

استنتج علاقة الطاقة الميكانيكية الكلية في الهزاز التوافقية البسيطة (النواس المرن) بدلالة سعة الاهتزاز. وارسم المخطط البياني للطاقة الميكانيكية والطاقة الكامنة بدلالة المظالم، وارسم منحنى تغيرات كل من (E_p, E_k) بدلالة الزمن أثناء اهتزاز النواس المرن

$$E = E_p + E_k \Rightarrow E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\bar{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \bar{v} = (\bar{x})_t = -\omega_0 x_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{لكن}$$

$$E = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m \frac{k}{m} x_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}kx_{max}^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \text{const}$$

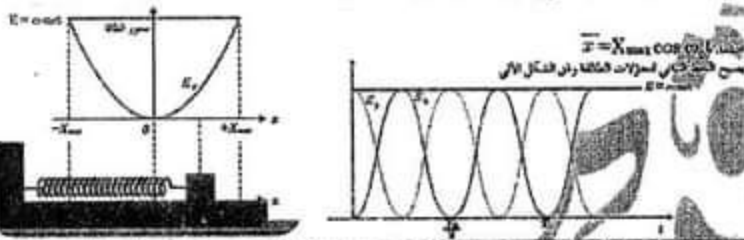
إن الطاقة الكلية في الحركة التوافقية البسيطة ثابتة وتتناسب طردياً مع مربع سعة الاهتزاز مناقشة تغيرات الطاقة:

في الوضعين الطرفين: $v = 0 \Rightarrow E_k = 0 \Rightarrow E = E_p$

في وضع التوازن: $x = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow E = E_k$

عند الاقتراب من وضع التوازن: E_p تنقص $\Rightarrow E_k$ تزداد $\Rightarrow v$ تزداد

عند الابتعاد عن وضع التوازن: E_p تزداد $\Rightarrow E_k$ تنقص $\Rightarrow v$ تنقص



أثبت صحة العلاقة: $v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقية البسيطة

$$E_{tot} = E_p + E_k \Rightarrow \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} \quad \text{لكن}$$

$$\frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0^2} v^2$$

$$X_{max}^2 = x^2 + \frac{1}{\omega_0^2} v^2 \Rightarrow (X_{max}^2 - x^2) = \frac{v^2}{\omega_0^2}$$

$$v^2 = \omega_0^2 (X_{max}^2 - x^2) \Rightarrow v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

جسم معلق بنابض مرن شاقولي حلقته متباعدة يهتز بدوره الخاص، ما نوع حركة الجسم بعد انقصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتيين، ولماذا؟
 أ. مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟
 ب. المظالم الأعظمي الموجب؟

لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط $\vec{W} = m\vec{g}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \text{const}$$

- الانفصال في مركز الاهتزاز: قذف شاقولي نحو الاعلى لأن الجسم مزود بسرعة ابتدائية الحركة المستقيمة متغيرة بانتظام. طورها الاول صعود (متباطئة بانتظام) وطورها الثاني هبوط (متسارعة بانتظام).
- لانفصال في المظالم الأعظمي الموجب: سقوط حر: لأن السرعة الابتدائية للجسم معدومة

الوحدة الأولى: الحركة والتحرك

المركبة التوافقية البسيطة (النواس المرن)

برهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع تعطي بالعلاقة: $\vec{F} = -k\vec{x}$

جملة المقارنة: خارجية جملة المدروسة: (جسم - نابض) حالة سكون:

يؤثر على الجسم: قوة ثقل الجسم \vec{W} ، قوة ثقل النابض \vec{F}_{S_0} .

يؤثر على النابض: $\vec{F}_{S_0'}$ قوة يؤثر فيها الجسم بنهاية النابض. (القوة التي تسبب للنابض الاستطالة X_0)

$$F_{S_0} = F_{S_0'} \Rightarrow F_{S_0'} = kx_0$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{W} + \vec{F}_{S_0} = \vec{0}$$

نسقط على الشاقولي الموجه نحو الأسفل:

$$w - F_{S_0} = 0 \Rightarrow w = F_{S_0} = F/S_0 \Rightarrow mg = kx_0 \dots (1)$$

حالة حركة:

يؤثر على الجسم: \vec{W} قوة ثقل الجسم، \vec{F}_S قوة توتر النابض.

يؤثر على النابض: \vec{F}_S' قوة يؤثر فيها الجسم بنهاية النابض.

(القوة التي تسبب للنابض الاستطالة $X_0 + \bar{x}$)

$$F_S = F_S' \Rightarrow F_S' = k(X_0 + \bar{x})$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{F}_S = m\vec{a}$$

نسقط على الشاقولي الموجه نحو الأسفل:

$$w - F_S = m\vec{a} \Rightarrow mg - k(X_0 + \bar{x}) = m\vec{a} \Rightarrow mg - kx_0 - k\bar{x} = m\vec{a}$$

بالاستفادة من العلاقة 1

$$kx_0 - kx_0 - k\bar{x} = m\vec{a} \Rightarrow -k\bar{x} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = -k\bar{x} = m\vec{a}$$

إن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع لأنها تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً، وهي تتناسب طردياً مع المظالم، وتعاكسه بالإشارة.

انطلاقاً من العلاقة $m\vec{a} = -k\vec{x}$ برهن أن حركة النواس المرن عن المتناقص حركة جيبيّة انشعابية، ومن ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس.

$$\vec{F} = -k\vec{x} = m\vec{a}$$

$$m\vec{a} = -k\vec{x} \Rightarrow m(\vec{x})''t = -k\vec{x} \Rightarrow (\vec{x})''t = -\frac{k}{m}\vec{x} \dots (1)$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تنحل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\vec{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

بالاشتقاق مرتين: $\vec{v} = (\vec{x})_t = -\omega_0 x_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\vec{a} = (\vec{v})_t = -\omega_0^2 x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\vec{x})''t = -\omega_0^2 \vec{x} \dots (2)$$

بالمساواة بين (1) و (2): $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ وهذا محقق لأن k, m موجبان، فالحركة جيبيّة انشعابية

$$\left. \begin{matrix} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \end{matrix} \right\} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{استنتاج الدور}$$

من العلاقة السابقة نستنتج أن الدور الخاص:

- لايتعلق بسعة الاهتزاز X_{max} .
- يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لكثافة الجسم المهتز m .
- يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k .

اذكر نص نظرية برنولي، واستنتج العمل الكلي لتيارات السائل متوصلاً إلى:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{const}$$

نص لنظرية برنولي: مجموع الطاقة الحركية والضغط لوحدة الحجم والطاقة الكامنة الثقالية لوحدة الحجم تساوي مقدراً ثابتاً عند أية نقطة من نقاط خط الانسياب المائع جريانه مستقر

الاستنتاج:

العمل الكلي المبدول لتحويل كتلة السائل من المقطع الأول إلى المقطع الثاني هو مجموع عمل قوة ثقل السائل وعمل قوة ضغط السائل:

- عمل قوة ثقل السائل:

$$\bar{W}_{\bar{W}} = -m \cdot g \cdot h = -mg(z_2 - z_1) = -mgz_2 + mgz_1$$

- عمل قوة ضغط السائل:

\bar{F}_1 : قوة تؤثر على المقطع S1 لها جهة الجريان أي تقوم بعمل موجب (محرك)

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \cdot S_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \cdot \Delta V_1$$

\bar{F}_2 : قوة تؤثر على المقطع S2 لها جهة تعاكس جريان السائل تقوم بعمل سالب (مقاوم)

$$W_2 = -F_2 \cdot \Delta x_2 = -P_2 \cdot S_2 \cdot \Delta x_2 = -P_2 \cdot \Delta V_2$$

ويصبح العمل الكلي: $\bar{W}_{\text{tot}} = \bar{W}_{\bar{W}} + \bar{W}_{\bar{F}_1} + \bar{W}_{\bar{F}_2}$

$$\bar{W}_{\text{tot}} = -mgz_2 + mgz_1 + P_1 \cdot \Delta V_1 - P_2 \cdot \Delta V_2 \dots \dots (1)$$

وبحسب مصونية الطاقة فإن:

$$\bar{W}_{\text{tot}} = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_1^2 \dots \dots (2)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد أن:

$$-mgz_2 + mgz_1 + P_1 \cdot \Delta V_1 - P_2 \cdot \Delta V_2 = \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_1^2$$

حيث $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$

(نقل كل حد في 1 إلى طرف و 2 إلى الطرف الآخر)

$$P_1 \Delta V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = P_2 \Delta V + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2$$

(نقسم الطرفين على وحدة الحجم ΔV)

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 \quad (\rho = \frac{m}{\Delta V} \text{ ولكن})$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{const} \quad \text{معادلة برنولي}$$

فسر علمياً انطلاقاً من معادلة برنولي: إذا كان الأنبوب أفقياً أي عندما ($z_1 = z_2$) يزداد الضغط في نقطة منه عندما تقل السرعة.

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{const}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (z_1 = z_2)$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

نستنتج أن ضغط السائل يقل عندما تزداد سرعته لأن الارتفاع نفسه يكون $h = \text{const}$ وبالتالي يزداد الضغط بنقصان السرعة.

انطلاقاً من معادلة برنولي نستنتج معادلة المانومتر باعتبار أن السائل ساكن (قانون الضغط في السوائل الساكنة)، وماذا يستفاد من هذه المعادلة.

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{const}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

بفرض أن السائل ساكن في الأنبوب أي أن: $v_1 = v_2 = 0$

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1)$$

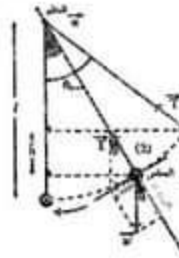
$$P_1 - P_2 = \rho g h$$

وهذه معادلة المانومتر (قانون الضغط في السوائل الساكنة)، ويستفاد منها في قياس فرق الضغط بين نقطتين لسائل ساكن.

استنتج: علاقة توتر خيط تحليق النواس البسيط في موضع يصبح مع الشاقول زاوية θ .

جملته المقارنة: خارجية. الجملته المدروسة: كرة النواس

القوة الخارجية المؤثرة: \vec{W} ثقل الكرة، \vec{T} توتر الخيط.
نطبق العلاقة الأساسية بالحركية الانسحابي:



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

بالإسقاط على الناطم \vec{nn} منطبق على حامل \vec{T} وبجهته:

$$-m \cdot g \cdot \cos\theta + T = m \cdot a_c$$

$$T = m \cdot a_c + m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$T = m \cdot \frac{v^2}{l} + m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$T = m \cdot \frac{2g \cdot l (\cos\theta - \cos\theta_{\max})}{l} + m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$T = 2m \cdot g (\cos\theta - \cos\theta_{\max}) + m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$T = 2m \cdot g \cdot \cos\theta - 2m \cdot g \cdot \cos\theta_{\max} + m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$T = 3m \cdot g \cdot \cos\theta - 2m \cdot g \cdot \cos\theta_{\max}$$

$$T = m \cdot g (3\cos\theta - 2\cos\theta_{\max})$$

ميكانيك السوائل

فسر الدورة السوائل والغازات على حرية الحركة والجريان وعلى إشغال كامل حجم الوعاء الذي يحتويها تتميز السوائل والغازات بقوى تماسك ضعيفة جزئياً بين جزيئاتها فهي، لاتحافظ على شكل معين وتتحرك جزيئاتها بحيث تأخذ شكل الوعاء الذي توضع فيه وهو: لتجنب بسهولة للقوى الخارجية التي تحاول تغيير شكلها، لذلك تسمى السوائل والغازات بالسوائل.

عرف كلاً مما يلي:

- 1- الجريان المستقر المنتظم: تكون فيه سرعة جسيمات السائل ثابتة مع مرور الزمن في النقطة نفسها من خط الانسياب، وتبقى هذه السرعة ثابتة في جميع نقاط السائل مع مرور الزمن.
- 2- الجريان المستقر غير المنتظم: تكون فيه سرعة جسيمات السائل ثابتة مع مرور الزمن في النقطة نفسها من خط الانسياب، وتتغير هذه السرعة من نقطة إلى أخرى مع مرور الزمن.
- 3- جسيم السائل: جزء من السائل أبعاده صغيرة جداً بالنسبة لأبعاد السائل وكثيرة بالنسبة لأبعاد جزيئات السائل.
- 4- أنبوب التدفق: الأنبوب وهمي الذي يجري السائل بداخله أو أنبوب وهمي يحتوي على السائل.
- 5- خط الانسياب (خط الجريان): خط وهمي يبين المسار الذي يسلكه جسيم من السائل أثناء جريانه ويمس في كل نقطة من نقاطه شعاع السرعة في تلك النقطة.
- 6- المنسوب الكتلي: كتلة كمية السائل التي تعبر مقطع الأنبوب في وحدة الزمن $Q = \frac{m}{\Delta t}$
- 7- المنسوب الحجمي (معدل التدفق الحجمي أو معدل الضخ):

$$Q' = \frac{V}{\Delta t} \quad \text{حجم كمية السائل التي تعبر مقطع الأنبوب في وحدة الزمن}$$

اكتب مع الشرح ميزات (خصائص) التي يتمتع بها السائل المثالي.

- 1- غير قابل للانضغاط: كتلته الحجمية ثابتة مع مرور الزمن.
- 2- عديم اللزوجة: تهمل قوى الاحتكاك الداخلي بين مكوناته.
- 3- مهملة عندما تتحرك بالنسبة لبعضها البعض، وبالتالي لا يوجد ضياع للطاقة.
- 4- جريانه مستقر: أي أن حركة جسيماته لها خطوط انسياب محددة وسرعة جسيماته عند نقطة معينة تكون ثابتة بمرور الزمن.
- 4- جريانه غير دوراني: لا تتحرك جسيمات السائل حركة دورانية حول أي نقطة في مجرى الجريان

عندما يتحرك سائل داخل أنبوب، فلنأخذ طرفه مشتقان S1, S2 استنتج معادلة الاستمرارية، انطلاقاً من علاقة المنسوب الحجمي، مبرها أن: سرعة السائل تزداد كلما نقص سطح مقطع الأنبوب الذي يجري فيه السائل.

$$Q'_1 = Q'_2 \Rightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow$$

$$S_1 \cdot x_1 = S_2 \cdot x_2 \xrightarrow{x=v \cdot t} S_1 \cdot v_1 \Delta t = S_2 \cdot v_2 \Delta t$$

$$Q' = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const} \quad ; \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}$$

من هذه العلاقة نلاحظ أن سرعة تدفق السائل تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب الذي يتدفق منه السائل.

لاهرتات غير التوافقية (النواس الثقلي غير المتعامد)

نعلق جسماً كتلته m ومركز عطالته C الى محور دوران افقي، ادريس حركته عندما يوتر بعد إزاحته بمطال زاوي θ باستخدام نظرية التسارع الزاوي متوصلاً إلى المعادلة التفاضلية.

جملة المقارنة: خارجية الجملة المدروسة: جسم صلب

القوى الخارجية المؤثرة: \vec{W} ثقل الجسم، رد فعل محور الدوران \vec{R}

نطبق نظرية التسارع الزاوي: $\sum \vec{\Gamma}_F = I_{\Delta} \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\Gamma}_{\vec{W}} + \vec{\Gamma}_{\vec{R}} = I_{\Delta} \vec{\alpha}$

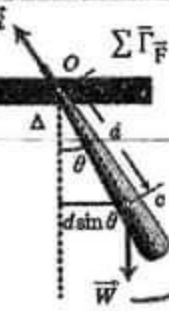
$\vec{\Gamma}_{\vec{R}} = 0$ لأن حامل \vec{R} يلاقي محور الدوران

$\vec{\Gamma}_{\vec{W}} = -d' \cdot w$

ولكن $\sin \theta = \frac{d'}{oc} \Rightarrow d' = oc \cdot \sin \theta$

حيث $oc = d$ ، $\vec{\Gamma}_{\vec{W}} = -mgd \sin \theta$

حيث: $I_{\Delta} \vec{\alpha} = -mgd \cdot \sin \theta$



$\Rightarrow (\ddot{\theta})_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \sin \theta$

ومن ذلك فإن حركة النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية.

انطلاقاً من العلاقة $(\ddot{\theta})_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \sin \theta$ من أجل سعات صغيرة برهن أن حركة النواس الثقلي المركب غير المتعامد هي حركة جيبية دورانية ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس مبيناً دلالات الرموز.

من أجل السعات الصغيرة $\theta \leq 14^\circ, \theta \leq 0.24 \text{ rad}$ أي $\sin \theta \approx \theta$

$$(\ddot{\theta})_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \theta \dots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

بالاشتقاق مرتين:

$$\bar{w} = (\dot{\theta})_t = -\omega_0 \theta_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\bar{\alpha} = (\ddot{\theta})_t = -\omega_0^2 \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = -\omega_0^2 \bar{\theta} \dots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد: $\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_{\Delta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_{\Delta}}} > 0$

وهذا محقق لأن المقادير g, m, d, I_{Δ} موجبة فحركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها ω_0

استنتج علاقة الدور: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgd}{I_{\Delta}}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$

ولا يتغير الدور بتغير السعة الزاوية طالما كانت صغيرة

مع يتألف النواس الثقلي البسيط نظرياً وعملياً (أو عرف النواس الثقلي البسيط نظرياً وعملياً)

عملية كرة صغيرة كتلتها m مكافئتها النسبية كبيرة معلقة بخيط خفيف مهمل الكتلة لا يمتط

طوله l كبير أمام نصف قطر الكرة.

نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت.

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{W} = m\vec{g}$ ثقل الكرة. \vec{T} توتر الخيط.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$

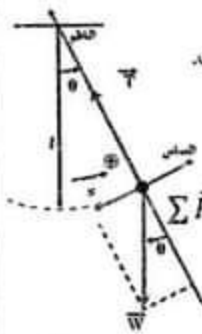
بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة:

$$-m g \sin \theta + 0 = m \bar{a}_t$$

$$\bar{a}_t = l \bar{\alpha} = l (\ddot{\theta})_t$$

$$(\ddot{\theta})_t = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

نعوض في العلاقة السابقة مع الاختصار



انطلاقاً من العلاقة $(\ddot{\theta})_t = -\frac{g}{l} \sin \theta$ من أجل سعات صغيرة برهن أن حركة النواس الثقلي البسيط غير المتعامد هي حركة جيبية دورانية ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس مبيناً دلالات الرموز.

$$(\ddot{\theta})_t = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة $\theta \leq 0.24 \text{ rad}$

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$(\ddot{\theta})_t = -\frac{g}{l} \theta \dots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

باشتقاق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن نجد: $(\ddot{\theta})_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \dots (2)$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد: $\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$

وهذا محقق: لأن g, l مقداران موجبان، فحركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية نبضها الخاص ω_0 .

استنتج علاقة الدور الخاص للاهتزاز: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في السعات الصغيرة.

ولملاحظة هامة: يمكن الوصول لعلاقة الدور الخاص للنواس البسيط انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص للناس الثقلي المركب في حالة السعات الزاوية الصغيرة، وذلك بتعويض كل من:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m l^2}{m g l}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

في علاقة الدور: $d = l, I_{\Delta} = m l^2$

من العلاقة السابقة نستنتج أن الدور الخاص:

لا يتصلق دور النواس البسيط بكتلته، ولا بنوع مادة كرتة.

النوسات صغيرة السعة لها الدور نفسه (متوافقة فيما بينها)

تناسب دور النواس البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة:

طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط l

عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية g .

استنتج العلاقة المحددة للسرعة الخطية لكرة النواس في لحظة من مساره

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: لحظة ترك الكرة بدون سرعة ابتدائية: $\bar{\theta}_1 = \theta_{\max}$

الثاني: لحظة المرور: $\bar{\theta}_2 = \theta$

$$\sum \bar{w}_F = \Delta \bar{E}_k \Rightarrow \bar{w}_{\vec{W}} + \bar{w}_{\vec{T}} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$E_{k1} = 0 \quad (\text{ترك دون سرعة ابتدائية } v = 0)$$

$$\bar{w}_{\vec{T}} = 0 \quad \text{لأن حامل } \vec{T} \text{ عمودي على الانتقال في كل لحظة}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

من الشكل: $h = l \cdot \cos \theta - l \cdot \cos \theta_{\max}$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot l (\cos \theta - \cos \theta_{\max})$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g \cdot l (\cos \theta - \cos \theta_{\max})}$$

انطلاقاً من العلاقة $k\bar{\theta} = I_{\Delta} \ddot{\theta}$ - برهن أن حركة نواس الفتل غير المتخامد هي حركة جيبيّة دورانية، ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس.

التسارع الزاوي هو المشتق الثاني لتابع الفاصلة الزاوية $\ddot{\theta} = (\ddot{\theta})_t$

$$-k\bar{\theta} = I_{\Delta}(\ddot{\theta})_t \Rightarrow (\ddot{\theta})_t = -\frac{k}{I_{\Delta}}\bar{\theta} \dots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

اشتق مرتين بالنسبة للزمن: $\bar{\omega} = (\dot{\theta})_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\bar{\alpha} = (\ddot{\theta})_t = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\ddot{\theta})_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \dots (2)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد $\omega_0^2 = \frac{k}{I_{\Delta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}} > 0$

وهذا ممكن لأن k, I_{Δ} موجبان أي أن حركة نواس الفتل جيبيّة دورانية

$$\left. \begin{matrix} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}} \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \end{matrix} \right\} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}} \quad \text{استنتاج الدور:}$$

من العلاقة السابقة نستنتج أن الدور الخاص:

- لا يتعلق بالسعة الزاوية للحركة θ_{max} .

- يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لعزم عطالة الجملة I_{Δ} .

- يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي ثابت قفل السلك k .

يلتص الدور بتخصان طول سلك الفتل. وذلك حسب العلاقة: $k = k' \times \frac{(2r)^4}{l}$

k' : ثابت يتعلق بنوع مادة السلك. $2r$: قطر السلك. l : طول سلك الفتل.

انطلاقاً من مصوبة الطاقة الميكانيكية برهن أن حركة نواس الفتل حركة جيبيّة دورانية

$$E_{tot} = E_p + E_k = const$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k\bar{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2$$

اشتق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن: $0 = \frac{1}{2}k 2(\bar{\theta}\dot{\bar{\theta}}) + 2 \times \frac{1}{2}I_{\Delta}(\omega\dot{\omega})$

$$0 = k(\bar{\theta})_t + I_{\Delta}(\dot{\omega})_t \Rightarrow (\dot{\omega})_t = -\frac{k}{I_{\Delta}}(\bar{\theta})_t \dots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقق من صحة الحل: تشتق التابع (2) مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\dot{\bar{\theta}})_t = \bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\ddot{\bar{\theta}})_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\ddot{\bar{\theta}})_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \dots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{k}{I_{\Delta}}$

ومنه $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}} > 0$ وهذا محقق لأن k, I_{Δ} موجبان

و بالتالي حركة نواس الفتل حركة جيبيّة دورانية.

على ساقين متماثلتين يسلكي فتلاً متماثلين طول الأول l_1 وطول الثاني l_2 فإذا علمت أن

$$T_{01} = 2T_{02}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k' \frac{(2r)^4}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta} l}{k' (2r)^4}}$$

$$T_0 = const \sqrt{l} \Rightarrow \frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{const \sqrt{l_1}}{const \sqrt{l_2}}$$

$$\frac{2T_{02}}{T_{02}} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow l_1 = 4l_2$$

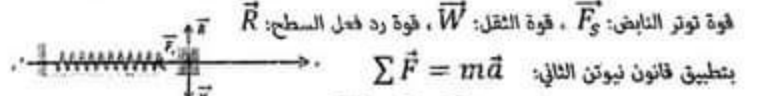
نأخذ من مهمل الكتلة حلقاته متعادلة ثابت صلابة k . مثبت من أحد طرفيه، ويربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس، نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة، ونتركه دون سرعة ابتدائية المطلوب:

1. أدرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.
2. استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين A و B

$$x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \text{ و } x_A = -\frac{X_{max}}{2}$$

1. جملة المقارنة: خارجية.

الجملة المدروسة: النواس المرن القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:



$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F}_s = m\vec{a}$$

$$-F_s = m\vec{a} \text{ ويساويه بالجهة: } \vec{F}_s' = F_s = k\bar{x}$$

تؤثر على النابض القوة F_s' التي تسبب له الاستطالة x حيث: $-k\bar{x} = m\vec{a}$ بالتعويض نجد:

$$\bar{a} = \bar{a}_t = (\ddot{x})_t$$

$$-k\bar{x} = m(\ddot{x})_t$$

$$(\ddot{x})_t = -\left(\frac{k}{m}\right)\bar{x} \dots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ للتحقق من صحة الحل: تشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\dot{\bar{x}})_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\ddot{\bar{x}})_t = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\ddot{\bar{x}})_t = \omega_0^2 \bar{x} \dots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ وهذا محقق لأن k, m موجبان

حركة الجسم هي حركة جيبيّة السحابية التابع الزمني للمطال بعض بالعلاقة:

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$E_{kA} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x_A^2) : \bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}k \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}k X_{max}^2 \right) = \frac{3}{4} E_{tot}$$

$$E_{kB} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x_B^2) : \bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

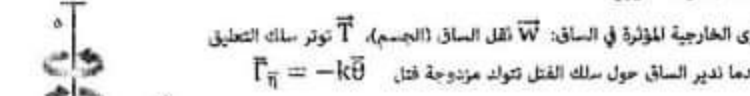
$$= \frac{1}{2}k \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}k X_{max}^2 \right) = \frac{1}{2} E_{tot}$$

النتيجة: تنقص الطاقة الحركية للجسم بزيادة مطاله و بالتالي تزداد طاقته الكامنة

اندهترانزات الجيبيّة الدورانية (نواس الفتل غير المتخامد)

برهن أن محصلة العزوم المؤثرة في نواس الفتل هي: $\sum \vec{\Gamma}_{\Delta} = -k\bar{\theta}$

جملة المقارنة: خارجية



$$\vec{W} = -k\bar{\theta}$$

$$\sum \vec{\Gamma}_{\theta} = I_{\Delta} \ddot{\alpha} \Rightarrow \vec{\Gamma}_{\theta} + \vec{\Gamma}_T + \vec{\Gamma}_W = I_{\Delta} \ddot{\alpha}$$

$$\vec{\Gamma}_T = 0 \text{ و } \vec{\Gamma}_W = 0 \text{ (حامل } \vec{W}, \vec{T} \text{ كل منهما خطي على محور الدوران)}$$

$$-k\bar{\theta} + 0 + 0 = I_{\Delta} \ddot{\alpha} \Rightarrow \sum \vec{\Gamma}_{\Delta} = \vec{\Gamma}_{\theta} = -k\bar{\theta}$$

انطلاقاً من الشكل العام لتابع المصطلح
 $\bar{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 وفي شروط بدء مناسبة $\bar{x} = x_{max} \cos \varphi$ في اللحظة $t = 0$
 1. استنتج الشكل المختزل لتابع المصطلح (أو ما شكل التابع عند الشروط السابقة)
 2. نظم جدولاً تبين فيه قيم المصطلح عند كل ربع دور، ثم حدد الأوضاع التي يكون فيها المصطلح:
 (a) أعظماً (طويلة) (b) معدوماً
 (c) حدد قيمة مصطلح الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$
 3. ارسم المصنعي البياني لتغيرات المصطلح بدلالة الزمن خلال دور.

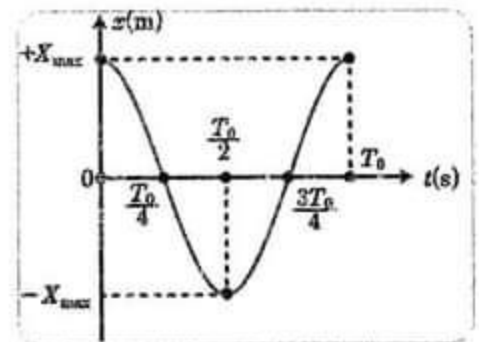
1. عندما $(t = 0)$ نفرض $\bar{x} = x_{max}$ نعوض في الشكل العام لتابع المصطلح:
 $\bar{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 $x_{max} = x_{max} \cos \varphi$
 $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$
 الشكل المختزل (أبسط شكل): $\bar{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t)$
 2.

$$\bar{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$\bar{x} = x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+x_{max}$	0	$-x_{max}$	0	$+x_{max}$

يكون المصطلح أعظماً (طويلة):
 في الوضعين الطرفيين $\bar{x} = \pm x_{max}$
 يكون المصطلح معدوماً في مركز الاهتزاز $\bar{x} = 0$
 يكون المصطلح في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$
 $\bar{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t) \Rightarrow$
 $\bar{x} = x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$
 $t = \frac{3T_0}{2} \Rightarrow \bar{x}$
 $= x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{2}\right) = -x_{max}$
 3.



انطلاقاً من التابع الزمني للمصطلح في النواس المرن:
 $\bar{x} = x_{max} \cos \omega_0 t$
 1. استنتج التابع الزمني للسرعة.
 نظم جدولاً تبين فيه قيم السرعة عند كل ربع دور، ثم حدد الأوضاع التي تكون فيها السرعة:
 (a) عظمى (طويلة) (b) معدومة
 (c) حدد قيمة سرعة الجسم وجهة حركته في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$
 2. ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور.

1. تابع السرعة: هو المشتق الأول لتابع المصطلح بالنسبة للزمن.
 نشق فنجد:
 $\bar{v} = (\bar{x})_t = -\omega_0 x_{max} \sin \omega_0 t$
 2.
 $\bar{v} = -\omega_0 x_{max} \sin(\omega_0 t) \Rightarrow$
 $\bar{v} = -\omega_0 x_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+x_{max}$	0	$-x_{max}$	0	$+x_{max}$
v	0	$-\omega_0 x_{max} = -v_{max}$	0	$+\omega_0 x_{max} = +v_{max}$	0

تكون السرعة عظمى (طويلة):
 $\bar{v} = \pm \omega_0 x_{max}$ لحظة المرور في مركز الاهتزاز.
 تكون السرعة معدومة:
 $\bar{v} = 0$ لحظة المرور في المصطلح الأعظمين (الموضعين الطرفيين).
 تكون السرعة في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$:

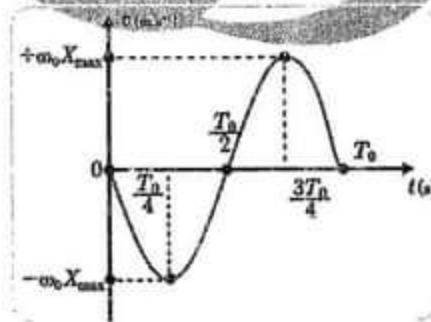
$$\bar{v} = -\omega_0 x_{max} \sin(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$\bar{v} = -\omega_0 x_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

$$t = \frac{5T_0}{4} \Rightarrow$$

$$\bar{v} = -\omega_0 x_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{5T_0}{4}\right) = -v_{max}$$

(يتحرك بالاتجاه السالب)



انطلاقاً من التابع الزمني للمصطلح في النواس المرن:
 $\bar{x} = x_{max} \cos \omega_0 t$
 1. استنتج تابع التسارع بدلالة مصطلح الحركة \bar{x} .
 أثبتة قيمة التسارع أم متغيرة أثناء حركة الجسم.
 2. نظم جدولاً تبين فيه قيم التسارع عند كل ربع دور، ثم حدد الأوضاع التي تكون فيها التسارع:
 (a) أعظماً (طويلة) (b) معدوماً
 (c) حدد قيمة التسارع في اللحظة $t = \frac{5T_0}{2}$
 3. ارسم المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور.

تابع التسارع: هو المشتق الأول لتابع السرعة بالنسبة للزمن أو المشتق الثاني لتابع المصطلح بالنسبة للزمن.
 $\bar{a} = (\bar{v})_t = (\bar{x})''_t$
 $\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 x_{max} \sin \omega_0 t$
 $\bar{a} = (\bar{v})'_t = -\omega_0^2 x_{max} \cos \omega_0 t$
 $\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x} \neq const$

أي يتناسب التسارع طردياً مع المصطلح \bar{x} ويعاكسه بالإشارة ويتجه دوماً نحو مركز الاهتزاز

$$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max} \cos \omega_0 t \Rightarrow$$

$$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+x_{max}$	0	$-x_{max}$	0	$+x_{max}$
a	$-\omega_0^2 x_{max} = -a_{max}$	0	$+\omega_0^2 x_{max} = +a_{max}$	0	$-\omega_0^2 x_{max} = -a_{max}$

يكون التسارع أعظماً (طويلة):

$$\bar{x} = \pm x_{max} \Rightarrow a_{max} = |\omega_0^2 x_{max}|$$

أي في المصطلح الأعظمين
 يكون التسارع معدوماً:

$$\bar{x} = 0 \Rightarrow a = 0$$

في وضع التوازن (مركز التوازن)

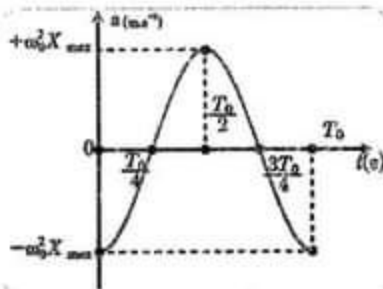
يكون التسارع في اللحظة $t = \frac{5T_0}{2}$:

$$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max} \cos \omega_0 t \Rightarrow$$

$$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

$$t = \frac{5T_0}{2} \Rightarrow \bar{a}$$

$$= -\omega_0^2 x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{5T_0}{2}\right) = +a_{max}$$



عندما توجه فوهته للأعلى: سرعة جريان الماء تنقص كلما ابتعد عن سطح الأرض: $v_b < v_a$

فينقص مقطع الماء المتدفق: $S_b > S_a$

5. تستطيع خرطوم مياه الإطفاء إيصال الماء لارتفاعات ومسافات كبيرة.

حسب معادلة الاستمرارية: $S_a \cdot v_a = S_b \cdot v_b$

$S_b < S_a \Rightarrow v_b > v_a$

إن فوهة الخرطوم ضيقة لذا تزداد سرعة الماء فتزداد طاقته الحركية لذا يصل إلى ارتفاعات أعلى ومسافات أطول.

6. عندما تهب الأعاصير ينصح بفتح نوافذ في البيوت.

حسب معادلة برنولي: $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$

الضغط ينقص بزيادة السرعة، لكي يتساوى الضغط بين أسفل سقف البيت والأعلى، لأن اختلاف الضغط الكبير بين أسفل وأعلى السقف يسبب زيادة سرعة الرياح في الخارج تتولد عنه قوة دافعة نحو الأعلى تؤدي نزع سطح البيت.

التسوية الخاصة

اكتب فرضيتا أينشتاين في التسوية الخاصة.

1. الفرضية الأولى: سرعة انتشار الضوء في الخلاء هي نفسها

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ في جميع جمل المقارنة.

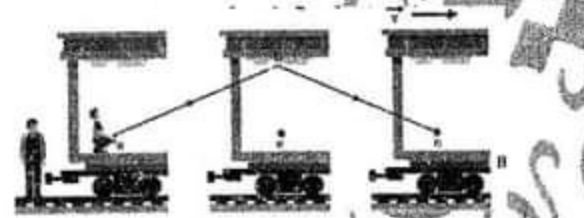
2. الفرضية الثانية: القوانين الفيزيائية تبقى نفسها في جميع جمل المقارنة العطالية.

نفرض قطاراً يسير بسرعة ثابتة v ، مثبت على سقف إحدى عرباته مرآة مستوية ترتفع مسافة d عن منبع ضوئي بيد مراقب يقف ساكناً في العربة ذاتها، يرسل المراقب ومضة ضوئية باتجاه المرآة، ويسجل الزمن t_0 الذي تستغرقه الموضة الضوئية للعودة إلى المنبع. أما بالنسبة لمراقب خارجي يقف ساكناً خارج القطار على استقامة واحدة مع المنبع الضوئي لحظة إصدار الموضة الضوئية، فإن الزمن الذي تستغرقه الموضة الضوئية للعودة إلى المنبع هو t ، برهن أن الزمن الذي يسجله المراقب الخارجي يتمدد بالنسبة للمراقب الداخلي.

بالنسبة للمراقب الداخلي: الزمن \times السرعة = المسافة

$$2d = c \cdot t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{2d}{c} \quad (1)$$

بالنسبة للمراقب الخارجي:



الزمن \times السرعة = المسافة التي يقطعها الضوء

$$ab + bc = c \cdot t \Rightarrow 2ab = c \cdot t \Rightarrow ab = \frac{c \cdot t}{2}$$

الزمن \times السرعة = المسافة التي يقطعها المنبع

$$ae + ec = v \cdot t \Rightarrow 2ae = c \cdot t \Rightarrow ae = \frac{v \cdot t}{2}$$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث abe :

$$(ab)^2 = (ae)^2 + (be)^2 \Rightarrow \frac{c^2 \cdot t^2}{4} = \frac{v^2 \cdot t^2}{4} + d^2$$

$$\frac{c^2 \cdot t^2}{4} - \frac{v^2 \cdot t^2}{4} = d^2 \Rightarrow t^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{4} \right) = d^2$$

$$t^2 = \frac{d^2}{\left(\frac{c^2 - v^2}{4} \right)} \Rightarrow t^2 = \frac{4d^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (2)$$

بقسمة العلاقة (1) إلى (2) نجد:

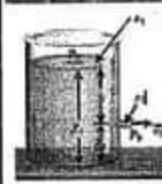
$$\frac{t}{t_0} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{c}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ندعو النسبة: $\gamma = t/t_0$ (عامل لورنتز أو عامل التصحيح)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{t}{t_0} > 1 \Rightarrow t = \gamma t_0$$

نستنتج أن الزمن يتمدد (يتباطأ) عند الحركة.

الطلاء من معادلة برنولي استنتج العلاقة المحددة لسرعة تدفق سائل من فتحة صغيرة تقع قرب قعر خزان واسع جداً على عمق (z) من السطح الحر للسائل (نظرية تورشيلي)، وماذا يتفاد من هذه العلاقة



معادلة برنولي: $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{const}$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

ولكن: v_1 تهمل لصغرهما $s_1 \gg s_2 \Rightarrow v_1 \ll v_2$

$$P_1 = P_2 = P_0 \Rightarrow \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$g z_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 \Rightarrow \frac{1}{2} v_2^2 = g z_1 - g z_2$$

$$v_2^2 = 2g(z_1 - z_2) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

يستفاد من هذه العلاقة في حساب سرعة خروج سائل من أي فتحة في الوعاء، سواء كان في قعره أم في جداره الجانبية، وسرعة خروج السائل تساوي السرعة التي يسقط بها جسم مائع سقوطاً حراً من ارتفاع h

الطلاء من أو معادلة برنولي استنتج العلاقة المحددة للرق الضغط بين الجذع الرئيسي والاختناق أو (في الأنبوب فتوري بين أن الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيسي)، وماذا يستفاد من هذه الخاصية.

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

وما أن الأنبوب أفقي: $Z_1 = Z_2$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

ولكن: $s_1 v_1 = s_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{s_1}{s_2} v_1$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 v_1^2 - v_1^2 \right] = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2$$

$$s_1 > s_2 \Rightarrow P_1 - P_2 > 0 \Rightarrow P_1 > P_2$$

أي أن الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيس للأنبوب.

يستفاد من هذه الخاصية: في الطب، فقد تناقص مساحة مقطع الشرايين في منطقة ما نتيجة تراكم الدهون والشحوم، وهذا يعيق جريان الدم في هذه الشرايين، ويتناقص ضغط الدم في المناطق المتضيقه عن قيمته الطبيعية اللازمة لمقاومة الضغوط الخارجية.

(أيهما أكثر تقوساً السطح الخواوي أم السطح السفلي لجناح الطائرة؟)

سرعة جريان الهواء في الأعلى أكبر مما هي عليه من الأسفل، وهذا يجعل الضغط من الأسفل أكثر منه في الأعلى، وينشأ فرق في الضغط يؤدي ذلك إلى رفع الطائرة للأعلى، تسمى قوة فرق الضغط هذه بقوة الرفع، وتناسب سرعة الطائرة.

أعط تفسيراً علمياً باستخدام العلاقات المناسبة:

1. اختلاف سرعة جريان الماء عبر مقاطع مختلفة المساحة في مجرى نهر جريانه أبطى.

أو يتدفق الماء بسرعة كبيرة من ثقب صغير حدث في جدار خرطوم ينقل الماء

أو تكون مساحة فتحات الغاز في موقد الغاز صغيرة

أو لجعل الماء المتدفق من فتحة خرطوم يصل إلى مسافات أبعد تغلق جزءاً من فتحة الخرطوم.

حسب معادلة الاستمرارية $S_1 v_1 = S_2 v_2$ السرعة تتناسب عكساً مع مساحة مقطع النهر لذلك تزداد السرعة عندما تنقص المساحة، وتنقص السرعة عندما تزداد المساحة.

2. الدفعا ستائر النوافذ المفتوحة إلى خارج السيارة عندما تتحرك بسرعة معينة.

حسب معادلة برنولي $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$ الضغط ينقص بزيادة السرعة فيكون ضغط الهواء خارج النوافذ أقل منه داخل السيارة وبالتالي الهواء يخرج من داخل السيارة ونحو الخارج ويخرج معه الستائر.

3. عدم تقاطع خطوط الانسياب لسائل.

خط الانسياب يمر في كل نقطة شعاع سرعة جسيم السائل في تلك النقطة، تقاطع خطوط الانسياب يعني وجود أكثر من سرعة للجسيم بالمكان نفسه وباتجاهات مختلفة باللحظة ذاتها وهذا غير ممكن.

4. ينقص مقطع عمود الماء المتدفق من الخرطوم عندما توجه فوهته للأسفل، ويزداد مقطعه عندما توجه فوهته رأسياً للأعلى.

حسب معادلة الاستمرارية: $S_a \cdot v_a = S_b \cdot v_b$

عندما توجه فوهته للأسفل: سرعة جريان الماء تزداد كلما اقترب من سطح الأرض: $v_b > v_a$

فينقص مقطع الماء المتدفق: $S_b < S_a$

انطلاقاً من الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحددة للطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي، هل من المفيد تطبيق قوانين النظرية النسبية من أجل السرعات الصغيرة.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

من أجل السرعات الصغيرة أمام سرعة الضوء في الخلاه أي $v \ll c$ فإن $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ ومنه عند استخدام قانون التقريب وذلك بعد تحقق أن $1 \ll \epsilon$ نجد:

عند $\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ تكون عندئذ علاقة الطاقة الحركية في الميكانيك النسبي:

$$E_k = E - E_0 = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (m - m_0)c^2 = (\gamma m_0 - m_0)c^2$$

$$E_k = (\gamma - 1)m_0 c^2$$

نعوض γ فنجد: $E_k = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right) m_0 c^2 = \left(\frac{v^2}{2c^2}\right) m_0 c^2$

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

نلاحظ إن أثر النظرية النسبية الخاصة يهم من أجل السرعات الصغيرة بالنسبة إلى سرعة انتشار الضوء في الخلاه، وتؤول عندها العلاقات الفيزيائية إلى شكلها الكلاسيكي

أعط تفسيراً علمياً باستخدام العلاقات المناسبة:

1. عندما يكون الجسم متحركاً بالنسبة لجملة مقارنته فإن طولته يتقلص وفق قياس جملة المقارنة تلك.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} : \gamma > 1 \Rightarrow L < L_0$$

2. عندما يكون الجسم متحركاً بالنسبة لجملة مقارنته فإن زمنه يتمدد وفق قياس جملة المقارنة تلك.

$$t = \gamma t_0 : \gamma > 1 \Rightarrow t > t_0$$

3. عندما يكون جسم متحركاً بالنسبة لجملة مقارنته فإن كتلته تزداد وفق قياس جملة المقارنة تلك.

$$m = \gamma m_0 : \gamma > 1 \Rightarrow m > m_0$$

4. جسم ساكن على سطح الأرض (مستوي مرجعي)، فإن طاقته النسبية الكلية غير معدومة. طاقة الحركة معدومة لإنعدام سرعته. طاقته الكامنة الثقالية معدومة بالنسبة للمستوى المرجعي لأن ارتفاع الجسم عنه معدوم. طاقته الكلية النسبية غير معدومة لأنها مجموع الطاقة الحركية و الطاقة السكونية، صحيح أن طاقته الحركية معدومة إلا أن طاقته السكونية موجودة مازال يمتلك كتلة سكونية.

$$E = E_0 + E_k = m_0 c^2 + 0 = m_0 c^2 \neq 0$$

في الميكانيك الكلاسيكي إذا تضاعفت كمية حركة جسيم ما فإن طاقته الحركية تزداد أربعة أضعاف، فهل يتحقق ذلك في الميكانيك النسبي، وضح ذلك.

في الميكانيك الكلاسيكي: تضاعف كمية حركة جسيم ما مرتين يعني بالضرورة تضاعف سرعته مرتين لأن كتلته ثابتة فتزداد طاقته الحركية أربعة أضعاف.

إما في الميكانيك النسبي: فهذا غير محقق لأن الكتلة تزداد بزيادة السرعة.

تخيل مراقب: الأول في محطة إطلاق على الأرض، و الثاني من روبات في مركبة فضاء انطلقت من محطة الفضاء نحو الشمس بسرعة ثابتة بالنسبة للمراقب. الأول: وجد أن طول المسافة التي سجلها عدادات المركبة الفضائية أقصر من المسافة التي سجلها العدادات في المحطة الأرضية، برهن صحة ذلك.

■ تسجيل العدادات في المحطة على الأرض الآتي:

المسافة بين الأرض و الشمس L_0 ، الزمن الذي استغرقته مركبة الفضاء في رحلتها t :

$$L_0 = v t$$

■ وتسجل عدادات مركبة الفضاء المعطيات الآتية:

المسافة المقطوعة بين الأرض و الشمس L ، وزمن الرحلة t_0 :

$$L = v t_0$$

بقسمة العلاقتين بعضهما على بعض فنجد:

$$\frac{L_0}{L} = \frac{t}{t_0}$$

■ لكن الزمن الذي استغرقته رحلة المركبة الفضائية يتمدد بالنسبة للمراقب الأول أي:

$$\frac{L_0}{L} = \frac{\gamma t_0}{t_0}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

نستنتج أن الطول يتكماش (يتقلص) عند الحركة.

أما بالنسبة لطول المركبة الفضائية (وفق منح سرعتها) فيجد L بالنسبة للمراقب الأرضي في المحطة لأن المركبة الفضائية متحركة بالنسبة له، ويعتبر L_0 بالنسبة للمراقب في المركبة الفضائية، فيكون طول المركبة بالنسبة للمراقب الأرضي أقصر مما هو عليه بالنسبة لمراقب في المركبة.

الكتلة ثابتة في الميكانيك الكلاسيكي من أجل السرعات الصغيرة أمام سرعة انتشار الضوء في الخلاه، أما وفق الميكانيك النسبي فإن الكتلة تزداد بزيادة السرعة، وفق العلاقة:

$$m = \gamma m_0$$

$$\Delta m = m - m_0$$

$$\Delta m = \gamma m_0 - m_0$$

$$\Delta m = m_0 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]$$

$$\Delta m = m_0 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

ووفق دستور التقريب: $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ بشرط $\epsilon \ll 1$

من أجل السرعات الصغيرة يكون: $\Delta m = m - m_0 = m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right)$

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Delta m = \frac{E_k}{c^2}$$

نستنتج أنه عندما يتحرك الجسم تزداد كتلته بمقدار يساوي طاقته الحركية مقسومة على رقم ثابت c^2 ، أي أن الكتلة تكافئ الطاقة.

انطلاقاً من العلاقة: $\Delta m = \frac{E_k}{c^2}$ برهن أن الطاقة الكلية في الميكانيك النسبي هي مجموع الطاقة السكونية والطاقة الحركية.

$$\Delta m = \frac{E_k}{c^2} \Rightarrow m - m_0 = \frac{E_k}{c^2}$$

$$m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = E_k$$

$$m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + E_k$$

ولكن: الطاقة السكونية: $E_0 = m_0 \cdot c^2$ و الطاقة الكلية: $E = m \cdot c^2$

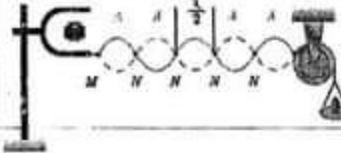
$$E = E_0 + E_k$$

الوحدة الثالثة: الأمواج المستقرة

الأمواج المستقرة العرضية

الدراسة التجريبية للأمواج المستقرة العرضية في وتر:

تجربة 1 أثبت البكرة على الحامل، وأثبت طرف الوتر بإحدى شعبي الرنانة، وأمر الوتر على محز البكرة، وأعلق بطرفه المتدلي كفة الأثقال، وأضع في الكفة ثقلاً مناسباً بحيث يشد الوتر بوضع أفقي:



1. أصل الرنانة بواسطة أسلاك التوصيل بمرطبي وحدة التغذية المتصلة بمأخذ تيار المدرسة (تيار المدينة)، وأغلق مفتاح تشغيل وحدة التغذية لتعمل الرنانة، ماذا تلاحظ؟
تشكل أمواج عرضية متقدمة تنتشر على طول الوتر.

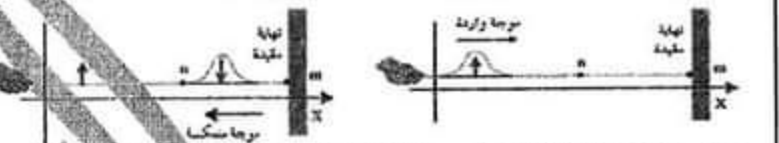
2. اكتب معادلة مطال موجة واردة متقدمة جيئية بالاتجاه الموجب للمحور $X'X'$ عندما تصل إلى النقطة M من وسط الانتشار والتي فاصلتها \bar{x} عن النهاية المقيدة M في اللحظة t .

$$\bar{y}_1(t) = y_{max} \cos(\omega t - 2\pi \frac{\bar{x}}{\lambda}) \dots (1)$$

3. اكتب معادلة مطال موجة منعكسة متقدمة جيئية بالاتجاه السالب للمحور $X'X'$ تصل إلى النقطة M من وسط الانتشار والتي فاصلتها \bar{x} عن النهاية المقيدة M في اللحظة t .

$$\bar{y}_2(t) = y_{max} \cos(\omega t + 2\pi \frac{\bar{x}}{\lambda} + \varphi') \dots (2)$$

تعرض لفرق في الطور φ' بسبب الانعكاس، وهو متأخر في الطور عن الموجة الواردة إلى M .
4. حدد أوجه الاختلاف والتشابه بين لموجة الواردة المتقدمة والموجة المنعكسة المتقدمة؟



تنعكس الإشارة عن النهاية المقيدة أو عن النهاية الطليقة بسرعة الانتشار نفسها والتواتر نفسها وبالسعة نفسها. عند إهمال الضياع في الطاقة وينشأ فرق في الطور φ' بين الموجة الواردة والموجة المنعكسة في الوسط (الوتر):

- إذا كانت النهاية مقيدة: فإن جهة الإشارة المنعكسة تعاكس جهة الإشارة الواردة: أي يتولد بالانعكاس فرق طور $\varphi' = \pi \text{ rad}$ (نعكس بالطور).
- إذا كانت النهاية طليقة: فإن جهة الإشارة المنعكسة نفسها للإشارة الواردة: أي فرق الطور $\varphi' = 0 \text{ rad}$ (توافق بالطور).

5. حدد ماذا يتشكل نتيجة التداخل بين الموجة الجيئية الواردة مع الموجة الجيئية المنعكسة؟
تشكل الأمواج المستقرة العرضية نتيجة التداخل بين موجة واردة مع موجة جيئية منعكسة على نهاية مقيدة تعاكسها بجهة الانتشار ولها التواتر نفسه والسعة نفسها وينتج عن تداخلهما:

- نقاط تهتز بسعة عظمى تسمى بطون الاهتزاز يرمز لها بـ A ، حيث تلتقي فيها الأمواج الواردة والمنعكسة على توافق دائم.
- ونقاط تتعدم فيها سعة الاهتزاز تسمى عقد الاهتزاز، يرمز لها بـ N ، حيث تلتقي فيها الأمواج الواردة والمنعكسة على تعاكس دائم.
- ماهي المسافة بين عقدتين متتاليتين؟ وكيف تهتز نقاط المغزل الواحد ونقاط مغزلين متجاورين؟ ولماذا سميت الأمواج المستقرة بهذا الاسم؟



تكون المسافة الفاصلة بين كل عقدتين متتاليتين $\lambda/2$ ، ويشكل الاهتزاز ما بين عقدتين متجاورتين ما يشبه المغزل وتهتز جميع نقاط المغزل الواحد على توافق بالطور فيما بينها، بينما تهتز نقاط مغزلين متجاورين على تعاكس بالطور فيما بينها وتبدو الموجة وكأنها تهتز مراوحة في مكانها، فتأخذ شكلاً ثابتاً. لذلك سميت بالأمواج المستقرة.

7. ما الأمواج المستقرة العرضية؟
الموجة المستقرة: هي نمط اهتزاز مستمر تحتوي على عقد بينها بطون تنشأ نتيجة التداخل بين موجتين متساويتين في التواتر والسعة وتنتشران في اتجاهين متعاكسين.

الحراسة النظرية للأمواج المستقرة العرضية:

في الدراسة النظرية للأمواج العرضية المستقرة في وتر استنتج تابع المطال لنقطة n من الوتر؟
يمكن استنتاج المطال المحصل للاهتزاز النقطة M التي تخضع لتأثير الموجتين الواردة و المنعكسة معاً بجمع المعادتين (1) مع (2) فيصبح مطالها المحصل $\bar{y}_n(t)$:

$$\bar{y}_n(t) = \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t)$$

$$\bar{y}_n(t) = Y_{max} [\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x}) + \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} + \varphi')]$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{وهي أن:}$$

$$\bar{y}_n(t) = 2Y_{max} \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} + \frac{\varphi'}{2}) \cos(\omega t + \frac{\varphi'}{2})$$

نجد: الأمواج المستقرة العرضية المنعكسة على نهاية مقيدة:

في الانعكاس على نهاية مقيدة يكون فرق الطور $\varphi' = \pi \text{ rad}$ نعوض:

$$\bar{y}_n(t) = 2Y_{max} \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} + \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{وهي أن } \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta \text{ تصبح العلاقة:}$$

$$y_n(t) = 2y_{max} (-\sin \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x}) \cdot (-\sin \omega t)$$

$$\bar{y}_n(t) = 2Y_{max} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} \sin(\omega t)$$

$$\bar{y}_n(t) = Y_{max/n} \sin(\omega t)$$

باعتبار $Y_{max/n}$ سعة الموجة المستقرة في النقطة n : $Y_{max/n} = 2Y_{max} |\sin \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x}|$

النتيجة من هذه العلاقة المعروفة عن سعة الموجة المستقرة العرضية $Y_{max/n} = 2Y_{max} |\sin \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x}|$ استنتج العلاقة المحددة لأبعاد عقد و بطون الاهتزاز عند النهاية الماييدة؟

أبعاد العقد: عقد الاهتزاز N : نقاط سعة اهتزازها محدودة دوماً، تحدد أبعادها \bar{x} عن النهاية المقيدة بالعلاقة:

$$Y_{max/n} = 0 \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} = n\pi$$

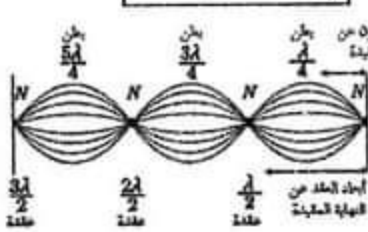
$$\bar{x} = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{حيث: } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

أي أن النقاط التي تبعد عن النهاية المقيدة التي يحدث عندها انعكاس وحيد أعداد صحيحة موجية من نصف طول الموجة، يصلها اهتزاز وارد، واهتزاز منعكس على تعاكس دائم، فتكون ساكنة دوماً، وتؤلف عقد اهتزاز N ، وتكون المسافة بين كل عقدتين متتاليتين $\frac{\lambda}{2}$.

أبعاد البطون: بطون الاهتزاز A : نقاط سعة اهتزازها عظمى دوماً، تحدد أبعادها \bar{x} عن النهاية المقيدة بالعلاقة:

$$Y_{max/n} = 2Y_{max} \Rightarrow |\sin \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x}| = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

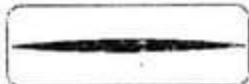
$$\bar{x} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{حيث: } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$



أي أن النقاط التي تبعد عن النهاية المقيدة التي يحصل عندها انعكاس وحيد أعداد فردية من ربع طول الموجة، يصلها اهتزاز وارد واهتزاز منعكس على توافق دائم، فتكون سعة الاهتزاز فيها عظمى دوماً، وتؤلف بطون اهتزاز A وتكون المسافة بين كل بطونين متتالين $\frac{\lambda}{2}$ والمسافة بين عقدة و بطون يليه $\frac{\lambda}{4}$.

الاهتزازات القسرية في وتر مرنة:

تجربة 2 تجربة ملد على نهاية مقيدة: أثبت البكرة على الحامل، وأثبت أحد طرفي الوتر بشعبة الهزازة (النقطة A)، وأمر الوتر على محز البكرة (النقطة B) لتشكل عقدة ثابتة، وأعلق بطرفه المتدلي كفة الأثقال، وأضع في الكفة ثقلاً مناسباً يشد الوتر بوضع أفقي ويجعل تواتر صوته الأساسي ثابتاً: $f_1 = 10 \text{ Hz}$



1. نزيد تواتر الرنانة f بالتدريج بدءاً من القيمة 0 حتى

القيمة $f < 10 \text{ Hz}$ ، ماذا تلاحظ؟

اهتزازات قسرية في الوتر بسعة اهتزاز صغيرة نسبياً من رتبة سعة اهتزاز الهزازة Y_{max}



2. أجل تواتر الرنانة $f = 10 \text{ Hz}$ ، هل يتشكل موجة

مستقرة واضحة بسعة عظمى $Y > Y_{max}$ ؟

اهتزازات قسرية في الوتر بسعة اهتزاز عند البطن أكبر بكثير من السعة العظمى للهرافة

3. أجل تواتر الرنانة $10 < f < 20 \text{ Hz}$ ، ماذا لاحظ؟

تعود سعة الاهتزاز صغيرة ويتكون مغزلين غير واضحين

4. أجل تواتر الرنانة $f = 20 \text{ Hz}$ ، ماذا لاحظ؟

مغزلين واضحين وبسعة اهتزاز عظمى $Y > Y_{max}$

5. أتساءل كيف أحصل على أربعة مغازل في الوتر تهتز بسعة اهتزاز عظمى؟

أجعل تواتر الهرافة $f = 40 \text{ Hz}$ لأن تواتر الصوت الأساسي $f = 10 \text{ Hz}$

6. ماذا تستنتج من هذه التجربة، واذكر الشرطان الواجب توافرها ليحدث التجاوب بين الهرافة وكجملته محرصة والوتر كجملته مجاوبة

نستنتج من تجربة ملد:

تولد أمواج مستقرة على طول الوتر مهما كان تواتر الهرافة وميز حالتين:

مرحلة $f_{مرحلة} = n f_1 - 1$ سعة الاهتزاز كبيرة $f_{مرحلة} \neq n f_1 - 2$ سعة الاهتزاز صغيرة

شرط حدوث التجاوب بين الهرافة والوتر: يحدث تجاوب إذا تحقق الشرطان:

$L = k \frac{\lambda}{2}$ طول الوتر يقسم إلى عدد صحيح k مغازل طول كل منها نصف طول الموجة $\frac{\lambda}{2}$

$f = k f_1$ تواتر الهرافة مساوياً مضاعفات صحيحة للتواتر الأساسي للوتر l

استنتج العلاقة بين تواتر الاهتزاز وطول الوتر (نواتر «دروجات»)

$$L = n \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{\lambda = \frac{v}{f}} L = n \frac{v}{2f} \quad f = n f_1$$

حيث: n عدد صحيح موجب $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

يسمى أول تواتر يولد مغزلاً واحداً، التواتر الأساسي. $n = 1 \Rightarrow f_1 = \frac{v}{2L}$

وتسمى بقية التواترات من أجل $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ تواترات المدروجات: $f = n \frac{v}{2L} = n f_1$

تجربة 3 تجربة ملد على نهاية طليقة: أثبت أحد طرفي الوتر بشعبة الهرافة (النقطة a)، وأترك الوتر يتدلى شاقولياً، ليكون طرفه الساهلي نهاية طليقة (النقطة b)

1. ألق القاطعة لتعمل الهرافة، ماذا لاحظ؟

عندما تعمل الهرافة تولد أمواج مستقرة في حالة التجاوب على طول الوتر

2. ماذا يتشكل في كل من النقطة a ، والنقطة b عند حدوث التجاوب؟

يتكون في النقطة a عقدة اهتزاز وفي النقطة b بطن اهتزاز.

3. ماهو تواتر الصوت عندما يتشكل على طول الوتر $\frac{3}{4} \lambda$ ، $\frac{2}{4} \lambda$ ، وماذا يسمى كل منهما؟

عندما يكون طول الوتر $L = \frac{\lambda}{4}$ فإنه يصدر صوتاً أساسياً تواتره $f_1 = \frac{v}{4L}$

عندما يكون طول الوتر $L = \frac{3\lambda}{4}$ فإنه يصدر صوتاً تواتر مدروجه

الثالث: $f_1 = 3 \frac{v}{4L}$

4. حدد المدروجات انطلاقاً من العلاقة المحددة لطول الوتر؟

وماذا يمثل $(2n - 1)$ ؟

حيث: n عدد صحيح موجب $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \xrightarrow{\lambda = \frac{v}{f}} L = (2n - 1) \frac{v}{4f}$

حيث: n عدد صحيح موجب $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$f = (2n - 1) \frac{v}{4L}$

ويمثل $(2n - 1)$ مدروج الصوت الصادر.

تطبيقات الأمواج المستقرة:

تجربة 4 قياس سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في وتر مشدود: أثبت البكرة على الحامل، وأثبت أحد طرفي الوتر بشعبة الهرافة (النقطة a)، وأمر الوتر على حيز البكرة (النقطة b) لتشكيل عقدة ثابتة، وألق بطرفه المتدلي كفة الأنتال. وأضع في الكفة ثقلًا مناسباً يشد الوتر بوضع أفقي (قوة شد الوتر $F_T = 10 \text{ Hz}$) ويجعل تواتر صوته الأساسي $f_1 = 10 \text{ Hz}$

1. عرف الوتر المشدود؟

الوتر المشدود: هو جسم صلب مرن أسطواني، طوله كبير بالنسبة لنصف قطر مقطعه، مشدود بين نقطتين ثابتتين تؤلفان عقدي اهتزاز في جملة أمواج مستقرة عرضية.

2. عندما تعمل الهرافة بتواتر $f = f_1$ ، يتشكل في الوتر «مغزل واحد، أعلن ذلك؟

لأنه يحدث التجاوب عندما يكون تواتر الهرافة المعلوم f يساوي تواتر الصوت الأساسي للوتر الماهز f_1

3. ماذا أسمي الصوت الناتج في هذه الحالة؟

يسمى الصوت الناتج بالصوت الأساسي (المدروج الأول)

4. ماذا يساوي طول الوتر في هذه الحالة؟ وماهي علاقة سرعة الانتشار؟

يكون طول الوتر المهتز مساوياً $\lambda/2$ ، وتحسب سرعة الانتشار من العلاقة $v = \lambda f$

5. عندما تعمل الهرافة بتواتر $f = n f_1$ ، ماذا تسمى الأصوات الناتج؟

تسمى الأصوات الناتجة بالمدروجات.

6. كيف يزداد عدد المغازل؟ وكيف يتغير تجريبياً؟

يزداد عدد المغازل عندما يزداد طول الوتر أو عندما يزداد تواتر الاهتزاز، وينقص بزيادة قوة الشد.

7. بما تتعلق سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في الوتر المهتز؟ اكتب العلاقة المعبرة عن ذلك، ثم اكتب علاقة الكتلة الخطية للوتر؟

تدل نتائج التجارب المختلفة على أن سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في الوتر المهتز تتناسب:

1. طردياً مع الجذر التربيعي لقوة الشد F_T

2. عكساً مع الجذر التربيعي لكتلة وحدة الطول من الوتر المتجانس، وتسمى الكتلة الخطية μ .

$$v = \text{const} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad \text{أي:}$$

إن هذا الثابت في الجملة الدولية يساوي الواحد ($\text{const} = 1$)

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

حيث أن الكتلة الخطية للوتر $\mu = \frac{m(kg)}{L(m)}$ وواحدتها في الجملة $kg \cdot m^{-1}$

7. استنتج تواتر الصوت البسيط الصادر عن الوتر بدلالة قوة الشد F_T ، وكتب دلالات الرموز؟ لغرض عن سرعة انتشار الاهتزاز في الوتر، وعن الكتلة الخطية للوتر في علاقة تواتر الوتر المشدود فتجد:

$$f = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_T L}{m}}$$

f تواتر الصوت البسيط الصادر عن الوتر، ويقدر بالهرتز Hz .

F_T قوة شد الوتر، وتقدر بالنيوتن N .

L طول الوتر، وتقدر بالمتر m .

μ الكتلة الخطية للوتر، وتقدر بـ $kg \cdot m^{-1}$.

n عدد صحيح يمثل عدد المغازل المتكونة في الوتر أو رتبة الصوت الصادر عنه (المدروج).

8. بفرض أن وترًا بطوله L ، كتلته m ، ومساحة مقطعه S وكتلته الحجمية ρ ، استنتج علاقة الكتلة الخطية μ بدلالة الكتلة الحجمية؟

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho \cdot V}{L} = \frac{\rho \cdot S \cdot L}{L} = \rho \cdot S = \rho \pi r^2$$

الأمواج العرضية المستقرة:

نشأة 1 كيف تتولد الأمواج الكهرطيسية المستوية؟

تتولد الأمواج الكهرطيسية المستوية بواسطة هوائي مرسل يوضع في محور عاكس بشكل قطع مكافئ دوري.

2. مما تتألف الموجة الكهرطيسية المستوية؟

تتألف الموجة الكهرطيسية المستوية من حقلين

متعامدين: حقل كهربائي \vec{E} وحقل مغناطيسي \vec{B} .

3. ماذا يحدث عند وضع حاجز معدني ناقل

مستوي يبعد عن الهوائي المرسل بعداً مناسباً وعمودياً على منحنى الانتشار.

عندما تلاقى الأمواج الكهرطيسية الواردة حاجزاً معدنياً ناقلاً مستويًا عمودياً على منحنى الانتشار، ويبعد عن الهوائي المرسل بعداً مناسباً، تتعكس عنه.

4. ماذا ينتج عن تداخل الموجة الكهرطيسية الواردة مع الموجة الكهرطيسية المنعكسة؟ وماذا تتمتع

هذه الأمواج؟

تتداخل الأمواج الكهرطيسية الواردة مع الأمواج الكهرطيسية المنعكسة لتؤلف أمواجاً كهرطيسية مستقرة.

تتمتع هذه الأمواج بطيف واسع من التواترات يشمل الأمواج الطويلة مثل الأمواج الراديوية والرادارية

والكروية إلى الأمواج القصيرة مثل الضوء المرئي والأشعة السينية وأشعة غاما والأشعة الكونية

5. كيف تكشف عن الحقل الكهرطيسي؟

تكشف عن الحقل الكهرطيسي \vec{E} بواسطة هوائي مستقبل نضعه موازياً للهوائي المرسل، يمكن تغيير

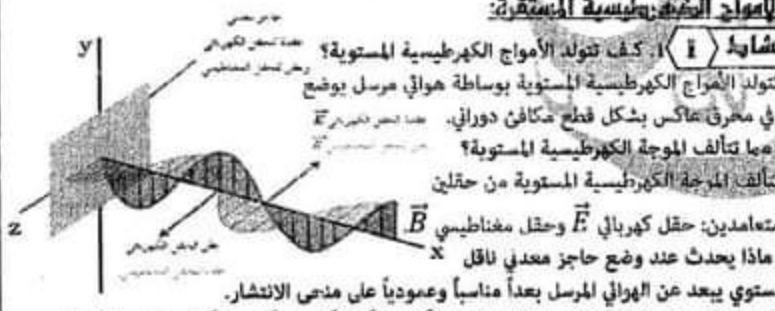
طوله، وعند وصل طرفي الهوائي المستقبل براسم اهتزاز مهبطي، وتغير طول الهوائي حتى يرتسم على

شاشة راسم الاهتزاز خط بياني بسعة عظمى فيكون أصغر طول للهوائي المستقبل مساوياً $\frac{\lambda}{2}$

6. كيف تكشف عن الحقل المغناطيسي؟

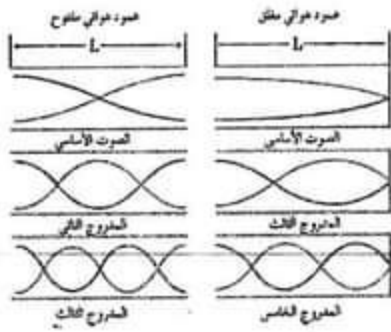
تكشف عن الحقل المغناطيسي \vec{B} بواسطة حلقة نحاسية عمودية على \vec{B} فيولد فيها تواتراً نتيجة

تغير التدفق المغناطيسي الذي يحتازها.



3. ماذا يتكون عند سطح الماء؟ وعند قوه الأنبوب؟

تكون عقدة اهتزاز عند سطح الماء الساكن لأنه يمنع الحركة الطولية للهواء (حيث، يعتبر نهاية مغلقة)، ويطن اهتزاز تقريباً غنج قوه الأنبوب (نهاية مفتوحة).



4. أحرر الأنبوب الزجاجي نحو الأعلى أو الأسفل قليلاً لتحديد نقطة الرنين الأولى (الصوت الشديد) بدقة، تقيس المسافة من سطح الماء (نقطة الرنين) إلى أعلى الأنبوب الزجاجي، ماذا تمثل هذه القيمة المقيسه؟ وماذا تساوي؟

طول أقصر عمود هوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الأول) يساوي

$$L_1 = \frac{\lambda}{4}$$

5. أضرب بالمطرقة على الرنانة مرة أخرى

وأقربها من طرف الأنبوب المفتوح، وأستمر في رفع الأنبوب الزجاجي نحو الأعلى ببطء حتى أسمع صوتاً شديداً عالياً مرة أخرى، ثم أحدد نقطة الرنين الثانية على الأنبوب بدقة ونقيس المسافة من هذه النقطة إلى الأنبوب الزجاجي، ماذا تمثل هذه القيمة المقيسه؟ وماذا تساوي؟

طول العمود الهوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الثاني) يساوي

$$L_2 = \frac{3\lambda}{4}$$

6. ماهي المسافة بين مستويي الماء الموافقين للصوتين الشديدين المتتاليين السابقين .

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2}$$

7. أخرج الأنبوب الزجاجي (البلاستيكي) السابق من الحوض، وأدخل فيه الأنبوب البلاستيكي الآخر ذي القطر الأقل (ليشكل أنبوبة لتسكوبية يمكنك تغيير طولها) فأحصل على عمود هوائي مفتوح الطرفين، وأقرب الرنانة المهترزة من أحد طرفي العمود الهوائي المفتوح وأزيد من طوله ببطء، وذلك بإخراج الأنبوب الآخر رويداً رويداً حتى أسمع صوتاً شديداً عالياً، ماذا يتكون عند كل طرف من الأنبوب وفي المنتصف؟ وما طول العمود الهوائي؟

في العمود الهوائي مفتوح الطرفين يتشكل عند كل طرف مفتوح بطن للاهتزاز وفي منتصف العمود عقدة للاهتزاز فيكون طول العمود الهوائي في هذه الحالة $L = \frac{\lambda}{2}$ (الرنين الأول) .

لذا هو طول العمود الهوائي مفتوح الطرفين الذي يحدث عنده الرنين الثاني؟ وماذا تشابه الأعمدة الهوائية المفتوحة؟

طول العمود الهوائي في هذه الحالة $L = 2 \frac{\lambda}{2}$ (الرنين الثاني) ، وتشابه الأعمدة الهوائية المفتوحة بالثاق عبر السارارات.

9. عند استخدام رنانة تواترها كبير، هل تتغير القيم السابقة؟ وضح ذلك؟

عند استخدام رنانة تواترها كبير نحصل على عمود هوائي طوله قصير، حيث يتناسب تواتر الرنانة

$$L \cdot f = \text{const}$$

المستخدم عكساً مع طول العمود الهوائي حيث f و L ؟ وماذا؟

10. كيف تعمل القناة السمعية في أذن الإنسان؟ وماذا؟
تعمل القناة السمعية في أذن الإنسان التي تنتهي بغشاء الطبل كأنها عمود هوائي مغلق في حالة رنين (لجواب) يؤدي إلى زيادة حساسية الأذن للتواترات من 2000Hz إلى 5000Hz في حين يمتد المدى الكامل لتواترات الصوت التي تسمعها الأذن البشرية من 20Hz إلى 20000Hz.

تعريف

الأعمدة الهوائية المفتوحة والمغلقة:

العمود الهوائي المفتوح: هو أنبوب أسطواني الشكل، مفتوح الطرفين والمملوء بمجزيئات الهواء الساكنة يمكن تغيير طوله بإضافة أنبوب آخر قطره أقل، وطول هذا الأنبوب عند التجاوب يساوي عدداً صحيحاً من نصف طول الموجة.

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{حيث: } n = 1, 2, 3, \dots$$

العمود الهوائي المغلق: هو أنبوب أسطواني الشكل، مفتوح من طرف ومغلق من الطرف الآخر والمملوء بمجزيئات الهواء الساكنة يمكن تغيير طوله بإضافة الماء، وطول هذا الأنبوب عند التجاوب يساوي عدداً فردياً من ربع طول الموجة.

$$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{حيث: } n = 1, 2, 3, \dots$$

المفصلة: أنبوب أسطواني أو موشوري، مقطعه ثابت وصغير بالنسبة إلى طوله، جدرانها خشبية أو معدنية ثقينة لكي لا تشارك في الاهتزاز، يحتوي غازاً (الهواء غالباً) يهتز بالتجاوب مع المنبع الصوتي للمزمارة .

تصنف المنابع الصوتية إلى نوعين:

1. المنبع ذو الفم:

وهو نهاية غرفة صغيرة مفتوحة يدفع فيها الهواء وينساق ليخرج من شق ضيق، ويتشكل عند الفم بطن اهتزاز (عقدة ضغط).

2. المنبع ذو اللسان:

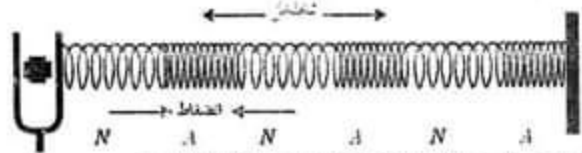
يتألف من صفيحة مرنة تدعى اللسان قابلة للاهتزاز مثبتة من أحد طرفيها تقطع جريان الهواء، لها تواتر المنبع، ويتشكل عند اللسان عقدة اهتزاز (بطن ضغط).

7. ماذا يحصل عند نقل كلا الكاشفين بين الهوائي المرسل والحاجز؟
عندما نقل كلا من الكاشفين بين الهوائي المرسل والحاجز نجد الآتي:

- توالي مستويات N يدل فيها الكاشف على دلالة صفري ومستويات للبطون A يدل فيها الكاشف على دلالة عظمى متساوية الأبعاد عن بعضها، قيمتها $\frac{\lambda}{2}$ بين كل مستويين لهما الحالة الاهتزازية نفسها.
- مستويات عقد الحقل الكهربائي هي مستويات بطون للحقل المغناطيسي وبالعكس.
- الحاجز الناقل المستوي عقدة للحقل الكهربائي وبطن للحقل المغناطيسي.

الأمواج المستقرة الطولية

تجربة 5 الأمواج المستقرة الطولية في نابض: ألبت أحد طرفي النابض بنقطة ثابتة، وألبت الطرف الآخر من النابض بشعبة هزازة جيبية مغلقة (رنانة كهربائية) ، وأشد النابض أفقياً بقوة شد مناسبة ، وأغلق القاطعة لتعمل الرنانة الكهربائية :



1. عندما تعمل الهزازة ، اشرح ماذا يحدث ، وكيف تبدو حلقات النابض ؟

عندما تعمل الهزازة تنتشر الأمواج الطولية الواردة من المنبع (الرنانة) وفق استقامة النابض لتصل إلى النهاية الثابتة، وتنعكس عنها، فتتداخل الأمواج الطولية المنعكسة مع الأمواج الطولية الواردة، ونشاهد على طول النابض حلقات تبدو ساكنة وحلقات أخرى تهتز بسعات متفاوتة فلا نتضح معالمها.

2. ماذا أسمي حلقات النابض الساكنة؟ وكيف تتكون؟

تسمى الحلقات الساكنة عقد اهتزاز $Nodes$ حيث تكون سعة الاهتزاز معدومة، وتصلها الموجة الطولية الواردة والموجة الطولية المنعكسة على تعاكس دائم

3. ماذا أسمي حلقات النابض الأوسع اهتزازاً؟ وكيف تتكون؟

الحلقات الأوسع اهتزازاً تسمى بطون الاهتزاز $Antinodes$ حيث تكون سعة الاهتزاز عظمى، وتصلها الموجة الطولية الواردة والموجة الطولية المنعكسة على توافق دائم.

4. كيف تنشأ الأمواج المستقرة الطولية في النابض؟

تتداخل الأمواج الطولية الواردة والأمواج الطولية المنعكسة.

علم ما يلي: في الأمواج المستقرة الطولية:

1. عند بطون الاهتزاز يكون الضغط ثابت (عقد ضغط) إن بطن الاهتزاز (حلقات المجاورة له تترافق دوماً في الاهتزاز إلى إحدى الجهتين - تكاد تبدو المسافات بينها ثابتة - فلا نلاحظ تضامناً بين حلقات النابض أو تخلخلاً فيها أي يبقى الضغط ثابتاً، أي أن بطون الاهتزاز هي عقد للضغط.

2. عند عقد الاهتزاز يوجد تغير في الضغط (بطون ضغط)

إن عقد الاهتزاز تبقى في مكانها - تتحرك الحلقات المجاورة على الجانبين في جهتين متعاكستين دوماً فتتقارب خلال نصف دور ثم تتباعد خلال نصف الدور الآخر، وبذلك نلاحظ تضامناً يليه تخلخلاً أي أن عقد الاهتزاز التي عندها تغير في الضغط هي بطون للضغط.

3. ماهي المسافة بين عقدي اهتزاز متتاليين أو بطني اهتزاز متتاليين، وماهي المسافة بين عقدة اهتزاز و بطن اهتزاز.

المسافة بين عقدي اهتزاز متتاليين أو بطني اهتزاز متتاليين يساوي نصف طول الموجة $\frac{\lambda}{2}$ والمسافة بين عقدة اهتزاز و بطن اهتزاز يليه يساوي ربع طول الموجة $\frac{\lambda}{4}$

الأعمدة والمزامير:

الأعمدة الهوائية المفتوحة والمغلقة:

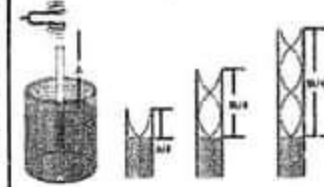
تجربة 6 أضع الأنبوب الزجاجي داخل الوعاء المملوء بالماء الساكن، وأمسك الرنانة من قاعدتها ثم أضرب بالمطرقة على إحدى شعبتها، وأقرب الرنانة المهترزة لتصبح فوق طرف الأنبوب الزجاجي المفتوح مباشرة، وارفع الأنبوب والرنانة ببطء نحو الأعلى حتى أسمع صوتاً شديداً عالياً.

1. اشرح ماذا يحدث؟ وماذا؟

يحدث تضخيم وتقوية للصوت في أثناء انتقاله عبر الأنبوب نتيجة حدوث انعكاسات متكررة داخله، فيتولد عنها أمواج مستقرة ذات نغمات صوتية واضحة، وتزداد وضوحاً في الأنابيب الضيقة.

2. ما نوع الأمواج المتولدة؟ ومتى نسمع صوتاً شديداً؟

تولد أمواج مستقرة طولية في هواء الأنبوب ونسمع صوتاً شديداً عالياً عندما يكون تواتر الرنانة يساوي تواتر الهواء في عمود الأنبوب.



ملاحظات

تحليل الأمواج المستقرة الطولية في الأنبوب مغلق الطرفين:

1. كيف تشكل الأمواج المستقرة الطولية في هواء المزمارة؟
عندما تهتز طبقة الهواء المجاورة للمنبع ينتشر هذا الاهتزاز طولياً في هواء المزمارة كله لينعكس على النهاية. تتداخل الأمواج الواردة مع الأمواج المنعكسة داخل الأنبوب لتؤلف جملة أمواج مستقرة طولية. ويتكون عند النهاية المغلقة عقدة للاهتزاز، أما عند النهاية المفتوحة يتكون بطن للاهتزاز.
2. علل الانعكاس على نهاية مفتوحة؟
إن الانضغاط الوارد إلى طبقة الهواء الأخيرة يزيحها إلى الهواء الخارجي، فتسبب انضغاطاً فيه، وتخلخلها وراءها يستدعي تهاافت هواء المزمارة ليملاً الفراغ، وينتج عن ذلك تخلخل ينتشر من نهاية المزمارة إلى بدايته، وهو منعكس الانضغاط الوارد.

قوانين المزمارة

- تقسم المزمائر من الناحية الاهتزازية إلى نوعين، ماهما؟
1. متشابه الطرفين: منبع ذو قم يتشكل عنده بطن اهتزاز ونهايته مفتوحة يتشكل عندها بطن اهتزاز، أو منبع ذو لسان يتشكل عنده عقدة اهتزاز ونهايته مغلقة يتشكل عندها عقدة اهتزاز.
 2. مختلف الطرفين: منبع ذو قم يتشكل عنده بطن اهتزاز ونهايته مغلقة يتشكل عندها عقدة اهتزاز، أو منبع ذو لسان يتشكل عنده عقدة اهتزاز ونهايته مفتوحة يتشكل عندها بطن اهتزاز.
- أولاً: المزمارة متشابه الطرفين:

استنتج بالرموز علاقة تواتر الصوت في مزمارة متشابه الطرفين من الناحية الاهتزازية؟ وبين كيف يصدر المزمارة مدرجاته المختلفة؟ واكتب دلالات الرموز؟

يكون طول المزمارة L يساوي عدداً صحيحاً من نصف طول الموجة. ... $2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots$ أي:

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

حيث: $n = 1, 2, 3, \dots$ عدد صحيح موجب، ولكن $\lambda = \frac{v}{f}$

نعوض فنجد:

$$L = n \frac{v}{2f}$$

$$f = n \frac{v}{2L}$$

▪ f تواتر الصوت البسيط الصادر عن المزمارة (Hz).

▪ L طول المزمارة (m).

▪ v سرعة انتشار الصوت في غاز المزمارة ($m \cdot s^{-1}$).

▪ n عدد صحيح موجب يمثل رتبة صوت المزمارة (مدرجات الصوت).

ولكي يصدر المزمارة مدرجاته المختلفة نزيد نفخ الهواء فيه تدريجياً كما يمكن إصدار مدرجات المزمارة ذي اللسان بتغيير طول اللسان.

ثانياً: المزمارة مختلف الطرفين:

استنتج بالرموز علاقة تواتر الصوت في مزمارة مختلف الطرفين من الناحية الاهتزازية؟ واكتب دلالات الرموز؟

يكون طول المزمارة L يساوي عدداً فردياً من ربع طول الموجة. ... $\frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \dots$

$$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$$

حيث: $n = 1, 2, 3, \dots$ عدد صحيح موجب، ولكن $\lambda = \frac{v}{f}$

$$L = (2n - 1) \frac{v}{4f}$$

نعوض فنجد:

$$f = (2n - 1) \frac{v}{4L}$$

▪ f تواتر الصوت البسيط الصادر عن المزمارة (Hz).

▪ L طول المزمارة (m).

▪ v سرعة انتشار الصوت في غاز المزمارة ($m \cdot s^{-1}$).

▪ $(2n - 1)$ يمثل رتبة صوت المزمارة (مدرجات الصوت).

