BAC MATHS	مذاكرة (المستقيمات و المستويات في الفراغ) الدرجة الكاملة : 300	الاسم : المدّة :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : أوجد نقطة تقاطع المستويات :

$$P: 3x - y + z = 5 \quad , \quad Q: 2x + y - z = 0 \quad , \quad R: x - 2y + z = 0$$

السؤال الثاني: نتأمّل المستوي $P: 2x - y + 2z = 0$ و المستقيم ذي المعادلات الوسيطيّة $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

1) أثبت أنّ المستقيم d يوازي المستوي P .
2) احسب بعد المستقيم d عن المستوي P .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: نتأمّل المستقيمين : $d_2: \begin{cases} x = 4 - s \\ y = 2s \\ z = 2 - s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$, $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المستقيمين متعامدان .
2) أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيمين d_1 و d_2 .
3) اكتب معادلة المستوي P الذي يشمل المستقيمين d_1 و d_2 .

التمرين الثاني: نتأمّل المستويين : $Q: x + y + z = 0$, $P: x - 3y + 2z = 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المستويين متقاطعان .
2) اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم Δ الذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين P و Q .
3) اكتب معادلة المستوي R الذي يمر بالمبدأ O و يعامد المستويين P و Q .

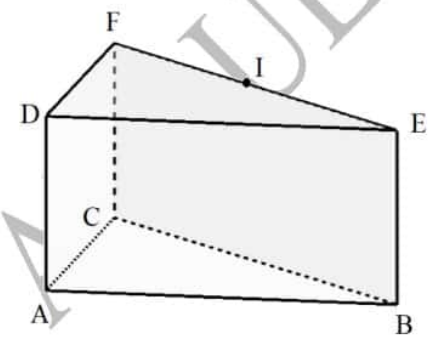
ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

نتأمّل جانباً الموشور ABCDEF قاعدته المثلث ABC قائم الزاوية .

[AD] عمودي على المستوي ABC , النقطة I منتصف [FE]

نعلم أنّ $AD = 1$, $AC = 2$, $AB = 4$

نختار المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. **المطلوب :**



1) أوجد إحداثيّات النقاط A , B , C , D , E , F , I .
2) اكتب معادلة ديكارتيّة للمستوي ACI .
3) اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم (DE) .
4) استنتج أنّ J منتصف [DE] هي نقطة تقاطع المستقيم (DE) مع المستوي ACI .

-------- انتهت الأسئلة --------

A.ULMALEK KHAIRULLAH

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

هل مذاكرة المستقيمات والمستويات في الفراغ "1"

أولاً: السؤال الأول:

$$x-2y+z=0 \quad \text{——} \quad (L_1)$$
$$2x+y-z=0 \quad \text{——} \quad (L_2)$$
$$3x-y+z=5 \quad \text{——} \quad (L_3)$$

$$x-2y+z=0 \quad \text{——} \quad (L_1)$$
$$-5y+3z=0 \quad \text{——} \quad (2L_1-L_2)\ (L_2')$$
$$-5y+2z=-5 \quad \text{——} \quad (3L_1-L_3)\ (L_3')$$

$$\boxed{z=5} \qquad (L_2'-L_3')$$

نعوّض في L_2' :

$$-5y+15=0$$
$$\Rightarrow \boxed{y=3}$$

نعوّض في (L_1) :

$$x-6+5=0$$
$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\boxed{I(1,3,5)}$$

السؤال الثاني :

1) $\vec{n_p}(2,-1,2)$, $\vec{v_d}(1,4,1)$

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}=(2)(1)+(-1)(4)+(2)(1)$$
$$=2-4+2=0$$
$$\vec{n}\perp\vec{v}$$

فالمستقيم d يوازي المستوي P.

2) لتكن K نقطة من المستقيم d :

$$K(3+t;\ 2+4t;\ 1+t)$$

$$dist(K,P)=\frac{|6+2t-2-4t+1+2t|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2$$

ثانياً: التمرين الأول:

1) $\vec{v_1}(1,2,3)$, $\vec{v_2}(-1,2,-1)$

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=-1+4+(-3)=0$$

فالمستقيمان d_1 و d_2 متعامدان .

2)

$$3+t=4-s \quad \text{——} \quad (1)$$
$$2+2t=2s \quad \text{——} \quad (2)$$
$$1+3t=2-s \quad \text{——} \quad (3)$$

من (1) نجد :

$$t=1-s$$

نعوّض في (2) :

$$2+2(1-s)=2s$$
$$2+2-2s=2s$$
$$4s=4$$
$$\boxed{s=1}$$
$$\Rightarrow \quad t=1-1=0$$
$$\boxed{t=0}$$

نعوّض قيم s و t في (3) للتحقق :

$$1+3(0)\overset{?}{=}2-(1)$$
$$1=1 \quad \text{محققة .}$$

نعوّض $t=0$ في المعادلات الوسيطية للمستقيم d_1 :

$$x=3 \qquad y=2 \qquad z=1$$

$$\boxed{I(3,2,1)}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

-3 طريقة أولى: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P نحقق:

$$\vec{n}\cdot\vec{v_1}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a+2b+3c=0} \quad (1)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v_2}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\boxed{-a+2b-c=0} \quad (2)$$

بجمع (1) و (2): $4b+2c=0$

$$\boxed{c=-2b}$$

نفرض $b=1$ و $a=4$ عندها $c=-2$

$$\vec{n}(4,1,-2)$$

معادلة المستوي من الشكل:

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

$$4(x-3)+(1)(y-2)-2(z-1)=0$$

$$\boxed{P:\ 4x+y-2z-12=0}$$

طريقة ثانية: المستوي P موجه بالمتجهين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ ويمر بالنقطة I:

$$\vec{IM}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}$$

$$\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\2\alpha+2\beta\\3\alpha-\beta\end{pmatrix}$$

بالمطابقة:

$$x-3=\alpha-\beta \quad (1)$$

$$y-2=2\alpha+2\beta \quad (2)$$

$$z-1=3\alpha-\beta \quad (3)$$

بضرب (1) ب 4 و (3) ب (-2):

$$4x-12=4\alpha-4\beta$$

$$y-2=2\alpha+2\beta$$

$$-2z+2=-6\alpha+2\beta \quad +$$

$$4x+y-2z-12=0$$

وهي معادلة المستوي P.

التمرين الثاني:

-1

$$\left.\begin{matrix}\vec{n_P}(1,-3,2)\\ \vec{n_D}(1,1,1)\end{matrix}\right\} \quad \frac{1}{1}\neq\frac{-3}{1}\neq\frac{2}{1}$$

المتجهتان غير متناسبتين فالمستقيمان غير متوازيين حتما والمستويان P و Q متقاطعان.

-2 بإيجاد التقاطع:

$$x+y+z=0 \quad (*)$$

$$-x+3y+2z=0 \quad (**) \quad -\ +$$

$$0+4y-z=0$$

$$z=4y$$

نعوض في (*):

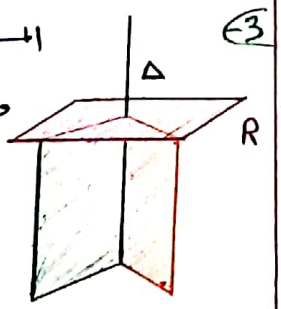
$$x+y+4y=0$$

$$x=-5y$$

نفرض: $y=t$

$$\Delta:\begin{cases}x=-5t\\y=t\\z=4t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

-3 المستقيم (Δ) ناظمي على المستوي R ومنه: $\vec{n_R}=\vec{v_\Delta}(-5,1,4)$



$$R:\ ax+by+cz+d=0$$

$$-5x+y+4z+d=0$$

نعوض إحداثيات (O): $0+d=0$

$$\Rightarrow \boxed{R:\ -5x+y+4z=0}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين 1:

1) $A(0,0,0)$ ، $B(4,0,0)$ ، $C(0,2,0)$

$D(0,0,1)$ ، $E(4,0,1)$ ، $F(0,2,1)$

$I(2,1,1)$

2) معادلة المستوي ACI من الشكل:

$ax+by+cz+d=0$

مفوض $A(0,0,0)$:

$0+d=0$

$\boxed{d=0}$

$\Rightarrow ax+by+cz=0$

مفوض $C(0,2,0)$:

$0+2b+0=0$

$2b=0$

$\boxed{b=0}$

$\Rightarrow ax+cz=0$

مفوض $I(2,1,1)$:

$2a+c=0$

$c=-2a$

$ax-2az=0 \quad (\div a)$

$\boxed{ACI: x-2z=0}$

3) $\vec{DE}(4,0,0)$

$(DE): \begin{cases} x=4t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

4) $J\left(\frac{x_D+x_E}{2}, \frac{y_D+y_E}{2}, \frac{z_D+z_E}{2}\right)$

$J(2,0,1)$

لتكن N نقطة تقاطع (DE) مع (ACI):

مفوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (DE)

في معادلة المستوي (ACI):

$4t-2=0$ $\quad \boxed{t=\frac{1}{2}}$

$x=4\left(\frac{1}{2}\right)=2$ ، $y=0$، $z=1$

$N(2,0,1)$

نلاحظ أن $J=N$

فالنقطة J هي ذاتها نقطة تقاطع (DE) مع المستوي (ACI).

5. طلب إضافي: أذكر مقطع الموشور بالمستوي (ACI) معيناً طبيعة المقطع وحساحته.

المقطع هو الرباعي $ACIJ$

وهو شبه منحرف قاعدته الكبرى $[AC]$

وقاعدته الصغرى $[IJ]$ وارتفاعه $[AJ]$.

$S=\frac{AC+IJ}{2}.AJ=\frac{2+1}{2}.\sqrt{5}$

$S=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

+ احسب حجم الهرم $D.ACIJ$.

$V=\frac{1}{3}.S.h \quad ; \quad h=dist_{(D,ACI)}$

$h=\frac{|0-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{5}}{2}.\frac{2}{\sqrt{5}}=1$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner