f(x)\ dx = \int_1^4 \frac{6}{(2x+1)^2}\ dx = \int_1^4 6(2x+1)^{-2}\ dx$$

$$= \left[6.\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[\frac{-3}{2x+1}\right]_1^4 = \left(\frac{-3}{9}\right) - \left(\frac{-3}{3}\right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$\boxed{3}\ f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad : a = 0 \quad , \quad b = \frac{\pi}{4}$

نلاحظ ان التابع f دوره π فتكفي دراسة تغيرات التابع f على المجال $[0,\pi]$

f معرف واشتقاقي على $[0,\pi]$

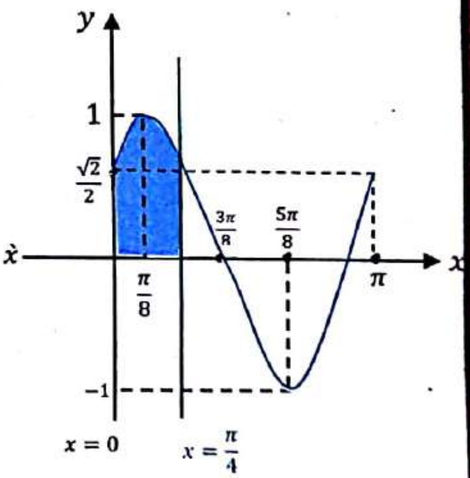
$f(0) = \cos\frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad f(\pi) = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{f}(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\ \acute{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi k \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}}$$

$k = 0 \to x = \frac{\pi}{8} \quad : f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos 0 = 1 \quad , \quad k = 1 \to x = \frac{5\pi}{8} \quad : f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\pi = -1$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\ dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = (x+1).e^{-x}$ $\quad : a = -1 \quad , \quad b = \ln 2$

f معرف واشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\quad +\infty.0$ عدم تعيين ،

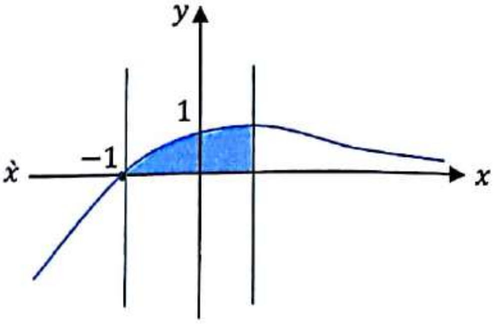
$f(x) = x.e^{-x} + e^{-x} = \frac{x}{e^x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\grave{f}(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x}$

$\grave{f}(x) = 0 \to \boxed{x=0} \quad : f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0



$x = -1 \ \grave{y} \ x = \ln 2$

$$S = \int_{-1}^{\ln 2} f(x)\ dx = \int_{-1}^{\ln 2} (x+1)e^{-x}\ dx$$

$u(x) = x+1 \longrightarrow \grave{u}(x) = 1$

$\grave{v}(x) = e^{-x} \quad \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$S = \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{-1}^{\ln 2} - \int_{-1}^{\ln} -e^{-x}\ dx$$

$$S = \Big[(-x-1)e^{-x}\ \Big]_{-1}^{\ln 2} - \Big[e^{-x}\ \Big]_{-1}^{\ln 2}$$

$$= \Big((-\ln 2 - 1)e^{-\ln 2} - 0\Big) - \left(e^{-\ln 2} - e\right)$$

$$= \frac{-\ln 2 - 1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln}} + e = \frac{-\ln 2 - 1}{2} - \frac{1}{2} + e$$

$$= \frac{-1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + e = -\ln\left(\sqrt{2}\right) - 1 + e$$

---

25)ارسم في جملة متجانسة شكلاً بسيطاً يبين الخطين البيانيين للتابعين:
$x \to \sin x \quad , \quad x \to x.\sin x$ على المجال $[0,\pi]$ موضحاً وضعهما النسبي
ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على $[0,\pi]$

$g(x) = \sin x \quad , \quad f(x) = x\sin x$

لدراسة الوضع النسبي في المجال $[0,\pi]$ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

$f(x) - g(x) = x\sin x - \sin x = (x-1)\sin x$

نلاحظ ان $\sin x > 0$في المجال $[0,\pi]$ ولندرس إشارة $x-1$:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		π
$x-1$		$-$	0	$+$	
لوضع النسبي		C_g تحت C_f		C_g فوق C_f	

لنوجد النقاط المشتركة:

$$\underbrace{f(x) - g(x) = 0 \ \Rightarrow \ (x-1)\sin x = 0}$$

إما $x - 1 = 0$

$\boxed{x = 1}$

او $\sin x = 0$

$$\overbrace{x = \pi k}$$

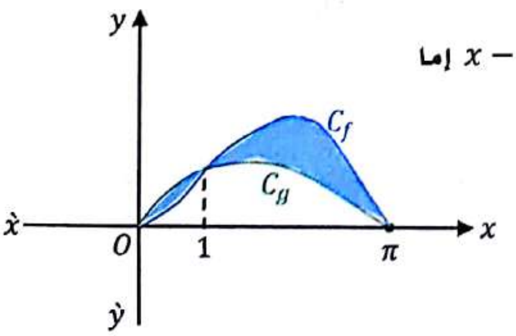
عندما $k = 0$

$\boxed{x = 0}$

عندما $k = 1$

$\boxed{x = \pi}$

برسم تقريبي نجد:



$$S=\underbrace{\int_0^1 \big(g(x)-f(x)\big)\,dx}_{S_1}+\underbrace{\int_1^{\pi}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx}_{S_2}$$

$$S_1=\int_0^1 (\sin x - x.\sin x)\ dx$$

$$=\int_0^1 (1-x)\sin x\ dx$$

$$u(x)=1-x \longrightarrow \grave{u}(x)=-1$$

$$\grave{v}(x)=\sin x \longrightarrow v(x)=-\cos x$$

$$S_1=\Big[-(1-x)\cos x\Big]_0^1-\int_0^1 \cos x\,dx$$

$$=[(-1+x)\cos x-\sin x\ \ ]_0^1$$

$$=(-\sin 1)-(-1-0)=1-\sin 1$$

$$S_2=\int_1^{\pi}(x.\sin x-\sin x)\ dx$$

$$=\int_1^{\pi}(x-1)\sin x\ dx$$

$$u(x)=x-1 \longrightarrow \grave{u}(x)=1$$

$$\grave{v}(x)=\sin x \longrightarrow v(x)=-\cos x$$

$$S_2=\Big[-(x-1)\cos x\Big]_1^{\pi}-\int_1^{\pi}-\cos x\ dx$$

$$=[(-x+1)\cos x+\sin x\ \ ]_1^{\pi}$$

$$=\big((-\pi+1)(-1)+0\big)-(0+\sin 1)$$

$$=\pi-1-\sin 1$$

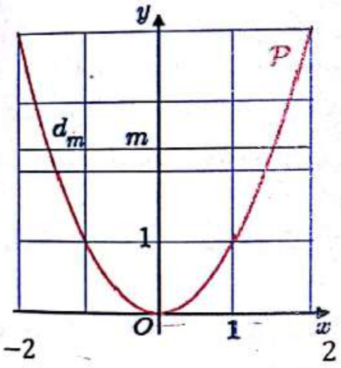
$$S=S_1+S_2 \ \Rightarrow\ S=1-\sin 1+\pi-1-\sin 1$$

$$=\pi-2\sin 1$$

---

26) ليكن P الخط البياني للتابع $x \longmapsto x^2$ مرسوماً على المجال $[-2,2]$. المستقيم d_m الذي معادلته $y=m$ $(0\le m\le 4)$ يقسم داخل جزء القطع المكافئ P إلى منطقتين.

عند اية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟



- حسب اولاً مساحة السطح المحصور بين القطع المكافئ و المستقيم $y=4$

$$S=\int_{-2}^{2}\big(y-f(x)\big)\,dx=2\int_0^2 (4-x^2)\,dx$$

$$=2\left[4x-\tfrac{x^3}{3}\right]_0^2\ =2\left[\left(8-\tfrac{8}{3}\right)-(0-0)\right]=\tfrac{32}{3}$$

- حسب مساحة السطح المحصور بين القطع المكافئ و المستقيم $y=m$

نوجد اولاً نقاط التقاطع: (النقاط المشتركة) $f(x)=y$

$$x^2=m\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{m}\\x=-\sqrt{m}\end{cases}$$

$$S_1=\int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}}\big(y-f(x)\big)\,dx=2\int_0^{\sqrt{m}}(m-x^2)\,dx=2\left[mx-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{m}}$$

$$=2\left[\left(m\sqrt{m}-\frac{m\sqrt{m}}{3}\right)-(0-0)\right]=\frac{4}{3}m\sqrt{m}$$

- لكي تتساوى ساحتي المنطقتين المقسومتين بـ d_m يجب ان يكون:

$$S_1=\tfrac{1}{2}S$$

$$\frac{4}{3}m\sqrt{m}=\frac{1}{2}.\frac{32}{3}\quad\Rightarrow\quad m\sqrt{m}=4$$

$$m^3=16\quad\Rightarrow\quad\boxed{m=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}}$$

27) ليكن f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = (2-x)e^x$

وليكن C خطه البياني في جملة متجانسة:

1. ادرس تغيرات f وارسم C

f معرف واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ عدم تعيين $+\infty . 0$

$$f(x) = 2e^x - xe^x$$

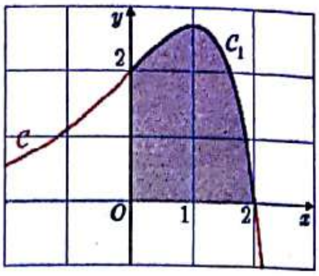
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\grave{f}(x) = -e^x + e^x(2-x) = e^x(-1+2-x) = e^x(1-x)$

$\grave{f}(x) = 0 \to 1-x = 0 \to \boxed{x=1} : f(1) = e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$-\infty$



2. ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 2 , x = 0$

وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل . احسب مساحة S

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2-x).e^x\,dx$$

$u(x) = 2 - x \longrightarrow \grave{u}(x) = -1$

$\grave{v}(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$$S = \left[(2-x)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 -e^x\,dx$$

$$= \left[(2-x)e^x + e^x\right]_0^2 = (0+e^2) - (2+1) = e^2 - 3$$

3. عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V

a) عين الأعداد c, b, a حتى يكون التابع $G: x \to (ax^2 + bx + c).e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x \to (f(x))^2$

Gتابع أصلي للتابع $(f(x))^2$ عندئذ:

$\grave{G}(x) = (f(x))^2$

$(2ax + b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2 + bx + c) = (2-x)^2.e^{2x}$

$(2ax + b + 2ax^2 + 2bx \quad 2c)e^{2x} = (4 - 4x + x^2).e^{2x}$

$[2ax^2 + (2a+2b)x + (b+2c)]e^{2x} \underset{\text{بالمطابقة}}{=} (x^2 - 4x + 4)e^{2x}$

$$\begin{cases} 2a = 1 \quad \to & \boxed{a = \frac{1}{2}} \\ 2a + 2b = -4 \to 1 + 2b = -4 \to & \boxed{b = \frac{-5}{2}} \\ b + 2c = 4 \quad \to \frac{-5}{2} + 2c = 4 \to & \boxed{c = \frac{13}{4}} \end{cases}$$

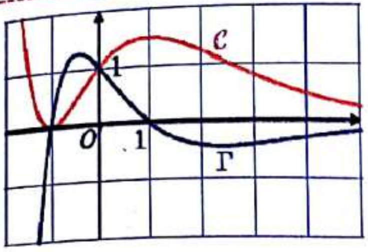
$G(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$

b) استنتج قيمة V

$$V=\pi\int_{0}^{2}\underbrace{\left(f(x)\right)^{2}}_{\downarrow}\,dx$$

G تابع اصلي لـ $\left(f(x)\right)^{2}$

$$V=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^{2}-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}\right]_{0}^{2}$$
$$=\pi\left[\left(2-5+\frac{13}{4}\right)e^{4}-\frac{13}{4}\right]=\frac{\pi}{4}\left(e^{4}-13\right)$$



28) مسالة مركبة:

① في معلم متجانس رسمنا الخطين البيانيين Γ , C لتابعين اشتقاقيين على R نعلم ان احدهما مشتق للآخر، لذلك يمكن أن نرمز إليهما g و $\grave{g}$.

1. بين معللاً اي هذين الخطين هو الخط البياني للتابع g وأيهما لمشتقه.

- الخط C متناقص تماماً في المجال $]-\infty,-1[$ فمشتقه سالب.
- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $]-\infty,-1[$ وهو واقع تحت $x\grave{x}$.
- الخط C متزايد تماماً في المجال $[-1,1]$ فمشتقه موجب.
- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $[-1,1]$ وهو فوق $x\grave{x}$.
- الخط C متناقص تماماً في المجال $]1,+\infty[$ فمشتقه سالب.
- وهذا ما يبينه الخط Γ في المجال $]1,+\infty[$ وهو واقع تحت $x\grave{x}$.
- إذاً C الخط لبياني للتابع g , Γ هو الخط البياني للتابع $\grave{g}$.

2. ما ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0؟

ميل لمماس في نقطة فاصلتها (0) هو $\grave{g}(0)$ ومن الشكل نجد ان $\grave{g}(0)=1$

② نتامل المعادلة التفاضلية: $(E):\quad \grave{y}+y=2(x+1)e^{-x}$

1. اثبت ان $f_0:x\mapsto(x^2+2x)e^{-x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية (E)

$$L_1=\grave{y}+y=(2-x^2)e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$$
$$=e^{-x}(2-x^2+x^2+2x)$$
$$=(2x+2)e^{-x}=2(x+1)e^{-x}=L_2$$

$$f_0=y=(x^2+2x)e^{-x}$$
$$\grave{f}_0=\grave{y}=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(x^2+2x)$$
$$=e^{-x}(2x+2-x^2-2x)$$
$$=(2-x^2)e^{-x}$$

إذاً f_0 حل للمعادلة التفاضلية (E).

2. لتكن $(\grave{E})$ المعادلة التفاضلية $\grave{y}+y=0$

اثبت ان « f حل للمعادلة (E)» يكافئ « $u=f-f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E})$»

ثم حل $(\grave{E})$ واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E).

« f حل للمعادلة $(E):\grave{y}+y=2(x+1)e^{-x}$» $\Leftrightarrow$ « $u=f-f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E}):\grave{y}+y=0$»

$$\grave{f}+f=2(x+1)e^{-x}\quad\Leftrightarrow\quad(f-f_0)'+(f-f_0)=0$$

◆ بفرض f حل للمعادلة (E) لنثبت ان :

$$(f-f_0)'+(f-f_0)=0$$

$$L_1=(f-f_0)'+(f-f_0)$$
$$=f'-f_0'+f-f_0$$
$$=\underbrace{(f'+f)}_{\text{من الفرض}}-\underbrace{(f_0'+f_0)}_{\text{من الفرض}}$$
$$=2(x+1)e^{-x}-2(x+1)e^{-x}=0=L_2$$

إذاً $u=f-f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E})$.

◆ بفرض $u=f-f_0$ حل للمعادلة $(\grave{E})$ ولنثبت ان:

$$f'+f=2(x+1)e^{-x}$$

لدينا من الفرض $y' \quad + \quad y \quad =0$

$$(f-f_0)'+(f-f_0)=0$$
$$f'-f_0' \quad +f-f_0 \quad =0$$
$$(f'+f)-(f_0'+f_0)=0$$

كون f_0هو حل للمعادلة (E)

$$f'+f=\underbrace{f_0'+f_0}$$
$$f'+f=2(x+1)e^{-x}$$

إذاً f حل للمعادلة (E).

- حل المعادلة: $(\grave{E}): y'+y=0$

يكون حلها من الشكل: $u(x)=k.e^{-x}$

- استنتاج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E) يكافئ عندما يكون $(u=f-f_0)$ حل للمعادلة $(\grave{E})$

وبما ان $u(x)=f(x) \quad - \quad f_0(x)$

$$f(x)=u(x) \quad + \quad f_0(x)$$
$$f(x)= \quad k.e^{-x} \; + \; (x^2+2x)e^{-x}$$

3. **إذا علمت أن التابع g من الجزء ① هو حل للمعادلة (E) فاعط صيغة $g(x)$ بدلالة x .**

g حل للمعادلة (E) فهو من الشكل:

$$g(x)=k.e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$$

الخط البياني للتابع g يمر بالنقطة $(0,1)$:

$$g(0)=1$$
$$k+0=1 \Rightarrow \boxed{k=1}$$
$$\Rightarrow g(x)=e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$$
$$=\underbrace{(1+x^2+2x)}\,e^{-x}$$
$$\boxed{g(x)= \quad (x+1)^2e^{-x}}$$

4. **عين h حل المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x=0$.**

h حل للمعادلة (E) فهو من الشكل:

$$h(x)=k.e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$$
$$h(x)=(k+x^2+2x)e^{-x}$$

المماس افقي عند $x=0$ اي $h'(x)=0$ ومنه:

$$h'(x)=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(k+x^2+2x)$$
$$h'(x)=e^{-x}(2x+2-k-x^2-2x)$$
$$\left.\begin{aligned}&h'(x)=e^{-x}(-k-x^2+2)\\&h'(0)=0\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&-k+2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=2}\\&h(x)=(2+x^2+2x)e^{-x}\end{aligned}$$

③ **ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x)= \; (x^2+2x+2)e^{-x}$**

1. **ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيناً نهاياته عند $\infty -$ و $+\infty$.**

fمعرف واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=? \qquad \left(\infty.0 \text{ عدم تعيين}\right)$$

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{e^x}=\frac{x^2}{e^x}+\frac{2x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0+0+0=0 \Rightarrow$ $y=0$ مقارب عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$$\grave{f}(x)=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(x^2+2x+2)$$
$$=e^{-x}(2x+2-x^2-2x-2)=-x^2e^{-x}$$

$\grave{f}(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0}\ :f(0)=2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		2		0

2. ليكن $\grave{C}$ الخط البياني الذي يمثل f في معلم متجانس، اكتب معادلة للمماس T للخط $\grave{C}$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1 وارسم $\grave{C}$ و T

$x=-1\ :f(-1)=e \qquad :\ \Omega\,(-1,e)$

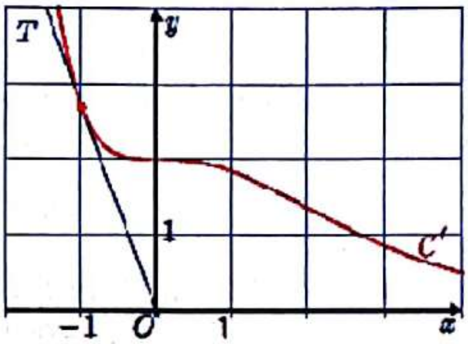
$m=\grave{f}(-1)=-e$

$T:\ y-e=-e(x+1)$

$T:\ \boxed{y=-ex}$

x	0	-1
y	0	e

$(0,0)$, $(-1,e)$



3. عين الأعداد c, b, a حتى يكون التابع $F: x \to (ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على R ثم احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و $\grave{C}$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\alpha\,, x=0$

F تابع أصلي للتابع f إذاً:

$$\grave{F}(x)=f(x)$$
$$(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}(ax^2+bx+c)=(x^2+2x+2)e^{-x}$$
$$(2ax+b-ax^2-bx-c)e^{-x}=(x^2+2x+2)e^{-x}$$
$$\left(-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right)e^{-x}\ \underset{\text{بالمطابقة}}{=}\ (x^2+2x+2)e^{-x}$$

$$\begin{cases}-a=1 \to \boxed{a=-1}\\ 2a-b=2 \to \boxed{b=-4}\\ b-c=2 \to \boxed{c=-6}\end{cases}$$

إذاً: $F(x)=(-x^2-4x-6)e^{-x}$

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\left[F(x)\ \right]_0^{\alpha}=\left[(-x^2-4x-6)e^{-x}\ \right]_0^{\alpha}$$
$$=(-\alpha^2-4\alpha-6)e^{-\alpha}-(-6)$$
$$\boxed{A(\alpha)=(-\alpha^2-4\alpha-6)e^{-\alpha}+6}$$